ZUR

THEORIE DER DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 19. OCTOBER 1882.

In den folgenden Zeilen sollen einige neue Sätze über Determinanten höheren Ranges mitgetheilt werden.

Multiplicirt man jedes Element $a_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ einer Determinante $p$ten Ranges und $n$ter Ordnung mit $\rho_{k_1}^{ik_1}\rho_{k_2}^{ik_2}\dots\rho_{k_\sigma}^{ik_\sigma}$, wo die Indices $k_1, k_2, \dots, k_\sigma$ irgend welche σ verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ sind, so erhält jedes Glied der Determinante den Factor $\rho_{k_1}^{\Sigma ik_1}\rho_{k_2}^{\Sigma ik_2}\dots\rho_{k_\sigma}^{\Sigma ik_\sigma}$, wo die einzelnen Summationen über irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu erstrecken sind. Da demnach alle Summen den Werth $\frac{n(n+1)}{2}$ haben, so ist:

$$\left|\rho_{k_1}^{ik_1}\rho_{k_2}^{ik_2}\dots\rho_{k_\sigma}^{ik_\sigma} a_{i_1, i_2, \dots, i_p}\right| = (\rho_{k_1}\rho_{k_2}\dots\rho_{k_\sigma})^{\frac{n(n+1)}{2}}\left|a_{i_1, i_2, \dots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \dots, i_p = 1, 2, \dots, n)}$$

Ist nun:

$$\rho_{k_1} = \rho_{k_2} = \dots = \rho_{k_\sigma} = -1$$

so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$\left|(-1)^{ik_1+ik_2+\dots+ik_\sigma} a_{i_1, i_2, \dots, i_p}\right| = (-1)^{\frac{\sigma n(n+1)}{2}}\left|a_{i_1, i_2, \dots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \dots, i_p = 1, 2, \dots, n)}$$

Man hat daher folgendes Theorem:

Wenn man in einer Determinante höheren Ranges alle jene Elemente, in denen die Summe von σ bestimmten Indices gerade ist, ungeändert lässt, jene, bei denen diese Summe ungerade ist, aber mit dem entgegengesetzten Zeichen versieht, so ändert die Determinante ihren Werth nicht, falls σ eine gerade Zahl ist; ist hingegen σ ungerade, so ändert die Determinante das Zeichen, wenn ihre Ordnung $n = 1, 2$ (mod. 4) ist, und bleibt ungeändert, wenn ihre Ordnung $n = 0, 3$ (mod. 4) ist.

Ist speciell:

$$\sigma = p$$

so hat man den Satz:

Wenn man in einer Determinaute alle jene Elemente, deren Indexsumme gerade ist, ungeändert lässt, jene, derer Indexsumme ungerade ist, aber mit dem entgegengesetzten Zeichen versieht, so ändert dieselbe ihren Werth nicht, wenn sie von geradem Range ist; ist sie hingegen von ungeradem Range, so ändert sie das

Zeichen, wenn ihre Ordnung $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ ist und bleibt ungeändert, wenn ihre Ordnung $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ ist.

Für quadratische Determinanten hat diesen Satz Herr Janni aufgestellt.

Ist ferner:

$$\rho_{k_1} = \rho_{k_2} = \ldots = \rho_{k_\sigma} = \rho$$

wo ρ eine primitive σte Einheitswurzel ist, so erhält man:

$$\left|\rho^{i_{k_1}+i_{k_2}+\ldots+i_{k_\sigma}} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right| = \left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)}$$

Aus dieser Gleichung folgt das Theorem:

Eine Determinante höheren Ranges ändert ihren Werth nicht, wenn man jedes Element derselben mit derjenigen Potenz einer primitiven σten Einheitswurzel multiplicirt, deren Exponent gleich der Summe von σ bestimmten Indices desselben ist.

