ÜBER

DIE ALLGEMEINSTEN LINEAREN SYSTEME LINEARER TRANSFORMATIONEN

BEI COÏNCIDENZ GLEICHARTIGER TRÄGER

UND

SUCCESSIVER ANWENDUNG DER TRANSFORMATION.

VON

S. KANTOR

IN PRAG.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 22. JUNI 1882.

Eine fortschreitende Untersuchung musste nothwendig dazu kommen, bei den geometrischen Transformationen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten ebenso Schaaren von Transformationen zu betrachten, wie man bei den Mannigfaltigkeiten selbst (Curven, Flächen u. s. w.) zu Schaaren derselben aufgestiegen ist. Es hindert eben nichts, als Element einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit wie einen Punkt oder eine Curve oder eine Fläche auch das mehr abstracte Gebilde, eine Transformation, zu verwenden. Man gelangt auf geometrisch strengem Wege zu solcher Verallgemeinerung, indem man von den als durch eine vollständige Individualisirung der Transformation bedingten Angaben eine oder mehrere zu machen unterlässt und eine Constantenzählung wird dann sofort ergeben, von welcher Mächtigkeit die noch mögliche Schaar ist.[1]

Für lineare Transformationen ist dieser Weg der Untersuchung in wichtigen Arbeiten der Herren Hirst und Sturm eingeschlagen und das Problem der Abzählung auf die Charakteristikentheorie zurückgeführt und gelöst worden.[2]

Aber es schliesst sich eine ganz andere Richtung der Untersuchung an, welche die beiden Domänen der betreffenden Transformationen in dieselbe Mannigfaltigkeit verlegt und so das Verhalten der Elemente derselben gegen Schaaren von Transformationen in einander zu ihrem Gegenstande hat. Da tritt auch noch für die

[1] Transformationsschaaren meist von speciellem Charakter (wie Conformität, Symmetrie u. s. w.) in ∞^m-Mächtigkeit werden in der neueren Functionentheorie zwar vielfältig benützt, aber es wird ohne jedes geometrische Eingehen lediglich mit dem Begriffe der Schaar gearbeitet.

[2] Hirst: On correlation between two planes (Proc. of the Lond. Math. Soc., Vol. V, p. 40), auch Ann. di Mat., ser. II, VI, p. 260. — On correlation in space (Proc. of the Lond. Math. Soc., VI., Nr. 76). — Note on the correlation of two planes (Vol. VIII). — Sturm: Das Problem der ebenen (Math. Ann. I) und räumlichen Projectivität (Math. Ann. VI und XV). — Das Problem der Collineation (Math. Ann. X). — Über correlative Bündel (Proc. of the Lond. Math. Soc., Vol. VII, Nr. 99, 100, auch Math. Ann. XII. Bd.).

Abzählungsprobleme eine neue Kategorie von Bedingungen auf, die sich nämlich auf die successiven Transformirten einzelner Elemente oder niederer in der Gebietsmannigfaltigkeit enthaltenen Mannigfaltigkeiten bezieht. Während ferner bei Verschiedenheit der Räume die Collineation — und auf Collineationen erstrecken sich einstweilen nur die vorliegenden Untersuchungen — nur eine Discriminante besitzt, die ihr Exceptionellwerden charakterisiren kann, bekommt sie bei Coïncidenz der R_m m absolute Invarianten und bietet demgemäss zu den verschiedensten Abzählungsaufgaben Anhalt, die sich noch compliciren, wenn man fremde Mannigfaltigkeiten hinzunimmt. Sind aber die beiden Räume gleichartig (die Transformationen Collineationen), so knüpfen sich an die sich selbst entsprechenden Elemente mannigfaltige neue Verwandtschaften, in denen die Hilfsmittel für die Lösung sämmtlicher vorhin erwähnten Probleme liegen, die mit den bisherigen Methoden kaum zu erledigen sein dürften. Ich habe auf lineare Transformationen gleichartiger Räume bezügliche nach dieser Richtung zielende Resultate in einer Abhandlung veröffentlicht, die sich mit dem fundamentalen Netze, beziehungsweise Gebüsche linearer Transformationen (mit drei, respective vier festen Punktepaaren) beschäftigt. Auf diesem Wege sind auch Arbeiten entstanden, welche das damit verwandte, beziehungsweise vorbereitende Problem der cyclischen Gruppen in einer festen Transformation beliebigen Grades behandeln.[3]

Die Ideen der ersterwähnten Arbeit lassen sich nun vielfach vervollkommnen und ergänzen, und ich habe die Darlegung dieser neuen Resultate in der vorliegenden Abhandlung unternommen. Dass die Sache nun auch nach anderen Richtungen hin eine gewisse Tragweite besitzt, wird man an einzelnen Stellen erkennen. Ich hebe die Anwendungen in A) III. *a)*, *d)*, sowie die Andeutungen in *e)*, *f)*, endlich B) I. 2, II. 5, III. 13 hervor. Doch auch unter dem Eingangs erwähnten Gesichtspunkte strebt die Arbeit weiterzuführen. In A), IV) und B) III habe ich nämlich das allgemeinste lineare ∞^m-System im R_m behandelt, auch wenn die Träger nicht coïncidiren. Bei dem linearen Systeme kann man auch den anderen Weg zur Herstellung benützen, dass man einzelne Transformationen zur Constituirung des Systems heranzieht. Mit Hilfe der singulären Transformationen und covarianter Verwandtschaften hoffe ich, von dieser Theorie, die in der Analysis die lineo-linearen Connexe liefert, eine Reihe neuer Sätze und eine zusammenhängende Darstellung gegeben zu haben, welche auch einige bisherige, manchmal unbewusste Anfänge übersichtlich verwerthet.

Was die Darstellung anlangt, suchte ich vor Allem den Zusammenhang der Sache klar zu machen. Entwicklungen, die nur Illustrationen vulgärer Schlussreihen sind, habe ich unterdrückt.

A) Lineare Transformationen in der Ebene.

I.

Das Netz von Transformationen mit drei festen Punktepaaren.

1. Entsprechen sich unveränderlich drei feste Punktepaare aa', bb', cc', so ist ein Collineationsnetz bestimmt. Projectivische Methoden ergaben in der citirten Abhandlung das Resultat: Man kann einem festen Punkte p der Ebene n^2 Punkte p' entsprechen lassen, um nach n Transformationen in einen vorgegebenen Punkt $p^{(n)}$ zu gelangen. Die n^2 Punkte sind eine verbundene Gruppe in einem Netze von Curven n. Ordnung Ψ_n, welches, wie folgt, construirt wird:

Das Netz Ψ_2 ist durch die Geradenpaare bc, $b'c'$; ca $c'a'$; ab, $a'b'$ constituirt. Man suche in der Verwandtschaft p'—p'' die Ψ_2, welche den Geraden bc, ca, ab entsprechen, A_2, B_2, Γ_2, constituire ein Netz von Ψ_3 durch die drei Curven $b'c'$, A_2; $c'a'$, B_2; $a'b'$, Γ_2, suche dann hieraus die Curven, welche gemäss der Verwandtschaft p'—p''' zu den bc, ca, ab gehören, A_3, B_3, Γ_3 u. s. w., endlich in dem Netze der Ψ_{n-1} jene Curven A_{n-1}, B_{n-1}, Γ_{n-1} die in p'—$p^{(n-1)}$ die bc, ca, ab ergeben, so constituiren die drei Curven

$$b'c',\ A_{n-1};\ c'a',\ B_{n-1};\ a'b',\ \Gamma_{n-1}$$

---

[3] Über successive lineare Transformationen. LXXXII. Bd. der Wiener Sitzungsberichte, p. 139. Ferner: Wie viele cyclische Gruppen gibt es in einer quadratischen Transformation der Ebene? Ann. di Mat. X, p. 64. Beantwortung derselben Frage für Cremona'sche Transformationen. Ann. di Mat. X, p. 71. Sur le nombre des groupes cycliques dans une transformation de l'espace. C. R. 17. mai 1880. Sur les transformations linéaires successives dans un espace à r dimensions. Bulletin de la Soc. math. de France, 21. mai 1880.

das Netz der Ψ_n. Den $p^{(n)}$ einer Geraden entsprechen p' einer Ψ_n. Den p' einer Geraden entsprechen $p^{(n)}$ einer Curve n^{ter}. Ordnung, welche die der Übergangscurve des Systemes p' entsprechende Curve in $3(n-1)$ Punkten berührt und rational ist. Daher:

In jedem Büschel des Netzes sind n Collineationen enthalten, welche $p^{(n)}$ auf eine Gerade bringen.

Die mit p durch das Netz Ψ_n verbundenen n^2-1 Punkte führen ihn nach n Transformationen in sich zurück. Die Netze Ψ_n haben die Eigenschaft, dass, wenn m ein Factor von n, die mit p in Ψ_m verbundenen Punkte auch mit p in Ψ_n verbunden sind.

2. Es gibt $n^2\left(1-\frac{1}{f_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{f_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{f_\nu^2}\right)=\varphi_\nu^{(2)}$ Punkte p', welche p erst nach n Transformationen in sich zurückführen. $[n=f_1^{m_1}f_2^{m_2}\ldots f_\nu^{m_\nu}.]$

3. Verlegt man p nach a', so zeigt jetzt die Verwandtschaft $p'-p^{(n)}$, dass immer $n-1$ Punkte der p-Gruppe auf die Gerade aa' fallen (l. c. Art. 20), die nur eine cyclische Doppelgerade, aber keine periodischen Collineationen hervorrufen. Hieraus:

Es gibt nur $\varphi_{\nu\,n}^{(2)}-3\,\varphi_{\nu\,n}^{(1)}$ Collineationen, die jeden Punkt zu seinem n. Transformirten machen, das heisst die Ebene in n-punktige Cyclen theilen.

4. Die dem p in jenen Collineationen des Netzes, von denen p eine Doppelgerade trägt, entsprechenden p' liegen in einer Curve dritter Ordnung, welche p zum Doppelpunkt und dort die von ihm ausgehenden Doppelgeraden als Tangenten besitzt.

5. Zwischen den zwei Punkten (Geraden) des ersten Systemes entsprechenden Punkten (Geraden) des zweiten Systemes besteht eine Collineation mit den Doppelpunkten $a'b'c'$ [1]. Zwischen den einem Punkte p und einer Geraden δ des ersten Systemes entsprechenden Punkten p' und Geraden δ' des zweiten Systemes besteht eine quadratische Verwandtschaft, welche $a'b'c'$ sowohl zu Hauptdreieck als Hauptdreiseit hat. (Vgl. diese Abh. A). III. 9.)

6. Jede Netzcollineation hat ein Doppelpunktstripel. Dieselben stellen eine involutorische Dreitheilung der Ebene dar.

Nun sind in einer Collineation die Strahlbüschel a, a' projectiv, so dass ab, $a'b'$ und ac, $a'c'$ sich entsprechen und erzeugen daher einen Kegelschnitt A durch a, a', $(ab, a'b')=\chi$, $(ac, a'c')=\psi$, der für das ganze Netz nur in dem durch $aa'\psi\chi$ bestimmten Büschel variirt. Bewegt sich p' auf einem Strahle durch a', so bleibt der Punkt $(pa, p'a')$ und mit ihm der Directionskegelschnitt A fest. Gleiches gilt für B. Die Schnittpunkte der den Strahlen $p'a'$, $p'b'$ entsprechenden A, B sind die drei Doppelpunkte der durch pp' individualisirten Collineation. Eine Ortsgerade von p' macht die Strahlbüschel $p'a'$, $p'b'$ perspectiv und die A, B projectiv. Von deren Erzeugnisse 4. Ordnung sondert sich, da in beiden Büscheln dem Strahle ab die Kegelschnitte $(a'b', a'c')$, $(a'b', bc)$ entsprechen, die Gerade ab ab und es bleibt eine Curve 3. Ordnung L_3 durch $abc\varphi\psi\chi$ übrig, wo φ, ψ, χ die Schnittpunkte $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$, $(ab, a'b')$ bedeuten. Daher:

Die Verwandtschaft zwischen den Doppelpunkten und den Transformirten p' ist 3—1-deutig vom 3. Grade. Den Geraden des Systems p' entsprechen L_3 durch $abc\varphi\psi\chi$. In dem Netze dieser Curven sind drei Büschel zerfallende enthalten, nämlich bc, ca, ab je mit den Kegelschnitten der Büschel $aa'\psi\chi$, $bb'\chi\varphi$, $cc'\varphi\psi$. Die Fundamentalgeraden für a, b, c sind $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ für φ, ψ, χ drei Gerade durch a', b', c', welche den Kegelschnitten $aa'\varphi\psi\chi$, $bb'\varphi\psi\chi$, $cc'\varphi\psi\chi$ entsprechen. a', b', c' sind Fundamentalpunkte für p'.

Durchläuft ein Doppelpunkt eine Gerade g und nimmt man ihn durch A, B auf, so sind dieselben zweizweideutig auf einander bezogen. Von dem Erzeugnisse bleibt nach Absonderung von $a'b$, und zweimal g eine Curve fünfter Ordnung durch $a, b, c, a', b', c', \varphi^2, \psi^2, \chi^2$: Genau der Verwandtschaft unter den Doppel-

[1] Cf. Schröter, Cr. Borch. J., Bd. 62: Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per octo data puncta construendam spectantis solutio nova.

punkten entsprechen den Punkten einer Geraden γ die Punkte einer Γ_5 durch $abc\,a'b'c'\varphi^2\psi^2\chi^2$, die noch einen Doppelpunkt in dem Ergänzungspunkte des auf γ liegenden Paares hat. Für diese Tranformation $\mathfrak{T}$ sind φ,ψ,χ doppelte, $aa'\,bb'\,cc'$ einfache Fundamentalpunkte, so dass, wenn γ durch einen der φ,ψ,χ geht, einer der Kegelschnitte durch (φ,ψ,χ,a,a'), (φ,ψ,χ,b,b') $(\varphi,\psi,\varphi,c,c')$ und wenn γ durch $a,a',..$ geht, eine Gerade $bc, b'c',..$ von der Γ_5 abfällt. Dabei besteht zwischen den Punkten von bc und den unendlich nahen Punkten von a eine zwei-eindeutige Verwandtschaft, festgelegt durch die Schnittpunktepaare und die a-Tangenten der Kegelschnitte A. So entspricht b und der Schnittpunkt mit $a'c'$ der Tangente ab, c und der Schnittpunkt mit $a'b'$ der Tangente ac.

Die Jacobiana der L_3 zerfällt in bc, ca, ab und eine Curve dritter Ordnung $\mathfrak{H}_3$ durch φ,ψ,χ. Diese Coïncidenzcurve enthält die in ihren Collineationen als zwei zusammengerückte geltenden Doppelpunkte. Die γ, Γ_5 und $\mathfrak{H}_3$ haben drei gemeinsame Punkte. — Ebenso leitet man die dualen Transformationen unter den Doppelgeraden sowie zwischen den Doppelgeraden und den Transformirten einer festen Geraden ab.[1]

7. Mit Hilfe dieser Verwandtschaften kann die Frage erledigt werden: Die Annahme eines Doppelpunktes t bestimmt die Collineation und damit die dritte Doppelgerade τ. Welche (gewiss rationale) Abhängigkeit besteht zwischen t,τ?

Ich nehme eine feste Hilfsgerade γ. Durchläuft τ ein Strahlbüschel, so beschreibt γ' eine Curve dritter Classe, welche $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ berührt, p' dann nach Art. 5 eine Curve dritter Ordnung durch $a'b'c'$ und das Doppelpunktstripel nach Art. 6 eine Curve sechster Ordnung. Dieselbe zerfällt nothwendig in die gesuchte Curve und in jene, auf der sich die in den Doppelgeraden selbst auftretenden Doppelpunkte vorfinden. Die letztere ist von der vierten Ordnung, daher die erstere ein Kegelschnitt. Bewegt sich aber t auf einem Kegelschnitte A (des vorigen Artikels), so erscheint auf diesem eine cubische Involution, die τ umhüllen einen Kegelschnitt. Jeder A, ebenso B, C muss demnach zwei Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft enthalten; diese sind φ, ψ, χ. Im Ganzen:

In dem Netze aa', bb', cc' besteht zwischen den Doppelpunkten und den gegenüberliegenden Doppelgeraden eine quadratische Verwandtschaft T mit dem Hauptdreiecke φ, ψ, χ und dem Hauptdreiseite ab', bb', cc'. (Vergl. A. V. 3.)

II.

Ein covariantes Curvenbüschel sechster Ordnung. Das Problem der Aufsuchung von Transformationen mit bestimmten covarianten Eigenschaften. Periodische Collineationen.[2]

1. Man weiss, dass Cayley vor Langem zuerst auf die Curve aufmerksam gemacht hat, aus deren Punkten drei Paare aa' bb' cc' durch Strahlenpaare einer quadratischen Involution gesehen werden. Diese Curve ist aber nur ein specieller Fall einer anderen, nämlich:

Der Ort der Punkte, von denen aus die drei Punktepaare aa', ab', cc' durch drei Strahlenpaare projicirt werden, so dass die durch sie bestimmte Projectivität ein characteristisches Doppelverhältniss constanten Werthes D hat, ist eine Curve sechster Ordnung mit neun Doppelpunkten $a,a',b,b',c,c',\varphi,\psi,\chi$.[3]

Die allen D entsprechenden Curven bilden ein Büschel, in dem die zweimal gezählte Cayley'sche Curve $(D = -1)$ und die Geraden bc', $b'c'$; ca, $c'a'$; ab, $a'b'$ $(D = 0, \infty)$ vorkommen. Die

---

[1] Und zwar kann man hier noch diese Gerade in einem beliebigen der beiden Systeme annehmen.

[2] Ich habe den Inhalt von II. schon am 17. Juni 1880 der Société mathématique de France mündlich mitgetheilt, ohne ihn seither zu veröffentlichen.

[3] Einen rein geometrischen Beweis kann man aus der citirten Abhandlung 21 entnehmen. Für die periodische Projectivität mit dem Index n ist dort streng geometrisch $3\varphi^1_{(n)}$ abgeleitet worden, was, wenn man das Zerfallen in $\frac{1}{2}\varphi^{(1)}_n$ Curven beachtet, die Zahl 6 gibt.

Gleichung der Curve ist, auf abc bezogen,

$$(a_1 x_1 \sigma_b \sigma_c + b_2 x_2 \sigma_c \sigma_a + c_3 x_3 \sigma_a \sigma_b - \sigma_a \sigma_b \sigma_c)^2 = \frac{(D+1)^2}{D} \Delta x_1 x_2 x_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 ,$$

wenn

$$\sigma_a = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$
$$\sigma_b = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$
$$\sigma_c = b_2 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

die Gleichungen von $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ sind und Δ ihre Determinante ist.

2. Für das Folgende ist nun dieses Curvenbüschel von fundamentaler Bedeutung. In jeder Collineation trägt ein Doppelpunkt eine Strahlenprojectivität, deren characteristisches Doppelverhältniss in die absolute Invariante der Collineation eintritt. Das Product der drei Doppelverhältnisse ist $\lambda\mu\nu = 1$. Die Doppelpunkte der Collineationen mit dem Doppelverhältnisse D erfüllen die Curve R_D sechster Ordnung des vorigen Artikels.

Hat die Collineation zwei coïncidente Doppelpunkte, so coïncidiren im dritten die Doppelstrahlen und bewirken dort $D = 1$. Die der $\mathfrak{H}_3$ vermöge $\mathfrak{T}$ (Art. 6, I) conjugirte Curve muss die Doppelpunkte coïncidenter Doppelstrahlen enthalten, in denen $D = 1$, ist also die R_1. Die $\mathfrak{H}_3$ und R_1 berühren sich überall, wo sie sich begegnen, also in sechs Punkten $(\rho)_6$:

„Es gibt sechs Collineationen des Netzes, für welche alle drei Doppelpunkte coïncidiren.

3. Die der R_D in $\mathfrak{T}$ conjugirte Curve hat die Ordnung $6.5-3.4-6.2 = 6$, in φ, ψ, χ Doppelpunkte und auf R_D fernere 24 Punkte, von denen 12 auf Schnittpunkte mit $\mathfrak{H}_3$ entfallen. Die übrigen 12 theilen sich in sechs Paare t_e mit je gleichem D in ihren Collineationen. Also:

Es gibt sechs Collineationen des Netzes, in denen zwei Doppelpunkte Projectivitäten gleichen characteristischen Doppelverhältnisses λ tragen."

Bezeichnet man sie, da aus der Gleichheit der λ die Existenz in sich transformirter Kegelschnitte folgt,[1] als projective Rotationen, so gilt:

Das Netz enthält sechs projective Rotationen mit gegebenem Drehwinkel.

Die der R_D conjugirte R' hat in den zu den t_e-Paaren conjugirten t Doppelpunkte, die wieder in einer R, nämlich in $R_{\frac{1}{D^2}}$ sind. R'_D und $R_{\frac{1}{D^2}}$ treffen sich in ferneren zwölf Punkten, welche Collineationen mit den Doppelverhältnissen $D, D^2, \frac{1}{D^3}$ angehören. R'_D und $R'_{\frac{1}{D^2}}$ aber schneiden sich in zwölf Punkten t_e der R_D und in ferneren zwölf Punkten, welche auf $R_{\frac{1}{D^3}}$ liegen.

4. Nach Art. 3 enthält R_D sechs Punkte t mit Ergänzungspaaren t_e. Die Ortscurve aller dieser t habe die Ordnung n und in φ, ψ, χ je einen x-fachen Punkt. Da sie sich durch die Verwandtschaft mit den Doppelgeraden (Art. 7) in eine Curve derselben Classe umsetzen muss, gilt die Gleichheit

$$2n - 3x = n.$$

Ferner gilt, weil eben R'_D von dem Orte nur in sechs freien Punkten getroffen wird (Doppelpunkten von R'_D)

$$6n = 3.2x + 12$$

Somit ist $x = 1$, $n = 3$. Hieraus:

Die Drehungscentra der im Netze enthaltenen projectiven Rotationen erfüllen eine Curve dritter Ordnung durch φ, ψ, χ und die anderen sechs Schnittpunkte der bc, ca, ab mit den $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ durch die $(\rho)_6$ und die sechs Doppelpunkte der beiden Collineationen mit dem Periodicitätsindex 3. Diese Curve J_3 ist der Ort der Doppelpunkte aller R'_D.

---

[1] Cf. „Bemerkung über lineare Transformationen." Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, LXXXII. Bd., II. Abth., p. 35.

Von den achtzehn Schnittpunkten mit R_D fallen sechs in φ, ψ, χ. sechs ergänzen Paare t_e mit dem Doppelverhältnisse $+\frac{1}{\sqrt{D}}$, sechs ebenso viele Paare mit $-\frac{1}{\sqrt{D}}$. Wird die Curve in der Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ umgesetzt, so folgt:

„Die Doppelpunktspaare mit gleichem Doppelverhältnisse sind in einer Curve neunter Ordnung durch $\varphi^3\psi^3\chi^3$ $(\rho)_6$ und durch die Doppelpunkte der zwei periodischen Collineationen mit dem Index 3 enthalten.“

Die Verbindungslinien dieser Paare umhüllen eine Curve dritter Classe, die der J_3 durch die Transformation aus I. Art. 7 entspricht.

5. R_λ und R'_μ begegnen sich ausser in φ, ψ, χ in vierundzwanzig Punkten. Von diesen müssen zwölf auf die Collineationen $\left(\lambda, \mu, \frac{1}{\lambda\mu}\right)$ und zwölf auf $\left(\lambda, \frac{1}{\mu}, \frac{\mu}{\lambda}\right)$ entfallen:

Es gibt zwölf Collineationen mit gegebenen charakteristischen Doppelverhältnissen λ, μ, ν (wo $\lambda\mu\nu = 1$ sein muss). Sind aber zwei davon gleich, so gibt es nur sechs (Art. 3.)

6. Diese Betrachtungen dienen zur Aufsuchung der periodischen Collineationen, wenn man die Beziehungen ihrer Doppelverhältnisse anderweitig gefunden hat; wir aber schlagen den umgekehrten Weg ein.

Für eine periodische Collineation mit dem Index n müssen die Doppelverhältnisse λ, μ, ν Einheitswurzeln solcher Grade sein, deren kleinstes gemeinsames Vielfache n ist. Zunächst ist der gemeinsame Werth n möglich. Da es $\varphi^1_{(n)}$ primitive Einheitswurzeln n^{ten} Grades gibt, ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ aber dasselbe Resultat geben, so hat man $l = 6.\frac{1}{2}\varphi^1_{(n)}$ solcher Collineationen im Netze. Die Anzahl aller periodischen Collineationen fand ich in der mehrerwähnten Abhandlung mit Hilfe der Ψ_n ohne Benützung der D als $\varphi_n^{(2)} - 3\varphi_n^{(1)}$ (s. I. Art. 3), daher ist die Anzahl für verschiedene Doppelverhältnisse $\varphi_n^{(2)} - 6\varphi_n^{(1)}$. Von diesen sind je zwölf im Netze enthalten, es gibt ihrer also $\frac{1}{12}\varphi_n^{(2)} - \frac{1}{2}\varphi_n^{(1)}$. Werden hiezu die $\frac{1}{2}\varphi_n^{(1)}$ gerechnet, welche Paaren gleicher D entprechen, so folgt:

Es gibt $\frac{1}{12}\varphi_n^{(2)}$ durch die Werthe der charakteristischen Doppelverhältnisse wesentlich unterschiedene periodische Collineationen mit demselben Index n.

Dabei sind die Collineationen $(1, \varepsilon_n^\mu, \varepsilon_n^{n-\mu})$ nicht eingerechnet. — Ich erlaube mir hier seines interessanten Ergebnisses wegen einen Excurs.

Alle Transformationen, in denen die charakteristischen Doppelverhältnisse Einheitswurzeln bestimmter Grade sind, haben die Eigenschaft, dass sie paarweise angewendet eine Transformation derselben Art ergeben.

Ist $\lambda = \varepsilon_\lambda$, $\mu = \varepsilon_\mu$, (wo die ε primitive Einheitswurzeln der betreffenden Grade), so folgt:

Die Transformationen $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu$ bei festen Doppelpunkten bilden eine Gruppe von $\varphi_\lambda^{(1)} . \varphi_\mu^{(1)}$ Elementen. Die Gruppe ist zweigliederig nach der Terminologie des Herrn Lie und kann erzeugt werden durch $1, \varepsilon_\mu$; $\varepsilon_\lambda, 1$.

Werden nun für λ, μ alle Combinationen genommen, welche n als kleinstes gemeinsames Vielfache ergeben, so hat man in $\Sigma\varphi_\lambda\varphi_\mu$, wo die Summe über alle solchen Combinationen erstreckt ist, die sämmtlichen periodischen Collineationen mit dem Index n vertreten. Alle diese Transformationen bilden wieder eine Gruppe in welcher die obigen als Untergruppen enthalten sind. Zugleich hat man die Idendität gefunden:

$$\Sigma\varphi^1_{(\lambda)} \cdot \varphi^1_{(\mu)} = \frac{1}{4}\varphi_n^{(2)}\ [1]$$

owil jede Collineation dreimal in der Summe auftritt.

7. Mit Hilfe der D-Örter und der in den Artikeln 6, 7. I untersuchten Verwandtschaften kann man den Ort der Doppelpunkte aller Collineationen finden, in denen λ, μ, ν einer algebraischen Beziehung $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$

[1] Diese Identität gehört zu Relationen der Art, wie sie neuerdings von Herrn G. Cantor, Math. Ann. XVI. Bd., pag. 582 und von Lipschitz, C. R., Dec. 1879 gegeben wurden.

Genüge leisten. Da man aber jede covariante Eigenschaft einer Collineation durch eine Beziehung zwischen λ, μ, ν ausdrücken kann, so lassen sich nun alle auf covariante Örter dieses Collineationsnetzes bezüglichen Probleme lösen. So kann man, um ein Beispiel zu erwähnen, nach den Collineationen fragen, welche gewisse Transformirte von p und in Folge dessen jedes Punktes der Ebene gewissen Bedingungen entsprechend machen. Ich habe diesen Fall in der citirten Abhandlung untersucht.[1] Dabei benöthigt man noch den folgenden Satz:

Der Ort der Doppelpunkte, welche zwei Doppelgeraden mit Doppelverhältnissen λ, μ aussenden, die ein bestimmtes gegenseitiges Verhältniss k besitzen, ist eine Curve sechster Ordnung. Alle diese bilden ein Büschel und haben in den Schnittpunkten von bc, ca, ab mit $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ neun Doppelpunkte. Dazu gehört doppelt gezählt die Curve J_3.

