UBER

DIE GEMEINSAMKEIT PARTICULÄRER INTEGRALE

BEI ZWEI LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

II.

VON

G. v. ESCHERICH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 1. MÄRZ 1883.

The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

In der vorliegenden Arbeit suche ich die Resultate, die in der Abhandlung[1] „Über die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen" für homogene lineare Differentialgleichungen gewonnen wurden, auf die sogenannten „vollständigen" linearen Differentialgleichungen auszudehnen. Ich entwickele also zunächst die Criterien, aus welchen erkannt wird, ob und wie viele linear-unabhängige particuläre Integrale zwei gegebene lineare Differentialgleichungen gemeinsam haben und leite die lineare Differentialgleichung derselben ab. Die Absicht, diese Gleichung zur Vereinfachung der Integration der beiden gegebenen Gleichungen zu benützen — was die Verallgemeinerung eines bekannten Theorems in sich schliesst — führte mich auf eine andere Form dieser Criterien, welche die bekannte Analogie zwischen den linearen Differential- und den algebraischen Gleichungen auch hier hervortreten lässt. Am Faden dieser Analogie wurde ich zu einem Probleme der Elimination geleitet, das auf Grund der vorangegangenen Entwicklungen auch zu einer allgemeinen Bemerkung über die Gleichung Veranlassung gab, welche aus der Elimination einer abhängigen Variabeln aus zwei simultanen Differentialgleichungen zwischen drei Variabeln resultirt. Darnach erscheint nämlich die gewöhnliche Annahme als unbegründet, dass jedes particuläre Integral dieser Gleichung gemeinsame particuläre Integrale in den beiden gegebenen Gleichungen hervorrufe. Eine spätere Arbeit wird die Modificationen darlegen, die in Folge dessen an dem bekannten Verfahren zur Auflösung eines Systemes simultaner linearer Differentialgleichungen angebracht werden müssen. In enger Verbindung hiemit stehen die Functionen, gebildet aus linear unabhängigen Integralen einer linearen Differentialgleichung, auf welche am Schlusse der Arbeit hingewiesen wird. Dieselben führen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu Functionen, die eine ähnliche Rolle spielen, wie die symmetrischen in der Theorie der algebraischen Gleichungen; sie lassen sich auch, analog diesen, auf die gemeinsamen Lösungen eines Systems simultaner linearer Differentialgleichungen ausdehnen und gestatten ganz analoge Verwerthung, wie aus einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit hervorgehen wird.

[1] Denkschriften dieser Akademie, Bd. XLVI, p. 61.

I.

Es seien

$$F(x, y, \dots y^{(n)}) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y + a$$
$$= \varphi(x, y, \dots y^{(n)}) + a = 0 \tag{1}$$

und

$$f(x, y, \dots y^{(m)}) = b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \dots + b_m y + b$$
$$= \psi(x, y, \dots y^{(m)}) + b = 0 \tag{2}$$

zwei lineare Differentialgleichungen, von denen mindestens eine nicht homogen ist[1] und deren erstere die Gleichung $\varphi(x, y, \dots y^{(n)}) = 0$ und die letztere $\psi(x, y, \dots y^{(m)}) = 0$ als reducirte besitzt.

Durch k-malige Differentiation dieser beiden Gleichungen nach x ergebe sich:

$$F^{(k)}(x, y, \dots y^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n+k} (a_{k,i}\, y^{(n+k-i)}) + a^{(k)}$$

$$f^{(k)}(x, y, \dots y^{(m)}) = \sum_{i=0}^{m+k} (b_{k,i}\, y^{(m+k-i)}) + b^{(k)}$$

wo also

$$a_{k,i} = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} a_{i-\lambda}^{(\lambda)}$$

$$b_{k,i} = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} b_{i-\lambda}^{(\lambda)}$$

gesetzt wurde, wenn die oberen eingeklammerten Indices Differentiations-Indices bedeuten.

Eine nothwendige Bedingung, damit die beiden Gleichungen (1) und (2) ein particuläres Integral gemeinsam haben, ergibt sich durch Elimination von $y^{(m+n)}, y^{(m+n-1)} \dots y$ aus den $m+n+2$ Gleichungen:

$$\begin{gathered} F^{(m)}(x, y, \dots y^{(n)}) = 0;\ F^{(m-1)}(x, y, \dots y^{(n)}) = 0 \ \dots \ F(x, y, \dots y^{(n)}) = 0, \\ f^{(n)}(x, y, \dots y^{(m)}) = 0;\ f^{(n-1)}(x, y, \dots y^{(m)}) = 0 \ \dots \ f(x, y, \dots y^{(m)}) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Sie besteht also in der Identität:

$$R = \begin{vmatrix} a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2} & \cdot & \cdot & a_{m,m+n} & a^{(m)} \\ 0 & a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdot & \cdot & a_{m-1,m+n-1} & a^{(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & a_0 & a_1 & a_n & a \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdot & \cdot & b_{n,m+n} & b^{(n)} \\ & b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \cdot & \cdot & b_{n-1,m+n-1} & b^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_m & b \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

[1] Selbstverständlich ist der ausgeschlossene Fall in dem allgemeineren, behandelten Falle enthalten. Doch, um von diesem zu jenem überzugehen, muss man berücksichtigen, dass den homogenen Gleichungen, welche sich aus dem Obigen für $a = b = 0$ ergeben, ein gemeinsames particuläres Integral $y = 0$ zuzurechnen ist.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Es soll nun zuvörderst untersucht werden, ob und wann das Verschwinden von R auch die **hinreichende** Bedingung bildet, damit die beiden Gleichungen (1) und (2) ein particuläres Integral gemeinsam haben und zu diesem Behufe R einer leichten Transformation unterworfen werden.