Setzt man endlich:

$$\rho_{k_1} = \rho_{k_2} = \ldots = \rho_{k_\sigma} = \omega$$

und versteht unter ω eine primitive $n$te oder $(n+1)$te Einheitswurzel, so erhält man sofort den folgenden Satz:

Eine Determinante höheren Ranges von der Ordnung n ändert ihren Werth nicht, wenn man jedes Element derselben mit derjenigen Potenz einer primitiven $n$ten oder $(n+1)$ten Einheitswurzel multiplicirt, deren Exponent gleich der Summe von σ bestimmten Indices desselben ist, falls σ gerade ist; ist hingegen σ eine ungerade Zahl, so ändert die Determinante im ersten Falle das Zeichen, wenn n gerade ist, im zweiten Falle, wenn n ungerade ist, und bleibt im ersten Falle bei ungeradem, im zweiten bei geradem n ungeändert.

Für $\sigma = p$ erhält man den Satz:

Eine Determinante geraden Ranges von der Ordnung n ändert ihren Werth nicht, wenn man jedes Element derselben mit derjenigen Potenz einer primitiven $n$ten oder $(n+1)$ten Einheitswurzel multiplicirt, deren Exponent gleich der Summe der Indices desselben ist; eine Determinante ungeraden Ranges von der Ordnung n hingegen ändert im ersten Falle das Zeichen, wenn n gerade ist, im zweiten, wenn n ungerade ist, und bleibt im ersten Falle bei ungeradem, im zweiten bei geradem n ungeändert.

Bekanntlich ist:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \lambda}\, \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \mu} = \delta_{\lambda, \mu} \left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)}$$
$$[\delta_{\lambda, \mu} = 0,\ \lambda \gtrless \mu;\ \delta_{\lambda, \lambda} = 1].$$

wo:

$$(-1)^{pk_1 + \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=n} k_\sigma} \alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_p}$$

diejenige Determinante $p$ten Ranges von der Ordnung $(n-1)$ ist, welche man erhält, wenn man alle Elemente der Determinante:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)}$$

welche an der ersten Stelle den Index k_1, an der zweiten den Index $k_2, \ldots$, an der $p$ten den Index k_p haben, weglässt und die noch übrigen $(n-1)^p$ Elemente zu einer Determinante gleichsam zusammenschiebt.

Ist nun:

$$p = 2q$$

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2q}} = 0 \qquad [i_1 \gtrless i_{q+1},\ i_2 \gtrless i_{q+2}, \ldots, i_q \gtrless i_{2q}],$$

so hat man:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2q}}\right| = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}, \lambda, i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}, \lambda}\, \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}, \lambda, i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}, \lambda}$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_{2q} = 1, 2, \ldots n)$$

Berücksichtigt man nun, dass die Determinanten $\alpha_{i_1, i_2,\dots,i_{q-1},\lambda,i_1, i_2,\dots,i_{q-1},\lambda}$ genau dieselbe Beschaffenheit, wie die ursprüngliche, haben, sowie, dass in diesem Falle

$$(-1)^{2qi_1+\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=2q} i_\sigma} = +1$$

ist, so erhält man sofort den Satz:

Wenn in einer Determinante geraden Ranges $(2q)$ alle Elemente:

$$a_{i_1, i_2,\dots, i_{2q}} \qquad [i_1 \gtrless i_{q+1},\ i_2 \gtrless i_{q+2},\dots,\ i_q \gtrless i_{2q}]$$

gleich Null sind, so ist dieselbe gleich dem Ausdrucke, welchen man erhält, wenn in der Determinante $q$ten Ranges:

$$\left|a_{i_1, i_2,\dots,i_q, i_1, i_2,\dots,i_q}\right|_{(i_1, i_2,\dots,i_q=1, 2,\dots, n)}.$$

alle Glieder mit dem positiven Vorzeichen versehen werden.