III.

Einige bemerkenswerthe specielle Lagen für die festen Punktepaare des Netzes.

Vor Übergang zum allgemeinsten Netze möchte ich auf einige Anwendungen hinweisen, in denen sich deutlich die Fruchtbarkeit dieses Gebietes für die Auffindung neuer geometrischer Thatsachen erweist.

a) Die Geraden aa', bb', cc' convergiren gegen s. Unter den L_3 (Art. 6, 1) tritt jetzt noch ein Büschel zerfallender Curven auf: die Gerade $\varphi\psi\chi$ mit dem Kegelschnittbüschel $abcs$. Im Systeme d' entspricht ihm das Strahlbüschel s. Die $\mathfrak{H}_3$ zerfällt in $\varphi\psi\chi$ und einen Kegelschnitt, jenen covarianten Kegelschnitt der Configuration $abca'b'c'\varphi\psi\chi s$, nach welchem diese sich selbst polar ist. Für die conjugirte Transformation sind $\varphi\psi\chi$ nur einfache Fundamentalpunkte und die conjugirten Curven der Geraden sind vierter Ordnung durch alle zehn Punkte mit einem variablen Doppelpunkte.[2]

Die Transformation T wird hier linear, weil die Hauptpunkte φ, ψ, χ allineirt sind und ebenso die Hauptgeraden gegen einen Punkt (s) convergiren. Sie ist involutorisch, da den zwei Doppelgeraden von t Doppelpunkte von τ entsprechen. Daher:

Die Verwandtschaft zwischen den Doppelpunkten und den gegenüberliegenden Doppelgeraden ist die Polarität des covarianten Kegelschnittes. Die Doppelpunktstripel sind conjugirte Tripel des Polarsystems und müssen ausserdem mit den sechs Punkten eines in der Configuration enthaltenen Vierseites die Basis eines Büschels L_3 bilden.

[Hieraus folgt der geometrische Satz:

„Verbindet man einen Punkt mit jedem in der Configuration enthaltenen vollständigen Vierecke,[3] so schneiden sich diese fünf Curven in zwei weiteren Punkten.“ — Aus der Beschaffenheit der Configuration schliessen wir so den interessanten Satz:

Ist ein vollständiges Viereck $defg$ einem vollständigen Vierseite $aa'bb'cc'$ so umgeschrieben, dass de, df, dg, fg, eg, ef, ab mit a, b', c, a', b, c', c allineirt sind,[4] so hat jeder dem ersteren umgeschriebene zu jedem dem letzteren eingeschriebenen Kegelschnitte solche Lage, dass ∞^1 Tripel dem ersten ein- und dem zweiten umgeschrieben sind. Alle möglichen Contactpunkte erfüllen den covarianten Kegelschnitt.]

Von den R_D enthält eine s. Da die Strahlenpaare sa, sa'; sb, sb': sc, sc' resp. coïncidiren, ist ihre Projectivität eine Identität, die Curve R ist somit R_1. Sie kann aber sa weder anderwärts schneiden noch in s berühren, da sie auch sb, sc berühren müsste, s ist also ein Doppelpunkt:

„Es gibt eine Curve sechster Ordnung, welche in den zehn Punkten dieser Configuration $(3, 3)_{10}$ Doppelpunkte besitzt. Sie berührt (als conjugirte Curve) den covarianten Kegelschnitt in sechs Punkten und hat die Bedeutung, dass aus jedem ihrer Punkte irgend zwei perspective Punktetripel der Configuration durch eine Projectivität mit $D = 1$ projicirt werden. Die bezüglichen Doppelgeraden berühren den covarianten Kegelschnitt.“

---

[1] Vergl. für die Definition solcher Collineationen: Clebsch und Gordan: „Über biternäre Formen mit contragredienten Variabeln. §. 13.“ Math. Ann. Bd. I, pag. 359.

[2] Dieser Doppelpunkt ist der Pol der Geraden nach dem covarianten Kegelschnitte.

[3] Cf. „Über eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume.“ (Sitzber. der Wiener Akademie LXXX. Bd. II. Abth., pag. 6.)

[4] Cf. „Die Configurationen $(3, 3)_{10}$“ (Sitzungsber. der Wiener Akademie, LXXXIV. Bd II. Abth., pag. 1291. ll.)

b) a, a' coïncidiren.

Resultate: Die Curven L_3 haben in a einen Doppelpunkt. — p' und die dritte Doppelgerade δ stehen in quadratischer Verwandtschaft, das Hauptdreiseit der Doppelgeraden ist bc, bb', cc', das Hauptdreieck von p' ist $a'b'c'$. — Ebenso besteht zwischen der Doppelgeraden und der einer Geraden γ entsprechenden γ' eine quadratische Verwandtschaft mit den Hauptdreiseiten $abc, a'b'c'$. — Die conjugirte Verwandtschaft unter den Doppelpunkten ist eine involutorische vom dritten Grade mit $\varphi^2\ bcb'c'$ als Fundamentalpunkten.

Alle diese Ergebnisse gehen aus I durch Anwendung der gehörigen Specialisirungen hervor.

c) aa' und bb' coïncidiren.

Dieser Fall kann ein kinematisches Interesse bieten, wenn man a, b in die Kreispunkte verlegt, wodurch die Ähnlichkeit der Systeme gewahrt bleibt.

d) aa', bb', cc' coïncidiren.

Es bleibt in diesem Falle nur übrig, die Curven Ψ_n zu untersuchen.

1. Soll pa nach n Transformationen in $p^{(n)}a$ übergehen, so muss der Strahl $p'a$ einer gewissen Gruppe einer cyclisch-projectiven Involution n. Grades angehören, mit ab, ac als Doppelstrahlen. Demgemäss:

„Je n Strahlen einer cyclisch-projectiven Gruppe bezüglich ab, ac schneiden die n Strahlen einer cyclisch-projectiven Gruppe bezüglich bc, ba in n^2 Punkten p', welche p in $p^{(n)}$ überführen."

Fällt $p^{(n)}$ mit p zusammen, so erhält man nach Abzug der auf den Strahlen pa, pb, pc gelegenen jene p', welche dem p in den periodischen Collineationen des Netzes entsprechen. (Vergl. I. 3.) Diese Gruppen von n^2 Punkten, zu denen hiemit jedenfalls ein Eingangspunkt gegeben ist, haben verschiedene besondere Eigenschaften, auf die einzugehen hier nicht der Platz wäre.

Aber ich gelange zu dem Netze Ψ_n. Unter diesen Curven sind die drei ∞^1-Schaaren von Strahlengruppen und auch die drei je n-fach zählenden Geraden bc, ca, ab die den drei Strahlbüscheln a', b', c' des Systems $p^{(n)}$, respective den drei Geraden bc, ca, ab entsprechen. Ein Strahl durch a kann eine Ψ_n nur auf bc und dort nur n-punktig berühren. Daraus folgt dann:

Die Ψ_n haben sämmtlich Hesse'sche Curven, welche in das $(n—2)$-fach gezählte Geradentripel bc, ca, ab zerfallen.

Ich will sie trilaterale Curven nennen. Je zwei trilaterale Curven gleicher Ordnung schneiden sich in einer cyclischen Configuration. Einen speciellen Fall bilden die Kegelschnitte, die zum Dreiecke abc conjugirt sind und die äquianharmonischen Curven dritter Ordnung, die abc zum Hesse'schen Dreiseite haben.[1]

2. Die zu pa bezüglich der Strahlengruppen in a genommenen letzten Polaren sind projectiv zu den Strahlengruppen selbst. Für die n-fachen ab, ac und die Gruppe des pa sind ab, ac, pa diese Polaren; aber für diese Strahlengruppen als Ψ_n sind auch ab, ac, pa die entsprechenden Geraden G im Systeme $p^{(n)}$ und die G sind projectiv zu den zugehörigen Ψ_n, somit ist die Gerade G mit der entsprechenden Polaren identisch. Es folgt: Der Punkt $p^{(n)}$ ist der Convergenzpunkt der geraden Polaren von p nach den sämmtlichen Ψ^n, welche durch die n^2 Punkte p' gehen, die p nach $p^{(n)}$ bringen und:

Die Ψ^n des Systemes p', welche den Geraden G des Systemes $p^{(n)}$ entsprechen, sind jene, in Bezug auf welche G die gerade Polare von p ist.

Es gibt aber zu jeder Geraden G in Bezug auf eine Ψ_n n^2 Pole p und es kann gezeigt werden, dass auch diese eine cyclische Configuration bilden.[2] Man kann ferner ebenso, wie cyclische Punktconfigurationen auch cyclische Geradenconfigurationen (mittelst der Schnittpunkte auf bc, ca, ab) construiren. Überträgt man diese n^2 Geraden für dasselbe p in n^2 Ψ_n, so erhält man wieder eine Gruppe, die wir eine cyclische Configuration von Ψ_n nennen wollen. Es kann nun gezeigt werden, dass bezüglich aller dieser Ψ_n alle n^2 G dieselben n^2 Pole haben.

[1] Man wird es natürlich finden, dass ich gleich im Anfange dieser Untersuchungen — Sommer 1879 — wo ich von dem besonderen Falle der drei Doppelpunkte ausgieng, auf jene n^2-punktigen Gruppen stiess. Aber ich hielt es für wichtiger, das Gebiet nach zwei anderen Richtungen auszudehnen, als in das Detail dieser Figuren zu dringen. Herr G. Veronese kam bei einer speciellen Aufgabe zu diesen Gruppen und verfolgte sie an sich Atti della R. Acc. dei Lincei 1881.

[2] Man benützt zum Beweise hauptsächlich das Zerfallen der Hesse'schen Curve.

Man hat also eine cyclische Configuration von n^2 Punkten, eine von n^2 Geraden, eine von n^2 Ψ_n. Die gerade Polare jedes der Punkte bezüglich jeder der Ψ_n ist eine von den n^2 Geraden.[1]

Ferner lässt sich zeigen, dass die zu einer Geraden für dasselbe p gehörigen successiven $\Psi_2, \Psi_3, \ldots \Psi_{n-1}$ die successiven Polaren von p nach Ψ_n sind.

3. Ich führe nun die folgenden Sätze an, denen nicht so sehr vermöge ihrer Herleitung als vermöge ihres Bestehens eine gewisse Bedeutung zukommt:

Nimmt man die geraden Polaren von den Punkten einer trilateralen Curve Ψ_n bezüglich einer anderen Ψ_n, so erhält man als Einhüllende neuerdings eine trilaterale Curve Ψ_n. Man nennt diese die $(n-1)$. Polarcurve der ersten Ψ_n nach der zweiten (Cremona, Introd. 104. *c*). Und nun gilt:

I. Transformirt man eine n^2-geradige Configuration aus dem Systeme $p^{(n)}$ in das System p', so erhält man eine Configuration von $n^2 \Psi_n$, welche die Eigenschaft hat, dass jede ihrer Ψ_n auf eine der übrigen bezüglich selbst ihre $(n-1)$. Polarcurve ist.

II. Transformirt man eine $(n-1)^2$-geradige Configuration aus dem Systeme $p^{(n)}$ in das System p', so erhält man eine Configuration von $(n-1)^2$ Curven Ψ_n, welche die Eigenschaft hat, dass jede ihrer Ψ_n bezüglich einer anderen derselben Configuration als $(n-1)$. Polarcurve diese letztere Curve selbst gibt.

III. Transformirt man eine $(2n-1)^2$-geradige Configuration aus dem Systeme $p^{(n)}$ in das System p', so erhält man eine Configuration von $(2n-1)^2$ Curven Ψ_n, welche die merkwürdige Beziehung haben, dass zwei von ihnen in Bezug auf einander polarisirt dieselbe $(n-1)$. Polarcurve und zwar eine dritte Ψ_n derselben Configuration liefern.

IV. Polarisirt man eine Ψ_n^1 bezüglich einer andern Ψ_n, die erhaltene Ψ_n^2 nach derselben Ψ_n, die neue Ψ_n^3 wieder u. s. w. bis zu einer Ψ_n^m, so kann gefragt werden, ob es möglich sei, dass diese Ψ_n^m mit jener zusammenfällt, welche durch den umgekehrten Process der Ψ_n bezüglich Ψ_n^1 entsteht. Es findet sich, dass es bei gegebener Ψ_n^1 $(n-1)^m-1$ solcher Curven Ψ_n gibt.

Die Probleme können bedeutend verallgemeinert werden; ich verzichte, hierauf näher einzugehen und erwähne nur, dass man die Beweise dieser Sätze lediglich auf die Eigenschaft, dass *abc* die Hesse'sche Curve vorstellt, gründen kann. So viel ich weiss, hat man an eine solche Ausdehnung des Steiner'schen Problems für die Kegelschnitte[2] bisher nicht gedacht. Es entsteht die Frage, ob die Forderung, überhaupt Curvenpaare zu finden, die in den oben erwähnten polaren Beziehungen stehen, nothwendig auf unsere Curvengruppen führen müsse. Wenn sich dies auch vielleicht nicht herausstellen sollte, so mag es doch von Interesse gewesen sein, Vorkommnisse solcher Lagen angetroffen zu haben, die übrigens durch bisher nicht aufgestellte simultane Invarianten zweier ternären Formen *n*. Ordnung characterisirt sein müssen.

e) a', b', c' sind respective mit bc, ca, ab incident.

Die Singularität der Ψ_n in a', b', c' wird dann eine merkwürdige. In diesem Netze sind auch ∞^1 periodische Transformationen vom Index $3n$ enthalten. Eine Ausarbeitung dieses Falles werde ich demnächst veröffentlichen.

f) a', b; b', c sind coïncident.

Verlegt man p nach c' und construirt die p', welche p nach $n-3$ Transformationen in a umsetzen, so erhält man eine geometrische Ableitung der bekannten Sätze über die Möglichkeit der Kreistheilung.

---

[1] Man bemerkt hierin nebenbei eine viel allgemeinere Form der Lösung jenes speciellen Problemes, von dem Hr. Veronese in der schon erwähnten Abhandlung ausgegangen. Es scheint mir, dass durch die (erweiterungsfähige) Darstellung in 2. der Zusammenhang klarer wird.

[2] Cf. Steiner: Vorlesungen II. ed. Schröter, pag. 422. Dieser Fall gehört zu I. Für I hat man ausserdem den ganz vereinzelten Fall einer harmonischen Curve dritter Ordnung mit ihrer Hesse'schen Curve, die wieder harmonisch ist. Für II ist der Fall einer Grundcurve *n*. Ordnung mit ihrer im Netze der ersten Polaren verbundenen Curve kein Beispiel, da die Grundcurve nicht auch die umgekehrte Beziehung zur verbundenen Curve hat.

IV.

Über das allgemeinste Netz linearer Transformationen bei verschiedenen Trägerebenen. Einige covariante Transformationsnetze.

1. Zwei Collineationen zwischen E, E' haben drei gemeinsame Punktepaare und alle diese enthaltenden Collineationen, welche p mit jenen zweien auf dieselbe Gerade π bringen, bilden ein Büschel. p und π stehen in quadratischer Verwandtschaft. Wir können sagen: Ein Büschel von Collineationen ist äquivalent einer dualen quadratischen Verwandtschaft.

2. Durch sieben Paare $a_i \alpha_i$ von Punkt und conjugirter Geraden ist, wie man mit Schröter[1] beweist, die Collineation nicht bestimmt, aber der Entsprechende eines Punktes p auf eine Gerade π gezwungen. Zwischen p und π besteht jedenfalls quadratische Verwandtschaft (das Erzeugniss zweier Collineationen). Nun hat Herr Sturm[2] gezeigt, dass es in E drei Punkte $r_1 r_2 r_3$, in E' drei Gerade $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ gibt, so dass Strahlbüschel r_i $(a_1 \ldots a_7) \,\overline{\wedge}\,$ Punktreihe σ_i $(\alpha_1 \ldots \alpha_7)$. In der quadratischen Verwandtschaft $p\pi$ muss das von einem Hauptpunkte der E nach deren Punkten ausgehende Büschel der von der Hauptgeraden in E' auf deren Geraden ausgeschnittenen Punktreihe projectiv sein. Daher: die drei r bilden das Hauptdreieck der E und die drei σ das Hauptdreiseit von E'. Zugleich folgt der Zusatz zu dem Probleme der Projectivität. Die Geraden von einem Sturm'schen Punkte der E nach den zwei anderen entsprechen in der Projectivität der Strahlbüschel umgekehrt den bezüglichen Verbindungslinien in E'. [Dual ausgedrückt.][3]

3. Nachdem sich zwei verbundene Sturm'sche Elemente als correspondirende Hauptelemente einer quadratischen Verwandtschaft, die $a_i \alpha_i$ enthält, gezeigt haben, kann man von fünf Paaren $a_i \alpha_i$ ausgehen. Alle durch sie bestimmten Collineationen enthalten ein sechstes festes conjugirtes Paar $a_6 \alpha_6$.[4] Folglich enthalten alle dualen quadratischen Transformationen zwischen $a_i \alpha_i$ ein sechstes festes Paar $a_6 \alpha_6$. Die Hauptpunktepaare von E, E' stehen in Verwandtschaft fünften Grades mit $a_i \alpha_i$ als doppelten Fundamentalpunkten respective Geraden.

Hernach bestimmen sechs Paare ein Netz von dualen quadratischen Transformationen und in anderem Sinne das allgemeinste Netz l. T. Der Ort der Hauptpunkte in E ist eine Curve dritter Ordnung C_3 durch die a_i, die Einhüllende der Hauptgeraden in E' ist analog eine Curve dritter Classe Γ^3.

Es bildet somit jedes Sturm'sche Tripel mit $a_1 \ldots a_5$ und dem abhängigen Punkte f_6 die Basis eines Büschels von Curven dritter Ordnung. Demnach treffen sich $a_i f_k$ und $f_i a_k$ auf der Curve. Hieraus:

a) Sechs Punkte a und die von den Quintupeln abhängigen sechs Punkte f verhalten sich wie der Schnitt mit den zwölf Geradenpaaren einer Doppelsechs.[5]

Wird r_1 festgehalten, so zielt nach den Restsätzen über die C_3 $r_2 r_3$ durch einen festen Punkt r_1' von C_3, gleichzeitig bleibt ρ_1 fest, ρ_2 und ρ_3 schneiden sich auf einer festen Tangente ρ_1' von Γ^3. Das besagt:

b) In jedem Collineationsbüschel, an dem r_1 als Grundpunkt participirt, entspricht ihm stets ein Grundpunkt in E', der auf ρ_1' liegt.

Jedes Collineationsbüschel enthält ferner drei singuläre Collineationen, in denen r und ρ als entsprechende singuläre Gebilde auftreten. Im Ganzen:

---

[1] Cr. B. Journ. LXII. Bd. pag. 224.

[2] Math. Ann. I. Bd., pag. 534. Dort findet sich eigentlich das Duale.

[3] Auch hier lässt sich der etwas leichtere Weg einschlagen, dem ich in B. III. gefolgt bin, aber ich wählte hier absichtlich diese Darstellung, um das Wesen der Sturm'schen Tripel aufzuklären.

[4] Cf. Rosanes: „Über linear-abhängige Punktsysteme." Cr. Borch, J. LXXXVIII. Bd., pag. 241.

[5] Nach einem Satze von Rosanes, für den ich in einer Abhandlung über succesive Correlationen einen geometrischen Beweis veröffentlichen werde, sind sechs abhängige Punktepaare in derselben Ebene stets conjugirte Punktepaare desselben Kegelschnittes. Daraus folgt bei Beachtung des *a)* im Texte: Die sechs Geradenpaare einer Doppelsechs werden von jeder Ebene in sechs conjugirten Punktepaaren eines Kegelschnittes getroffen. Es lässt sich daraus ein Beweis für eine neuerdings von Herrn F. Schur bemerkte Eigenschaft der Doppelsechs herstellen.

c) Zwischen den Punkten von C_3 und den Tangenten von Γ^3 bestehen zweierlei (1, 1) Correspondenzen. Es gibt im Netze l. T. ∞^1 singuläre, die Correspondenz r, ρ weist jedem singulären Punkte eine singuläre Gerade zu. Ferner entspricht r in allen l. Tr. des Netzes nur Punkten einer festen Tangente ρ' von Γ^3 und r, ρ' ist die zweite Correspondenz.

Zwischen ρ, ρ' und entsprechend zwischen r, r' besteht selbst eine (1, 1) Correspondenz.

3. Ist $r_1 r_2 r_3$ ein Grundtripel (Sturm'sches Tripel), so schneiden $r_2 r_3$, $r_3 r_1$, $r_1 r_2$ die C_3 ferner in den Punkten r'_1, r'_2, r'_3. Sind r_a, r_b, r_c drei allineirte Punkte der C_3 und entsprechen ihnen $\rho'_a \rho'_b \rho'_c$ nach der zweiten Correspondenz, so gibt es ein Büschel l. Tr., die r_a nach $(\rho'_a \rho'_b)$ und ein Büschel, die r_b nach $(\rho'_a \rho'_b)$ führen. Die beiden Büscheln gemeinsame Transformation muss $(\rho'_a \rho'_b)$ von E' sämmtlichen Punkten der Geraden $r_a r_b$ von E entsprechend machen, muss also singulär sein; daher muss die dritte durch $(\rho'_a \rho'_b)$ gehende ρ zu r_c als singuläre Gerade gehören (ρ_c sein). Demgemäss:

d) Drei convergenten Tangenten von Γ^3 als ρ' genommen, entsprechen drei Punkte r', welche ein secundäres Tripel heissen sollen. Die drei Seiten des secundären Tripels treffen C_3 in Punkten r, deren r' die gegenüber liegenden Punkte des Tripels sind.

Die Grundtripel und die secundären Tripel haben also in dieser letzten Hinsicht reciproke Eigenschaft. Die letzte Eigenschaft kann man auch so ausdrücken:

e) Sind $r_a r'_a$, $r_b r'_b$ zwei Paare correspondirender Punkte, so schneiden sich $r_a r'_b$, $r'_a r_b$ in einem Punkte r'_c der C_3, der zum Schnittpunkte r_c von $r'_a r'_b$ mit C_3 gehört. Speciell:

f) Dem Tangentialpunkte von r'_a entspricht der Schnittpunkt von $r_a r'_a$ mit C_3 als r'.

Hieran schliesst sich das wichtige Ergebniss:

g) Eine Beziehung rr' ist auf einer vorgegebenen C_3 durch ein einziges Punktepaar vollständig bestimmt und kann in einfacher Weise construirt werden. —

4. Ich will die Beziehung r—r' noch genauer untersuchen. — Es gibt ∞^1 Sturm'sche Tripel, in denen zwei Punkte coïncidiren, ich nenne sie zweipunktige Tripel und spreche von ihrem zweifachen und einfachen Punkte. Zieht man von r die vier Tangenten der C_3, so ergänzen die Berührungspunkte als zweifache Punkte den Punkt r zu Tripeln. rr' schneidet C_3 in dem complementären einfachen Punkte von r. Demnach:

h) Die Geraden, welche die sämmtlichen r von C_3 mit ihren r' verbinden, sind identisch mit den Geraden, welche die zweifachen r mit ihren complementären einfachen Tripelpunkten verbinden. Die Einhüllende dieser Geraden heisse S. Nach 2. *c)*, *d)*, *e)* ist S auch die Einhüllende der Geraden, welche die beiden Punkte der zweipunktigen secundären Tripel verbinden.

Jeder Punkt von C_3 ist r' eines r und r eines r', ferner zielen durch ihn vier rr', da er einfacher Punkt von vier zweipunktigen Tripeln ist: S ist von der sechsten Classe S^6.

i) In der Correspondenz rr' gibt es keine Coïncidenz; denn sonst gäbe es im Netze quadratische Verwandtschaften, deren Hauptpunktetripel allineirt sind und alle rr' würden coïncidiren.

k) Es kann auch im Allgemeinen kein involutorisches Punktepaar rr' geben. Denn ein solches müsste nach 3. *f)* denselben Tangentialpunkt haben. Da nun conjugirte Punktepaare von Punkten der C_3 aus wieder in conjugirte Punktepaare, andererseits Paare rr' wieder in Paare rr' projicirt werden (3. *e)*), so folgt, dass alle rr' involutorisch sein müssten, was im Allgemeinen nicht sein wird (siehe 5. a. E).

Es kann aber vorkommen, dass r mit seinem r' und mit dessen r' (den wir r'' nennen wollen) allineirt ist. Dann ist nach *f)* der Tangentialpunkt von r' der r von r''; dieser soll nun eben r' sein, somit muss r' ein Wendepunkt sein.

Und umgekehrt:

l) Jeder Wendepunkt der C_3 ist mit seinem r und seinem r' allineirt. Von jedem dieser drei Punkte gehen an die S^6 nur noch vier Tangenten, die Verbindungslinie ist Doppeltangente der S^6, diese ist S^6_{12}.

Wenn r' der Tangentialpunkt von r wird, so fallen zwei von den Tangenten der S_6 aus r in rr' zusammen und S^6 berührt in diesem $|r$ die C_3. Lässt man aber in einem secundären Tripel alle drei Punkte r' zusammenfallen, so ist gerade nach 3 *d)* r' der Tangentialpunkt von r.

Ist r der Tangentialpunkt von r', so fallen in r alle drei Punkte eines Sturm'schen Tripels zusammen und von r' gehen nur vier weitere Tangenten aus, S^6 berührt C_3 auch in diesen $r|$. Es kann keine anderen Punkte auf C_3 geben, in denen zwei Tangenten an S^6 zusammenfielen, die Punkte von S^6 wären. Somit gibt es 9 $r|$ und 9 $|r$. Oder:

m) Unter den Sturm'schen, wie unter den secundären Tripeln gibt es neun vollständig coïncidente.

5. Wir zeigten oben, dass jedes Büschel 1. T. einer quadratischen Transformation äquivalent ist, welche die Punkte r in die Geraden ρ' überführt. Ein Strahlbüschel s von E' wird durch sie in einen Kegelschnitt von E verwandelt, der die Hauptpunkte $r_1 r_2 r_3$ und das secundäre Tripel enthält, welches den drei durch s gehenden ρ' entspricht. Somit ist bewiesen:

n) Jedes secundäre Tripel liegt mit jedem Sturm'schen Tripel in einem Kegelschnitte.

Aus *m)* und *n)* folgt:

Es gibt 81 Kegelschnitte, welche die C_3 in einem der $|r$ und in einem $r|$ osculiren.

Die Verbindungslinien der neun Punkte $r|$ mit den neun Punkten $|r$ gehen daher durch die neun Wendepunkte von C_3. Ich nenne zwei solche neunpunktige Gruppen: „Connexe Neutralgruppen". [1]

Insgesammt gilt der Satz:

Die Einhüllende der Geraden rr' ist eine Curve sechster Classe mit neun Doppeltangenten, welche einzeln durch die neun Wendepunkte der C_3 gehen. Sie berührt die C_3 in achtzehn Punkten, welche sich in zwei Gruppen zu je neun sondern, die connexe Neutralgruppen sind. [2]

Nach 3. *g)* gibt es ∞^1 Correspondenzen rr' auf einer C_3, denen eine Schaar von S^6_{12} entspricht. Specielle S^6_{12} sind: 1. Die C_3 selbst für die Identität, 2. die drei zur C^3 gehörigen Cayley'schen Curven für die drei Möglichkeiten der Involution. Diese C_3 sind zweimal gezählt. — Kommt es nur einmal vor, dass $r^{(n)}$ mit r identisch ist, so tritt es immer ein, unter den S^6_{12} gibt es solche, denen einfache n-Ecke umgeschrieben sind, die gleichzeitig der C_3 eingeschrieben sind.