Ich nehme an, es seien $y_1, y_2 \dots y_{n+1}$ $(n+1)$ linear unabhängige particuläre Integrale der Gleichung (1),[1] und ebenso $z_1, z_2 \dots z_{m+1}$ $(m+1)$ solcher Integrale von (2) und multiplicire die obige Determinante $(m+n+2)$ten Grades R zeilenweise mit der aus diesen Elementen zusammengesetzten:

$$P = \begin{vmatrix} y_1^{(m+n)} & y_1^{(m+n-1)} & \dots & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1}^{(m+n)} & y_{n+1}^{(m+n-1)} & \dots & y_{n+1} & 1 \\ z_1^{(m+n)} & z_1^{(m+n-1)} & \dots & z_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{m+1}^{(m+n)} & z_{m+1}^{(m+n+1)} & \dots & z_{m+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Das so erhaltene Product lässt sich nun weiter umformen; aber ich werde, um nicht die Rechnungen l. c. p. 63 und 64 unter leicht erkenntlichen Modificationen zu wiederholen, mich mit der Darlegung des Ganges der Transformation begnügen.

Zunächst ergibt sich, wenn $F^{(k)}(\eta)$ und $f^{(k)}(\eta)$ bedeuten, dass bezüglich in $F^{(k)}(x, y, \dots y^{(n)})$ und $f^{(k)}(x, y, \dots y^{(m)})$ für $y : \eta$ substituirt wurde:

$$PR = (-1)^{(n+1)(m+1)} \begin{vmatrix} F^{(m)}(z_1) & \dots & F(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(m)}(z_{m+1}) & \dots & F(z_{m+1}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f^{(n)}(y_1) & \dots & f(y_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(n)}(y_{n+1}) & \dots & f(y_{n+1}) \end{vmatrix}.$$

Aber auch P lässt sich in zweifacher Weise transformiren und man findet:

$$P = \frac{(-1)^{(m+1)(n+1)}}{a_0^{m+1}} \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & \dots & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1}^{(n-1)} & \dots & y_{n+1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F^{(m)}(z_1) & \dots & F(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(m)}(z_{m+1}) & \dots & F(z_{m+1}) \end{vmatrix}.$$

$$= \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} z_1^{(m-1)} & \dots & z_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{m+1}^{(m-1)} & \dots & z_{m+1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f^{(n)}(y_1) & \dots & f(y_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(n)}(y_{n+1}) & \dots & f(y_{n+1}) \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & \dots & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1}^{(n-1)} & \dots & y^{n+1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y_1 - y_{n+1})^{n-1} & \dots & y_1 - y_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (y_n - y_{n+1})^{(n-1)} & \dots & y_n - y_{n+1} \end{vmatrix} = e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}, \tag{5}$$

da wegen der gemachten Voraussetzung die Grössen $(y_1 - y_{n+1}), (y_2 - y_{n+2}) \dots (y_2 - y_{n+1})$ ein Fundamentalsystem particulärer Integrale von $\varphi = 0$ bilden. Aus demselben Grunde hat in der zweiten Gleichung die erste Determinante rechts den Werth $e^{-\int \frac{b_1}{b_0} dx}$ und man hat somit:

[1] Bekanntlich lässt sich jedes particuläre Integral von (1) durch $(n+1)$ linear unabhängige particuläre Integrale linear mit constanten Coëfficienten ausdrücken. Die Differenzen $y_1 - y_{n+1}, y_2 - y_{n+1} \dots y_n - y_{n+1}$ bilden dann ein Fundamentalsystem particulärer Integrale der reducirten Gleichung $\varphi = 0$.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$P \equiv \frac{(-1)^{(m+1)\,(n+1)}}{a_0^{m+1}} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \begin{vmatrix} F^{(m)}(z_1) & \ldots & F(z_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F^{(m)}(z_{m+1}) & \ldots & F(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{b_0^{n+1}} e^{-\int \frac{b_1}{b_0} dx} \begin{vmatrix} f^{(n)}(y_1) & \ldots & f(y_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f^{(n)} y_{n+1} & \ldots & f(y_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Die Substitution dieser Werthe in das Product PR liefert für R die beiden Gleichheiten:

$$R = a_0^{m+1} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \begin{vmatrix} f^{(n)}(y_1) & \ldots & f(y_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f^{(n)}(y_{n+1}) & \ldots & f(y_{n+1}) \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= (-1)^{(n+1)\,(m+1)} b_0^{n+1} e^{\int \frac{b_1}{b_0} dx} \begin{vmatrix} F^{(m)}(z_1) & \ldots & F(z_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F^{(m)}(z_{m+1}) & \ldots & F(z_{m+1}) \end{vmatrix}.$$

II.