Dieser Satz ist, wie man sofort sieht, die Verallgemeinerung der bekannten Formel:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & 0, & 0,\dots, 0, & 0 \\ 0, & a_{2,2}, & 0,\dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0,\dots, 0, & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}$$

Auf dieselbe Weise findet man ferner das Theorem:

Wenn in einer Determinante ungeraden Ranges $(2q+1)$ alle Elemente

$$a_{i_1, i_2,\dots, i_{2q+1}} \qquad [i_2 \gtrless i_{q+2},\ i_3 \gtrless i_{q+3},\dots,\ i_{q+1} \gtrless i_{2q+1}]$$

wo i_1 an der Stelle der festen Indices steht, gleich Null sind, so ist dieselbe gleich dem Ausdrucke, welchen man erhält, wenn in der Determinante $(q+1)$ten Ranges

$$\left|a_{i_1, i_2, i_3,\dots, i_{q+1}, i_2, i_3,\dots, i_{q+1}}\right|_{(i_1, i_2, i_3,\dots, i_{q+1} = 1, 2,\dots, n)}$$

alle Glieder mit dem positiven Vorzeichen versehen werden.

Für kubische Determinanten lautet dieser Satz:

Sind in einer kubischen Determinante alle Elemente, welche nicht in der Hauptdiagonalebene liegen, gleich Null, so ist dieselbe gleich dem Ausdrucke, welchen man erhält, wenn man in der aus den in der Hauptdiagonalebene liegenden Elementen gebildeten quadratischen Determinante alle Glieder mit dem positiven Vorzeichen versieht.

Dieser specielle Satz wurde von Herrn R. F. Scott in der Abhandlung: „On some Forms of Cubic Determinants" (Proceedings of the London Mathematical Society. Vol XIII, No 182) abgeleitet.

Als specielle Fälle der beiden, eben entwickelten Theoreme mögen noch die folgenden zwei Relationen angeführt werden:

Es ist:

$$\left|a_{i_1, i_2,\dots, i_{2p}}\right| = (n!)^{p-1}_{(i_1, i_2,\dots, i_{2p} = 1, 2,\dots, n)}$$

wenn:

$$a_{i_1, i_2,\dots, i_{2p}} = 0 \qquad [i_1 \gtrless i_{p+1},\ i_2 \gtrless i_{p+2},\dots,\ i_p \gtrless i_2\ ]$$

$$a_{i_1, i_2,\dots, i_p, i_1, i_2,\dots, i_p} = 1$$

ist, und:

$$\left|a_{i_1, i_2,\dots, i_{2p+1}}\right| = (n!)^p_{(i_1, i_2,\dots, i_{2p+1} = 1, 2,\dots, n)}$$

wenn i_1 an der Stelle der festen Indices steht, und:

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p+1}} = 0 \qquad [i_2 \gtrless i_{p+2}, i_3 \gtrless i_{p+3}, \ldots, i_{p+1} \gtrless i_{2p+1}$$

$$a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{p+1}, i_2, i_3, \ldots, i_{p+1}} = 1$$

ist.

Um ein neues Theorem zu erhalten, multipliciren wir die Gleichung 1) mit $b_{\lambda, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}}$ und summiren in Bezug auf λ von 1 bis n. Dadurch entsteht die Relation:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}}\, \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \mu} = \left|a_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right| . b_{\mu, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}}$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, j_1, j_2, \ldots, j_p = 1, 2, \ldots, n)$$

wo:

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \lambda}\, b_{\lambda, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}}$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgt sofort die Relation:

$$\left|\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}}\, \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_{p+q-1}}\right| = \left|a_{j_1, j_2, \ldots j_p}\right|^n . \left|b_{i_{p+q-1}, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}}\right|$$

$$(i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-1}, j_1, j_2, \ldots, j_p = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei, falls q ungerade ist, beachtet werden muss, dass der Index i_{p+q-1} an der Stelle der festen Indices steht.

Nun ist aber, wie ich bewiesen habe („Über Determinanten höheren Ranges". Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften. XLIII. Band, p. 17 ff.):

$$\left|c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}}\right| = \left|a_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right| . \left|b_{i_{p+q-1}, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}}\right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-1}, j_1, j_2, \ldots j_p = 1, 2, \ldots, n)$$

und daher verwandelt sich die letzte Gleichung in die folgende:

$$\left|\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}}\, \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_{p+q-1}}\right| = \left|c_{j_1, j_2, \ldots j_{p+q-2}}\right| . \left|a_{j_1, j_2, \ldots j_q}\right|^{n-1}$$

$$(j_1, j_2, \ldots, j_{p+q-2}, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-1} = 1, 2, \ldots, n)$$

Es soll nun ein besonders bemerkenswerther Fall dieser Relation betrachtet werden.