6. In der Ebene E' gibt es eine reciproke S^{12}_6, welche die Punkte $\rho\rho'$ enthält, neun Doppelpunkte auf den Spitzentangenten von Γ^3 hat und Γ^3 in achtzehn Punkten zweier connexen Neutralgruppen berührt. — —

7. In einem Büschel gibt es drei C_σ, daher: „Die einem Punkte p in allen C_σ entsprechenden p' erfüllen eine Curve dritter Ordnung C_p". Zwei C_σ, deren r_1 mit p allineirt sind, bestimmen ein Büschel und damit den dritten Punkt des Sturm'schen Tripels. Die den p in den zwei C_σ entsprechenden Punkte liegen auf der jenem dritten r entsprechenden ρ'. Daraus schliesse ich: Sind die singulären Punkte dreier C_σ mit p allineirt, so sind die in ihnen entsprechenden p' die Ecken eines der Γ^3 umgeschriebenen Dreieckes. Das Strahlbüschel um p lehrt nun:

Es gibt ∞^1 Dreiecke, welche der C_p ein- und der Γ_3 umgeschrieben sind.

Andererseits entspricht der C_3 in jeder Collineation des Netzes eine Curve C_3'. C_3' geht durch die Hauptdreiecke der ∞^1 Büschel, die jene Collineation enthalten. Folglich:

Es gibt auch ∞^1 Dreiecke, welche der C_3' ein- und Γ^3 umgeschrieben sind.

---

[1] Cf. Durège „Ebene Curven dritter Ordnung" 556 ff., wo sie Inflexionsgruppen genannt sind, auch meine Abhandlung: „Über die Configurationen $(3, 3)_8$ und $(3, 3)_9$ und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung". Sitzb. d. kais. Akad. LXXXIV. Bd., II. Abth., p. 915.

[2] Es mag hier an die Parameterrechnung erinnert werden, zu der man gelangt, wenn man ein überall endliches elliptisches Integral längs der C_3 hin erstreckt. Sind u_1, u_2, u_3 die Argumente dreier allineirter Punkte, so kann man $u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0$ bewirken. Dann stellt $u_1 + u_2 + u_3 \equiv c$, wo c eine beliebige Constante bedeutet, eine ∞^2 Schaar Sturm'scher Tripel dar. Die secundären Tripel sind in $u_1 + u_2 + u_3 \equiv -c$ enthalten. Die Verwandtschaft rr' auf C_3 genügt der Gleichung $u - u' \equiv c$. Jeder der obigen geometrischen Sätze hat dann ein leicht erkennbares analytisches Bild.

Fallen zwei r des Tripels zusammen, so coïncidiren auch zwei C_3 und die entsprechenden p' sind durch eine Tangente von C_p verbunden: Die zu p in den Büscheln mit zweipunktigen Grundtripeln gehörigen π sind die Tangenten der C_p. Liegt p auf rr', so ist die dem p in diesem Coïncidenzbüschel entsprechende Gerade π gewiss ρ, da die zweimal gezählte ρ mit ρ' das Hauptdreiseit bildet. Der dem p in jeder der beiden coincidenten C_3 entsprechende p' ist der isolirte Hauptpunkt auf ρ, d. i. aber der Berührungspunkt von ρ mit Γ_3. π berührt nun nach dem Vorigen in p' die C_p, folglich berühren sich dort C_p und Γ_3. Liegt p in einer Tangente von C_3, so entsprechen dem p in den Collineationen, welche den Berührungspunkt zu einem zweifachen Tripelpunkte haben, die Punkte einer Tangente von Γ^3. Da die rr' die S^6_{12} umhüllen, so ist bewiesen:

Die Curven C_p und Γ^3 berühren sich in sechs Punkten. Ihre Tangenten entsprechen als ρ jenen Punkten r von C_3, deren rr' durch p gehen. Die weiteren sechs gemeinsamen Tangenten entsprechen als ρ jenen Punkten von C_3, deren Tangenten durch p gehen.

8. Ferner entsprechen in einer dualen quadratischen Verwandtschaft des Netzes den Punkten r_1, r_2 von C_3 die Geraden ρ'_1, ρ'_2, von Γ^3. In jener linearen Transformation des Netzes, in welcher r_1 dem Schnittpunkte $\rho'_1\rho'_2$ entspricht, entspricht die Gerade r_1r_2 der Geraden ρ'_2. Lassen wir r_1r_2, somit auch $\rho'_1\rho'_2$ unendlich nahe zusammenrücken, so folgt:

Führt eine Collineation einen Punkt r_1 von C_3 in einen Punkt von Γ^3 (d. i. den Berührungspunkt von ρ') über, so führt sie auch die Tangente der C_3 in r_1 in die Tangente ρ' jenes Punktes von Γ^3 über.

Ich will noch einen anderen Beweis geben. Bei festem r_1 geht r_2r_3 durch r'_1 und $\rho_2\rho_3$ schneiden sich auf der ρ'_1 von r_1; ρ_1 dagegen bleibt fest. Wenn nun das Büschel den r_1 dem Berührungspunkte von Γ^3 mit ρ'_1 entsprechen macht, so fällt etwa ρ_2 mit ρ'_1 zusammen. Der dem ρ'_1 als ρ entsprechende r ist gleichzeitig derjenige r, der zu r_1 als r' gehört. Derselbe wird gefunden, indem man den Tangentialpunkt von r_1 mit r verbindet und den Schnittpunkt der Geraden mit C_3 sucht (nach 3. *e*). Dann hat man ein Tripel, in welchem r_1, dessen Tangentialpunkt r und der mit diesem und r'_1 allineirte Punkt r_2 vorkommt. In E' besteht das Hauptdreiseit aus ρ'_1, ρ_1 und der Tangentialtangente von ρ'_1. Dabei entspricht r_2r_3 der ρ_1, r_1r_2 der ρ'_1, r_3r_1 der Tangentialtangente. r_1r_2 ist aber die Tangente von r_1, das Büschel führt also die Tangente von r_1 in die Gerade ρ'_1 und r_1 in den Berührungspunkt von ρ'_1 über. —

Nun ist die Collineation, welche C_3 in C'_3 überführt, in sechs Büscheln mit zweipunktigen Tripeln enthalten, weil an die C_p von dem durch diese Collineation bewirkten p' sechs Tangenten gehen. Vermöge jedes dieser Büschel führt die Collineation eine Tangente (r_1r_2) von C_3 in eine Tangente von C'_3 über, die auch Tangente (ρ_3) von Γ^3 ist.

Die Curven C'_3 und Γ^3 können ausser diesen sechs gemeinsamen Tangenten nur noch solche haben, die von dem vorhin definirten Vorkommnisse herrühren. Daher:

C'_3 und Γ_3 berühren sich in sechs Punkten. Die Tangenten in diesen Punkten entsprechen als ρ' jenen r, die mit ihrem Tangentialpunkte in einem die Collineation enthaltenden Büscheltripel vorkommen. Die sechs übrigen gemeinsamen Tangenten entsprechen als ρ den einfachen Punkten jener zweipunktigen Tripel, welche die Collineation enthalten.

Wir können sagen: Γ^3 ist die Einhüllende aller ∞^2 C_p und aller ∞^2 C'_3.[1]

V.

Das Netz linearer Transformationen zwischen zwei Punktebenen bei coïncidenten Trägern.

1 Sind E und E' identisch, so liefert jede Collineation ein Doppelpunktstripel. Bewegt sich p' auf einer Geraden, also die Collineation in einem Büschel, so beschreiben die Doppelpunkte (nach I. 6) eine L_3. Zwei, also alle L_3 haben sechs feste Punkte, die aufgesucht werden sollen.

[1] Welche Fülle von Anwendungen möglich ist, sieht man durch Annahme specieller Lagen für die $a_i\alpha_i$ und wenn man statt der Elementenpaare Punktepaare oder Geradenpaare so einführt, dass die charakteristische Eigenschaft des Netzes erhalten bleibt.

Wie viele Punkte r von C_3 sind mit ihren entsprechenden ρ' von Γ^3 incident? — Ich projicire C_3 aus p; die irgend drei mit p allineirten r entsprechenden ρ' liefern auf dem Strahle durch p drei Schnittpunkte. Das Strahlbüschel p und die Tangentenschaar ρ' erzeugen so eine Curve sechster Ordnung, die in p einen dreifachen Punkt hat und C_3 in achtzehn Punkten trifft. Diese zerfallen in zwei Arten: 1. Sie sind mit einer ihnen selbst entsprechenden ρ' incident oder 2. eine ihrer Projectionen von p aus auf die C_3 ist der ihrer incidenten ρ' entsprechende r. Es ist einzusehen, dass (entsprechend den drei Schnittpunkten eines p-Strahles mit C_3) auf die zweite Art zwei Theile und auf die erste nur ein Theil entfallen. Es gibt also $\frac{1}{3}\,.\,18 = 6$ Incidenzen $i_1 \ldots i_6$. Jeder i als Doppelpunkt bestimmt ein ganzes Büschel von Collineationen. Nach I. 6 folgt nun:

Die Verwandtschaft unter den Doppelpunkten ist vom achten Grade mit $i_1 \ldots i_6$ als dreifachen Fundamentalpunkten; die entsprechenden Fundamentalcurven dritter Ordnung haben in $i_1 \ldots i_6$ je einen Doppelpunkt und seien $J_1, \ldots J_6$.

Die Verwandtschaft zwischen p' und den Doppelpunkttripeln hat die L_3 zu Linearcurven, alle L_3 enthalten $i_1 \ldots i_6$. Den Fundamentalpunkten $i_1 \ldots i_6$ entsprechen als Fundamentalgeraden des Systemes p' die in den betreffenden sechs Büscheln dem p entsprechenden Geraden π.

2. Von den Doppelpunkten einer singulären Collineation ist einer r, zwei liegen auf ρ. In diesen beiden ist $D = 0, \infty$. Die der C_3 conjugirte Curve hat die Ordnung sechs und, da sie jede J in zwei freien Punkten trifft, die $i_1 \ldots i_6$ zu Doppelpunkten.

Sie ist der Ort der Doppelpunkte, die in ihrer Collineation das Doppelverhältniss $D = 0, \infty$ tragen, R_0.

Die Jacobiana Ψ_6 des L_3-Netzes überträgt sich vermöge der conjugirten Transformation in eine Ψ'_6 durch $i_1^2 \ldots i_6^2$. Ψ'_6 und C_3 begegnen sich in sechs weiteren Punkten, welche als singuläre Punkte singulären Collineationen zugehören, auf deren ρ die beiden Doppelpunkte coïncidiren. Die letzteren allein können Schnittpunkte von Ψ_6 und R_0 sein, Ψ_6 und R_0 haben Berührung in diesen sechs Punkten.

Die Ψ_6 trifft C_3 weiter in sechs Punkten j, von denen jeder als r seiner C_6 mit einem der übrigen Doppelpunkte coïncidiren muss. Dies kann nur sein, wenn er mit seiner singulären Geraden ρ incident ist. Solche specielle Collineation mit incidenten r, ρ hat zwei Doppelpunkte in r und einen dritten in jenem Punkte l von ρ, der in der Projectivität dem Strahle ρ des Büschels r entspricht. Durch die sechs so erhaltenen l muss auch Ψ'_6, der Ort der Doppelpunkte mit $D = 1$ gehen, ebenso R_0, als conjugirte Curve von C_3. So entsteht das interessante Ergebniss:

Die Ortscurve aller Doppelpunkte, die in ihren Collineationen das Doppelverhältniss D tragen, ist eine Curve sechster Ordnung R_D, die in $i_1 \ldots i_6$ Doppelpunkte hat und die sechs Punkte l enthält. Alle Curven R_D bilden ein Büschel mit sechs gemeinsamen Doppelpunkten i und sechs Berührungspunkten l.[1] Die Curve für $D = 0, \infty$ ist hyperelliptisch.

Die Berührung in den l ist nämlich so zu erklären. Die Ψ_6 ist die Übergangscurve des Systemes der Doppelpunktstripel. Schneidet eine Curve (C_3) die Ψ_6 in gewissen Punkten, so berührt die conjugirte Curve R_0 die Ψ'_6 in den conjugirten Punkten (l).

Man erhält das duale Resultat für die Doppelgeraden des Netzes, wo dann die mit den i incidenten ρ statt der i eintreten und die den l gegenüber liegenden Doppelgeraden die l ersetzen.

Von hier an kann nun die Ableitung der in II gegebenen Anzahlen genau wie dort erfolgen und die betreffenden Anzahlen bleiben auch hier dieselben.

3. Die ergänzenden Doppelpunktepaare von i_1 bilden auf der Fundamentalcurve dritter Ordnung J_1 eine Involution, ihre Verbindungslinien umhüllen einen Kegelschnitt, der J_1 dreimal berührt. Die Berührung tritt in jenen Punkten ein, die mit ihren Tangentialpunkten zusammen ein Paar der Involution bilden. Der Kegelschnitt berührt auch die mit $i_2 \ldots i_6$ incidenten ρ.

---

[1] So viel ich weiss, ist ein solches Büschel von Curven sechster Ordnung bisher nicht bekannt.

Zwischen den Doppelpunkten und den gegenüber liegenden Doppelgeraden der Netzcollineationen besteht eine duale rationale Verwandtschaft fünfter Ordnung, für welche die $i_1 \ldots i_6$ und die mit ihnen incidenten ρ' Fundamentalpunkte, beziehlich Fundamentalgerade sind. Die entsprechenden Fundamentalcurven sind Kegelschnitte, welche $J_1 \ldots J_6$, respective $J'_1 \ldots J'_6$ dreimal berühren.[1]

Es gilt: Die sechs Punkte i und die incidenten ρ, sowie auch die sechs Punkte j und die l sind abhängige Systeme im Sinne des Herrn Rosanes.[2]

Einer L_3 entspricht in dieser Verwandtschaft eine Curve dritter Classe M'^3, und da L_3 nur vollständige Doppelpunkttripel enthält, so folgt:

L_3 und M'^3 haben solche Lage, dass es ∞^1 Dreiecke gibt, welche der ersten Curve ein- und der zweiten umgeschrieben sind. Die beiden Curven berühren sich in sechs Punkten welche mit ihren Tangentialpunkten in demselben Tripel vorkommen. Die übrigen sechs Schnittpunkte ergänzen die Schnittpunkte von L_3 und Ψ_6 zu Tripeln.

Wir sind hier schon bei einer dritten Gelegenheit auf zwei Curven dritter Ordnung und dritter Classe in solcher gegenseitigen Lage gekommen. —

4. Nachdem Abschnitt I vorausgegangen, lässt sich nunmehr die Verwandtschaft der successiven Transformirten von p rasch erledigen.

Bewegt sich p' auf einer Geraden, so beschreibt die Collineation ein Büschel, $p^{(n)}$ folglich nach I. 1) eine Curve n. Ordnung und es gibt n Collineationen unseres Büschels, die $p^{(n)}$ auf eine gegebene Gerade bringen. Beschreibt demnach $p^{(n)}$ eine Gerade, so beschreibt p' eine Curve n. Ordnung. Also: Die Verwandtschaft p'—$p^{(n)}$ ist n^2—1-deutig vom n. Grade. Diese n^2-punktigen Gruppen p' sind verbundene Gruppen in einem Netze Ψ_n.

Die Ψ_n müssen dieselben merkwürdigen Eigenschaften besitzen wie die Ψ_n aus I und ändern sich von p zu p. Die Betrachtungen, welche ich an die Ψ_n in der citirten Abhandlung geknüpft habe, und die ich hier nicht wiederholen will, lassen sich wörtlich hieher auf das allgemeine Netz übertragen.

B) Lineare Transformationen im Raume.

I.

Das fundamentale Gebüsch mit vier festen Punktepaaren.

1. Ich behandle zunächst den Zusammenhang der successiven Transformirten und will einen anderen als den in der citirten Abhandlung, Art. 27 gegebenen, rein projectiven Beweis andeuten.

Sind die Punktepaare aa', bb', cc', dd' fest und soll p seinen $p^{(n)}$ auf $b'c'd'$ haben, so kann die Collineation entweder eine exceptionelle sein, welche a und $b'c'd'$ zu singulärem Punkte und singulärer Ebene hat und in der alle Transformirten von p auf $b'c'd'$ fallen oder eine solche, die $p^{(n-1)}$ auf bcd und folglich $p^{(n)}$ auf $b'c'd'$ bringt. Entspricht also in der Beziehung p'—$p^{(n-1)}$ die Fläche Φ_{n-1} der Ebene bcd, so entspricht in

[1] Dies ist nur eine Consequenz der speciellen Lage, in welcher sich die beiden rational verwandten Systeme hier befinden.

[2] Das Obige gibt das Material zu einem geometrischen Beweise des Rosanes'schen Satzes: Sind aus sechs abhängigen Paaren von Punkt und Geraden fünf Paare incident, so ist auch das sechste Paar incident. Wäre das sechste Paar nicht incident, so verwende man die sechs Paare zur Constituirung eines Netzes von Collineationen. Dann sind die fünf Punkte die $i_1 \ldots i_5$ und der sechste muss (wegen der Cremona'schen Transformation) i_6 und dann aber vermöge des Obigen mit seiner ρ incident sein, qu. e. d.

Es findet sich noch: Die sechs Punkte i haben auf C_3 solche Lage, dass der mit zweien allineirte dritte Punkt und der Gegenpunkt der vier übrigen bezüglich r und r' sind. Anderseits haben die Punkte i solche Lage, dass i_1 und der Schnittpunkt des Kegelschnittes durch die anderen i mit C_3 als r' und r zusammengehören. Ferner:

In einem Netze von Curven dritter Ordnung mit sechs festen Punkten gibt es sechs in einen Kegelschnitt und in eine Gerade durch je einen Punkt r zerfallende Curven. Diese sechs Punkte und diese sechs Geraden sind zwei abhängige Systeme.

$p'-p^{(n)}$ die aus Φ_{n-1}, $b'c'd'$ zusammengesetzte Fläche der Ebene $b'c'd'$. Dass die Flächen Φ_n ein Gebüsch bilden, folgt aus der Eindeutigkeit der Mannigfaltigkeit $p^{(n)}$, daher:

Die Verwandtschaft zwischen p' und dem n^{ten} Transformirten $p^{(n)}$ ist n^3-1-deutig, die Gruppen p' sind verbunden in einem Gebüsche von Flächen n. Ordnung Φ_n, das, wie folgt, construirt wird: Das Netz Φ_2 wird durch die vier Ebenenpaare bcd, $b'c'd'$;...abc, $a'b'c'$ constituirt; entsprechen A_2, B_2, Γ_2, Δ_2, den Ebenen bcd,... so sind A_2, $b'c'd'$;... Δ_2, $a'b'c'$ vier Flächen des Gebüsches Φ_3. Entsprechen A_{n-1}, B_{n-1}, Γ_{n-1}, Δ_{n-1} den Ebenen bcd...abc in $p'-p^{(n-1)}$, so sind A_{n-1}, $b'c'd'$;...Δ_{n-1}, $a'b'c'$ vier linear unabhängige Flächen Φ_n.

Das Gebüsch Φ_2 ist noch von der Lage des p vollständig unabhängig und die in ihm verbundenen Punktepaare sind in den betreffenden Collineationen involutorisch, daher:

Sind r, s zwei associirte Punkte in Φ_2, so gibt es eine Collineation, die r nach s und s nach r führt, und es gilt sowohl $r(abcd)\pi s(a'b'c'd')$ als auch $s(abcd)\pi r(a'b'c'd')$.[1]

2. *a)* Die Geraden, welche $abcd$ und $a'b'c'd'$ in projectiven Punktquadrupeln schneiden, erfüllen einen Complex vierten Grades. Derselbe hat die Ebenen von $abcd$ und $a'b'c'd'$ zu Ausnahmeebenen[2] und enthält sechs lineare Congruenzen mit ab, $a'b'$;...bd, $b'd'$ als Directricenpaaren. Ebenso enthält der Complex die vier Strahlenbündel a, b, c, d, und die vier a', b', c', d' und die sechs linearen Congruenzen ab, $c'd'$;...bd, $a'c'$; das Erstere desswegen, weil es ein Netz von exceptionellen Collineationen gibt, welche a als singulären Punkt und $b'c'd'$ als singuläre Ebene haben und eine exceptionelle Collineation, welche ab, $c'd'$ als singuläre Axen besitzt.[3] Da die Strahlen dieses Complexes die Doppelgeraden sämmtlicher Collineationen sind, so schliessen sie sich zu ∞^3 Tetraedern zusammen. Der Complex enthält noch vier specielle Strahlbüschel.

b) Die Geraden, welche $abcd$, $a'b'c'd'$ in einer Projectivität von bestimmtem characteristischem Doppelverhältnisse schneiden, bilden eine Strahlencongruenz der vierzehnten Ordnung und sechsten Classe. Für alle Werthe von D bilden diese Congruenzen ein Büschel und haben gemeinsam: 1. Die zwölf Tetraederkanten als Doppelstrahlen, 2. die von den acht Ecken in jeder der drei dort convergirenden Seitenflächen über die entsprechende Kante des zweiten Tetraeders gelegten Geraden ebenfalls als Doppelstrahlen, 3. die Verbindungslinien aa', bb', cc', dd' als Doppelstrahlen und 4. die drei über die Geradenquadrupel ab, $a'b'$, cd, $c'd'$; bc, $b'c'$, ad, $a'd'$; ca, $c'a'$, bd, $b'd'$ gelegten Transversalenpaare.

Speciell für $D=0$, ∞ tritt ein Zerfallen in die acht Strahlbündel a,...d' und in die sechs linearen Congruenzen ab, $c'd'$;....ca, $a'b'$ ein.

Ebenso gibt es ein Büschel von Congruenzen sechster Ordnung, vierzehnter Classe, deren Strahlen die Punktepaare aa', bb', cc', dd' durch eine Ebenenprojectivität mit dem characteristischen Doppelverhältnisse D projiciren.[4]

Die Congruenzen der ersten Art schneiden aus jeder Ebene von $abcd$ und $a'b'c'd'$ eine Schaar von Curven sechster Classe mit neun gemeinsamen Doppeltangenten aus. (A. II. 1.)

Durch die Gleichheit der Werthe von D sind die beiden Büschel von Congruenzen projectiv auf einander bezogen und erzeugen so eine neue Congruenz, deren Strahlen die beiden Tetraeder in einer Projectivität von demselben Doppelverhältnisse schneiden und projiciren. (S. u. II. 8.)[5]

c) Die Doppelpunkte auf den Doppelgeraden eines Complexkegels p bilden eine Raumcurve eilfter Ordnung $\mathfrak{p}_{11}$ mit einem dreifachen Punkte im Scheitel p. Die Curve enthält a, b, c, d, a', b', c', d', den Schnittpunkt von pa mit $b'c'd'$ und die analogen, ferner die Treffpunkte der von p über ab, $a'b'$;...bd, $b'd'$ gelegten Trans-

[1] Dies ist beiläufig ein kleiner Zusatz zu Sturm „Das Problem der Collineation." Math. Ann. Bd. X.

[2] Das bisher Gesagte über diesen Complex vierten Grades findet Herr Sturm bei Gelegenheit einer ganz anderen Untersuchung in Math. Ann. Bd. XI „Das Problem der räumlichen Projectivität", pag. 515. Im Obigen ist besonders das Zusammenschliessen zu Tetraedern für die Specialfälle wesentlich.

[3] Cf. „axial correlation" des Herrn Hirst l. c.

[4] Diese Strahlencongruenz hat besondere Wichtigkeit für das Gebüsch von Correlationen, wie ich demnächst zeigen werde; vergl. auch die Anm. über projective Rotationen des Raumes in II. 5.

versalen mit diesen Kanten (also auf jeder Kante einen Punkt), dies alles vermöge der unter *a)* erwähnten exceptionellen Collineationen, und auf jeder der vier Schnittlinien bcd, $b'c'd'$; . . . abc, $a'b'c'$ vier Punkte.

d) Die Doppelgeraden in einer Ebene Σ umhüllen eine Curve vierter Classe. Die Doppelpunkte auf diesen Doppelgeraden erfüllen eine Curve siebenter Ordnung, w_7, welche auf den Kanten von $abcd$ und $a'b'c'd'$ einfache, auf den vier Schnittlinien $\alpha\beta\gamma\delta$ doppelte Punkte und ausserdem auf jeder Schnittlinie mit einer Ebene bcd, . . . ein Doppelpunktepaar hat.[1]

Für *a)* und *b)* wird unten in IV, 5. ein allgemeiner tiefergehender Beweis hergestellt. Die Richtigkeit von *b)* lässt sich mit Hilfe unserer Resultate aus II, 1) so einsehen:

Die Strahlen, welche aus den Ebenenpaaren abc, $a'b'c'$; acd, $a'c'd'$; adb, $a'd'b'$ eine Projectivität von constantem D ausschneiden, bilden einen Complex sechsten Grades; cf. Art. II, 1. Derselbe schneidet den Complex vierten Grades aus *a)* in: 1. drei linearen Congruenzen ab, $a'b'$; ac, $a'c'$; ad, $a'd'$, die für den ersten doppelt sind, Classe 6, Ordnung 6; 2. den sechs doppelten Ausnahmeebenen abc, . . . $a'd'b'$, Classe 12, Ordnung 0; 3. den beiden für den ersten Complex doppelten Strahlenbündeln a, a', Classe 0, Ordnung 4, so dass von dem Schnitte noch unsere Congruenz vierzehnter Ordnung, sechster Classe übrig bleibt.

3. Die Verwandtschaft zwischen p' und den Doppelpunkten, C.

a) Die Ebenenbüschel ab, $a'b'$ sind in jeder Collineation projectiv und erzeugen ein Hyperboloid H_{ab} durch ab, $a'b'$, γ, δ.[2] Bewegt sich p' auf fester Ebene $\mathfrak{p}_{ab}$ durch a', b', so bleibt die Projectivität der Ebenenbüschel, also auch H_{ab} constant und H_{ab} entspricht, da es durch die Doppelpunkte geht, in der Verwandtschaft C der Ebene $\mathfrak{p}_{ab}$. — Eine beliebige Ebene $\mathfrak{p}_a$ durch a' bezieht ferner die Büschel $a'b'$, $a'c'$ perspectiv und die entsprechenden Büschel H_{ab}, H_{ac} so projectiv, dass die Ebenenpaare $(a'b'c', abd)$ und $(a'b'c', acd)$ sich entsprechen. Das Erzeugniss ist $a'b'c'$ und eine Fläche dritter Ordnung, L_a, welche

$$ab,\ ac,\ ad,\ (acd,\ a'c'd'),\ (abd,\ a'b'd'),\ (abc,\ a'b'c') \qquad n)$$

enthält und a zum Doppelpunkte hat sowie durch a' geht. Die L_a für $a'c'd'$, $a'b'd'$ $a'b'c'$ sind $(a'c'd', abc, abd)$, $(a'b'd', acd, abc)$, $(a'b'c', acd, abd)$. Die sechs Geraden *n)* geben sechzehn Bedingungen, die L_a bilden ein Netz. Aus dem Durchschnitte zweier L_a folgt: Einer Geraden durch a' entspricht im Doppelpunktssysteme R_{IV} eine Raumcurve dritter Ordnung, welche a, a' enthält, und die übrigen in abd, acd, abc liegenden Geraden aus *n)* zu Sehnen hat. Einer Geraden durch a' in $a'b'c'$ entspricht ein Kegelschnitt in $a'b'c'$, der a' den Schnittpunkt ad und die Schnittpunkte mit β, γ enthält.

b) Um nun eine beliebige Ebene $\mathfrak{p}$ von R_{I} umzusetzen, projicire man ein Strahlbüschel s derselben aus a' und b'. Die zwei Ebenenbüschel liefern nach *a)* in den Raum R_{IV} umgesetzt, wegen ihrer Perspectivität zwei projective Flächenbüschel L_a und L_b. Der $sa'b'$ entsprechen in den Büscheln: H_{ab} mit bcd und H_{ab} mit acd, wo H_{ab} das der Ebene $sa'b'$ entsprechende Hyperboloid ist. Nebst H_{ab} wird nun eine Fläche L_4 der vierten Ordnung erzeugt, welche a^2, b^2, c^2, d^2, die Kanten des Tetraeders $abcd$ und die Geraden α, β, γ, δ enthält. Dies gibt wirklich dreissig Bedingungen, die L_4 bilden ein Gebüsch. — Aus dem Durchschnitt zweier L_4 zeigt man nun:

Die Doppelpunkte eines Büschels von Collineationen liegen in einer Curve sechster Ordnung, D_6, welche $abcd$ enthält und α, β, γ, δ zu dreifachen Sehnen hat.[3]

c) Die Ebenen bcd, . . . abc sind gewiss Fundamentalebenen für R_{IV}. Einem Punkte $\mathfrak{a}$ von bcd entspricht ein unendlich naher Punkt $\bar{\alpha}'$ an a'. Einer Ebene durch a' entspricht so eine Curve dritter Ordnung in bcd, welche b, c, d und die Schnittpunkte $(bc, a'b'c')$, $(cd, a'c'd')$, $(bd, a'b'd')$ enthält. — Alle Doppelpunkte auf bcd treten nur in singulären Collineationen mit a', bcd als singulärem Punkt und singulärer Ebene auf. Die Verwandtschaft $\mathfrak{a}$—$\bar{\alpha}'$, ist 3—1deutig und der in I. 6. behandelten analog. Einer Geraden in bcd entspricht

[1] Man sucht zunächst den Ort der Doppelpunkte in Σ, die (in Bezug auf zwei entsprechende Tripel) Doppelgeraden durch einen gegebenen Punkt von Σ senden und stellt die Schnittpunkte mit der w auf.