Aus dieser Form von R lässt sich nun leicht erkennen, welche Bedeutung sein Verschwinden für die Frage nach der Gemeinsamkeit particulärer Integrale der beiden Gleichungen (1) und (2) besitzt. Es genügt, diesen Untersuchungen einen Theil der obigen Doppel-Gleichung zu Grunde zu legen, da sich aus den hieraus gewonnenen Resultaten durch einfache Vertauschungen die entsprechenden aus dem anderen Theile fliessenden ergeben. Ich benütze etwa den zweiten Theil von (6).

Verschwindet R, so verschwindet auch die rechts stehende „Determinante der Functionen" und es muss dann zwischen deren Elementen eine lineare Relation bestehen (l. c. p. 66). Es müssen also dann $(m+1)$ Constante $c_1, c_2 \ldots c_{m+1}$ sich auffinden lassen, dergestalt, dass

$$c_1 F(z_1) + c_2 F(z_2) + \ldots + c_m F(z_m) + c_{m+1} F(z_{m+1}) = 0$$

oder

$$c_1 [F(z_1) - F(z_{m+1})] + c_2 [F(z_2) - F(z_{m+1})] + \ldots + c_m [F(z_m) - F(z_{m+1})] + CF(z_{m+1}) = 0,$$

wo

$$C = c_1 + c_2 + \ldots + c_{m+1}.$$

Ist nun C von Null verschieden, so kann man die obige Gleichung durch dasselbe dividiren, wodurch diese, wenn $\frac{c_i}{c} = k_i$ gesetzt wird, übergeht in

$$k_1 [F(z_1) - F(z_{m+1})] + \ldots + k_m [F(z_m) - F(z_{m+1})] + F(z_{m+1}) = 0,$$

oder

$$F[k_1 (z_1 - z_{m+1}) + \ldots + k_m (z_m - z_{m+1}) + z_{m+1}] = 0;$$

der eingeklammerte Ausdruck ist aber wegen der gemachten Voraussetzungen ein particuläres Integral der Gleichung $f(x, y, y' \ldots y^{(m)}) = 0$ und es haben also in diesem Falle die Gleichungen (1) und (2) ein particuläres Integral gemeinsam. Verschwindet jedoch C, so ist

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (MCZ); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$c_1[F(z_1)-F(z_{m+1})]+c_2[F(z_2)-F(z_{m+1})]+\ldots+c_m[F(z_m)-F(z_{m+1})]=0,$$

also

$$\varphi[c_1(z_1-z_{m+1})+c_2(z_2-z_{m+1})+\ldots+c_m(z_m-z_{m+1})]=0;$$

es haben somit die beiden reducirten Gleichungen von (1) und (2) ein particuläres Integral gemeinsam, ohne dass nothwendigerweise diese selbst eines gemeinsam besitzen.

Diese Betrachtungen ergeben daher:

„Verschwindet das Resultat der Elimination der abhängigen Variabeln aus zwei linearen Differential-Gleichungen, so haben entweder diese selbst oder ihre reducirten Gleichungen particuläre Integrale gemeinsam.“ Und umgekehrt.

Haben also die reducirten der beiden linearen Gleichungen kein particuläres Integral gemeinsam, so haben (l. c. VII) die beiden Gleichungen ein und nur ein particuläres Integral gemeinsam, das sich dann unmittelbar aus dem Systeme (3) ergibt.

Auf diesen Fall lässt sich nun durch Einführung einer neuen Variabeln auch der allgemeine zurückführen, in dem die reducirten Gleichungen particuläre Integrale gemeinsam haben. Denn ist $z=0$ die homogene lineare Differentialgleichung dieser gemeinsamen particulären Integrale (l. c. p. 71), so lassen sich (ibidem p. 72) stets Operationssymbole p und q bezüglich von der $(m-\mu)$ten und $(n-\mu)$ten Ordnung auffinden, wenn μ die Ordnung der Gleichung $z=0$ ist, dergestalt, dass

$$F=p(z)+a;\quad f=q(z)+b$$

ist. Haben nun die Gleichungen

$$p(z)+a=0 \text{ und } q(z)+b=0$$

kein particuläres Integral gemeinsam, so ist dies auch mit den Gleichungen (1) und (2) der Fall; besitzen sie aber eines gemeinsam und wird dasselbe mit v bezeichnet, so ist

$$z=v$$

die Differentialgleichung der den beiden Gleichungen gemeinsamen Integrale, d. h. jedes particuläre Integral der letzteren Gleichung genügt den beiden Gleichungen (1) und (2) und umgekehrt.

III.

1. Diese Ergebnisse lassen sich in mehr directer und expliciter Weise auch aus der Gleichung (6) ableiten. Zunächst bemerke man, dass die Ableitung dieser Gleichung nur auf der Voraussetzung beruht, dass sowohl $y_1, y_2\ldots y_{n+1}$ als auch $z_1, z_2\ldots z_{m+1}$ je ein System linear-unabhängiger particulärer Integrale seien und dass es also gestattet ist, in jedes derselben gemeinsame particuläre Integrale aufzunehmen.