Es sei:

$$p = q$$

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}} = 0 \qquad [i_1 \gtrless i_p, i_2 \gtrless i_{p+1}, \ldots, i_{p-1} \gtrless i_{2p-2};\ i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{2p-2} = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r,$$

wo die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ irgend welche r verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind]

$$c_{i_1, i_2, \ldots, j_{2p-2}} = 1\ [i_1 = i_p, i_2 = i_{p+1}, \ldots, i_{p-1} = i_{2p-2};\ i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{2p-2} = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r]$$

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \tau, \tau, \ldots, \tau} = \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \tau} \quad [\tau \gtrless \lambda_\sigma, \sigma = 1, 2, \ldots, r]$$

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}} = 0$$

in allen anderen Fällen.

Alsdann ist:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}, i_{2p-1}} = \alpha_{i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{2p-1}} \quad [i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{2p-2} = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r]$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \tau, \tau, \ldots, \tau} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_{2p-1}} = \delta_{\tau, i_{2p-1}} \left| a_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \right| (j_1, j_2, \ldots, j_p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$[\tau \gtrless \lambda_\sigma, \sigma = 1, 2, \ldots, r]$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_{2p-1}} = 0$$

in allen anderen Fällen.

Theilt man nun die Elemente der Determinante:

$$\left| \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_{2p-1}} \right| (i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{2p-1} = 1, 2, \ldots, n)$$

in zwei Gruppen in der Art, dass die erste Gruppe alle jene Elemente enthält, in denen die festen Indices die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ haben, die zweite Gruppe alle anderen Elemente, so ist:

$$\left| \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_{2p-1}} \right| (i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{2p-1} = 1, 2, \ldots, n) = \sum \pm \Delta_1 \Delta_2$$

wo Δ_1 irgend eine aus den Elementen der ersten Gruppe gebildete Determinante $r$ter Ordnung und $p$ten Ranges, Δ_2 eine aus den Elementen der zweiten Gruppe gebildete Determinante desselben Ranges von der Ordnung $n-r$ ist, und die Summation sich über alle jene Producte zu erstrecken hat, welche man erhält, indem man ein beliebiges Δ_1 nimmt und sodann Δ_2 so wählt, dass kein Element dieser Determinante einen gleichen correspondirenden Index mit einem Elemente von Δ_1 hat. Das Zeichen wird in bekannter Weise durch das Vorzeichen, welches das Product der Hauptdiagonalglieder dieser beiden Determinanten in der ursprünglichen Determinante hat, bestimmt.

Nun sind alle Determinanten Δ_1 gleich Null mit Ausnahme einer einzigen, welche den Werth

$$\left| \alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_p} \right| (k_1, k_2, \ldots, k_p = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

hat, es enthält ferner die diesem Δ_1 entsprechende Determinante Δ_2 nur $n-r$ von Null verschiedene Elemente, welche sämmtlich gleich:

$$\left| a_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \right| (j_1, j_2, \ldots, j_p = 1, 2, \ldots, n)$$

sind, und daher hat man die Relation:

$$\left| \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-2}, i_{2p-1}} \right| = \left| a_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \right|^{n-r} \cdot \left| \alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_p} \right|$$

$$(j_1, j_2, \ldots, j_p;\ i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{2p-1} = 1, 2, \ldots, n;\ k_1, k_2, \ldots, k_p = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