[2] Ich führe für die Schnittlinien bcd, $b'c'd'$; . . . abc, $a'b'c'$ die Bezeichnungen α, β, γ, δ ein.

[3] Es ist das eine Nöther'sche c^6, da sie der Schnitt einer L_a und einer L_b ist, die sich bereits in ab, $\alpha\beta$ schneiden.

in a' ein Kegel dritter Ordnung, der $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$ enthält. Folglich hat die Fläche Δ_6, die einer Ebene Σ von R_{IV} entspricht, a' zum dreifachen Punkte. Sie enthält die Kanten von $a'b'c'd'$ einfach, denn eine Gerade über $(a'b'c'd')$ entspricht einer Raumcurve vierter Ordnung, schneidet also Σ noch in vier Punkten (s. unten Art. 4).

d) Δ_6 hat noch einen dreifachen Punkt $\bar{\omega}^3$, der aus den in der Doppelebene Σ selbst entstehenden Doppelpunkten hervorgeht und eine Doppelcurve, die aus den Doppelpunkten der in Σ vorhandenen Doppelgeraden, also der Curve w_7 aus 2. *d)* hervorgeht. Ich werde weiterhin (Art. 5) zeigen und will hier nur anführen: Die w_7 überträgt sich in eine Curve siebenter Ordnung mit Doppelpunkten in a', b', c', d' und einem dreifachen Punkte in $\bar{\omega}^3$.

e) Zwei weitere Collineationen des Gebüsches werden im Folgenden eine wichtige Rolle spielen. Sind $\rho_1 \rho_2$ die beiden Transversalen von α, β, γ, δ und $\sigma_1 \sigma_2$ die Transversalen von aa' bb', cc' dd', so trifft ρ_1, ρ_2 die Tetraederebenen in Punktepaaren einer Identität. Die Collineation, welche ρ_1 zur Doppelgeraden hat, hat alle ihre Punkte zu Doppelpunkten und enthält ein Büschel, etwa σ_1, von lauter Doppelebenen. So entstehen zwei Collineationen mit $\rho_1 \sigma_1$, $\rho_2 \sigma_2$ als Doppellinienpaaren. Dem p mögen in diesen Collineationen die Punkte ε_1, ε_2 entsprechen. Jede Σ trifft ρ_1, ρ_2, daher gehen alle Δ_6 durch ε_1, ε_2. Jede der beiden Collineationen hat überdies zwei Doppelpunkte auf σ_1, respective σ_2.

f) Ist ferner auf α ein Doppelpunkt, η, angenommen, so ist durch ihn ein Büschel von Collineationen bestimmt, in welchen die Ebenen bcd, $b'c'd'$ und die Bündel $a(\eta bcd)$, $a'(\eta b'c'd')$ sich entsprechen. Die zu p gehörigen p' liegen in einem Strahle h' durch a'. Alle h' erfüllen eine Kegelfläche dritter Ordnung, weil die einer Geraden von R_I entsprechende D_6 die α 3mal trifft. Diese Kegelfläche geht durch ε_1, ε_2 und wegen der Punkte von α auf bc, cd, db durch $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$. Nimmt man η auf $b'c'$ $c'd'$, $d'b'$, so findet man drei weitere besondere Strahlen der Kegelfläche.

g) Da sich stets eine Raumcurve dritter Ordnung des in *a)* angetroffenen Systemes findet, die eine beliebige Gerade g zur Sehne hat, so gibt es stets eine Sehne durch a' an die der g entsprechende Raumcurve vierter Ordnung und diese ist von der zweiten Species. Im Ganzen:

Die Doppelpunktsquadrupel des Collineationsgebüsches stehen mit den p' in 4—1-deutiger Verwandtschaft, so dass den Ebenen $\mathfrak{p}$ von R_I Flächen vierter Ordnung $\mathbf{L}_4$ durch $a^2 b^2 c^2 d^2$, durch die Kanten von $abcd$ und die Geraden α, β, γ, δ, den Geraden von R_I Curven sechster Ordnung D_6 durch $a'b'c'd'$ und mit α, β, γ, δ als dreifachen Sehnen entsprechen. Den Ebenen Σ von R_{IV} entsprechen Flächen sechster Ordnung durch $a'^3 b'^3 c'^3 d'^3$, durch die Kanten von $a'b'c'd'$ und die Punkte ε_1, ε_2 mit einem variablen dreifachen Punkte $\bar{\omega}^3$ und einer variablen Doppelcurve siebenter Ordnung durch a' b' c' d' $\bar{\omega}^3$. Der Osculationskegel von Δ_6 in a' hat eine variable Doppelkante und enthält die Geraden $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$. Jede Δ_6 enthält noch vier andere Gerade durch a'. b', c', d', welche den Schnittpunkten von Σ mit α, β, γ, δ entsprechen, also zusammen zehn Gerade. Einer Geraden von R_{IV} entspricht in R_I eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species durch a', b', c', d',[1] K_4.

Das Gebüsch der $\mathbf{L}_4$ kann durch die vier in vier Ebenen zerfallenen Flächen

bcd, $a'c'd'$, $a'b'd'$, $a'b'c'$
acd, $a'b'd'$, $a'b'c'$, $b'c'd'$
abd, $a'b'c'$, $b'c'd'$, $a'c'd'$
abc, $b'c'd'$, $a'c'd$, $a'b'd'$

constituirt werden, welche als $\mathbf{L}_4$ den Ebenen $b'c'd'$,...$a'b'c'$ von R_I entsprechen.

4. *a)* Schon aus dem in 3. *c)* Gesagten, folgt, dass a', b', c', d' Fundamentalpunkte für R_I sind, so zwar, dass, wenn p durch a' geht, ihr in R_{IV} die Ebene bcd nebst nur mehr einer Fläche dritter Ordnung entspricht. Geht in R_I eine Gerade durch a', so entspricht ihr nur mehr eine Curve dritter Ordnung D_3 und die Kanten bc, cd, db sondern sich ab.

---

[1] Man bemerke einen Zusatz in B. II. 1. *a*. E.

Allgemeiner gilt: Wenn eine Gerade die $a'b'$ trifft, entspricht ihr nebst der abgesonderten cd nur mehr eine Curve fünfter Ordnung in R_{IV}.

Für R_I sind auch noch ε_1, ε_2 Fundamentalpunkte, so dass einer Ebene durch ε_1 eine L_4 durch ρ_1 entspricht. Einer Geraden durch s_1 entspricht nebst ρ_1 eine Curve fünfter Ordnung, die ρ_1 zweimal trifft. Der Geraden $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ entspricht in R_{IV} eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art, die ρ_1, ρ_2 zu Sehnen hat und a, b, c, d enthält. Diese Curve läuft auch durch die vier Doppelpunkte auf σ_1 und σ_2.

Geht nun Σ durch ρ_1, so hat Δ_6 in ε_1 einen Doppelpunkt. Jener Ebene, welche ρ_1 mit einem der beiden Doppelpunkte auf σ_1 verbindet, entspricht sogar eine Δ_6 mit einem dreifachen ε_1.

b) Für den Raum R_{IV} sind die Kanten von $abcd$ Fundamentalgerade, so dass, wenn eine Gerade die ab trifft, ihr in R_I eine Curve dritter Ordnung entspricht, die a', b' enthält und $c'd'$ einmal trifft, $c'd'$ sich nebstdem abgesondert hat. Dabei ist das Verhalten der Fundamentalgeraden ein eigenthümliches. Geht nämlich eine Gerade durch a, trifft also drei Kanten, so entspricht ihr, da sie L_4 in zwei beweglichen Punkten trifft, in R_I immer noch ein Kegelschnitt.

Den Geraden von Σ, welche ab, cd, ... treffen, entsprechen in R_I drei Kegelschnitte, daher die Δ_6 immer drei Kegelschnitte enthält.

5. Die conjugirte Transformation $\mathfrak{T}$ unter den Doppelpunkten von R_{IV}. Einer Ebene Σ entspricht nach der Verwandtschaft C eine Δ_6, dieser aber rückwärts im Systeme R_{IV} eine Fläche 6. 4—4. 3 = 12. Ordnung. Σ wird somit durch eine F_{11} zu einer vollständigen R_{IV}-Fläche ergänzt. Jede h' (s. 3. f.) schneidet Δ_6 in drei Punkten ausser a', daher tritt jeder Punkt von α dreimal in die F_{12} ein, α ist dreifach in F_{11}.

Eine Gerade, welche $a'b'$, $c'd'$ begegnet, schneidet Δ_6 noch in vier Punkten, die entsprechende D_4 in R_{IV} schneidet folglich $F_{12} = \Sigma + F_{11}$ in 4. 4 und, da sie die α, β, γ, δ je zweimal trifft, noch in 4. 3. 2, also überdies nur in 12. 4—4. 4—4. 3. 2 = Punkten. Diese entfallen auf die Kanten ab, cd, $a'b'$, $c'd$. Aber die D_4 hat diese vier Geraden zu Sehnen, sie sind daher einfach für F_{11}.

Eine Gerade durch a' trifft Δ_6 in drei weiteren Punkten. Die ihr nach C entsprechende D_3 durch a, a' mit β, γ, δ als Sehnen hat folglich 3.4 + 3.3.2, also noch 3.12—3.4—3.3.2 = 6 Punkte mit der F_{12} gemeinsam. Dieselben müssen auf F_{11} und zwar in a, a' liegen: F_{11} hat a, a' zu dreifachen Punkten. Da ferner jede Δ_6 ε_1, ε_2 enthält, so geht F_{11} auch durch ρ_1, ρ_2 und die Doppelpunkte auf σ_1, σ_2.

Einer K_4 in R_I entspricht nach C eine Gerade (3. *g.*) und somit noch eine Curve 4.6—4.3—1 = 11. Ordnung. Da K_4 die Fundamentalkegelfläche von α in sechs weiteren Punkten trifft, so hat $\mathfrak{c}_{11}$ die Gerade α zur sechsfachen Sehne. Gleiches gilt für β, γ, δ. Den Schnittpunkten von K_4 mit den Ebenen von $a'b'c'd$ entsprechen die Punkte a, b, c, d einfach, den Punkten a', b', c', d' aber wieder dieselben Punkte. Die einzige Quadrifläche durch K_4 überträgt sich gemäss C in eine Fläche vierter Ordnung, welche a^2, b^2, c^2, d^2, a'^2, b'^2, c'^2, d'^2 die Kanten von $abcd$ und $a'b'c'd'$, sowie $\alpha\beta\gamma\delta$ enthält.

Die nach 2. *d)* in Σ auftretende w_7 überträgt sich, da sie einmal die Kanten von $abcd$ und zweimal die Geraden α, β, γ, δ trifft, gemäss 3. *g.* nach R_I in eine Curve $\mathfrak{v}_7$ $^1/_2(7.4—4.2—6) = 7$. Ordnung durch $a'b'c'd'$ $\bar{\omega}^3$ und mit je einem Punkte auf jeder Kante von $a'b'c'd'$. Dies ist die oben (3. *d*) gedachte Doppelcurve der Δ_6.

Dieser $\mathfrak{v}_7$ entspricht nun in R_{IV} eine Curve 7.6—3.4—2.3 = 24. Ordnung, die sich aus der Curve w_7 und einer Curve siebenzehnter Ordnung $\mathfrak{d}_{17}$ zusammensetzt, welche letztere der w_7 in $\mathfrak{T}$ entspricht. Vermöge des in der w_7 enthaltenen Doppelpunktepaares der Schnittlinie von Σ mit bcd geht $\mathfrak{d}_{17}$ durch a'. $\mathfrak{v}_7$ trifft die Fundamentalkegelfläche von α in 2.6 weiteren Punkten (ausser 3·1 in a', je 1 in b', c', d' und je einem Punkte auf $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$), wesshalb $\mathfrak{d}_{11}$ die α zur zehnfachen Sehne hat. Alles zusammen gibt:

Die Verwandtschaft innerhalb der Doppelpunktsquadrupel ist so beschaffen, dass die ergänzenden Doppelpunkte zu den Punkten einer Ebene Σ in einer F_{11} liegen, welche a, b, c, d, a', b', c', d', zu dreifachen Punkten hat, α, β, γ, δ zu dreifachen und die Kanten von $abcd$ und $a'b'c'd'$ zu einfachen Geraden hat. Sie enthält ferner die Geraden $\rho_1 \rho_2$ und die Doppelpunkte auf σ_1, σ_2 einfach. Ausser den erwähnten Singularitäten hat sie eine Doppelcurve siebenzehnter Ordnung $\mathfrak{d}_{17}$, die a, b, c, d, a', b', c', d' einfach enthält, α, β, γ, δ, zu zehnfachen Sehnen hat und ausserdem einen dreifachen Punkt π^3 besitzt, der auch für die F_{11} dreifach ist.[1]

Einer Geraden ordnet die Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ eine Curve vierter Ordnung $\mathfrak{c}_{11}$ zu, welche $a, b, c, d, a', b', c', d'$ enthält und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu sechsfachen Sehnen hat.

Eine $\mathfrak{c}_{11}$ trifft die Ebene bcd in den zwei Punkten, welche zum Schnittpunkte dieser Ebene mit der Geraden conjugirt sind in dem Tripelsysteme, welches in bcd durch die Schnittpunkte mit den übrigen drei Kantenpaaren auf die in A. I. 1—6. durchgeführte Weise bestimmt ist.

In demselben Tripelsysteme ist nach A. I. 6. der Schnittlinie von Σ mit bcd ein Curve fünfter Ordnung zugeordnet, in welcher die F_{11} die Ebene bcd schneidet.

6. Die Fundamentalgebilde von $\mathfrak{T}$.

Wird a als Doppelpunkt angenommen, so kann jeder Punkt von $b'c'd'$ Doppelpunkt einer zugehörigen Collineation sein:

Die Punkte $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sind Fundamentalpunkte von $\mathfrak{T}$ und die Ebenen $b'c'd', \ldots abc$ die bezüglichen Fundamentalebenen.

Da jede h' die Δ_6 nur mehr in drei Punkten trifft, so folgt:

„Durch einen Doppelpunkt η auf α ist ein Büschel von Collineationen bestimmt, die ergänzenden Doppelpunkte erfüllen eine Curve dritter Ordnung (η_3) durch η" und da nun eine K_4 die Fundamentalkegelfläche in a' nur mehr in sechs Punkten trifft, folgt, dass alle (η_4) eine Fläche sechster Ordnung, A_6, erfüllen. Sie enthält jedenfalls ρ_1, ρ_2. Man erhält sie, indem man die Fundamentalkegelfläche durch C umsetzt und findet:

A_6 enthält $\alpha, ab, ac, ad, a'b', a'c', a'd', \rho_1, \rho_2$, ferner die Doppelgeraden $\beta^2\gamma^2\delta^2$ und die dreifachen Punkte a^3, a'^3. Sie hat auch noch eine Doppelcurve dritter Ordnung, welche nämlich die den Ebenen durch α als Doppelebenen gegenüberliegenden Doppelpunkte enthält,[2] und welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu Sehnen hat. Die A_6 schneidet jede Tetraederebene durch a oder a' in einem Kegelschnitte und Geraden.

Man kann nun sagen: Die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind für die Transformation $\mathfrak{T}$ Fundamentalgerade. Geht eine Ebene durch α, so ist ihr ausser A_6 nur mehr eine Fläche fünfter Ordnung conjugirt.

Die Kanten der beiden Tetraeder sind Fundamentallinien. So oft eine Fläche ab schneidet, so vielfach enthält die conjugirte Fläche cd. Dabei sind die Berührungsebenen längs cd constant. Aus A. I. 6. folgt nun, dass dem Punkte b und dem Schnittpunkte mit der Ebene $c'b'd'$ die Berührungsebene bcd, dem Punkte a und dem Schnittpunkte mit der Ebene $c'a'd'$ die Berührungsebene acd entspricht.

Auch die Doppelpunkte auf σ_1, σ_2 sind Fundamentalpunkte, so dass von der conjugirten Curve einer Geraden, die durch einen solchen geht, sich ρ_1, respective ρ_2 absondert[3].

7. Die Verwandtschaft zwischen den Doppelpunkten und den gegenüber liegenden Doppelebenen, T.

Ich bemerke zunächst: Ist η der Doppelpunkt, so bilden die Ergänzungstripel eine cubische Involution auf der zugehörigen (η_3) und die Verbindungsebenen bilden demnach ein Ebenenbüschel. Ich zeige ferner nicht ausführlich, dass es keinen weiteren Fundamentalpunkt von T gibt.

Einem Büschel von Doppelebenen entspricht eine Schaar von Collineationen, in welcher einer festen Ebene e eine Developpable vierter Classe 2. Species an die Ebenen von $a'b'c'd'$ zugewiesen wird. Nun besteht, was ich hier vorwegnehmen muss (s. III. 8. d)[4] zwischen den einem festen Punkte entsprechenden Punkten und einer festen Ebene entsprechenden Ebenen eine cubische Verwandtschaft, welche $a'b'c'd'$ beiderseits zum

[1] F_{11} und $\mathfrak{d}_{17}$ dürften auch an sich neu sein, ebenso $\mathfrak{c}_{11}$.

[2] Vergl. 7. — Übrigens ist auch die Fläche A_6 an sich noch nicht gefunden worden. Man sehe die Zusätze in 9.

[3] Es war vorauszusehen, dass die conjugirte Transformation symmetrisch gegen alle vier Punktepaare sein wird.

[4] Zur Ableitung kann man die collineare Verwandtschaft zwischen den p', q' zweier festen p, q benützen, indem man auf der festen Ebene drei Punkte beliebig auswählt.

Fundamentaltetraeder besitzt $\left(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : \frac{1}{u_3} : \frac{1}{u_4}\right)$. Der vorigen Developpable gehört daher eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species von p' zu, welche a', b', c', d' enthält. Somit:

Beschreibt die Doppelebene ein Büschel, so beschreibt p' eine der K_4 analoge Curve (aber anderer Bedeutung).

Bei dem zur (η_3) gehörigen Ebenenbüschel soll p' eine Gerade h' durch a' beschreiben. Die Axe (e) muss eine specielle Lage haben; man sieht aus 5. und 6., dass sie nicht durch eine der Kanten von $abcd$ gehen kann, so dass sie nur bb', cc', dd' schneiden muss. Alle Axen (e) bilden dann das durch bb', cc', dd' bestimmte Hyperboloid. —

Zuvörderst haben wir: Trifft eine Curve von Doppelpunkten n-mal die α, so sondern sich von der Developpabeln der gegenüber liegenden Doppelebenen n Ebenenbüschel ab.

Beschreibt die Doppelebene ein Bündel, so beschreibt bei fester e die e' eine der Δ_6 genau duale Fläche, die sich vermöge der oben erwähnten cubischen Verwandtschaft in eine Fläche E_6 sechster Ordnung mit $a'^3b'^3c'^3d'^3$ umsetzt. Beschreibt aber p' eine Gerade, so beschreibt der Doppelpunkt eine D_6. Diese Gerade trifft die E_6 in sechs Punkten, und so folgt:

Die Doppelebenen der einer D_6 eingeschriebenen Quadrupel umhüllen eine Developable sechster Classe.

Der D_6, die α, β, γ, δ je dreimal trifft, entspricht aber eigentlich eine Developpable der $6+4.3 = 18$. Classe, so dass T von der dritten Ordnung und Classe ist. Denn man zeigt ebenso das Duale. So kommt man zu folgendem Resultat:

Die Verwandtschaft T zwischen den Doppelpunkten und den ihnen gegenüber liegenden Doppelebenen ist rational vom dritten Grade. Im Systeme der Doppelpunkte sind α, β, γ, δ, im Systeme der Doppelebenen aa', . . . dd' Fundamentalgerade. Einem Ebenenbündel des zweiten Systemes entspricht folglich eine Fläche dritter Ordnung J_3 von Doppelpunkten durch α, β, γ, δ, ρ_1, ρ_2.

8. Ein bemerkenswerther specieller Fall.

Derselbe tritt ein, wenn α, β, γ, δ hyperboloidische Lage haben. Dann sondert sich von jeder J_3 das Hyperboloid $\alpha\beta\gamma\delta$ ab, es bleibt eine Ebene, die Verwandtschaft T wird einfach eine Correlation. Aber die Doppelpunkte, welche drei Doppelebenen eines Quadrupels gegenüber liegen, liegen in der vierten Doppelebene, die Correlation ist eine Polarität. Dem Doppelpunkte a entspricht die Doppelebene $b'c'd'$.

Die Verwandtschaft T ist eine Polarität bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung, welche $abcd$ und $a'b'c'd'$ zu polar conjugirten Tetraedern hat.

Von der Fläche dritter Classe, welche den Doppelpunkten einer Ebene entspricht, muss sich ebenso eine feste Fläche zweiter Classe absondern; damit ist aber der innere Grund für den bekannten Satz aufgezeigt: „Haben die Schnittlinien der Seitenpaare zweier Tetraeder hyperboloidische Lage, so haben auch die Verbindungslinien der vier Eckenpaare solche Lage." Auch folgt:

Jede D_3, die a, a' enthält und β, γ, δ zu Sehnen hat, enthält ∞^1 Poltetraeder der Fläche zweiter Ordnung.

9. Ein Büschel von Doppelebenen überträgt sich nach T in eine C_3 über $\alpha\beta\gamma\delta$ als Sehnen und entspricht nach R_1 hin einer Curve vierter Ordnung durch a', b', c', d' (s. in 7). Diese überträgt sich rückwärts in eine Curve zwölfter Ordnung, von der sich C_3 absondert, so dass kommt:

Die in den Doppelebenen eines Büschels g gelegenen Doppelpunktstripel erfüllen eine Curve neunter Ordnung c_9, die g zur sechsfachen und α, β, γ, δ zu vierfachen Sehnen hat und die Punkte a, b, c, d, a', b', c', d' enthält. Ebenso:

Die in den Doppelebenen eines Bündels p gelegenen Doppelpunktstripel erfüllen eine Fläche neunter Ordnung M_9, welche in p, a, b, c, d, a', b', c', d' dreifache Punkte und α, β, γ, δ zweifach, die Kanten von $abcd$ und $a'b'c'd'$ dreifach enthält und $\mathfrak{p}_{11}$ aus 2. *c)* zur Doppelcurve hat.

Daran lässt sich die Aufgabe knüpfen: „Es ist die Anzahl der Collineationen zu finden, welche drei Doppelebenen haben, die durch drei gegebene Punkte gehen," sowie manche andere.

Geht die Doppelebene durch α, so geht c_3 durch a, a', daraus folgt: Der α als Doppelgeraden entsprechen ∞^1 Collineationen, aber sie haben alle die aa' zur gegenüber liegenden Doppelgeraden. Die in den Doppelebenen durch α weiters auftretenden Doppelpunkte erscheinen sämmtlich auf aa' und bilden dort eine quadratische Involution. D. h. fällt a mit α zusammen, so bildet die obige Curve c_9 auf $2.\alpha+bc+b'c+cd+c'd'+db+d'b'+aa'$. — Die A_6 aus 6. enthält folglich auch aa'.

Liegt zu einer der Tetraederebenen, etwa bcd, so zerfällt c_9 in bc, cd, db und eine Curve sechster Ordnung durch a, a', b', c', d', welche $\alpha\beta\gamma\delta$ zu dreifachen Sehnen hat, α zur zweifachen.

Trifft die g blos eine der Kanten, so sondert sich diese Kante von der c_9 ab.

Durch Betrachtung der Schnittpunkte von α mit ρ_1, ρ_2 findet sich nun, dass auf A_6 ausserdem in Art. 6 erwähnten noch zwei andere Kegelschnitte vorhanden sind.

Ferner folgt:

Die von den Punkten der α ausgesandten Doppelebenen umhüllen eine Fläche vierter Classe, die α zur Doppellinie hat.

II.

Das Problem der covarianten Collineationen. Auf die Doppelgeraden bezügliche liniengeometrische Probleme.

Im Folgenden ist das Problem der Collineationabzählung mittelst gewisser Örter und Developpabeln gelöst und unter Anwendung von Schlussweisen, die auch principielles Interesse zu erregen geeignet sein dürften.

1. Die Σ wird von der ihr nach $\mathfrak{T}$ entsprechenden F_{11} in der w_7 und daher noch in einer c_4 getroffen, welche der Schnitt mit der Jacobiana $\mathfrak{H}_4$ des Gebüsches L_4 sein muss. c_4+w_7 muss dreifach die α, β, γ, δ treffen, w_7 trifft sie schon zweimal, daher $\mathfrak{H}_4$ einmal:

Der Ort der Doppelpunkte, die mit einem ihrer conjugirten zusammenfallen oder die Jacobiana des Gebüsches L_4 oder der Ort der Doppelpunkte auf den Doppelgeraden, die das Doppelverhältniss 1 tragen, ist eine Fläche vierter Ordnung $\mathfrak{H}_4$, die α, β, γ, δ einfach enthält.

Die ihr conjugirte Fläche wird gemäss *B.* I. 5. von der 4. 11—4. 6—4 = 16. Ordnung sein. Jede (γ_3) trifft die $\mathfrak{H}_4$ in vier freien Punkten, daher $\mathfrak{J}_{16}$ die α vierfach enthält. $\mathfrak{J}_{16}$ trifft die Ebene bcd jedenfalls noch in der $\mathfrak{H}_6$ oder R_1 des in bcd entstandenen Tripelsystemes, welche Doppelpunkte auf $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$ hat. Setzt man $\mathfrak{J}_{16}$ wieder in $\mathfrak{T}$ um, so entsteht zunächst eine Fläche der $\frac{1}{2}(16\ 11-4.\ 4.\ 6-8.\ x-16)=(32-4x)$ Ordnung; da dies 8 sein soll, muss $x=6$ sein. Daher:

Die Doppelpunktepaare der Doppelgeraden, welche Ebenenprojectivitäten vom Doppelverhältnisse 1 tragen, bilden eine Fläche sechzehnter Ordnung durch $a'^6, \ldots d'^6$, welche α, β, γ, δ vierfach und die Kanten der Tetraëder $abcd$, $a'b'c'd'$ doppelt enthält.

Die Curve, in welcher $\mathfrak{H}_4$ die Σ trifft, überträgt sich durch C in eine Curve der zwölften Ordnung τ_{12}, die $\mathfrak{H}_4$ selbst aber in eine Fläche zwölfter Ordnung, welche $a'b'c'd'$ zu vierfachen Punkten und die Kanten von $a'b'c'd'$ zu Doppelgeraden hat, $\mathfrak{U}_{12}$.

Die Flächen Δ_6 berühren alle die feste Fläche $\mathfrak{U}_{12}$ längs einer variablen Curve zwölfter Ordnung τ_{12}, die $a'^4b'^4c'^4d'^4$ enthält.

2. Aus der oben erklärten Bedeutung der $\mathfrak{H}_4$ schliesse ich nun:

Der Ort der Doppelpunktepaare aller Doppelgeraden, welche Träger einer Projectivität von constantem D sind, welche also die Ebenenpaare von $abcd$ und $a'b'c'd'$ in einer Projectivität von constantem D treffen, ist eine Fläche achter Ordnung, X_8, die $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2$ enthält. Alle diese X_8 treffen eine Tetraederebene in einer Curve R'_D des dort nach A. I. 6. entstehenden

Tripelsystems. Da die R'_D sechs variable Doppelpunkte hat, schliessen wir, dass X_8 selbst noch eine Doppelcurve besitzt.