Ich will nun zunächst annehmen, es verschwinde R, während die Resultate r von $\varphi=0$ und $\psi=0$ von Null verschieden sei. Dann haben die beiden Gleichungen (1) und (2) ein particuläres Integral ζ_1 gemeinsam. Aus

$$R=C\begin{vmatrix} F(\zeta) & F(z_2) & \ldots & F(z_{m+1}) \\ F'(\zeta) & F'(z_2) & \ldots & F'(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ F^{(m)}(\zeta) & F^{(m)}(z_2) & \ldots & F^{(m)}(z_{m+1}) \end{vmatrix},$$

wo

$$C=(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)(m+2n+2)}\,b_0^{n+1}\,e^{\int\frac{b_1}{b_0}dx}$$

gesetzt wurde, folgt:

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\frac{dR}{da_{n-k}^{(m)}} = (-1)^{m-1} C\zeta^{(k)} \begin{vmatrix} F(z_2) & \ldots & Fz_{m+1} \\ F'(z_2) & \ldots & F'(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(m-1)}(z_2) & \ldots & F^{(m-1)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

$$= \zeta^{(k)} \frac{dR}{da^{(m)}}.$$

Hieraus ergibt sich also die Proportion:

$$\zeta^{(n)} : \zeta^{(n-1)} : \ldots \zeta : 1 = \frac{dR}{da_0^{(m)}} : \frac{dR}{da_1^{(m)}} : \ldots : \frac{dR}{da_n^{(m)}} : \frac{dR}{da^{(m)}}. \tag{7}$$

Der Ausdruck $\frac{dR}{da^{(m)}}$ steht aber in einem einfachen Zusammenhange mit r, denn es ist, wie man sich aus (4) überzeugt:

$$\frac{dR}{da^{(m)}} = (-1)^{n+1} b_0 r.$$

Die Bestimmung des ζ aus der Gleichung (7) ist also nur möglich, wenn r nicht verschwindet, womit eine frühere Behauptung neuerdings bestätigt wird. Ist jedoch $r = 0$, so müssen zwei Fälle unterschieden werden: entweder verschwindet keiner der dem $\frac{dR}{da^{(m)}}$ in (7) vorangehenden Differentialquotienten oder es verschwinden alle zusammen. Im ersteren Falle können die beiden Gleichungen (1) und (2) kein particuläres Integral gemeinsam haben, wohl aber haben dann die reducirten dieser Gleichungen ein particuläres Integral η gemeinsam, dessen Werth sich ergibt aus:

$$R = C \begin{vmatrix} \varphi(\eta) & F(z_2) & \ldots & F(z_{m+1}) \\ \varphi'(\eta) & F'(z_2) & \ldots & F^{(m)}(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi^{(m)}(\eta) & F^{(m)}(z_2) & \ldots & F^{(m)}(z_{m+1}) \end{vmatrix},$$

auf welche Form R stets gebracht werden kann. Man findet hieraus:

$$\eta^{(n)} : \eta^{(n-1)} : \ldots : \eta = \frac{dR}{da_0^{(m)}} : \frac{dR}{da_1^{(m)}} : \ldots : \frac{dR}{da_n^{(m)}}$$

$$= \frac{dr}{da_0^{(m-1)}} : \frac{dr}{da_1^{(m-1)}} : \ldots : \frac{dr}{da_n^{(m-1)}},$$

in welcher Proportion die zweite Zeile aus l. c. p. 67 folgt.

Tritt jedoch der zweite Fall ein, so bleibt es unentschieden, ob die Gleichungen (1) und (2) gar kein particuläres Integral gemeinsam haben, wogegen dann deren reducirte gemeinsame particuläre Integrale besitzen müssen, oder ob (1) und (2) mehrere solche Integrale haben. Die Entscheidung hierüber liefert die Betrachtung der zweiten Differentialquotienten von R, in die jetzt eingegangen werden soll.

Da $r = 0$ ist, so haben die beiden reducirten Gleichungen von (1) und (2) schon aus diesem Grunde ein particuläres Integral η gemeinsam und es lässt sich daher dem R die obige Form geben. Bildet man hieraus $\frac{dR}{da_n^{(m)}}$, so ersieht man, da das selbstverständliche gemeinsame Integrale $\eta = 0$ der beiden reducirten Gleichungen von der Betrachtung ausgeschlossen bleibt, dass die Voraussetzung $\frac{dR}{da_n^{(m)}} = 0$ zur Folge hat:

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\begin{vmatrix} F(z_2) & F(z_3) & \dots & F(z_{m+1}) \\ F'(z_2) & F'(z_3) & \dots & F'(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ F^{(m-1)}(z_2) & F^{(m-1)}(z_3) & \dots & F^{(m-1)}(z_{m+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Identität zeigt aber an, dass entweder auch die Gleichungen (1) und (2) ein Integral gemeinsam haben oder deren Reducirten noch ein zweites von dem ersten linear unabhängiges.