Nennt man die mit dem nöthigen Vorzeichen versehene Unterdeterminante $(n-r)$ter Ordnung eines Systems von n^p Elementen, welche so beschaffen ist, dass das Product aus ihrem Hauptdiagonalgliede und dem Hauptdiagonalgliede einer bestimmten anderen Unterdeterminante $r$ter Ordnung ein Glied der Determinante des Elementensystems ist, die Adjuncte der letzteren, so erhält man durch das eben angewandte Verfahren bei Einführung einer leicht verständlichen Bezeichnung auch die folgende Relation:

$$\left|c_{i_1, i_2, \ldots, i_{3p-2}}\right| = \left|c'_{i_1', i_2', \ldots, i'_{2p-2}}\right| . \text{adj.} \left|a_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right| (i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2} = 1, 2, \ldots, n;\ i'_1, i'_2, \ldots, i'_{2p-2};\ j_1, j_2, \ldots, j_p = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

wo:

$$c'_{i_1', i_2', \ldots, i'_{2p-2}} = 0 \qquad [i'_1 \gtrless i'_p,\ i'_2 \gtrless i'_{p+1}, \ldots, i'_{p-1} \gtrless i'_{2p-2}]$$

$$c'_{i_1', i_2', \ldots, i'_{2p-2}} = 1 \qquad [i'_1 = i'_p,\ i'_2 = i'_{p+1}, \ldots, i'_{p-1} = i'_{2p-2}]$$

ist, oder nach einem früheren Satze:

$$\left|c_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2}}\right| = [r!]^{p-2} \text{ adj. } \left|a_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\right| (i_1, i_2, \ldots, i_{2p-2} = 1, 2, \ldots, n;\ j_1, j_2, \ldots, j_p = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

Man hat also schliesslich die Relation:

$$\left|\alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_p}\right| = [r!]^{p-2} \left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right|^{r-1} . \text{adj.} \left|a_{k_1, k_2, \ldots, k_p}\right| (i_1, i_1, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n;\ k_1, k_2, \ldots, k_p = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

Ist p ungerade, so hat man zu beachten, dass in der Determinante auf der linken Seite dieser Gleichung die letzte Indexreihe die Reihe der festen Indices ist.

Die letzte Gleichung liefert folgendes Theorem:

Eine Unterdeterminante $r$ter Ordnung des Systems der Adjuncte der n^p Elemente ist gleich der Adjuncte der entsprechenden Unterdeterminante des Systems der Elemente multiplicirt mit dem Producte aus $(r!)^{p-2}$ und der $(r-1)$ten Potenz der Determinante des Elementensystems.

Daraus folgt unmittelbar der Satz:

Unterdeterminanten derselben Ordnung des Systems der Adjuncten der Elemente verhalten sich zu einander, wie die Adjuncten der entsprechenden Unterdeterminanten des Systems der Elemente.

Als specieller Fall mag noch das folgende Theorem erwähnt werden:

Die Determinante des Systems der Adjuncten der n^p Elemente ist gleich der $(n-1)$ten Potenz der Determinante des Elementensystems multiplicirt mit $[(n-1)!]^{p-2}$.

Für $p = 2$ erhält man bekannte Sätze aus der Theorie der quadratischen Determinanten.

Da eine Determinante ungeraden Ranges ihr Zeichen nicht ändert, wenn man zwei der festen Indexreihe angehörige Indices in allen Gliedern mit einander vertauscht, so ist sie auch im Allgemeinen nicht Null, wenn für zwei oder mehrere feste Indices alle Elemente einander gleich werden, welche an den übrigen Stellen gleiche correspondirende Indices haben.

Falls für alle festen Indices alle Elemente einander gleich werden, welche an den übrigen Stellen dieselben correspondirenden Indices haben, ist bekanntlich die Determinante ungeraden Ranges (p) und $n$ter Ordnung gleich der Determinante $n$ter Ordnung vom Range $p-1$, welche aus den n^{p-1} verschiedenen Elementen gebildet werden kann, multiplicirt mit $n!$.

Es soll nun ein allgemeiner Satz, der in Verbindung mit dem eben abgeleiteten Theoreme einige neue Sätze über Determinanten höheren Ranges liefern wird, abgeleitet werden.

Es seien in einer Determinante ungeraden Ranges p von der Ordnung:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right| (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

alle Elemente einander gleich, in denen die festen Indices die Werthe $1, 2, \ldots, r$ haben, und welche an den übrigen Stellen gleiche correspondirende Indices besitzen, und dasselbe soll auch von allen entsprechenden Elementen gelten, in denen die festen Indices die Werthe $r+1, r+2, \ldots, n$ haben, so dass also:

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = b_{i_2, i_3, \ldots, i_p} \qquad [i_1 = 1, 2, \ldots, r]$$

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = c_{i_2, i_3, \ldots, i_p} \qquad [i_1 = r+1, r+2, \ldots, n]$$

ist.