Unter den X_8 ist die zweimal gezählte Jacobiana der L_4, $\mathfrak{H}_4$ für $D=1$, die zweimal gezählte Kernfläche des nach B. I. 1. mit dem Gebüsch verbundenen Ψ_2 Gebüsches für $D=-1$ und die in alle acht Tetraederebenen zerfallende Fläche mit $D=0$, ∞ enthalten.

Ist $t_1 t_2 t_3 t_4$ ein Doppelpunktsquadrupel und trägt $t_1 t_2$ das Doppelverhältniss D der Punkte, so trägt $t_3 t_4$ das Doppelverhältniss D der Ebenenprojectivität. Werden daher die X_8 in der Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ umgesetzt, was Flächen $\frac{1}{2}(8.11-8.6-8)=16$. Ordnung gibt, so kommt:

Die Doppelpunktepaare aller Doppelgeraden, von denen aus die vier Eckenpaare in einer Ebenenprojectivität constanten Doppelverhältnisses D projicirt werden, erfüllen eine Fläche sechzehnter Ordnung, welche α, β, γ, δ vierfach, die Kanten von $abcd$ und $a'b'c'd'$ doppelt enthält, in den Punkten a, b, c, d, a', b', c', d' sechsfache Punkte hat und jede Tetraederebene in einer Curve sechster Ordnung R_D des zum dortigen Tripelsysteme nach A. II. 1. gehörigen covarianten Büschels schneidet. Die allen Werthen von D entsprechenden Y_{16} schneiden jede Tetraederebene in Curven eines Büschels, bilden aber selbst kein Büschel.

Unter den Y_{16} ist für $D=0$, ∞ die in die doppelt gezählten acht Tetraederebenen zerfallende Fläche, ferner die $\mathfrak{J}_{16}$ und eine doppelt gezählte Fläche achter Ordnung für $D=-1$ enthalten, welch' letztere der Kernfläche der Ψ_2-Flächen conjugirt ist. Sie schneidet bcd in der Jacobiana $\mathfrak{H}_3$ des Tripelsystemes in bc, cd db und in α^2.

Die c_4, in welcher Σ die $\mathfrak{H}_4$ trifft, überträgt sich durch $\mathfrak{T}$ in eine Curve 28. Ordnung auf $\mathfrak{J}_{16}$, daher: Die sämmtlichen F_{11} berühren $\mathfrak{J}_{16}$ längs einer variabeln Curve 28. Ordnung.

Die X_8 haben noch die Bedeutung, dass sie die Doppelpunktepaare sämmtlicher in einer Congruenz des ersterwähnten Büschels *B.* I. 2. *b.* enthaltenen Doppelgeraden tragen, die Y_{16} aber sind die Doppelpunktsörter für die Congruenzen des zweiten Büschels.

Man kann Enveloppen von dualer Bedeutung und dualer Beschaffenheit aufstellen und diese auch durch T aus den X_8 und Y_{16} herleiten.

3. Die X_8 schneidet $\mathfrak{H}_4$ in einer freien Curve $4.8-4.2=24$. Grades, durch welche auch die conjugirte Y_{16} gehen muss. Der übrige Schnitt von X_8 und Y_{16} ist $8.16-4.4.2-24=72$. Ordnung und hat zweierlei Provenienz. Die Punkte, welche Doppelgeraden $D_p D_p$ tragen,[1] sind auf X_8 doppelt. Die Endpunkte dieser Doppelgeraden tragen $D_p D_e$ und sind sowohl in X_8 als Y_{16} enthalten, da diese zur X_8 conjugirt ist.

Die Curve $D_p D_p$ hat in der Ebene bcd nur sechs freie Punkte, auf α aber x. In T umgesetzt, muss sie eine Developpable derselben Classe n geben, also gilt: $3n-4x=n$ oder $n=2x$. Somit:

Die X_8 besitzt eine Doppelcurve zwölfter Ordnung mit je sechs Punkten auf α, β, γ, δ, welche die Curve $D_p D_p$ ist, δ_{12}.

Für die Curve $D_p D_e$, welche nun nur zwölf freie Punkte in bcd haben kann, folgt ebenso:

Der Ort der Doppelpunkte $D_p D_e$ ist eine Curve 24. Ordnung mit je zwölf Punkten auf α, β, γ, δ, die einen Theil des Schnittes von X_8 mit der conjugirten Y_{16} bildet, $\mathfrak{J}_{24}$.

Die conjugirte Curve von δ_{12} hat die Ordnung $12.11-4.6.3=60$ und enthält die $\mathfrak{J}_{24}$, somit noch eine Curve 36. Ordnung. Diese enthält die letzten Punkte der besagten Quadrupel, die Punkte $D_e D_e$. Daher:

Die Fläche Y_{16} hat noch eine Doppelcurve 36. Ordnung, welche α, β, γ, δ in je achtzehn Punkten trifft, a, b, c, d a', b', c', d' sechsfach enthält und der Ort der Doppelpunkte $D_e D_e$ ist, δ_{36}.

X_8 und Y_{16} schneiden sich noch in einer Curve 48. Ordnung, sie muss die Doppelpunkte jener Doppelgeraden enthalten, die selbst auch D_e tragen. Dies ergibt:

[1] Unter einem Punkte $D_p D'_p$ verstehe ich einen Doppelpunkt, der zwei Doppelgerade mit den Doppelverhältnissen D, D' der Punktprojectivitäten aussendet.

Der Ort der Doppelpunktepaare auf jenen Doppelgeraden, die dasselbe Doppelverhältniss D in Punkt- und Ebenenprojectivität tragen, ist eine Curve 48. Ordnung, die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in je 24 Punkten trifft und auf jeder der zwölf Tetraederkanten vier Doppelpunkte besitzt, ζ_{48}.

3. Zwei X_8 schneiden sich in einer Curve 8.8—4.4 = 48. Ordnung. Dieselbe muss in zwei entsprechend den Combinationen $D_p D'_p$ und $D_p \frac{1}{D'_p}$ zerfallen. Daher:

Der Ort der Doppelpunkte, von denen aus zwei Doppelgeraden mit gegebenen Doppelverhältnissen D_p, D'_p der Punktprojectivitäten ausgehen, ist eine Curve 24. Ordnung, die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in je zwölf Punkten trifft, u_{24}.

Die u_{24} trifft eine dritte X_8 in 8. 24—12. 4. 2 = 96 weiteren Punkten, die in zwei Gruppen von je 48, entsprechend den Combinationen D_p, D'_p, D''_p, und D_p, $D'_p \frac{1}{D''_p}$ zerfallen.

Man kann aber eine Collineation als vollständig definirt ansehen, wenn man auf drei gegen eine Ecke des Doppelpunktquadrupels convergirenden Doppelgeraden die Doppelverhältnisse der Projectivitäten kennt. Man leitet daraus die D_p für die Gegenkanten her und hat sofort auch die D_e. Eine Collineation im Raume hat daher nur drei absolute Invarianten. Daher:

Es gibt in unserem Gebüsche von Collineationen nur 48 Collineationen mit gegebenen characteristischen Doppelverhältnissen, also derselben Art.

Die δ_{12} schneidet eine X_8 nur in 48 weiteren Punkten, die jedoch nicht in zwei Gruppen zerfallen; denn tragen $t_1 t_2$, $t_1 t_3$, $t_1 t_4$ respective die Doppelverhältnisse D_p, D_p^{-1}, D'_p, so tragen $t_2 t_3$, $t_3 t_4$, $t_4 t_2$ die Doppelverhältnisse D_p^{-1}, $D_p D'_p$, $D_p D'^{-1}_p$. Tragen aber $t_1 t_2$, $t_1 t_3$, $t_1 t_4$ die Doppelverhältnisse D_p^{-1}, D_p, D'_p, so erscheinen auf $t_2 t_3$, $t_3 t_4$, $t_4 t_2$ jetzt D_p^2, $D_p^{-1} D'_p$, $D_p^{-1} D'^{-1}_p$. Das ist aber dieselbe Collineation; demgemäss:

Sind von den Doppelverhältnissen zwei nicht gegenüber liegende einander gleich, so gibt es immer noch 48 zugehöriger Collineationen.

Es sei $t_1 t_2 t_3 t_4$ das Doppelpunktsquadrupel, $t_1 t_2$ trage D_p, $t_1 t_3$ aber D'_p; dann tragen $t_3 t_4$ ein D'_e, und $t_2 t_4$ ein D'_e, somit ist t_4 ein Punkt $D_e D'_e$. Dagegen ist t_2 ein Punkt $D_p D'_e$ und t_3 ein Punkt $D'_p D_e$.

Setzt man nun u_{24} durch $\mathfrak{T}$ um, so kommt eine Curve 24. 11—12. 4. 3 = 12. 10. Ordnung. Von dem Orte 120. Ordnung ist eine Curve u_{72} abzuzählen und die übrig bleibende Curve zerfällt in zwei Curven 24. Ordnung. Demnach:

Der Ort der Doppelpunkte, von denen aus zwei Doppelgeraden mit D_p und D'_e ausgehen, ist eine Curve 24. Ordnung mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als zwölffachen Sehnen, v_{24}.

Ein specieller Fall hievon ist $\mathfrak{F}_{24}$ aus 3. Wird der Schnitt von X_8 mit einer beliebigen Y_{16} gesucht, so bleibt frei die Ordnung 8. 16—4. 2. 4 = 6. 16. Diese Curve zerfällt in zwei v_{24} für D_p, D'_e und D_p, $\frac{1}{D'_e}$ und in eine Curve 48. Ordnung, für die gilt:

Der Ort der Doppelpunktepaare jener Doppelgeraden, welche die Doppelverhältnisse D_p und D'_e tragen, ist eine Curve 48. Ordnung, welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu 24fachen Sehnen und auf jeder Tetraederkante vier Doppelpunkte besitzt.

Sind in einem Doppelpunkte t die Doppelverhältnisse D_e, D'_e, D''_e vorhanden, so tragen die Gegenkanten D_p, D'_p, D''_p, aber es ist in der Ebene $D_p . D'_p . D''_p = 1$, daher:

Die Schnittcurve zweier Y_{16} zerfällt in zwei Curven 72. Ordnung. Durch jede derselben geht eine dritte Y_{16}. Ferner:

Die Punkte, von denen aus die Eckenpaare $aa', \ldots dd'$ durch collineare Strahlenbündel von gegebenen characteristischen Doppelverhältnissen λ, μ, ν $(\lambda\mu\nu = 1)$ projicirt werden, erfüllen eine Curve 72. Ordnung, welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu 36fachen Sehnen hat und 12fach die Punkte $a, \ldots d'$ enthält, u_{72}.

Diese Curven bilden ein lineares ∞^2-System im Raume, durch jeden Punkt geht nur eine Curve. Ich will dieses Mal auch das duale Resultat aussprechen:

Die Ebenen, welche $abcd$, $a'b'c'd'$ in collinearen Systemen schneiden, deren drei characteristische Doppelverhältnisse gegebene Werthe haben, umhüllen eine Developpable 72. Classe, die aa', bb', cc' dd' zu 36fachen Axen und die Ebenen von $abcd$, $a'b'c'd'$ zu 12fachen Ebenen hat.

Sind zwei von den Doppelverhältnissen gleich, so tritt an die Stelle von u_{72} die schon oben genannte δ_{36}.[1]

4. Von besonderer Wichtigkeit ist es, den Schnitt von $\mathfrak{H}_4$ mit $\mathfrak{J}_{16}$ zu untersuchen. Derselbe muss sich in zwei Theile sondern. Der eine, y, ist der Ort der Punkte, in denen je drei Doppelpunkte desselben Quadrupels coïncidiren. Längs ihrer haben $\mathfrak{H}_4$ und $\mathfrak{J}_{16}$ immer drei unendlich nahe Punkte $t_1 t_2 t_3$ gemeinsam, die nicht allineirt eine Berührungsebene von $\mathfrak{H}_4$ bestimmen, berühren sich also. Die andere, z, enthält die Doppelpunkte jener Quadrupel, in denen zweimal zwei coïncidiren.

Die conjugirte Curve von y muss die Doppelcurve von $\mathfrak{J}_{16}$ sein, eine δ_{36}. Ihre conjugirte Curve bekommt die Ordnung $(36.\ 11-18.\ 4.\ 3-8.\ 6.\ 3):3 = 12$.

$\mathfrak{H}_4$ und $\mathfrak{J}_{16}$ berühren sich längs einer Curve zwölfter Ordnung, y_{12}, welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu sechsfachen Sehnen hat und in jeder Ebene $bcd, \ldots.\ a'b'c'$ die sechs Punkte $(\rho)_6$ (A. II. 2) enthält. Sie ist der Ort der in ihren Collineationen dreifach zählenden Doppelpunkte.

Der übrige Schnitt ist von der Ordnung 24.

Der Ort der Punktepaare, von denen jedes zweimal gezählt ein Quadrupel vorstellt, ist eine Curve der Ordnung 24, die α, β, γ, δ zu zwölffachen Sehnen hat und auf jeder Tetraederkante zwei Doppelpunkte besitzt, z_{24}. Die Curve ist vollständig sich selbst conjugirt.

Die δ_{36} der $\mathfrak{J}_{16}$ trifft die $\mathfrak{H}_4$ in weiteren Punkten, in deren jedem alle vier Doppelpunkte coïncidiren. Die z_{24} hat hier drei unendlich nahe Punkte mit $\mathfrak{H}_4$ gemeinsam und osculirt sie. Die α, β, γ, δ absorbiren 4. 18 Schnittpunkte, so dass $(4.\ 36-4.\ 18):3$ die gesuchte Zahl ist.

Es gibt im Gebüsche vierundzwanzig Collineationen, in denen alle vier Doppelpunkte coïncidiren. Diese vierfachen Doppelpunkte sind Osculationspunkte von $\mathfrak{H}_4$ mit $\mathfrak{J}_{16}$ und Doppelpunkte der z_{24}.

5. *a)* Es ist oben eine Curve δ_{12} für die Punkte D_p D_p gefunden worden. Für alle Werthe von D erhält man so ∞^1 Curven, die eine Fläche $\mathfrak{U}^p$ erfüllen. Sie schneidet X_8 in deren Doppelcurve δ_{12}, aber ausserdem in einer Curve δ', deren Punkte zwei gleiche D_p und als drittes das der X_8 tragen.

Eine δ_{12} trifft die X_8 in $12.\ 8-6.\ 4.\ 2 = 12.\ 4$ freien Punkten. Daher schneidet δ' eine X_8 in 48 Punkten von deren Doppelcurve, also insgesammt in 96 Punkten, somit ist $96+4.\ 2x = 8n$, wenn x die Anzahl der Punkte von δ' auf $\alpha, \ldots \delta$ ist. Überdies gilt $n = 2x$ wegen T, somit $n = 24$, $x = 12$. Für U^p gelten nun die Gleichungen

$$2.\ 12+24+8x = 8n \text{ und } n = 4x,$$

woraus $n = 8$, $x = 2$.

Der Ort der Doppelpunkte, welche zwei Doppelgeraden mit gleichem Punktdoppelverhältnisse aussenden, ist eine Fläche achter Ordnug $\mathfrak{U}_8^g$ durch $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$. Sie schneidet jede Tetraederebene in der Curve dritter Ordnung aus *A.* II. 4. Insgleichen enthält sie die Schnittlinien je zweier Ebenen von $abcd$ und $a'b'c'd'$.[2]

Es kann auch direct gezeigt werden, dass die U_8^g die $\alpha, \ldots \delta$ zu Doppellinien hat. Von einem Punkte η auf α gehen 14 Strahlen einer Congruenz D_p aus, sechs davon fallen in die Ebene bcd, sechs in die Ebene $b'c'd'$ und die zwei übrigen müssen auf den Kegel zweiten Grades entfallen, der die $(\eta)_3$ aus η projicirt. Diese Strahlenpaare bilden an dem Kegel eine Involution. Die Endpunktepaare auf $(\eta)_3$ bilden demnach ebenfalls eine Involution, und ihre Verbindungslinien erfüllen eine Fläche zweiter Ordnung φ_2. Anderseits bilden die den η ergänzenden Doppelpunktstripel eine cubische Involution, deren Tripelebenen ein Büschel bilden, dessen

[1] Cf. die citirte Abhandlung 29 und auch IV. 6., wo die successiven Transformirten zur Herleitung angewendet werden.

[2] Die Curve δ' trifft jede dieser Schnittlinien in vier Punkten.

Axe φ_2 in zwei Punkten trifft. Es gibt demnach nur zwei Collineationen, die η als Doppelpunkt und dort zwei gleiche D_p haben. Aus der Duplicität von α folgt dann wieder $n = 8$.

b) Die $\mathfrak{U}^e_8$ hat in den Schnittpunkten jeder Kante mit den beiden nicht entsprechenden Ebenen Doppelpunkte. $\mathfrak{U}^e_8$ nach $\mathfrak{T}$ umgesetzt, gibt eine Fläche der Ordnung $(8.11-4.2.6) = 40$. Diese Fläche zerfällt nun in zwei der Bedeutung nach verschiedene, die ich $\mathfrak{U}^e$ und $\mathfrak{U}^{pe}$ nenne. Ist nämlich t_1 ein Punkt $D_p D_p$ (vergl. 3) so ist t_4 ein Punkt $D_e D_e$, t_2 und t_3 sind Punkte $D_p D_e$. Der Ort der $D_e D_e$ sei $\mathfrak{U}^e$, der Ort der $D_p D_e$ sei $\mathfrak{U}^{pe}$.

Wegen der Doppelpunkte von $\mathfrak{U}^e_8$ auf ab hat die Fläche 40. Ordnung cd zur vierfachen Geraden mit nur zwei verschiedenen Berührungsebenen. Nach dem B. I. 6. a. E. Gesagten sind acd und bcd diese Berührungsebenen. Wegen der nothwendigen Symmetrie ist dann zu schliessen, dass sowohl U^e als U^{pe} die cd zur Doppellinie mit acd, bcd als Berührungsebenen haben werden.

c) Die U^e ist der Ort der sämmtlichen Curven δ_{36} für variables D_e. Sie schneidet eine Y_{16} in deren Doppelcurve δ_{36}, ferner in den δ_{36} zweier anderen Y_{16}, die zu den Doppelverhältnissen $+\sqrt{D_e}$ und $-\sqrt{D_e}$ gehören. Sei nun y die Vielfachheit der Tetraederkanten für U^e, x die Vielfachheit von $\alpha, \ldots \delta$, so gilt $12.2y + 16x + 4.36 = 16n$ oder

$$6y + 2x + 36 = 4n.$$

Ferner gilt wegen $\mathfrak{T}$

$$4x = n.$$

Beide Gleichungen geben $n = 12 + 2y$, woraus folgt, dass y eine gerade Zahl sein muss. U^e habe nun in den Punkten $a, \ldots d'$ die Vielfachheit z, dann gibt sie in $\mathfrak{T}$ als conjugirte Fläche eine der Ordnung $11n - 8z - 24x = 8 + 40 - n$, woraus $6n = 8z = 48$. Dies gäbe für $y = 0$ also auch $z = 0$ einen Widerspruch mit dem Obigen. Man zeigt, dass y nicht 4 sein kann. Übrigens liefert schon *b)* $y = 2$, somit $n = 16$, $x = 4$ Von dem Schnitte mit der Ebene bcd entfällt die Ordnung 4 auf α, 6 auf $bc + cd + db$, ausserdem 3 auf die Berührung in diesen Kanten. Die übrige Schnittcurve dritter Ordnung hat in den Punkten auf $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$ Doppelpunkte, zerfällt also in drei Gerade.

Der Ort der Doppelpunkte, von denen aus zwei Doppelgeraden mit gleichen Ebenendoppelverhältnissen D_e ausgehen, ist eine Fläche sechzehnter Ordnung mit α^4, β^4, γ^4, δ^4, welche alle zwölf Tetraederkanten zu Doppellinien mit den betreffenden Tetraederebenen als Berührungsebenen hat und die zwölf Schnittlinien nicht entsprechender Tetraederebenen enthält, $\mathfrak{U}^e_{16}$. Sie hat die Punkte $a, \ldots d'$ zu sechsfachen Punkten.

Die δ_{36} der Fläche Y_{16} für $D = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$ zieht sich auf eine dreifache Curve zwölfter Ordnung zusammen: diese Curve ist auch dreifach auf der $\mathfrak{U}^e_{16}$.

d) Für $\mathfrak{U}^{pe}$ bleibt die Ordnung 24: Der Ort der Doppelpunkte, von denen aus zwei Doppelgerade D_p, D_e ausgehen, ist eine Fläche 24. Ordnung mit α^6, β^6, γ^6, δ^6, welche alle zwölf Tetraederkanten zu Doppellinien mit den betreffenden Tetraederebenen als Berührungsebenen hat, $\mathfrak{U}^{pe}_{24}$. Die Punkte $a, \ldots d'$ enthält sie sechsfach.

Die $\mathfrak{U}^{pe}$ hat mehrere Doppelcurven: 1. Die Punkte $D_p, -D_p, -D_e$. Das Doppelverhältniss muss $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$ sein, demnach ist die conjugirte Curve der dreifachen Curve von $\mathfrak{U}^e$ eine Doppelcurve für $\mathfrak{U}^{pe}$. 2. Die Punkte $(D_p D'_e)(D'_p D_e)$. Sind $t_1 t_2$, $t_1 t_3$ diese zwei Doppelgeraden, so trägt $t_2 t_4$ $(D_p D'_e)$ und $t_3 t_4$ $(D'_p D_e)$. Dann folgt (vergl. N. 5. *a*), dass $t_2 t_3$ das Doppelverhältniss $(-1)_p$ trägt. Der Ort der Punkte $t_2 t_3$ ist eine Curve zwölfter Ordnung, die ihr conjugirte Curve, der Ort der t_1, t_4 ist ebenfalls von der zwölften Ordnung und eine Doppelcurve für $\mathfrak{U}^{pe}$ 3. Die Punkte $D_p (D_e D'_p) D'_e$. Sind $t_1 t_2$, $t_1 t_3$ $t_1 t_4$ diese drei Doppelgeraden, so tragen $t_2 t_3$, $t_3 t_4$, $t_4 t_2$ respective D'^{-1}_p, D'^3_p, D'^{-2}_p und $t_1 t_2$, $t_1 t_3$, $t_1 t_4$ resp. D'^2_p D'_p D'^4_p. In der Fläche $X^{p'}_8$ befinden sich nun die 48 Schnittpunkte von $X_{p'}$, $X_{p'^2}$, $X_{p'^4}$, die 4.48 Schnittpunkte von $X_{\sqrt{p'}}$, $X_{\sqrt{p'^2}}$, $X_{p'}$ und die zweiten 48 Schnittpunkte von $X_{\sqrt{p'}}$, $X_{\sqrt{p'^4}}$, $X_{p'}$, womit insgesammt 7.48 Schnittpunkte. Für die gesuchte Curve gilt nun

$$n = 2x \text{ und } 7.48 + 8.2x = 4.2x$$

woraus für die Doppelcurve von $\mathfrak{U}^{pe}$ $n = 56$. $x = 28$ folgt.

e) Trägt eine Doppelgerade $t_1 t_2$ die Doppelverhältnisse $D_p D_e$, so gilt dasselbe für $t_3 t_4$ und (vergl. 5. a) in dem Quadrupel erscheint noch ein weiteres Paar solcher Doppelgeraden. Es handelt sich nun um den Ort N aller dieser Doppelpunktsquadrupel. Die zu η von α gehörige $(\eta)_3$ trifft X_8 in zehn freien Punkten, von denen zwei auf die von η ausgehenden Doppelgeraden D_p entfallen, es erscheinen demnach auf $(\eta)_3$ vier weitere Doppelpunktpaare mit D_p. So entsteht in dem Ebenenbüschel, das die Doppelpunktstripel projicirt, eine 2—4-deutige Verwandtschaft, von deren sechs Coïncidenzen je zwei auf ein Quadrupel entfallen, η erscheint dreimal in der Ortsfläche, deren Ordnung $n = 12$ hieraus folgt. Man kann auch anders vorgehen:

Gehen alle vier Punktepaare in Doppelpunkte über, so erhält man als Ort der zu N gehörigen p' drei Flächen zweiter Ordnung, also insgesammt eine Fläche sechster Ordnung. Die Ordnung im allgemeinen Falle ebenfalls gleich sechs gesetzt lehrt, dass im Büschel sechs Collineationen dieser Art enthalten sind. Ist z die Vielfachheit von N in a, so gibt nun $D_6: 24 + 41 + 12x = 6n$, ferner die Umsetzung in $\mathfrak{T}$: $8n - 24x - 82 = 0$ oder $n = 3x + z$. Dies mit $4x = n$ liefert $x = z$ und hiemit $6n = 16x + 24$, welches $n = 12$, $x = 3$ gibt. Da die ζ_{48} alle auf den Tetraederkanten Doppelpunkte haben, schliesst man, dass diese Kanten Doppellinien für N sind. Der übrige Schnitt mit einer Tetraederebene zerfällt dann nothwendig in drei Gerade, Schnittlinien mit drei anderen Tetraederebenen.

Die N_{12} schneidet nun eine X_8 ausser der ζ_{48} in einer Curve 24. Ordnung, welche der Ort jener Doppelpunktsquadrupel ist, von deren drittem Paare Doppelgeraden eine das Doppelverhältniss D_p trägt.

D e r O r t d e r D o p p e l p u n k t s q u a d r u p e l $t_1 t_2 t_3 t_4$, i n d e n e n P a a r e g e g e n ü b e r l i e g e n d e r D o p p e l g e r a d e n m i t g l e i c h e m D_p a u f t r e t e n, i s t e i n e F l ä c h e z w ö l f t e r O r d n u n g, N_{12}, w e l c h e d i e T e t r a e d e r k a n t e n d o p p e l t, α, β, γ, δ d r e i f a c h u n d d i e S c h n i t t l i n i e n d e r n i c h t e n t s p r e c h e n d e n T e t r a e d e r e b e n e n e i n f a c h e n t h ä l t. S i e h a t d i e E c k e n d e r T e t r a e d e r z u d r e i f a c h e n P u n k t e n.

5 a.) Die Resultate des vorigen Artikels finden eine nächstliegende bemerkenswerthe Verwendung. Eine Fläche zweiter Ordnung kann bekanntlich durch ∞^6 räumliche Collineationen (H e r m i t e's c h e S u b s t i t u t i o n e n) in sich selbst übergeführt werden. Dabei gibt es zwei Arten: Die e i g e n t l i c h e n bewahren die Erzeugendensysteme, die u n e i g e n t l i c h e n vertauschen sie.

Es ist aber wichtig, zu erkennen, durch welche bestimmte Beziehungen zwischen den absoluten Invarianten eine gegebene Substitution characterisirt sein muss, wenn sie überhaupt im Stande sein soll, eine und dann gleich ∞ Flächen zweiter Ordnung in sich selbst überzuführen.

E i g e n t l i c h e S u b s t i t u t i o n e n: Die F_2 muss jedenfalls zwei Gegenkantenpaare des Doppelpunktstetraeders enthalten. Sind ζ, η die Schnittpunkte einer Erzeugenden mit $t_1 t_2$, $t_3 t_4$, ζ', η' die der entsprechenden Erzeugenden mit denselben Kanten, so müssen gemäss der projectiven Erzeugung die Doppelverhältnisse $(t_1 t_2\ \zeta\ \zeta')$, $(t_3 t_4\ \eta\ \eta')$ gleich sein. D. h. Soll eine Collineation im Stande sein, eine F_2 unter Bewahrung der Erzeugendensysteme in sich selbst zu überführen, so müssen die Punktdoppelverhältnisse auf zwei Gegenkantenpaaren gleich ausfallen. Somit sind die Doppelpunktsquadrupel aller eigentlichen Substitutionen unseres Gebüsches auf der N_{12} vereinigt.

Durch Übertragung in den Raum R_1 wird aus N_{12} eine Fläche $(12.\ 6 - 4.\ 3.\ 3 - 4.\ 3) : 3 = 8$. Ordnung, woraus das nützliche Resultat: I n j e d e m B ü s c h e l v o n C o l l i n e a t i o n e n g i b t e s a c h t e i g e n t l i c h e H e r m i t e's c h e S u b s t i t u t i o n e n.