Unter den gemachten Voraussetzungen haben also entweder die Gleichungen (1) und (2) selbst oder deren Reducirten mindestens zwei linear unabhängige particuläre Integrale gemeinsam.

Wenn also $R = r = 0$ ist und überdies in der Reihe der Differentialquotienten

$$\frac{dR}{da_0^{(m)}};\ \frac{dR}{da_1^{(m)}} \dots \frac{dR}{da_n^{(m)}}$$

einer Null ist, aber keiner der beiden gemeinsam verschwindenden (l. c. p. 68),

$$\frac{d^2R}{da_n^{(m-1)}da^{(m)}} = (-1)^{n+1}\, b_0 \frac{dr}{da_n^{(m-1)}};\quad \frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-1)}da^{(m)}} = (-1)^{n+1}\, b_0 \frac{dr}{da_{n-1}^{(m-1)}},$$

so haben die Gleichungen (1) und (2) zwei linear unabhängige Integrale gemeinsam.

Werden dieselben mit ζ_1 und ζ_2 bezeichnet, dann darf in (6) $z_1 = \zeta_1$ und $z_2 = \zeta_2$ gesetzt werden und aus dieser Form von R folgt:

$$\frac{d^2R}{da_i^{(m)}da_k^{(m)}} = C \begin{vmatrix} \zeta_1^{(n-i)} & \zeta_2^{(n-i)} \\ \zeta_1^{(n-k)} & \zeta_2^{(n-k)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F(z_3) & \dots & F(z_{m-1}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ F^{(m-2)}(z_3) & \dots & F^{(m-2)}(z_{m+1}) \end{vmatrix},$$

also:

$$\frac{d^2R}{da_n^{(m)}da_{n-1}^{(m-1)}} = -\frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m)}da_n^{(m-1)}} = -C(\zeta_1'\eta_1 - \zeta_1\eta_1') \begin{vmatrix} F(z_3) & \dots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ F^{(m-2)}(z_3) & \dots & F^{(m-2)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}.$$

wenn mit $\eta_1 = \zeta_2 - \zeta_1$ das Integral bezeichnet wird, das die reducirten Gleichungen gemeinsam haben müssen. Aus derselben Form von R folgt aber:

$$\frac{d^2R}{da_n^{(m-1)}da^{(m)}} = (-1)^{n+1} b_0 \frac{dr}{da_n^{(m-1)}} = (-1)^{n+1} C\eta_1 \begin{vmatrix} F(z_3) & \dots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ F^{(m-2)}(z_3) & \dots & F^{(m-2)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

$$\frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-1)}da^{(m)}} = (-1)^{n+1} b_0 \frac{dr}{da_{n-1}^{(m-1)}} = (-1)^{n+1} C\eta_1' \begin{vmatrix} F(z_3) & \dots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ F^{(m-2)}(z_3) & \dots & F^{(m-2)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die obige Gleichung für $\dfrac{d^2R}{da_{n-1}^{(m)}da_n^{(m)}}$ zeigt, dass unter den gemachten Voraussetzungen jedes den beiden Gleichungen (1) und (2) gemeinsame Integral ζ die lineare Differentialgleichung befriedigt:

$$\frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-1)}da_n^{(m)}} = \zeta' \frac{d^2R}{da_n^{(m-1)}da^{(m)}} - \zeta \frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-1)}da^{(m)}} = -\frac{d^2R}{da_n^{(m-1)}da_{n-1}^{(m)}}$$

$$= (-1)^{n+1} b_0 \left[\zeta' \frac{dr}{da_n^{(m-1)}} - \zeta \frac{dr}{da_{n-1}^{(m-1)}}\right].$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Es ist aber auch umgekehrt jedes particuläre Integral dieser Gleichung ein den Gleichungen (1) und (2) gemeisames Integral.[1] Denn die reducirte Gleichung derselben gibt das den reducirten von (1) und (2) gemeinsame Integral (l. c. p. 67) η_1. Ist also ζ_1 eines der beiden supponirten gemeinsamen Integrale von (1) und (2), so ist jedes particuläre Integral ζ der obigen Gleichung in der Form darstellbar

$$\zeta = c_1 \eta_1 + \zeta_1$$

wo c_1 eine Constante bedeutet. Jedes dieser Integrale genügt aber, sowohl (1) als auch (2).

Die beiden Gleichungen (1) und (2) haben kein Integral gemeinsam, sondern blos ihre reducirten deren zwei linear-unabhängige, wenn

$$\frac{d^2 R}{da_{n-1}^{(m-1)} da_n^{(m)}} \neq 0$$

und

$$\frac{d^2 R}{da_n^{(m-1)} da^{(m)}} = \frac{d^2 R}{da_{n-1}^{(m-1)} da^{(m)}} = 0.$$

Verschwindet aber auch noch der erste dieser drei Differentialquotienten, so wird es wieder unentschieden, ob die Gleichungen (1) und (2) oder blos deren reducirte linear- unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben, deren Anzahl dann die Zahl zwei übersteigen muss. Aufschluss hierüber gibt wieder die Betrachtung der dritten Differentialquotienten von R und r.