Theilt man nun die Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ in zwei Gruppen in der Art, dass die erste Gruppe alle jene Elemente enthält, in denen die festen Indices die Werthe $1, 2, \ldots, r$ haben, die zweite Gruppe alle anderen Elemente, so ist:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)} = \Sigma \pm \Delta_1 \Delta_2.$$

Nun ist aber nach dem eben angeführten Satze:

$$\Delta_1 = r!\, \bar{\Delta}_1$$
$$\Delta_2 = (n-r)!\, \bar{\Delta}_2$$

wo $\bar{\Delta}_1$ und $\bar{\Delta}_2$ die Determinanten $(p-1)$ten Ranges sind, welche man aus den verschiedenen Elementen der Determinanten Δ_1 und Δ_2 bilden kann, und daher:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)} = r!\, (n-r)!\, \Sigma \pm \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_2$$

Ist nun $\Delta_{2,r}$ eine Determinante $(p-1)$ten Ranges von der Ordnung n, welche man erhält, wenn man an Stelle derjenigen Elemente der Determinante:

$$\left|c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} = 1, 2, \ldots, n)}$$

welche bestimmte r feste Indices haben, die entsprechenden Elemente der Determinante:

$$\left|b_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} = 1, 2, \ldots, n)}$$

setzt, so verwandelt sich die letzte Gleichung, wie man leicht mit Hilfe des allgemeinen Zerlegungstheorems der Determinanten zeigt, in die folgende:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)} = r!\, (n-r)!\, \Sigma\, \Delta_{2,r}$$

wo die Summation über alle jene Determinanten $(p-1)$ten Ranges von der Ordnung n zu erstrecken ist, welche man auf die eben angegebene Weise ableiten kann.

Für kubische Determinanten wurde dieser Satz zuerst von Herrn R. F. Scott in der früher angeführten Abhandlung aufgestellt.

Es sei:

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}} = \beta_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$$

wo $\beta_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$ die Adjuncte des Elementes $b_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$ bezeichnet.

Stellt man nun jede Determinante $\Delta_{2,r}$ mit Hilfe des allgemeinen Zerlegungstheorems als Summe von Producten je zweier Determinanten von den Ordnungen r und $n-r$ dar, wo die ersteren Determinanten aus den Elementen $b_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$, die letzteren hingegen aus den Elementen $\beta_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$ gebildet sind und berücksichtigt den oben für die Unterdeterminanten des Systems der Adjuncten der Elemente aufgestellten Satz, so erhält man die Gleichung:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right| = r!\, [(n-r)!]^{p-2} \left|b_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}\right|^{n-r-1} \sum [\beta^{(n-r)}]^2$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $\beta^{(n-r)}$ irgend eine Unterdeterminante von der Ordnung $n-r$ des Elementensystems $b_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$ ist und die Summation sich über alle möglichen Determinanten $\beta^{(n-r)}$ erstreckt.

Setzt man speciell:

$$r = n-1$$

so verwandelt sich diese Formel in die folgende:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right| = (n-1)! \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}} \beta^2_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

Man hat daher folgenden Satz:

Die Summe der Quadrate aller Unterdeterminanten erster Ordnung einer Determinante geraden Ranges lässt sich stets als eine Determinante von dem nächst höheren Range darstellen.

Setzt man:

$$r = 1$$

so erhält man die Relation:

$$\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\right| = [(n-1)!]^{p-2} \left|b_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}\right|^{n-2} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}} b^2_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

Ist die Summe der Quadrate aller Elemente einer Determinante geraden Ranges gleich Null, so verschwindet diejenige Determinante nächst höheren Ranges, in welcher die Elemente mit dem festen Index 1 gleich den Elementen, jene mit den übrigen festen Indices gleich den entsprechenden Adjuncten der Elemente der ursprünglichen Determinante sind.