U n e i g e n t l i c h e S u b s t i t u t i o n e n: Die eine Erzeugendenschaar muss nach beiderlei Richtungen in die zweite übergeführt werden. Zwei projective Regelschaaren auf derselben Regelfläche erzeugen aber einen Kegelschnitt auf der Fläche; so entstehen zwei Kegelschnitte. Dieselben müssen, wie der genauere Verfolg zeigt, involutorisch in einander transformirt werden. Die Schnittlinie ihrer Ebenen muss eine Doppelgerade sein. Die Schnittpunkte derselben mit F_2, t_1, t_2 sind Doppelpunkte und die Berührungsebenen von F_2 in t_1, t_2 sind Doppelebenen. F_2 schneidet daher die Ebene $t_1 t_3 t_4$ wie $t_2 t_3 t_4$ in zwei Geraden durch t_1 oder t_2, die bezüglich zu $t_1 t_3$, $t_1 t_4$ oder $t_2 t_3$, $t_2 t_4$ involutorisch sind. In jeder der beiden Doppelebenen $t_1 t_2 t_3$, $t_1 t_2 t_4$ dagegen entsteht ein Kegelschnitt, der in sich selbst transformirt wird. Dann müssen aber (cf. A. II. 2. 3.) die Punktdoppelverhältnisse auf $t_1 t_3$ und $t_2 t_3$, sowie auf $t_1 t_4$ und $t_2 t_4$ gleich sein. Daher: D a s D o p p e l t e t r a e d e r einer uneigentlichen Substitution ist so beschaffen, dass zwei Doppelpunkte $D_p D_p$, $-D_p -D_p$ sind, die sie verbindende Doppelgerade aber das Punktdoppelverhältniss -1 trägt. Um die betreffenden Tetraeder in unserem Gebüsche aufzusuchen, wird man die Kernfläche des Ψ_2-Gebüsches (X_8 für $D = -1$) mit U_8^6 zum Schnitt bringen. Hievon hat man eine Curve zwölfter Ordnung für $(-1)_p(-1)_p$ abzusondern, so dass eine Curve zwölfter Ordnung bleibt, die α, β, γ, δ zu sechsfachen Sehnen hat. Übertragen nach R_1 gibt sie eine Curve $(12.\ 4-4.\ 6):2 = 12$. Ordnung:

Die dem p in allen uneigentlichen Hermite'schen Substitutionen des Gebüsches entsprechenden p' erfüllen eine Curve zwölfter Ordnung.

6. Liniengeometrische Probleme. Von den Doppelgeraden, welche eine gegebene Gerade schneiden, trägt jede ein Doppelpunktepaar. Es folgt nun:

Der Ort der zu sämmtlichen Punkten p einer Geraden g gehörigen $\mathfrak{p}_{11}$ oder der Ort der sämmtlichen Doppelpunktepaare, deren Geraden g treffen, ist eine Fläche zehnter Ordnung, G_{10}, welche $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2$, die Tetraederkanten einfach und die g dreifach enthält, die Ebene bcd in der Schnittlinie mit der Ebene $a'g$ und in einer Curve vierter Ordnung trifft, welche die mit dem Schnittpunkte (g, bcd) allineirten Punktepaare des dortigen Tripelsystemes enthält. Die Punkte $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sind für die Fläche dreifache Punkte.

Setzt man G_{10} in $\mathfrak{T}$ um, so findet man eine Fläche vierzehnter Ordnung, G_{14}, welche α^4, β^4, γ^4, δ^4, die Tetraederkanten einfach und in jeder Ebene $bcd, \ldots a'b'c'$ einen Kegelschnitt und eine Γ_5 (s. *A.* I. 6) enthält. Sie hat die der g zugeordnete $\mathfrak{d}_{11}$ zur Doppelcurve.

Ferner gilt: Die von den Doppelpunkten einer G_{10} weiter ausgehenden Doppelgeraden erfüllen eine Strahlencongruenz 34. Ordnung und Classe.

Die g treffenden Doppelgeraden bilden eine Strahlencongruenz vierter Ordnung und vierter Classe. Es frägt sich, was für Congruenz die gegenüber liegenden Doppelgeraden erfüllen. Die $\mathfrak{p}_{11}$ schneidet G'_{14} in $14.\ 11-12-4.\ 4.\ 4-3.\ 8 = 54$ weiteren Punkten. Eine w_7 schneidet G'_{14} in $7.\ 14-12-4.\ 4.\ 2 = 54$ freien Punkten; von diesen sind jedesmal 34 für die verbindenden Doppelgeraden zu tilgen, somit:

Die Strahlencongruenz, welche die Doppelgeraden, die den mit g incidenten gegenüber liegen, enthält, ist von der Ordnung und Classe 10.

7. Die einer $\mathfrak{p}_{11}$ conjugirte Curve hat die Ordnung $(11.\ 11-8.\ 3-4.\ 4.\ 3-12):2 = 13$, enthält die Punkte $a, b, c, d, a', b', c'\ d'$ nicht, hat auf jeder Kante der Tetraeder einen Punkt und schneidet jede α, β, γ, δ achtmal.

Wird nun $\mathfrak{p}_{13}$ mit G_{10} zum Schnitt gebracht, so entstehen $10.\ 13-4.\ 2.\ 8-12$ freie Schnittpunkte, somit nach Abzug der 34 auf die verbindenden Doppelgeraden entfallenden Punkte:

Die den Doppelgeraden eines Complexkegels p gegenüber liegenden Doppelgeraden bilden eine Regelfläche zehnten Grades, welche in den Ergänzungspunkten von p Doppelpunkte besitzt.

Die conjugirte Curve von w_7 wurde schon in II. 5. als $\mathfrak{d}_{17}$ gefunden. Diese schneidet G_{10} in $10.\ 19-12-8.\ 3-10.\ 4.\ 2$ freien Punkten, somit nach Abzug von 34:

Die den Doppelgeraden einer Ebene Σ gegenüber liegenden Doppelgeraden bilden eine Regelfläche zehnten Grades.

8. Die $\mathfrak{p}_{11}$ trifft eine X_8 in $8.\ 11-4.\ 4.\ 2 = 56$ freien Punkten. Hievon sind 28 abzuzählen, welche auf die Doppelgeraden mit constantem D_p entfallen, so dass entsteht:

Die Doppelgeraden, welche von den Doppelpunktepaaren eines constanten D_p ausgehen, erfüllen eine Strahlencongruenz 28. Ordnung.

Die w_7 trifft X_8 in $7.\ 8-4.\ 4 = 10.\ 4$ Punkten, von denen 12 auf Rechnung der constanten D_p zu subtrahiren sind, so dass kommt:

Die oben erwähnte Strahlencongruenz ist von der 21. Classe.

Die u_{72} aus 3. schneidet eine G_{10} in $10.\ 72-8.\ 12.\ 3-4.\ 36.\ 2 = 144$ Punkten, somit: Die von den

Doppelpunkten mit Strahlbündelcollineationen gleicher Art ausgehenden Doppelgeraden erfüllen eine Regelfläche 144. Grades.

Die w_7 schneidet N_{12} in 12. 7—4. 6—12. 2 = 36 freien Punkten. Von diesen 18 Doppelgeraden sind sechs Doppelgerade wesentlich von den anderen verschieden. Ebenso schneidet p_{11} die N_{12} in 11. 32—8. 3—4. 3. 4—12. 2 = 36 freien Punkten, wobei wieder die Theilung eintritt, so dass gilt:

Die Doppelgeraden, welche dasselbe Ebenen- und Punktdoppelverhältniss tragen, bilden eine Strahlencongruenz sechster Ordnung, sechster Classe. Die übrigen vier in diesen Quadrupeln vorhandenen Doppelgeraden bilden eine Strahlencongruenz zwölfter Ordnung, zwölfter Classe.

Die erste dieser Congruenzen habe ich bereits I. 2. *b* erwähnt. In dem Complexe vierten Grades sämmtlicher Doppelgeraden ist eine eindeutig-umkehrbare Verwandtschaft zwischen den Gegenkantenpaaren der Doppelpunktsquadrupel vorhanden. [1] In dieser Verwandtschaft sind die beiden letztgedachten Congruenzen sich selbst zugeordnet.

Wichtig ist ferner, dass sich stets α und $aa', \ldots \delta$ und dd' zugeordnet sind. Das Doppelpunktepaar auf $\alpha, \ldots \delta$ bleibt dabei fest, das auf aa' beschreibt eine Involution.

Ebenso sind die Kantenpaare ab, $c'd'$; ... cd, $a'b'$ einander zugeordnet.

9. Schon in I. 7. wurde gezeigt: Beschreibt die Doppelebene ein Büschel, so beschreibt p' eine der K_4 analoge Curve. Die Doppelpunktscurve zerfällt gemäss T in eine Curve dritter Ordnung der gegenüber liegenden Doppelpunkte und eine Curve neunter Ordnung. Da jede Ebene des Büschels selbst drei Doppelpunkte trägt, so folgt:

Es geschieht sechsmal, dass ein Doppelpunkt und gleichzeitig eine von ihm ausgehende Doppelebene mit einer gegebenen Geraden g incident sind.

Man findet noch:

Die Doppelpunktetripel in den Doppelebenen eines Büschels erfüllen eine Fläche neunter Ordnung, die $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ die zwölf Kanten der Tetraeder doppelt und die Punkte $a, b, c, d, a', b' c' d'$ sechsfach enthält.

10. Mannigfache andere, die Doppelgeraden betreffenden Probleme lassen sich hier stellen, aber für die Beantwortung aller ist im Vorhergehenden das Fundament gelegt worden. Dies wird besonders dann klar, wenn man erwägt, dass alle covarianten Beziehungen an Collineationen sich durch Beziehungen zwischen den Doppelverhältnissen auf den sechs Doppelgeraden ausdrücken lassen. Unter den zahlreichen interessanten Specialuntersuchungen hebe ich nur jene hervor, wo 1, 2, 3, 4 feste Doppelpunkte statt der Punktepaare eintreten.

III.

Das allgemeinste Gebüsch linearer Transformationen zwischen zwei Räumen R_3. Zugeordnete Verwandtschaften und Verwandtschaftsgebüsche.

1. Zwei collineare Beziehungen zwischen zwei Räumen R, R' besitzen stets vier gemeinsame Punktepaare. Entsprechen einem Punkte p von R die Punkte p'_1, p'_2 von R', so bestimmen $p'_1 p'_2$ einen Complex zweiten Grades. Jede Collineation, welche dieselben festen Punktepaare $\beta_1 b_1, \ldots \beta_4 b_4$ besitzt und den Transformirten von p auf die Gerade $p'_1 p'_2$ bringt, bringt den Transformirten jedes R-Punktes auf die zugehörige Complexgerade von R'. Ich nenne diese ∞^1 Collineationen ein Büschel.

2. Drei collineare Beziehungen zwischen R, R' geben in derselben Art, wie man dies von den Curven her kennt, Anlass zur Bildung von ∞^2-Büscheln von Collineationen. Dann kommt man auf eine geschlossene Mannigfaltigkeit von ∞^2 Collineationen, von der ich sage, dass sie ein Netz bilde. Jeder Punkt von R trans-

[1] Es ist eine involutorische Verwandtschaft unter Elementenpaaren einer drei-dimensionalen Mannigfaltigkeit vierten Grades.

formirt sich jetzt in irgend einen Punkt einer ganzen Ebene π. Die Ebenen π stehen mit den Punkten p in cubischer Verwandtschaft, für welche es in R eine Fundamentalcurve c^6 und in R' eine Fundamentaldeveloppable c'_6 gibt. Jedes Punktes von c^6 Transformirte sind nur auf einer Geraden vereinigt und diese ist dreifache Axe von c'_6. Ein solcher Punkt mit einem Transformirten bestimmt noch keine Collineation, sondern nur ein Büschel.

Die Punktquadrupel β aller Büschel des Netzes sind auf c^6 und die Ebenenquadrupel der vier Punkte b in R' sind an c'_6 vereinigt.

3. Man kann aus vier Collineationen R, R' auf demselben Wege wie bei den Flächengebüschen[1] ein Gebüsch von Collineationen herstellen. Es entsteht dann eine geschlossene Mannigfaltigkeit von ∞^3 Collineationen, in welcher ∞^4 Büschel und ∞^3 Netze enthalten sind. Einem beliebigen Punkte p von R macht das Gebüsch die sämmtlichen Punkte von R' entsprechend.

Es gibt[2] eine Fläche vierter Ordnung in R, F_4, deren Punkte ihre Transformirten nicht beliebig im Raume, sondern auf bestimmten Ebenen vereinigt haben. Diese Ebenen umhüllen eine Fläche vierter Classe Φ^4 in R'. Den ∞^3 Netzen des Gebüsches (den ∞^2 Ebenen des Raumes R', welche p zugewiesen sein können) entsprechend, muss F eine ∞^3-Schaar Nöther'scher c^6 enthalten, welche Fundamental-c^6 der entsprechenden cubischen Verwandtschaften sind.

4. Ich will nun einen anderen (auch bei höheren Transformationen zulässigen) Weg zur Herstellung des allgemeinsten Gebüsches einschlagen.

a) Das Gebüsch mit vier festen Punktepaaren ist vollständig untersucht. Beschreibt der einem festen Punkte p entsprechende p' eine Gerade, die Collineation ein Büschel (siehe 1), so beschreibt auch der zu q gehörige q' eine Gerade: Die Verwandtschaft zwischen $p'q'$ ist eine Collineation. In dem Büschel gibt es vier singuläre Collineationen, deren singuläre Punkte $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, singuläre Ebenen hingegen B_1, B_2, B_3, B_4 in R' sind. b_1, b_2, b_3, b_4 sind die Doppelpunkte der Collineation $p'-q'$. Dies gibt nun: Vier feste Punktepaare und die Angabe dreier Punkte, die auf bestimmte Ebenen gebracht werden sollen, bestimmen eine Collineation eindeutig.

b) Sind nun drei Punktepaare βb und drei Elementenpaare gegeben, so bestimmt jedes weitere Punktepaar eine einzige Collineation. Nehmen wir zwei solche Collineationen und verbinden alle Paare p'_1, p'_2 die einem Punkte p entsprechen, durch Gerade, so bilden diese Geraden einen Strahlencomplex zweiten Grades. Dieser Complex bestimmt bezüglich p ein Büschel von Collineationen, die sämmtlich den Bedingungen genügen. Wir haben so ein im Systeme enthaltenes Büschel von Collineationen erhalten und p' q' stehen jedenfalls in collinearer Beziehung. Wie in *e*) zeigt man auch hier, dass das System ein Gebüsch ist. Zuvörderst schliessen wir:

Drei feste Punktepaare und sechs Elementenpaare bestimmen eine Collineation eindeutig. Jedes Büschel des Gebüsches hat ein viertes Paar entsprechender Punkte fest $\beta_4 b_4$. Die Punkte, welche dem β_4 und q in den Collineationen des Gebüsches entsprechen, stehen in Collineation; in dieser kommt es vor, dass ein Punkt, b_4, einer ganzen Geraden entspricht, die Collineation muss singulär sein, die singuläre Ebene (des Raumes R') geht durch b^4. Somit: Einem Punkte β^4 entsprechen nur Punkte einer bestimmten Ebene. Er bestimmt mit einem Punkte dieser Ebene erst ein Büschel, also ∞^2 Büschel. Da es aber ∞^4 Büschel im Gebüsche gibt, wird es ∞^2 Punkte β^4 in R geben. Dieselben sind als feste Punkte für die ∞^4 Büschel identisch mit den singulären Punkten der in den Büscheln und somit im Gebüsche enthaltenen singulären Collineationen.

c) Sind nunmehr zwei feste Punktepaare und sechs Elementenpaare gegeben, so bestimmt nach *b*) jedes weitere Punktepaar eine einzige Collineation. Das aus zwei Collineationen construirte Büschel ist wieder ganz im Gebüsche enthalten und man findet wie vorhin: Die zwei Punkten p, q entsprechenden p', q' stehen in collinearer Verwandtschaft. Hieraus folgt zuvörderst:

Zwei feste Punktepaare und neun Elementenpaare bestimmen eine einzige Collineation.

---

[1] Cf. Reye, Geometrie der Lage, II. Theil.

[2] Nach Cremona „Geometrische Theorie der Oberflächen" 138. Dort finden sich (für den allgemeinen Fall) auch die hier untersuchten Curvensysteme bereits angedeutet. Eine Übertragung des dortigen Gedankenganges findet man in einem neuerdings erschienenen Aufsatze von F. Schur, Math. Ann. 18 Bd., p. 1, wo nach anderer Richtung mancherlei Neues anzutreffen ist.

d) Dem zufolge lässt sich ein Gebüsch mit einem festen Punktepaare und neun Elementenpaaren construiren, aus dem man wie bisher stets schliesst:

Ein festes Punktepaar und neun Elementenpaare bestimmen eine einzige Collineation.

e) Wir sind nunmehr bei dem Gebüsche angelangt, dem zwölf feste Elementenpaare zu Grunde liegen. Ein Paar entsprechender Punkte pp' bestimmt nach *d)* eine Collineation. Zwei Collineationen bestimmen ein Büschel, dessen sämmtliche Collineationen in dem Gebüsche enthalten sind. Nehmen wir irgend vier Collineationen, die den Bedingungen genügen und construiren aus ihnen nach 3. ein Gebüsch von Collineationen, so haben alle ∞^3 Collineationen desselben die zwölf festen Elementenpaare, befriedigen demnach unsere Bedingungen. Die Identität der beiden ∞^3-Systeme ist nachgewiesen.

Ganz wie in *b)* schliessen wir nun, dass jeder Punkt β^4 auch singulärer Punkt einer singulären Collineation des Gebüsches ist.[1]

Der Ort der Punkte in R, welche als Quadrupel fester Punkte eines Büchels auftreten können, ist eine Fläche vierter Ordnung, F_4. Diese Punkte sind gleichzeitig die singulären Punkte aller ∞^2 im Gebüsche enthaltenen singulären Collineationen und auch jener Punkte, denen nicht beliebige Punkte von R', sondern nur Punkte einer bestimmten Ebene entsprechen können. Jedem β, als singulärem Punkte, entspricht eine singuläre Ebene B von R' und eine feste Ebene nach der anderen Beziehung, C. Die Ebenen B und C umhüllen in R' eine Fläche vierter Classe Φ^4.

Im Gebüsche *a)* zerfällt F_4 in vier Ebenen, Φ^4 in vier Punkte; bei *b)* in die Ebene $\beta_1\beta_2\beta_3$ und eine F_3 mit Doppelpunkten in β_1, β_2, β_3, Φ^4 in die drei Punkte $b_1 b_2 b_3$ und einen vierten Punkt b_4; bei *c)* ist F_4 eine Fläche vierter Ordnung mit $\beta_1\beta_2$ als Doppelgeraden und β_1, β_2 als dreifachen Punkten, Φ^4 zerfällt in die Punkte b_1, b_2 und eine Fläche zweiter Classe durch $b_1 b_2$; bei *d)* hat F_4 in β_1 einen dreifachen Punkt, Φ^4 zerfällt in b und eine Fläche dritter Classe. In allen Fällen *a)* bis *e)* geht F_4 durch die Punkte in R', welche in die Elementenpaare eintreten, Φ^4 berührt die zugehörigen Ebenen.[2]

5. Es bestehen also zwischen F_4 und Φ^4 zwei wichtige ein-eindeutige Beziehungen β-B und β-C. Wir haben ferner auf F_4 β-Quadrupel und ihnen entsprechend an Φ^4 B-Quadrupel erhalten.

Den ∞^3 Netzen entsprechend, folgt: Die Punkte β entsprechen den Ebenen C in ∞^3 cubischen Verwandtschaften. Jede derselben besitzt im Raume R eine Fundamentalcurve b^6 und die F_4 enthält ∞^3 Curven b^6. Je zwei davon schneiden sich in vier Punkten eines β-Quadrupels, Duales findet an Φ^4 statt, wo man $\infty^3 b'_6$ erhält.

6. Durch fünf Collineationen wird ein ∞^4-System, durch sechs ein ∞^5-System construirt. Im ersteren findet sich eine Curve zehnter Ordnung des R, deren Punkte ihre sämmtlichen Transformirten auf bestimmten Ebenen haben und im zweiten gibt es nur noch 20 Punkte dieser Art.

Bei 1 Coll.	entsprechen ∞^3 (allen) P.	∞^2 feste Ebenen,	keinem Punkte	eine sing. Ebene.
Beim ∞^1 Syst.	∞^3 P.	∞^1 „	4 Punkten	1 „
∞^2 „	∞^3 „	1 „	∞^1 „	1 „
∞^3 „	∞^2 „	1 „	∞^2 „	1 „
∞^4 „	∞^1 „	1 „	∞^3 „	1 „
∞^5 „	20 „	1 „	∞^3 „	1 „

7. Wir übertragen alle diese Betrachtungen in dualer Umformung auf die linearen Transformationen zwischen ungleichartigen Räumen und verwenden für F_4 und Φ^4 den Namen „conjugirtes Flächenpaar".

---

[1] Ich gab oben nur in grossen Zügen die wichtigsten Momente für die Herstellung eines geometrischen Weges an. Das Gegebene lässt eine weite Ausdehnung zu.

[2] Man vergl. für diese Örter Sturm's ausgezeichnete Abhandlung: „On correlative Pencils". Proc. of the Lond. Math. Soc. Vol. VIII. 99. 100.

8. Covariante Verwandtschaften und Verwandtschaftsgebüsche des gegebenen Gebüsches.

a) $\mathfrak{p}'$—$\mathfrak{q}$. Es sei in R ein fester Punkt p, in R' ein fester Punkt q' gegeben. In jeder Collineation des Gebüsches entspricht dem p ein p', dem q' ein q. Bewegt sich p' in einer Geraden, die Collineation in einem Büschel, so beschreibt q' eine Raumcurve dritter Ordnung [1] durch $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$. Bewegt sich p' in einer Ebene, so beschreibt q' eine Fläche dritter Ordnung. Die Verwandtschaft ist umkehrbar vom dritten Grade. Von q' geht an Φ^4 ein Kegel vierter Classe. In einer singulären Collineation, welche eine dieser Ebenen zur singulären Ebene hat, entspricht dem p ein Punkt der Ebene, dem q' eine Gerade. Nimmt man ferner eine dieser Ebenen als C, so entspricht ihr auf F_4 ein gewisser Punkt β, $\beta q'$ bestimmen ein Büschel, in welchem p' eine Gerade beschreibt. Somit folgt:

Die von einem Punkte q an Φ^4 gehenden Tangentenebenen als C genommen, liefern als Ort der Punkte β auf F_4 eine Nöther'sche Curve c^6. So entsteht eine neue Schaar von ∞^6 c^6 auf der Fläche.

Die einem festen Punkte p von R in den singulären Ebenen eines Tangentenkegels von Φ^4 entsprechenden Punkte erfüllen eine c^6.

[Die in Rede stehende Verwandtschaft [2] hat acht Doppelpunkte. Dies sind die ersten Transformirten für p, für welche q der zweite Transformirte ist (s. IV. 4.). Für den Fall coïncidenter R und R' hat man demnach: Eine cubische Verwandschaft mit Fundamental-c^6 hat acht Doppelpunkte, welche associirte Punkte in einem Gebüsche von Flächen zweiter Ordnung sind.] [3]

Verändert sich nun q', so ändert sich auch die cubische Verwandtschaft V_p. Durch ein Punktepaar p'—q ist auch q', somit die Verwandtschaft selbst bestimmt. Wir sagen V_p beschreibt ein Gebüsch.

Die in einem Punkte p von R in den ∞^2 singulären Collineationen entsprechenden Punkte erfüllen eine Fläche vierter Ordnung, F_p.

Es gilt nun: Alle Verwandtschaften V_p des neuen Gebüsches führen dieselben Punktepaare von F_4 und F_p in einander über.

b) $\mathfrak{p}'$—$\mathfrak{E}$. Es sei ein fester Punkt p in R und eine feste Ebene E' in R' gegeben.

Die ihnen entsprechenden p', E stehen in linearer Verwandtschaft, R_p. Beim Variiren von E' beschreibt R_p ein Gebüsch von Correlationen. Das conjugirte Flächenpaar ist F_4 und F_p.

Man sieht, dass das a. E. von *a)* aufgetretene Gebüsch V_p zu dem Gebüsch R_p in der dualen Beziehung derjenigen steht, welche das in 5. bemerkte Gebüsch cubischer Verwandtschaften zu dem ursprünglichen Gebüsch von Collineationen hat. [4]

[Sind R, R' coïncident, so hat jede Correlation V_p eine Incidenzfläche zweiter Ordnung. Diese ist der Ort der Punkte p', welche p'' auf die Ebene E bringen. S. N. 4.]

c) $\mathfrak{p}'$—$\mathfrak{q}'$. Sind zwei Punkte p, q in R fest, so stehen die ihnen in den Collineationen des Gebüsches entsprechenden p', q' in Collineation. Dabei entspricht die Fläche F_p, von der in *a*, gesprochen wurde, Punkt für Punkt der Fläche F_q.

Ändert sich nun q in R, so nimmt die Collineation K_p alle Lagen in einem Gebüsche an. Das conjugirte Flächenpaar des Gebüsches K_p besteht aus F_p und Φ^4, wobei jede singuläre Ebene von Φ^4 dem in ihr liegenden p', wie in 5. die Ebene C dem Punkte β zugewiesen ist.

Interessant und wesentlich ist, dass in diesem Falle die conjugirten Flächen in solcher gegenseitiger Lage sind, dass jeder Punkt mit seiner Ebene C incident ist.

Für das Gebüsch K_p sind die beiden Räume nothwendig coïncident. Doppelpunkte einer solchen Collineation können nur die dem Strahle pq in den vier singulären Collineationen entsprechenden Punkte sein, deren singuläre Punkte die Schnittpunkte von pq mit F^4 sind. Variirt q auf diesem Strahle, so bleibt demnach das

---

[1] Dies lässt sich beim Gebüsch mit vier festen Punktepaaren unter Zuhilfenahme der collinearen Strahlbündel a, a'; ... beweisen.

[2] Ihr dual ist die Verwandschaft zwischen E—F' bei zwei festen Ebenen E', F.

[3] Cf. meine Ableitung in C. R. 17. Mai 1880.

[4] Es sind dies die ersten Spuren der linearen Systeme von Verwandtschaften höherer Ordnungen.

Doppelpunktsquadrupel fest und es gibt in dem Gebüsche von K_p überhaupt nur ∞^2 Doppelpunktsquadrupel. Jedes bestimmt ein Büschel von K_p und ihr Ort ist die Fläche F_p.

Ich werde noch weiterhin von dem Gebüsche K_p einen wichtigen Gebrauch machen.[1]

d) **p′—E.**[2] Sind in R ein fester Punkt p und eine feste Ebene E gegeben, so stehen p', E' in cubischer Verwandtschaft E_p. In den singulären Collineationen, deren singuläre Punkte in der Schnittcurve von E und F_4 liegen, entspricht dem p ein Punkt p', der E ein Ebenenbüschel. Somit:

Die einem Punkte p in den singulären Collineationen, deren singuläre Punkte in E liegen, entsprechenden p' erfüllen eine Nöther'sche c^6. Sie ist die Fundamentalcurve von E_p im Raume p'.

Ferner: Es gibt ∞^1 Büschel des ursprünglichen Gebüsches, welche ein ganzes Tripel ihres β-Quadrupels in E haben. In jedem dieser Büschel entspricht der E eine feste Ebene, dem p eine Gerade von p'. Somit: Die Ebene E ist Ebene von ∞^1 β-Quadrupeln, die ∞^1 ihr in diesen Büscheln entsprechenden Ebenen B erfüllen eine Developpable c'_6.

Ändert sich nun E, so beschreibt E_p ein Gebüsch dualer, cubischer Verwandtschaften, welche sämmtlich die Punkte von F_p in die mit ihnen incidenten B von Φ^4 überführen.