2. Statt in diese Betrachtungen einzugehen, will ich gleich allgemein die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen aufsuchen, unter welchen die beiden Gleichungen (1) und (2) k und nicht mehr linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben.

Soll dies der Fall sein, so ist eine nothwendige Bedingung, dass die reducirten Gleichungen von (1) und (2) $(k-1)$ und nicht mehr linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben und es ist also nur zu untersuchen, welche weiteren Bedingungen zu der Annahme, dass die Reducirten von (1) und (2) $(k-1)$ linear-unabhängige Integrale gemeinsam haben, hinzutreten müssen, damit (1) und (2) selbst k solche Integrale gemeinschaftlich besitzen.

Werden diese $(k-1)$ gemeinsamen Integrale der beiden Reducirten mit $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{k-1}$ bezeichnet, so lässt sich dem R die Form geben:

$$R = C \begin{vmatrix} \varphi(\eta_1) & \ldots & \varphi(\eta_{k-1}); & F(z_k) & \ldots & F(z_{m+1}) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \varphi^{(m-k+2)}(\eta_1) & \ldots & \varphi^{(m-k-2)}(\eta_{k-1}); & F^{(m-k+2)}(z_k) & \ldots & F^{(m-k+2)}(z_{m+1}) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \varphi^{(m)}(\eta_1) & \ldots & \varphi^{(m)}(\eta_{k-1}) & F^{(m)}(z_k) & \ldots & F^{(m)}(z_{m+1}) \end{vmatrix},$$

wo C einen für die nachfolgenden Überlegungen gleichgiltigen Ausdruck bezeichnet.

Hieraus ersieht man unmittelbar, dass alle $(k-1)$ten Differentialquotienten von R verschwinden, welche die Form

$$\frac{d^{k-1} R}{[da_n^{(m-k+\sigma)}]^i \, [da_{n-1}^{(m-k+\rho)}]^{k-i-1}}$$

---

[1] Der homogenen linearen Differentialgleichung der 2. Ordnung

$$\frac{d^2 R}{da_n^{(m-1)} da_n^{(m-1)}} \zeta'' - 2 \frac{d^2 R}{da_{n-1}^{(m-1)} da_n^{(m-1)}} \zeta' + \frac{d^2 R}{da_{n-1}^{(m-1)} da_{n-1}^{(m-1)}} \zeta = 0$$

genügt zwar auch jedes der beiden gemeinsamen Integrale ζ_1 und ζ_2, es befriedigt aber nicht umgekehrt jedes particuläre Integral derselben die beiden Gleichungen (1) und (2).

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

haben, sobald sowohl ρ als auch $\sigma > 2$ sind. Von den übrigen Differentialquotienten dieser Ordnung sollen nun blos die näher untersucht werden, in denen $\sigma = 2$ ist, da diese allein eine weitere Verwendung finden werden. Ihre Bildungsweise ergibt sich aus den beiden Formeln:

$$\frac{dF^{(m-k+1+\nu)}}{da_n^{(m-k+2)}} = \binom{m-k+1+\nu}{\nu-1} y^{(\nu-1)}$$

$$\frac{dF^{(m-k+1+\mu)}}{da_{n-1}^{(m-k+\rho)}} = \binom{m-k+1+\mu}{\mu+1+\rho} y^{(\mu+2-\rho)}$$

indem man die erste Formel auf je i und die zweite auf die jedesmal übrigen der $(k-1)$ letzten Zeilen von R anwendet und die so gewonnenen Determinanten addirt. Von diesen wird nun, wie die obigen Formeln lehren, jede Determinante verschwinden, in der zu einem ν der i Zeilen, welche der ersten Formel unterworfen wurden, sich ein μ in den übrigen $(k-i-1)$ Zeilen vorfindet, welche in der Beziehung stehen

$$\mu - \nu = \rho - 3.$$

Da nun offenbar das kleinste μ, welches nach i-maliger Differentiation nach $a_n^{(m-k+2)}$ noch für die Differentiation nach $a_{n-1}^{(m-k+\rho)}$ zur Verfügung bleibt, der Bedingung $m-k+1+\mu \geqq m-k+\rho$, d. h. $\mu \geqq \rho - 1$ genügen muss, so verschwinden in der obigen Summe alle Determinanten, bei denen die erste Formel nicht auf die Zeilen angewandt wird, in denen

$$\nu = 1,\ 2, \ldots \rho-2$$

ist. Sind daher in einer Determinante, welche diese Bedingung erfüllt,

$$p_{\rho-1},\ p_\rho \ldots p_{i-(\rho-2)}$$

numerisch geordnet, die ν der übrigen Zeilen, welche der ersten der obigen Formeln unterworfen werden, so muss, soll die hervorgehende Determinante nicht verschwinden, mindestens ein Theil der Folge

$$1+(\rho-3);\ 2+(\rho-3) \ldots 2\rho-3;\ p_{\rho-1}+(\rho-3), \ldots p_{i-(\rho-2)}+(\rho-3) \tag{α}$$

in der obigen Folge:

$$p_{\rho-1};\ p_\rho \ldots p_{i-(\rho-2)} \tag{β}$$

enthalten sein, während der andere Theil über $(k-1)$ hinaus liegt.

Sind daher

$$p_{\rho-1},\ p_\rho \ldots p_{\lambda-1}$$

die Glieder dieser Folge, deren jedes um $(\rho-3)$ vermehrt, nicht grösser als $(k-1)$ ist, so müssen sie die Folge

$$\rho-1,\ \rho, \ldots \lambda-1$$

bilden. Das auf $p_{\lambda-1}$ in (β) folgende Glied p_λ muss also $< k-1$ aber $> p_{\lambda-1}+1$ sein und es wird somit auf die Zeile von R, in der

$$1+p_{\lambda-1} = \mu$$

ist, die zweite der obigen Formeln angewandt sein. Da aber

$$1+p_{\lambda-1}-(\rho-3) = p_{\lambda-1}+4-\rho = \lambda+3-\rho,$$

sobald nur $\rho > 3$ ist, in der Folge:

$$1,\ 2, \ldots (\rho-3),\ (\rho-2) \ldots \lambda-1,$$

also auch in der identischen:

$$1,\ 2, \ldots \rho-2,\ p_{\rho-1} \ldots p_{\lambda-1}$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

enthalten ist, so findet sich zu $\mu = 1+\mu_{i-1}$ ein $\nu = \lambda+3-\rho$ vor, für welches

$$\mu-\nu = \rho-3$$

ist.

Hieraus folgt also, dass unter den gemachten Voraussetzungen jeder Differentialquotient von R, der die Form:

$$\frac{d^{k-1}R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+\rho)}\right]^{k-i-1}\left[da_n^{(m-k+2)}\right]^{i}}$$

hat, verschwindet, wenn $\rho > 3$ ist.

Für $\rho = 3$ hingegen ist die Folge (α) mit (β) identisch und es hat also

$$\frac{d^{k-1}R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+3)}\right]^{k-i-1}\left[da_n^{(m-k+2)}\right]^{i}},$$

so lange zu den früheren Voraussetzungen keine weiteren hinzugefügt werden, den von Null verschiedenen Werth:

$$\frac{d^{k-1}R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+3)}\right]^{k-i-1}\left[da_n^{(m-k+2)}\right]^{i}} = (k-1)!\; C_1 \left|\begin{array}{cccc|ccc} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_{k-1} & F(z_k) & \ldots & F(z_{m+1}) \\ \eta_1' & \eta_2' & \ldots & \eta_{k-1}' & F'(z_k) & \ldots & F'(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \eta_1^{(k-2)} & \eta_2^{(k-2)} & \ldots & \eta_{k-1}^{(k-2)} & F^{(m-k+1)}(z_k) & \ldots & F^{(m-k+1)}(z_{m+1}) \end{array}\right|.$$

wo C_1 einen von C verschiedenen leicht bestimmbaren Ausdruck bezeichnet.

Ist $\rho = 2$, so werden in der Summe von Determinanten, aus welchen

$$\frac{d^{k-1}R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+2)}\right]^{k-i-1}\left[da_n^{(m-k+2)}\right]^{i}}$$

besteht, alle verschwinden, in denen sich zu einem ν ein μ vorfindet, deren Differenz

$$\nu-\mu = 1$$

ist; also alle ausser denen, in welchen von den letzten $(k-1)$ Zeilen jede der i ersten nach $a_n^{(m-k+2)}$ und jede der übrigen nach $a_{n-2}^{(m-k+2)}$ differentiirt wurde. Somit ist, wenn

$$C' = \binom{m-k+2}{1}\ldots\binom{m-1}{k-2}\binom{m}{k-1}C$$

gesetzt wird:

$$\frac{d^{k-1}R}{\left[da_n^{(m-k+2)}\right]^{i}\left[da_{n-1}^{(m-k+2)}\right]^{k-i-1}} = i!\;(k-i-1)!\; C' \left|\begin{array}{cccc|ccc} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_{k-1} & F(z_k) & \ldots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \eta_1^{(i-1)} & \eta_2^{(i-1)} & \ldots & \eta_{k-1}^{(i-1)} & \cdot & \ldots & \cdot \\ \eta_1^{(i+1)} & \eta_2^{(i+1)} & \ldots & \eta_{k-1}^{(i+1)} & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \eta_1^{(k-1)} & \eta_2^{(k-1)} & \ldots & \eta_{k-1}^{(k-1)} & F^{(m-k+1)}(z_k) & \ldots & F^{(m-k+1)}(z_{m+1}) \end{array}\right|.$$