Ändert sich p bei fester E, so erhält man wieder ein Gebüsch dualer, cubischer Verwandtschaften. Dieses Gebüsch besitzt nämlich wie ein Gebüsch von linearen Transformationen im eigentlichen Sinne des Wortes ein conjugirtes Flächenpaar. Jede E_p bringt eine Ebene B von Φ^4 aus dem Raume E' in einen Punkt derselben Ebene B des Raumes p'. Die Flächen sind also hier Ebene für Ebene identisch, Φ^4.

e) **p—q.** Nach *a)* erfüllen die den Ebenen C durch den festen Punkt p' entsprechenden β auf F_4 eine c^6. So entstehen ∞^1-Collineationsbüschel, in deren jedem dem q' eine Raumcurve dritter Ordnung entspricht. Einem beliebigen Punkte 5 von R entsprechen in diesen Büscheln die Geraden einer Regelfläche achter Ordnung (nach *a)* und diese setzt sich nach p'—q *(c)* in eine Fläche 24. Ordnung um, f_{24}.

Die den Ebenen B durch q' entsprechenden β auf F_4 erfüllen eine Curve vierzehnter Ordnung (vergl. auch 13). In diesen singulären Collineationen entsprechen dem p' nur die Punkte β, dem q' hingegen die Geraden einer Regelfläche achter Ordnung.

In den vier singulären Callineationen, deren Ebene B durch $p'q'$ geht, entspricht p', sowie q' den Punkten je einer Geraden. In einem Netze von Collineationen entspricht dem p' wie dem q' vermöge *a)* in R eine Fläche dritter Ordnung, woraus die (beiderseitige) Ordnung der Verwandtschaft p—q als $^1/_3$ $(24+3)$ folgt. Im Ganzen:

Die Verwandtschaft p—q ist von der neunten Ordnung. Sie hat in jedem Systeme eine Fundamentalcurve sechster eine vierzehnter Ordnung; der ersteren entspricht als Fundamentalfläche eine f_{24}, der letzteren eine Regelfläche achter Ordnung. Eine Linearfläche neunter Ordnung enthält die c^6 dreifach, die c^{14} einfach. Eine Linearcurve neunter Ordnung trifft c^6 in 24, c^{14} in acht Punkten. Ferner gibt es in jedem Systeme vier Fundamentalgerade ohne Fundamentalfläche, die allen Punkten der entsprechenden zugeordnet sind. Die Punkte von F_4 entsprechen sich selbst.[3]

f) **q—E′.** Auch diese Verwandtschaft ist von der neunten Ordnung. Sie hat als Fundamentalcurven im Systeme q die Schnittlinie vierter Ordnung von E und F_4 und die dem C-Kegel in q' entsprechende c^6 auf F_4, sowie duale im Systeme E. Ferner gibt es vierzehn Gerade im Systeme q, welche den sämmtlichen Ebenen je einer von vierzehn Geraden des Systemes E entsprechen. Sie entstehen aus den vierzehn singulären Collineationen, deren β in E sind.[4]

---

[1] Die Verwandtschaft E—F bei zwei festen Ebenen E. F ist der obigen dual.

[2] Dual zu p'—E' ist die Verwandschaft q—E bei einem festen Punkte q' und einer festen Ebene E'.

[3] Zur Verwandtschaft *e)* dual ist E'—F'.

[4] Ähnliche covariante Verwandtschaften sind bei dem Netze von ebenen Collineationen nach A. IV. einzuschalten. Diese Verwandtschaften können als Grundlage für die Characteristikenrechnung dienen.

p*

Die cubische Verwandtschaft in 8. *d)* kann dadurch specialisirt werden, dass man p und E incident annimmt. Dann sind nothwendig auch p', E' immer incident.

Man erhält dann eine cubische Verwandtschaft von der eigenthümlichen Lage im Raume, dass jeder Punkt des Punktraumes mit der entsprechenden Ebene des Ebenenraumes incident ist. Eine solche Verwandtschaft kann nach dem Vorgange von Möbius für die lineare Verwandtschaft mit Fug als ein Nullsystem bezeichnet werden.

Ich weise ein näheres Eingehen auf solche Verwandtschaften einstweilen von der Hand und hatte nur die Absicht, das Auftreten solcher Nullsysteme höherer Ordnung zu constatiren.

10. Ich wende mich zu einer genaueren Betrachtung der zwischen F_4 und Φ^4 obwaltenden Correspondenzen. In 3. war eine ∞^3-Schaar von b^6 und in 8. *a* eine ∞^3-Schaar von c^6 auf F_4 gefunden worden. Vier durch eine Gerade gehenden Ebenen C an Φ^4 entsprechen vier Punkte β auf F_4, von denen wir sagen, dass sie ein β-Quadrupel bilden. Setzt man das ganze Ebenenbüschel aus R' nach der cubischen Verwandtschaft zwischen β und C um, so folgt:

Jedes β'-Quadrupel liegt auf ∞^3 Raumcurven dritter Ordnung, von denen jede die F_4 in acht weiteren Punkten trifft, durch die eine b^6 geht.

Ein Ebenenbündel von R' gibt umgesetzt eine Fläche dritter Ordnung in R, daher:

Jede b^6 liegt mit jeder c^6 auf einer Fläche dritter Ordnung. Zwei c^6 treffen sich in einem β'-Quadrupel. Irgend zwei solche Flächen haben eine c^9 gemeinsam, welche F^4 in 36 Punkten trifft und da sich die beiden b^6 und die beiden c^6 in je acht Punkten treffen, so folgt: eine b^6 und eine c^6 schneiden sich in vierzehn Punkten.

Ist β_1 angenommen, so ist für das betreffende Büschel auch B_1 fest. Der Schnittpunkt von $B_2 B_3 B_4$ ist b_1, und b_1 befindet sich in C. Dual übertragen, heisst dies:

Die Ebenen der einen Punkt β_1 zu β-Quadrupeln ergänzenden Tripel laufen durch einen festen Punkt γ von F_4, welcher die Ebene B_1 von β_1 als C besitzt. Sind vier Punkte β in gerader Linie, β', β'', β''', β'''', so entspricht jedem der Punkte β'', β''', β'''' in der singulären Collineation mit β' als singulärem Punkte derselbe Punkt, die den $\beta''\, \beta'''\, \beta''''$ entsprechenden Ebenen C'', C''', C'''' gehen durch diesen Punkt und schneiden sich also auf B'. Dual übertragen, kommt:

Ist von einem β'-Quadrupel (s. 10) ein Punkt fest, so laufen die Ebenen der ergänzenden Tripel durch einen festen Punkt von F_4, der zu jenem γ als β gehört.

11. Das Verhalten der β-Quadrupel auf F_4 kann eingehend studirt werden, indem man F_4 Punkt für Punkt auf eine andere Fläche abbildet. Die einem Punkte p in den singulären Collineationen entsprechenden p' erfüllen die F_p (s. 8. *a. E.*). In jedem Büschel sind vier singuläre Collineationen enthalten. Demnach: Vier Punkte eines β-Quadrupels der F_4 bilden sich in vier allineirte Punkte p' der F_p ab.

Durch zwei Punkte β_1, β_2 sind zwei singuläre Collineationen, damit aber das ganze Büschel und auch das Quadrupel bestimmt.

Da die Verwandtschaft zwischen F_4 und F_p dieselbe wie zwischen β und C ist, so folgt, dass einer ebenen Schnittcurve von F_4 eine Nöther'sche c^6 auf F_p entspricht. Ebenso entspricht einer ebenen Schnittcurve von F_p eine Nöther'sche c^6 auf F_4 und zwar sind dies gemäss dem ersten Satz aus 8. *a)* die b^6.

In jeder Ebene durch γ liegt ein Ergänzungstripel von β_1. Beschreibt die Ebene ein Büschel mit der Axe a, welche F_4 in $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ schneidet, so ist der Ort dieser Tripel eine Nöther'sche Curve. Denn kommt β_2 nach α_1, so muss die Ebene $\beta_2 \beta_3 \beta_4$ auch durch γ_1, also durch $\alpha_1\, \gamma_1$, durch a gehen. Die Curve geht jedenfalls durch β_1, weil in der Ebene $\beta_1 a$ ein Tripel nur dann möglich ist, wenn einer seiner Punkte mit β_1 coïncidirt. Es ist klar, dass dies sofort gibt: Die sämmtlichen b^6, von welchen eine dreipunktige Secante durch einen festen Punkt γ_1 von F_4 geht, laufen durch den zu γ_1 gehörigen Punkt β_1.

Nimmt man zu einem Punkte β_1 in jeder möglichen Richtung einen unendlich nahen Punkt β_2, welches ist dann der Ort der Paare $\beta_3\, \beta_4$? Er überträgt sich nach F_p in die Schnittcurve mit der Berührungsebene von F_p in dem dem β_1 entsprechenden p'. Er ist aber nichts Anderes als der vorhin gefundene Ort für den Fall, dass a mit $\beta_1\, \gamma_1$ identisch wird.

Es gibt eine einzige Curve b^6, die in einem Punkte β_1 einen Doppelpunkt besitzt. Sie enthält auch die Schnittpunkte von F_4 mit der Geraden $\beta_1\gamma_1$, und $\beta_1\gamma_1$ ist ihre einzige dreipunktige Secante, die im Doppelpunkte aufsteht. Sie ist der Ort der den zweimal gezählten β_1 zu β-Quadrupeln ergänzenden Punktepaare.

Die Curve ist folglich hyperelliptisch. Die Ebenen, welche die Tangenten $\beta_1\beta_2$ mit α verbinden und die Ebenen $\gamma_1\beta_3\beta_4$ stehen in Projectivität. In dieser gibt es zwei Coïncidenzen. Es darf aber nicht eintreten, dass die vier Punkte eines β-Quadrupels in einer Ebene liegen; dies wird nur verhindert, wenn $\beta_1\beta_4$ mit der Geraden $\beta_1\gamma_1$ zusammenfällt. Hieraus folgt:

Es gibt zwei β-Quadrupel, welche β_1 dreimal gezählt enthalten. Die jedesmaligen vierten Punkte sind die Schnittpunkte von $\beta_1\gamma_1$ mit F_4.

Da aber vier allineirte Punkte von F_4 sich nach F_p in vier Punkte eines Quadrupels zweiter Art übertragen, drei zusammenfallende Punkte β von F_4 eine Inflexionstangente von F_p hervorrufen, so folgt das merkwürdige Resultat für F_p, welches ich gleich für F_4 ausspreche:

Jeder Punkt von F_4 bildet mit den beiden Punkten, in denen seine Inflexionstangenten die F_4 treffen, ein Tripel eines β-Quadrupels. Der vierte Punkt ist der zu jenem als γ gehörige Punkt β. Oder:

Kommt in einem β-Quadrupel ein Punkt β und sein Punkt γ vor, so sind die übrigen beiden β-Punkte die Schnittpunkte von F_4 mit den Inflexionstangenten in γ.[1]

Es gibt demnach ∞^2 besondere Büschel in dem Collineationsgebüsch. Das entsprechende B-Quadrupel in R' muss die duale Beschaffenheit haben. Somit:

Lässt man einen Punkt β von F_4 dem Berührungspunkte b der zugehörigen Ebene C mit Φ^4 entsprechen, so entsteht ein Büschel von Collineationen. Jede Collineation desselben führt die Inflexionstangenten der F_4 in β in die Inflexionstangenten der Φ^4 in b (mit der Tangentenebene C) über.

12. Jeder β auf F_4 kann auch als einfacher Punkt eines dreipunktigen Quadrupels angesehen werden und zwar unendlich oft. Ihnen entsprechen auf F_p Tangenten, welche durch einen festen Punkt p' gehen. Die Berührungspunkte bilden eine Curve zwölfter Ordnung, die in p' einen Doppelpunkt hat. Da sich in einer cubischen Verwandtschaft V_p diese Curve in eine $3.12-3.6 = 18$. Ordnung auf F_4 umsetzt, folgt:

Die Punkte, welche doppelt gezählt mit β_1 in einem β-Quadrupel vorkommen, erfüllen eine Curve 18. Ordnung mit einem Doppelpunkte in β_1.

Da von einem Punkte p' der F_p achtzehn Inflexionstangenten an diese gehen, so folgt:

Jeder Punkt β ist Glied von achtzehn Quadrupeln, die aus ihm und einem dreifach gezählten Punkte bestehen.

Bedenkt man, dass die Verbindungslinie zweier solcher Punkte zugleich eine Verbindungslinie $\beta\gamma$ ist, und dass jeder Punkt einen β und einen γ besitzt, so folgt:

Die Strahlencongruenz, welche von den Verbindungslinien der β, γ gebildet wird, ist von der 20. Ordnung.

Einer vierpunktigen Tangente von F_p entspricht auf F_4 ein ganz coïncidentes β-Quadrupel. Die Berührungspunkte vierpunktiger Tangenten bilden eine Curve 80. Ordnung, die der vollständige Schnitt von F_4 mit einer Fläche 20. Ordnung ist.[2] Eine c^6 wird von ihr in 120 Punkten getroffen und sie setzt sich daher nach F_4 in eine Curve $3.80-6.20 = 120$. Ordnung um:

Die Punkte auf F_4, welche vierfach gezählt, β-Quadrupel ergeben, bilden eine Curve 120. Ordnung, die jede c^6 der zweiten Schaar in 120 Punkten trifft.

[1] Dies zeigt deutlich, dass hier die Correspondenzen innig mit der F_4 verwachsen sind, was bei der C_3 noch nicht der Fall ist.

[2] Clebsch Cr. Borch. J. Bd. 58, p. 93.

Andererseits besitzt die F_p eine parabolische Curve der 32. Ordnung, welche der Schnitt mit der Hessiana achter Ordnung ist, daher jede c^6 in 48 Punkten trifft. Die Tangentenebene der F_p in einem ihrer Punkte schneidet F_p in einer Curve mit Spitze, folglich durch Umsetzung nach F_4:

Unter den b^6 der F_4 gibt es ∞^1, welche eine Spitze besitzen; der Ort dieser Spitzen ist eine Curve der 18. Ordnung, welche jede c^6 in 22 Punkten trifft.

Hat aber b^6 eine Spitze in β, so fallen die Doppelebenen der von $\beta\gamma$ nach 11. *(a. A.)* getragenen Ebenenprojectivität zusammen, die Durchstosspunkte mit F_4 müssen zusammenfallen; demnach:

Diejenigen Strahlen der Strahlencongruenz $\beta\gamma$, die F_4 anderweitig berühren, haben ihre Punkte β in einer Curve 18. Ordnung; diejenigen, welche in einem ihrer Endpunkte berühren, haben ihre Punkte β auf der vorhin erwähnten Curve 120. Ordnung.

Eine ähnliche Abbildung der β'-Quadrupel auf die Φ^4 hätte in ähnlicher Weise direct hergestellt werden können, indem je vier solche Punkte vier convergenten Ebenen C der Φ^4 entsprechen.

13. Jede Ebene durch $\beta\gamma$ schneidet die b^6 mit β^2 in zwei Punkten. Alle diese Verbindungslinien erfüllen eine Regelfläche dritten Grades, welche $\beta\gamma$ zur Doppellinie hat und daher F_4 eben noch in der c^6 trifft, welche γ^2 enthält. Daraus folgt:

Unter den ∞^6 F_3, welche die b^6 mit den c^6 verbinden, gibt es ∞^2 Regelflächen. Ihre Doppellinien sind die Linien der Congruenz $\beta\gamma$.

Jede Gerade, welche zwei Punkte eines dreipunktigen β-Quadrupels mit β^2 verbindet, trifft F_4 noch in zwei Punkten eines dreipunktigen β'-Quadrupels, das γ^2 enthält. Die Doppelebenen der zu β gehörigen Ebenenprojectivität sind identisch mit denen der zu γ gehörigen Projectivität.

Was noch weiter die β-γ-Correspondenz angeht, kann in derselben keine Coïncidenz vorkommen. Aus 11. folgt: Bewegt sich β auf einer b^6, so bewegt sich der entsprechende γ auf einer Curve vierzehnter Ordnung, die der übrige Schnitt der Secantenfläche achter Ordnung von b^6 mit F_4 ist. Die Abbildung auf F_q gestattet ferner, zu zeigen, dass wenn sich β auf einer ebenen Schnittcurve von F_4 bewegt, γ eine Curve zwölfter Ordnung beschreibt. Dieselbe trifft die β-Curve in zwölf Punkten, demnach: Die Strahlencongruenz $\beta\gamma$ ist von der zwölften Classe.

Im Allgemeinen enthält auch die β-γ-Correspondenz kein involutorisches Paar.

Ist $\beta\gamma$ ein involutorisches Paar, so müssen sich die Inflexionstangenten von β und die von γ in zwei Punkten auf der Schnittlinie der Berührungsebene in β, γ treffen. Da, wie man weiss, die Hessiana einer Fläche dritter Ordnung unter unsere F_4 gehört, und zwar so, dass die $\beta\gamma$ Correspondenz hier in die Verwandtschaft der Paare conjugirter Pole übergeht, also ganz involutorisch wird, so müsste unser Satz für alle Punktepaare zutreffen. Dies lässt sich wohl auch wirklich zeigen:

Die Schnitteurve einer beliebigen Ebene auf der Hessiana ist nämlich eine Lüroth'sche Curve (dies scheint noch nicht ausgesprochen zu sein); hat aber eine solche einen Doppelpunkt, so müssen die Doppelpunktstangenten in den Berührungspunkten einer Doppeltangente eintreffen. Diese ist vor allen anderen ausgezeichnet. Die Berührungsebene in β, γ treffen sich aber in der That (wie Cremona bereits bewiesen hat) in einer Doppeltangente der Hessiana und diese muss mit der Projectionsträgerin der Inflexionstangenten identisch sein. Daher die folgende neue Eigenschaft der Hessiana:

Die Inflexionstangenten in zwei conjugirten Polen der Hessiana schneiden sich in den Berührungspunkten der zugeordneten Doppeltangenten.

14. Zum Schlusse dieses Abschnittes sei einer Analogie zu den in A. IV. 7 erhaltenen Curven C' und C_p gedacht. Jede Collineation des Gebüsches führt F_4 in eine Fläche vierter Ordnung nach R' über. Andererseits erhält man für die ∞^3 p von R ∞^3-Flächen F_p in R'. Mittelst des in 8*c* Gesagten schliessen wir zunächst, dass jede F_p auch als F' auftreten kann. Denn von den ∞^3 Collineationen des Gebüsches Kp führt jede die F_p in eine andere F_q über, für die Collineation ist also F_q eine F' im Verhältnisse zur selben Fläche Φ^4.

Jede F', sowie jede F_p berührt die Φ^4 in einer Curve 48. Ordnung und einer Devellop-pablen 48. Classe. Sie osculirt die Φ^4 in zwanzig Punkten dieser Curve, welche dort Doppelpunkte hat.

So oft nämlich die Collineation in einem der besonderen *a. E.* von 11. gefundenen Büschel enthalten ist, so oft muss F' die Φ^4 unter Identität der Inflexionstangenten berühren, d. h. osculiren. Die Collineation führt d nach p' über. Die dem p in den besonderen Büscheln entsprechenden Geraden spielen für F_p die Rolle der Congruenz $\beta\gamma$; es gehen demnach zwanzig solche Strahlen durch p'. Was die Berührungscurve angeht, so wird dieselbe durch Übertragung jener Curve F_p gefunden, welche die β^2 enthält, von denen aus Verbindungslinien $\beta_1^2\ \beta_2$ durch p' gesandt werden.

Da eine Collineation in ∞^2 Büscheln enthalten ist, so folgt:

Es gibt ∞^2 Tetraeder, welche der F' ein- und der Φ^4 umgeschrieben sind.

Sind vier Punkte $\beta'\beta''\beta'''\beta''''$ mit p allineirt, so schneiden sich die den $\beta''\beta'''\beta''''$ entsprechenden Ebenen C in dem Punkte p', welcher dem p in der singulären Collineation $\beta' B'$ entspricht. Daher (den ∞^2 Geraden durch p entsprechend):

Es gibt ∞^2 Tetraeder, welche der F_p ein- und der Φ^4 umgeschrieben sind.

IV.

Das allgemeine Gebüsch linearer Transformationen zwischen zwei Punkträumen bei coïncidenten Trägern.

1. Die Verwandtschaft zwischen p' und den Doppelpunkten.

Bewegt sich p' in einer Geraden, die Collineation in einem Büschel, so bewegen sich die Doppelpunktsquadrupel in einer D_6 (B. *I.* 3. 6) durch das β-Quadrupel.

Wir betrachten nun ein Netz von Collineationen. Es sei t ein Doppelpunkt einer derselben; bewege sich t auf einer Geraden g und seien $\beta_1\,\beta_4$ Grundpunkte eines im Netze enthaltenen Büschels. Wir ergänzen diese Büschel zu einem Netze, jedoch mit den vier festen Punktepaaren des Büschels, indem wir p auch in diesem Netze dieselben Punkte entsprechen lassen wie in dem gegebenen; die Doppelpunkte erfüllen dann nach I. 3. g eine Fläche vierter Ordnung L_4. Ist t_1 einer ihrer Schnittpunkte mit g, so gibt es eine Collineation, welche $\beta_1\ldots\beta_4$ in $b_1\ldots b_4$ überführt, p auf die Ebene II bringt und in t_1 einen Doppelpunkt hat, die aber vermöge der ersten Bedingungen gewiss dem Netze angehört. Ebenso hätte man duale Betrachtungen für die Doppelebenen anstellen können.

Die Fläche der Doppelpunktsquadrupel aller in dem Netze enthaltenen Collineationen ist eine Fläche vierter Ordnung, die c^6 enthält, während die Doppelebenen aller Collineationen eine Fläche vierter Classe umhüllen, die c'_6 enthält. Die beiden Flächen haben demnach solche Lage, dass sich der ersten ∞^2 Tetraeder einschreiben lassen, die der zweiten umgeschrieben sind.

2. Ist nun ein Netz im Gebüsche enthalten, so wird die Doppelpunktsfläche L_4 zunächst die b^6 des Netzes enthalten und F_4 in einer Curve i_{10} schneiden, welche allen L_4 gemeinsam sein muss, da sich zwei L_4 nur in einer D_6 schneiden dürfen. Jeder Punkt von i_{10} muss als Doppelpunkt ∞^1 Collineationen angehören, ein Büschel bestimmen und demnach in der ihm als β entsprechenden C liegen. Aber ich will die Existenz der i_{10} noch anders beweisen.

Es sei P ein beliebiger Punkt. Ein durch P gehender Strahl s schneidet F_4 in vier Punkten β, denen an Φ^4 vier Ebenen C entsprechen. Diese bestimmen auf s vier Schnittpunkte. Von P geht an Φ^4 ein Tangentenkegel, dessen Ebenen C auf F_4 die Punkte β einer c^6 entsprechen (III. 8. *a*) und diese wird von P aus durch einen Kegel sechsten Grades projicirt. Der Ort der Schnittpunkte sC ist eine Fläche zehnter Ordnung durch P^6. Ihre Schnittpunkte mit F_4 müssen entweder selbst mit C incident sein, oder mit Ebenen C incident sein, die zu einer ihrer Projectionen von P aus auf F_4 gehören. Es ist nun vorauszusehen, dass auf die letzteren Punkte drei Theile, auf die anderen ein Theil entfallen werden. Von dem Schnitte 40. Ordnung sondert sich demnach die i_{10} ab:

Der Ort der β auf F_4, die mit ihren C incident sind, ist i_{10}.[1]

Eine D_6 kann F_4 sowie L_4 nur in vier freien Punkten treffen, muss daher zwanzig Punkte auf i_{10} haben. Daher:

Die Verwandtschaft zwischen p' und $t_1 t_2 t_3 t_4$ ist ein — vierdeutig, so dass einer Ebene von p' eine Fläche vierter Ordnung L_4 durch i_{10} entspricht, einer Geraden von p' eine D_6, die i_{10} in zwanzig Punkten trifft. Einer Ebene von t entspricht eine Fläche sechster Ordnung, die zwanzig Geraden enthält. Der Fundamentalcurve i_{10} entspricht eine Regelfläche zwanzigsten Grades im Systeme p'. Δ_6 enthält jedenfalls einen dreifachen Punkt, welcher den drei von Σ getragenen t entspricht.

Ich werde in 10. *E.* zeigen, dass sie auch eine Doppelcurve enthält.[2]

3. Die Verwandtschaft zwischen den Doppelpunkten und gegenüber liegenden Doppelebenen.

Sie ist jedenfalls rational. Zur Auffindung der Fundamentalgebilde ist zunächst ein besonderer Fall des fundamentalen Gebüsches zu erwähnen. Fallen die Punkte eines der festen Punktepaare zusammen, so bekommen die sämmtlichen D_6[3] in ihm einen dreifachen Punkt. Von der Developpablen sechster Classe, die von den Doppelebenen umhüllt wird, sondert sich der feste Punkt dreimal ab und die gegenüber liegenden Doppelebenen umhüllen eine Curve dritter Classe.

Die einem Punkte von i_{10} gegenüber liegende Fundamentaldeveloppable sei also j_3. In der Verwandtschaft T muss einem Ebenenbündel eine Doppelpunktsfläche entsprechen, die i_{10} dreifach enthält. Nach B. I. 7 umhüllen die Doppelpunktstetraeder einer D_6 eine Developpable sechster Classe; rechnet man hiezu die $20\, j_3$, so entspricht der D_6 eigentlich eine Developpable 66. Classe. T muss ferner der Symmetrie wegen in beiden Systemen von gleichem Grade sein. Daher sind die Linearflächen elfter Ordnung mit dreifacher i_{10}. Aus 11. $11-3x = 1$ zieht man $x = 40$; die sämmtlichen Developpabeln j_3 umhüllen demnach eine Fläche 40. Classe. Zwei solche Flächen elfter Ordnung schneiden sich in einer variablen Curve elfter Ordnung, ferner in $(i_{10})^3$ und daher noch in einer Curve zwanzigster Ordnung. Hieraus schliesse ich:

Es gibt zwanzig Collineationen in dem Gebüsche, von denen jede eine ganze Gerade von Doppelpunkten und somit noch ein Büschel von Doppelebenen enthält. r seien diese Geraden. Jede dieser Collineationen besitzt, was gewöhnlich nicht beachtet wird, auf der Doppelebenenaxe zwei Doppelpunkte.

Da jede Σ die r trifft, wird die Δ_6 zwanzig feste Punkten enthalten müssen, jene ε, welche dem p in den zwanzig Collineationen entsprechen.

Die Verwandtschaft T zwischen den Doppelpunkten und den gegenüber liegenden Doppelebenen ist rational vom 11. Grade. Einem Ebenenbündel entspricht eine Fläche elfter Ordnung, welche i_{10} zur dreifachen Curve hat und zwanzig Gerade r enthält, die vierpunktig Secanten der i_{10} sind.[4] Die der i_{10} entsprechenden Fundamentaldeveloppabeln j_3 sind dritter Classe und erfüllen eine Fläche 40. Classe. Die Curve elfter Classe, welche einem Ebenenbüschel entspricht, trifft i_{10} in 40 Punkten.

4. Die Verwandtschaft zwischen p' und den successiven Transformirten.

Bewegt sich die Collineation in einem Netze, so beschreibt $p^{(n)}$ eine Curve n. Ordnung; da diese eine Ebene in n Punkten trifft, so folgt, dass es in einem Büschel n Collineationen des Gebüsches gibt, welche $p^{(n)}$ auf eine gegebene Ebene bringen. Hieraus:

[1] Ich mache hier auf den in B. III. 8 c. eingetretenen speciellen Fall aufmerksam, wo alle Punkte von F_4 mit entsprechenden Ebenen C incident sind. Eine Degeneration von i_{10} in zehn Gerade tritt beim fundamentalen Gebüsch ein.

[2] Ändert man p, so vertauschen sich nur die L_4 unter einander. Die L_4 gehören zur selben Classe wie die F_4.

[3] Bei der in *B. I.* 3 gelehrten Aufsuchung von L_4 bekommt sie hier einen dreifachen Punkt, woraus dann das Obige folgt.

[4] Wo nämlich eine r die F_4 trifft, muss einerseits eine singuläre Collineation ihren singulären Punkt (und zugleich Doppelpunkt), andererseits eine Collineation mit dem Punktdoppelverhältniss 1 ihren Doppelpunkt haben. Dies kann nur sein, wenn der Punkt auf i_{10} liegt.

Die Punkte p' und $p^{(n)}$ stehen in n^3-1deutiger Verwandtschaft, so dass den Ebenen von $p^{(n)}$ Flächen Ψ_n eines Gebüsches entsprechen, die eine von p zu p veränderliche Lage haben. [1]

5. Die dem Punkte p im Gebüsche Ψ_n verbundenen Punkte sind die p', welche ihn nach n Transformationen reproduciren. Wir können auch hier sagen:

Die dem Punkte p im Gebüsche Ψ_f verbundenen f^3-1 Punkte sind ein Theil der dem p in Ψ_n verbundenen n^3-1 Punkte, wenn n ein Vielfaches von f ist.

Auf Grund dessen folgt dann:

Es gibt in unserem Gebüsche nur

$$n^3-\Sigma\frac{n^3}{f_i^3}+\Sigma\frac{n^3}{f_i^3 f_j^3}-\ldots+(-1)^\nu\frac{n^3}{f_1^3 f_2^3\cdots f_\nu^3},\ (n=f_1^{m_1}f_2^{m_2}\ldots f_\nu^{m_\nu})$$

Collineationen, welche p erst nach n Transformationen reproduciren.

Die p', welche mit ihrem p'' und mit p allineirt sind, ergeben sich, indem man für zwei Gerade durch p ihre Ebenenbüschel mit deren entsprechenden Ψ_2 Büscheln zur Erzeugung zweier Flächen dritter Ordnung benützt. Dieselben haben in p einen Doppelpunkt und schneiden sich ausser in einem durch p gehenden Kegelschnitte in einer Raumcurve siebenter Ordnung, daher:

Der Ort der Punkte p', deren Gerade $p'p''$ durch p gehen oder der Ort der p', deren Collineationen durch p gehende Doppelgeraden haben, ist eine Raumcurve siebenter Ordnung, die in p einen dreifachen Punkt besitzt, δ_7. Die Tangenten desselben sind die in p selbst auftretenden Doppelgeraden.

Diese Curve wird von p aus durch einen Kegel vierter Ordnung projicirt. Daher der folgende Satz, für den es hier keine speciellen Beweismethoden mehr gibt:

Die Doppelgeraden sämmtlicher Collineationen unseres Gebüsches erfüllen einen Complex vierten Grades Z_4, welcher die r und 40 Strahlenbüschel enthält. Von jedem Punkte der i_{10} als Doppelpunkt geht ein Kegel dritter Ordnung aus, daher die fremden, durch ihn zielenden Doppelgeraden eine Ebene bilden.

6. Die Punkte p', welche mit ihren $p^{(n)}$ auf Geraden durch p liegen, erfüllen eine Curve (n^2+n+1). Ordnung, die durch p ebenfalls dreimal gehen muss. Für die Punkte von δ_7 sind alle Transformirten allineirt, foglich zerfällt jene Curve in die δ_7 und eine Curve der Ordnung n^2+n-6.

Dabei folgt auch: Eine Ebene durch p wird durch ihre transformirten Flächen in allen Systemen Ψ_n in denselben vier Punkten auf δ_7 geschnitten.

Die einer solchen Ebene entsprechende Ψ_n schneidet die δ_7 in weiteren $7(n-1)$ Punkten. Für jeden derselben soll $p^{(n)}$ auf der Ebene und auf der Geraden nach p liegen. Es müssen verbundene Punkte von p sein.

Von den n^3-1 verbundenen Punkten des p liegen $7\,(n-1)$ auf δ_7, liefern also periodische Doppelgeraden pp', nicht aber periodische Collineationen.

Man erhält so den interessanten Satz:

Die Doppelgeraden, welche eine periodische Projectivität mit dem Index n tragen, bilden eine Strahlencongruenz der Ordnung

$$7(n-\Sigma\frac{n}{f_i}+\Sigma\frac{n}{f_i f_j}-\ldots(-1)^\nu\frac{n}{f_1 f_2\cdots f_\nu}).$$

Für $n=2$ gibt dies 7, für $n=3$ aber 14. Hieraus:

Die Doppelgeraden, welche eine Projectivität von einem bestimmten characteristischen Doppelverhältnisse D_p tragen, erfüllen eine Strahlencongruenz der vierzehnten Ordnung.

[1] In den folgenden Ableitungen 5 bis incl. 7 muss ich theilweise streng an das in der citirten Abhandlung Gegebene halten, und ändere nur das, was sich dort auf die festen Punktepaare bezieht und hier seine Bedeutung verliert. Diese Ableitung ist aber hier die einzig mögliche und für das Weitere unverlässlich.

Die vorige Congruenz setzt sich aus $^1/_2\,\varphi_n^{(1)}$ der letzteren zusammen. Ich glaube, hier die in der citirten Abhandlung auf Seite 43 gegebene Untersuchung übergehen zu müssen, da sie sofort auf das allgemeine Gebüsch übertragen werden kann. Es findet sich dabei:

In unserem Gebüsche gibt es

$$\varphi_n^{(3)} - 6\,\varphi_n^{(2)} + 11\,\varphi_n^{(1)}$$

für den ganzen Raum periodische Collineationen mit dem Index n.

Zugleich:

Die Ebenen, welche als Doppelebenen Collineationen mit der Periode n tragen, umhüllen eine Developpable der Classe

$$6\,\varphi_n^{(2)} - 18\,\varphi_n^{(1)}.$$

Mittelst einer diophantischen Gleichung und unter Zugrundelegung des Resultates in *II.* Art. 6 schliesse ich sofort (dual):

Die Doppelpunkte, welche in ihren Collineationen collineare Strahlenbündel tragen, die drei bestimmte characteristische Ebenendoppelverhältnisse λ, μ, ν haben, also von derselben Art sind, erfüllen eine Curve 72. Ordnung u_{72}. Sind zwei dieser Doppelverhältnisse gleich, so ist es nur eine Curve 36. Ordnung δ_{36}. Die i_{10} wird von u_{72} in 240 Punkten, von δ_{36} in 120 Punkten getroffen.

Das Letztere folgt so: In der Verwandtschaft T umgesetzt, muss u_{72} eine Developpable der dualen Bedeutung geben, daher $72.11 - 3x = 72$, wenn x die Anzahl ihrer Punkte auf i_{10}. Somit $x = 240$.

7. Die Punkte p', in denen sich die einer Ebene durch p entsprechenden Ψ_{n_1}, Ψ_{n_2}, Ψ_{n_3} schneiden, haben ihre $p^{(n_1)}$, $p^{(n_2)}$, $p^{(n_3)}$ auf jener Ebene. Die durch diese Ebenen projectiven Flächenbündel Ψ_{n_1}, Ψ_{n_2}, Ψ_{n_3} erzeugen daher den Ort der Punkte p', in deren Collineationen jeder Punkt mit seinem $n_1$ten, $n_2$ten und $n_3$ten Transformirten auf einer Ebene liegt, eine Fläche $n_1 + n_2 + n_3$ter Ordnung, welche jedoch durch Absonderung der F_6 für $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$ auf eine Fläche $(n_1 + n_2 + n_2 - 6)$ter Ordnung reducirt wird. Für $n_1 = {}^1/_2\,n_2 = {}^1/_3\,n_3$ liegen sämmtliche $\lambda\,n_1$ten Transformirten in derselben Ebene, daher: Von der erhaltenen Fläche sondert sich die für f_1, $2f_1$, $3f_1$ ab, wenn f_1 Factor von n. Beachtet man nun, dass die Collineationen mit jenen identisch sind, welche bloss periodische Doppelgeraden tragen, so folgt:

Die Punkte, welche einem festen Punkte p in den sämmtlichen mit einer periodischen Doppelgeraden vom Index n behafteten Collineationen entsprechen, erfüllen eine Fläche der Ordnung $6\varphi_n^{(1)}$, welche in $^1/_2\,\varphi_n^{(1)}$ Flächen zwölfter Ordnung zerfällt. [1]

8. Die conjugirte Transformation $\mathfrak{T}$ unter den Doppelpunktsquadrupeln.

Die Punkte von i_{10} sind gewiss Fundamentalpunkte. Eine D_6 entspricht sich nur selbst; ihre conjugirte Curve besteht eigentlich aus zwanzig Curven sechster Ordnung und D_6 selbst dreimal gezählt, hat somit die Ordnung $20.6 + 3.6$; einer Geraden wird daher eine Curve 23. Ordnung entsprechen. Dann entspricht nothwendig auch einer Ebene eine Fläche 23. Ordnung. Eine L_4 entspricht sich selbst dreimal gezählt mit einer Fundamentalfläche vermöge des Durchganges durch i_{10}. Diese letztere ist von der Ordnung $4.23 - 3.4 = 80$.

Die conjugirte Transformation $\mathfrak{T}$ macht einer Geraden eine Curve 23. Ordnung c_{23} entsprechen, die i_{10} in 80 Punkten trifft. Einer Ebene Σ entspricht eine Fläche 23. Ordnung, F_{23}, die i_{10} sechsfach, ausserdem die 20 Geraden r und die 40 zu diesen gehörigen Doppelpunkte enthält. Sie besitzt eine Doppelcurve 31. Ordnung, die 110 Punkte auf i_{10} hat (s. 10.). Jedem Punkte von i entspricht eine Fundamentalcurve η^6, die ihn selbst dreifach enthält. Der Ort dieser η^6 ist eine Fundamentalfläche 80. Ordnung, f_{80}, welche 3—1-deutig auf die Fundamentalfläche j_{40} bezogen ist, die bei der Verwandtschaft T entsteht. [2]

---

[1] Beim fundamentalen Gebüsche kann man das leicht verificiren, indem man die X_8 aus R_{IV} nach R_I überträgt.

[2] Es zeigt sich hier, dass eine K_4 die Fundamentalfläche 20. Ordnung im Systeme p' in 80 freien Punkten trifft.

9. Die der F_4 in $\mathfrak{T}$ conjugirte Fläche hat die Ordnung $4.\,23-80=12$, somit:

Der Ort der Doppelpunktstripel, die vermöge der singulären Collineationen in den singulären Ebenen B entstehen, ist eine Fläche zwölfter Ordnung, welche i_{10} dreifach enthält, S_{12}.

Die der X_8 in II. 2 des Raumes R_{IV} nach R_I in dortiger C entsprechende Fläche ist von der zwölften Ordnung, wesshalb in einem Büschel zwölf Collineationen enthalten sind, welche eine Doppelgerade mit dem Punktdoppelverhältnisse D besitzen. Von der zu X_8 analogen Fläche unseres Gebüsches, die von der Ordnung n sei und i_{10} $x$fach enthalte, liegen demnach auf D_6 12. 2 Punkte, daher

$$6n = 20x + 24.$$

Andererseits muss die Fläche in T umgesetzt eine Fläche der Classe n geben, somit:

$$n = 4x,$$

daher $x = 6$, $n = 24$. Dies gibt:

Der Ort der Doppelpunktepaare jener Doppelgeraden, welche das Punktdoppelverhältniss D tragen, ist eine Fläche 24. Ordnung mit i_{10} als sechsfacher Curve, X_{24}.

Wird eine X_{24} in $\mathfrak{T}$ umgesetzt, so kommt:

Der Ort der Doppelpunktepaare jener Doppelgeraden, auf denen das Ebenendoppelverhältniss D eintritt, ist ebenfalls eine Fläche 24. Ordnung, die sechsmal durch i_{10} geht, Y_{24}. [1]

Unter den Flächen der Reihe X_{24} ist auch die in $S_{12}+3\,F_4$ zerfallende, unter den Flächen der Reihe Y_2. die zweimal gezählte S_{12} und zwar beidesmal für $D=0,\,\infty$. Eine X_{24} ist auch die zweimal gezählte Jacobiana $\mathfrak{H}_{12}$ der Flächen L_4, und zwar für $D=1$, sie enthält auch die zwanzig Geraden r.

Die von den Doppelpunkten auf F_4 ausgehenden Doppelgeraden geben eine Strahlencongruenz vierzehnter Ordnung der in 6. gefundenen Art für $D=0,\,\infty$, daher die Curve der Doppelpunktepaare, welche auf den Doppelgeraden eines Complexkegels liegen, auf F_4 vierzehn Schnittpunkte hat, sie ist von der elften Ordnung und trifft daher i_{10} in $11.\,4-14=30$ Punkten:

Die Doppelpunktepaare aller durch p gehenden Doppelgeraden erfüllen eine Curve elfter Ordnung $\mathfrak{p}_{11}$, die p zum dreifachen Punkte hat und i_{10} in dreissig Punkten trifft. Die ihr conjugirte Curve ist von der Ordnung 31, $\mathfrak{p}'_{31}$.

10. Die Jacobiana ist von der zwölften Ordnung, der Schnitt von Σ mit der entsprechenden F_{23} muss nun den Schnitt c_{12} mit $\mathfrak{H}_{12}$ und ausserdem eine Curve elfter Ordnung enthalten, daher: [2]

Die Doppelgeraden in Σ umhüllen nach 5. E. eine Curve vierter Classe. Die auf ihnen entstehenden Doppelpunktepaare erfüllen eine Curve elfter Ordnung w_{11}, die in den Schnittpunkten mit i_{10} dreifache Punkte besitzt.

Mittelst $\mathfrak{T}$ übertragen, gibt sie eine Curve der Ordnung $11.\,23-11-10.\,6.\,3=31$, daher:

F_{23} hat ausser der dreifachen i_{10} eine Doppelcurve 31. Ordnung, welche einen dreifachen Punkt hat, der auch dreifach für F_{23} ist, und welche i_{10} in 110 Punkten trifft.

Überträgt man w_{11} aus R_{IV} nach R_I, so ergibt sich eine Curve der Ordnung $\frac{1}{2}(11.4-10.\,3)=7$, daher:

Die Δ_6 enthalten je zehn Geraden und eine Doppelcurve siebenter Ordnung v_7 mit einem dreifachen Punkte $\tilde{\omega}_3$, der auch dreifacher Punkt für Δ_6 ist. v_7 hat die zehn Geraden zu dreifachen Sehnen. Die Δ_6 enthält ∞^2 Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Species, von denen jede die Doppelcurve in elf Punkten trifft. Den Geraden von Σ entsprechend,

[1] Die Y_{24} geht durch die zwanzig Geraden r nicht. In jeder dieser zwanzig Collineationen treten noch zwei bestimmte Doppelverhältnisse auf. Nun kann man durch die Annahme von vier solchen Collineationen das ganze Gebüsch und somit die übrigen sechzehn bestimmen. Es müssen demnach zwischen den vierzig Doppelverhältnissen zweiunddreissig Relationen stattfinden.

[2] Wir machen hier den umgekehrten Schluss von dem in B. II. 1. verwertheten.

[3] Die Δ_6 ist die einzige von den hier actuellen Flächen, die ich bemerkt finde, und zwar — natürlich ohne diese Bedeutung — in einer Abhandlung des Herrn G. Veronese: Math. Ann. XIX. Bd. a. E. Sie entsteht dort durch Projection aus dem R_4; bemerkt sind aber nur die zehn Geraden und die v_7.

welche i_{10} zweimal treffen, hat man auf Δ_6 45 Kegelschnitte. Jeder derselben trifft zwei von den zehn Geraden der Fläche.

Die K_4 entstehen aus den Geraden der Ebene Σ.

Man kann die gegebene Abbildung weiter verfolgen. Es existiren zehn Schaaren von Raumcurven dritter Ordnung und ausserdem $(10)_5 = 252$ vereinzelte solche Raumcurven, endlich neun einer dritten Art. Die zwanzig schon früher erwähnten ε, durch welche alle Δ_6 gehen, liegen auf der Fundamentalregelfläche zwanzigsten Grades und durch jeden dieser Punkte gehen vier Erzeugende der Regelfläche.

Die i_{10} hat elf scheinbare Doppelpunkte, auf jeden ihrer Punkte stützen sich somit drei dreipunktige Sehnen. Jeder solchen Sehne entspricht im Systeme p auch nur eine Gerade. Diese wird, wenn Σ durch jene Sehne geht, eine Doppelgerade der Δ_6. Geht Σ durch eine r, so hat Δ_6 vier in ε convergente und sechs andere Gerade.

11. In B. III. 13 ist gezeigt worden, dass die den Ebenen B eines Tangentenkegels von Φ^4 entsprechenden β eine Curve vierzehnter Ordnung erfüllen, welche von einem Punkte p aus durch einen Kegel vierzehnter Ordnung projicirt wird. Trifft ein Strahl s durch p die F_4 in vier Punkten β, so bringe ich s mit den diesen β entsprechenden Ebenen B zum Schnitt. Diese Schnittpunkte erfüllen eine Fläche achtzehnter Ordnung, welche p^{14} mit dem vorhin erwähnten Kegel als Osculationskegel enthält. Diese F_{18} trifft F_4 in einer Curve 4. 18. Ordnung, welche zerfällt. Die Punkte des einen Theiles sind diejenigen, welche mit ihren B incident sind, die des anderen sind die von p aus gemachten Projectionen von Punkten, deren B sie tragen. Es wird auf die erste Curve nur der vierte Theil des Schnittes entfallen. Ferner muss sie sich nach der Verwandtschaft T in eine Developpable derselben Classe umsetzen, somit:

Der Ort der Punkte β von F_4, die mit ihren Ebenen B von Φ^4 incident sind, ist eine Curve l_{18}, die i_{10} in sechzig Punkten trifft.

Ein Punkt β von l_{18} liefert demnach eine singuläre Collineation mit Incidenz von singulärem Punkt und singulärer Ebene. Die Doppelpunkte einer solchen Collineation sind die zweimal gezählte β und zwei Punkte in B. Das Punktdoppelverhältniss auf einer von β ausgehenden Doppelgeraden wird unbestimmt. Auf der einzigen mit B und nicht β incidenten Doppelgeraden, welche nämlich in dem ebenen Systeme B der Ebene B des collinearen Strahlenbündels β entspricht, wird das Ebenendoppelverhältniss unbestimmt. Die conjugirte Curve der l_{18} ist aber von der Ordnung $18.\ 23 - 18 - 60.\ 6 = 36$, l'_{36}. Schneidet eine Fläche die $\mathfrak{H}_{12}$ in einer Curve c, so berührt die conjugirte Fläche die $\mathfrak{H}_{24}$ in der conjugirten Curve von c. Hieraus folgere ich nun:

Die sämmtlichen Ortsflächen Y_{24} berühren sich noch in einer Curve l'_{36}.

Je zwei Y_{24}, welche zu D_l und D'_l gehören, treffen sich noch in einer Curve 144. Ordnung, die in zwei Curven u_{72} der N. 6. E. zerfällt. Damit ist das dortige Resultat neuerdings bewiesen. Es scheint eigenthümlich, dass je zwei Flächen dieser Reihe sich in zwei verschiedenen Curven durchdringen. Mit Zugrundelegung fundamentaler Eigenschaften der mehrdeutigen Transformationen liefert nun die Umsetzung durch $\mathfrak{T}$:

Die sämmtlichen Ortsflächen X_{24} haben noch eine gemeinsame Doppelcurve l_{18} auf F_4.

In der That trifft dann jede X_{24} die F_4 in $6.\ t_{10} + 2.\ i_{18} = 4.24$ und nicht weiter.

Der Schnitt zweier X_{24} gibt zwei Curven 72. Ordnung, woraus:

Der Ort der Doppelpunkte $D_p D'_p$ ist hier gleichfalls eine Curve der 72. Ordnung, welche i_{10} in 240 Punkten trifft, v_{72}.

Die l'_{10} trifft in 120 Punkten, also F_4 in weiteren 24, die nothwendig auf l_{18} sind. Dies sind dreifach gezählte Doppelpunkte singulärer Collineationen. Ich behaupte, dass diese Punkte dreifache Punkte jeder X_{24} sind. Da die Anzahl der periodischen Collineationen hier dieselbe wie beim fundamentalen Gebüsch ist, muss auch die Anzahl der Punkte $D_p D'_p D''_p$ 48 sein, woraus zu erwarten ist, dass alle Curven v_{72} die Punkte enthalten, in denen l'_{36} die l_{18} trifft und dort solche Singularität haben, dass acht Schnittpunkte mit jeder X_{24} absorbirt werden.

Durch diese Punkte, sowie ihre 24 conjugirten auf l'_{36} müssen dann auch alle u_{72} gehen und dort müssen solche Singularitäten entstehen, dass insgesammt 12.24 Schnittpunkte einer Y_{24} absorbirt werden. Die Umsetzung in $\mathfrak{T}$ liefert dann:

Der Ort der Doppelpunkte $D_p D_e$ ist eine Curve 144. Ordnung mit 480 Punkten auf i_{10}.

Der Schnitt von X_{24} mit der conjugirten Y_{24} lehrt:

Die Doppelpunktepaare aller Doppelgeraden, welche D_p und D_e tragen, erfüllen eine Curve 72. Ordnung ζ_{72}, welche 24 feste Doppelpunkte auf l_{18} hat.

Unter Verwendung der in B. *II.* 5. abgeleiteten Resultate können nunmehr die Ortsflächen U^p, U^e, U^{pe}, N_{12} hergestellt werden. Die dort vorhandene U_p überträgt sich nach R_l in eine Fläche 8. 6—4. 2. 3 = 24. Ordnung, wesshalb in jedem Büschel von Collineationen 24 mit einem Doppelpunkte $D_p D_p$ enthalten sind. Eine D_6 muss daher unsere U^p in 24 freien Punkten treffen, somit gilt

$$24 + 20x = 6n$$

und gleichzeitig wegen T $n = 4x$, somit $n = 24$, $x = 6$. Ebenso ergibt sich für U^e $n = 24$, $x = 6$, und für U^{pe}, $n = 48$, $x = 12$:

Der Ort der Doppelpunkte $D_p D_p$ ist eine Fläche 24. Ordnung mit i_{10} als sechsfacher l_{18} als Doppelcurve, $U^p{}_{24}$.

Der Ort der Doppelpunkte $D_e D_e$ ist eine Fläche 24. Ordnung mit i_{10} als sechsfacher Curve, und welche längs l'_{36} alle Y_{24} berührt. Sie hat eine dreifache Curve 12. Ordnung, den Ort der $(\varepsilon)_e(\varepsilon)_e(\varepsilon)_e$, wo $\varepsilon = {}^1/_2(1 \pm \sqrt{-3})$.

Der Ort der Doppelpunkte $D_p D_e$ ist endlich eine Fläche 48. Ordnung, welche i_{10} zwölffach, l_{18} vierfach enthält.

Endlich folgt noch: Der Ort der Doppelpunktsquadrupel aller eigentlichen orthogonalen Substitutionen ist eine Fläche 24. Ordnung mit i_{10} als sechsfacher Curve, N_{24}.

12. Es sollen noch einige Strahlencongruenzen des Complexes Z_4 in Betracht gezogen werden. Eine p_{11} trifft X_{24} in 6.30 Punkten auf i_{10}, in 14 Punktepaaren und noch in 11.24—6.30—28 = 5·6 Punkten. Daher:

Die Congruenz der Doppelgeraden, welche ferner von den Doppelpunkten der Doppelgeraden D_p ausgehen, ist von der Ordnung und Classe 56.

Das Letztere schliesse ich aus der Symmetrie, vermöge welcher dieselbe Congruenz auch dieselbe Bedeutung hat. Nun schneidet eine w_{11} die X_{24} in 11. 24—10. 3. 6 = 84 freien Punkten. Von diesen kommen nun 56 in Abzug, demnach:

Die Strahlencongruenzen der Doppelgeraden, welche constantes D_p oder D_e tragen (N. 6) sind auch von der Classe, resp. Ordnung 14.

Die p_{11} schneidet i_{10} in 30 Punkten; eine Ebene schneidet i_{10} in 10 Punkten, deren jeder 3 Doppelgerade in dieser Ebene aussendet, somit:

Die von den Punkten der i_{10} ausgesandten Kegel von Doppelgeraden bilden eine Strahlencongruenz 30. Ordnung und Classe.

Durch jeden Punkt von i_{10} zielen weiters die Doppelgeraden eines ebenen Strahlbüschels. Ein Complexkegel Z_4 trifft ausser in jenen 30 Punkten der p_{11} die i_{10} in 10 Punkten, daher:

Die Doppelgeraden, welche von fremden Doppelpunkten durch die i_{10} gesandt werden, bilden eine Strahlencongruenz 10. Ordnung und Classe.

13. Die Schnittcurve von Σ mit $\mathfrak{H}_{24}$ überträgt sich durch die Verwandtschaft t—p' in eine Curve 42. Ordnung und da von der Strahlencongruenz $D_p = 1$ vierzehn Strahlen in Σ liegen, so folgt:

Jede F_{23} berührt die $\mathfrak{H}'_{24}$ in einer Curve der 84. Ordnung, welche 28 Doppelpunkte besitzt. Die entsprechende Δ_6 berührt eine feste Fläche zwölfter Ordnung längs einer Curve 42. Ordnung, die vierzehn Doppelpunkte hat.

Man wird in den vorstehenden Entwickelungen mancherlei Verschiebungen und Verschlingungen, Verwandtes getrennt, Disparates vereinigt finden, aber ich musste diejenige Reihenfolge des Materials beibehalten, welche die einzig hier mögliche Auffindungsweise der Resultate verlangt.

Anhang. Hinsichtlich der Transformationsschaaren im m-dimensionalen Raume R_m habe wohl ich zuerst Untersuchungen angestellt und die wichtigeren auf successive Transformirte bezüglichen Resultate in dem Bulletin de la Soc. math. de France: „Sur les transformations linéaires successives" 1880, mitgetheilt. Indem ich mir eine vollständige Darlegung vorbehalte, füge ich hier noch die Verwandtschaft C zwischen p' und den Doppelpunkten hinzu, wofür ich die Ableitung ebenfalls später geben werde.

Eine Collineation in R_m ist bestimmt, wenn $m+2$ Punktepaare gegeben sind. Durch $m+1$ Punktepaare wird ein ∞^m-System von Collineationen festgelegt sein. Es seien

$$a_1, a'_1; a_2, a'_2; a_3, a'_3; \ldots\ldots a_{m+1}, a'_{m+1}$$

diese Punktepaare.

Einer R'_{m-1} in p' entspricht im Systeme der Doppelpunkte eine R^{m+1}_{m-1} (wobei der obere Index den Grad bezeichnet). Das ∞^m-System der R^{m+1}_{m-1} ist bestimmt durch die $m+1$ speciellen Räume:

$$R_{m-1} \mid a'_1\, a'_2 \ldots a'_{m-1}\, a'_m;\; R_{m-1} \mid a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}\, a_{m+1};\; R_{m-1} \mid a_1\, a_2 \ldots a_{m-2}\, a_m\, a_{m+1};$$
$$\ldots\ldots\ldots R_{m-1} \mid a_2\, a_3 \ldots a_{m-2}\, a_{m-1}\, a_m\, a_{m+1};$$

$$R_{m-1} \mid a'_2\, a'_3 \ldots a'_{m-1}\, a'_m\, a'_{m+1};\; R_{m-1} \mid a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}\, a_m;\; R_{m-1} \mid a_1\, a_2 \ldots a_{m-2}\, a_{m-1}\, a_{m+1};$$
$$\ldots\ldots\ldots R_{m-1} \mid a_1\, a_3 \ldots a_{m-1}\, a_m\, a_{m+1}$$

von denen jeder in $m+1$ lineare Räume zerfällt, und zwar entsprechen diese den linearen Räumen des Systemes p', die bezüglich bestimmt sind als

$$R_{m-1} \mid a'_1\, a'_2 \ldots a'_{m-1}\, a'_m;\; R_{m-1} \mid a'_1\, a'_2 \ldots a'_{m-1}\, a'_{m+1};\ldots R_{m-1} \mid a'_1\, a'_3 \ldots a'_m\, a'_{m+1}$$

Alle diese R^{m+1}_{m-1} haben die $\frac{m(m+1)}{2}$ linearen R'_{m-1} gemeinsam, die aus den $m+1$ Punkten a zu constituiren sind und ferner die $m+1$ linearen R'_{m-2}, in denen sich je zwei entsprechende R'_{m-1} aus den Punkten a und den Punkten a' schneiden. Einer linearen R_{m-2} von p' entspricht demnach eine $R^{\frac{m(m+1)}{2}}_{m-2}$ und einer R_{m-1} im Doppelpunktssysteme eine $R^{\frac{m(m+1)}{2}}_{m-1}$ im Systeme der p'.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 46_2

Autor(en)/Author(s): Kantor S.

Artikel/Article: Über die allgemeinsten linearen Systeme linearen Transformation bei Coincindenz gleichartiger Träger und successiver Anwendung der Transformation. 83-126