Die Formeln für $\rho = 1$ und $\rho = 0$, die nicht weiter abgeleitet werden sollen, unterschieden sich von den vorhergehenden nur in ihrem ersten Factor, der aber ebenfalls wegen der gemachten Voraussetzung, dass $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{k-1}$ linear-unabhängig seien, nicht verschwinden kann.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergibt sich also, dass unter der Voraussetzung: die reducirten Gleichungen von (1) und (2) haben $(k-1)$ linear-unabhängige Integrale gemeinsam, jeder Differentialquotient von der Form:

$$\frac{d^{k-1}R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+\rho)}\right]^{k-i-1}\left[da_n^{(m-k+2)}\right]^{i}}$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wenn ρ nicht grösser als 3 ist, sich als ein Product aus einem nicht verschwindenden und dem Factor

$$\begin{vmatrix} F(z_k) & . & . & F(z_{m+1}) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ F^{(m-k+1)}(z\ ) & . & . & F^{(m-k+1)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

darstellt. Diese Differentialquotienten sind also gleichzeitig Null oder hievon verschieden u. zw. findet stets das erstere statt, sobald die beiden Gleichungen (1) und (2) k linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben, da dann die obige Determinante verschwindet. Aber umgekehrt darf aus dem Verschwinden eines dieser Differentialquotienten nur geschlossen werden, dass die Gleichungen (1) und (2) entweder k derartige Integrale gemeinsan haben oder dass sie selbst keines, aber ihre Reducirten mindestens deren k gemein haben. Wenn also einer der obigen Differentialquotienten verschwindet und die Reducirten nicht k Integrale gemeinsam haben, sondern nur $(k-1)$, so müssen (1) und (2) selbst k Integrale gemein haben; sie können aber deren auch nicht mehr gemeinsam haben, da sonst auch die Reducirten mehr gemeinschaftlich haben müssten. Hieraus folgt:

„Haben die Reducirten zweier linearen Differentialgleichungen $(k-1)$ linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam und verschwindet ein Differentialquotient des R von der Form:

$$\frac{d^{k-1}R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+\rho)}\right]^i \left[da_n^{(m-k+2)}\right]^{k-i-1}},$$

wo ρ nicht grösser als 3 ist, so haben die linearen Differentialgleichungen k derartige Integrale gemeinsam, wenn kein Differentialquotient von der Form:

$$\frac{d^k R}{\left[da_{n-1}^{(m-k)}\right]^i \left[da_n^{(m-k)}\right]^{k-i} da^{(m)}} = (-1)^{n+1}\, b_0 \frac{d^{k-1}r}{\left[da_{n-1}^{(m-k)}\right]^i \left[da_n^{(m-k)}\right]^{k-i}},$$

die zugleich Null oder von Null verschieden sind, verschwindet[1]); ist jedoch derselbe Null, hingegen für irgend ein i

$$\frac{d^k R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+1)}\right]^i \left[da_n^{(m-k+\rho-1)}\right]^{k-i}} \neq 0,$$

wo $\rho \gtrless 3$ ist, so haben die linearen Gleichungen gar kein, aber ihre Reducirten k linear-unabhängige Integrale gemein."

Der Forderung, dass die beiden reducirten Gleichungen $(k-1)$ linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben sollen, lässt sich noch ein anderer Ausdruck geben, da die Bedingungen bekannt sind, unter welchen dieselbe in Erfüllung geht[1]). Sie lauten:

„Die beiden reducirten Gleichungen haben $(k-1)$ linear-unabhängige particuläre Integrale gemein, wenn ausser r noch $(k-2)$ Differentialquotienten desselben, deren jeder einer anderen der ersten $(k-2)$ verschiedenen Ordnungen angehört und von der Form:

$$\frac{d^{\mu+1}R}{\left[da_{n-1}^{(m-\mu)}\right]^i \left[da_n^{(m-\mu)}\right]^{\mu-i} da^{(m)}} = (-1)^{n+1}\, b_0 \frac{d^{\mu}r}{\left[da_{n-1}^{(m-\mu)}\right]^i \left[da_n^{(m-\mu)}\right]^{\mu-i}}$$

ist, verschwindet."

Diese Bedingungen lassen sich aber unter Berücksichtigung der vorangehenden Ergebnisse noch anders darstellen.

Verschwindet nämlich sowohl R als auch ein Differentialquotient desselben von der Form:

$$\frac{dR}{da_i^{(m)}}$$

[1]) L. c. p. 70.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

so haben, wie aus den früheren Entwicklungen hervorgeht, entweder die linearen oder reducirten Gleichungen mindestens zwei linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam, also besitzen in diesem Falle die reducirten Gleichungen mindestens ein gemeinsames particuläres Integral. Verschwindet daher auch noch ein Differentialquotient von der Form:

$$\frac{d^2R}{[da_{n-1}^{(m-1)}]^i[da^{(m-3+\rho)}]^{2-i}},$$

wo $\rho \gtreqless 3$ ist, so haben nach dem Vorangehenden die Reducirten mindestens zwei linear-unabhängige particuläre Integrale gemein.

Diesen Gedankengang fortsetzend gelangt man zu dem Ergebnisse:

„Verschwinden ausser R noch $(k-1)$ Differentialquotienten desselben von der Form:

$$\frac{dR}{da_i^{(m)}};\ \frac{d^2R}{[da_{n-1}^{(m-1)}]^i[da_n^{(m-3+\rho)}]^{2-i}};\ \dots\ \frac{d^{k-1}R}{[da_{n-1}^{(m-k+2)}]^i[da_n^{(m-k+\rho)}]^{k-i-1}},$$

wo $\rho \gtreqless 3$ ist, so besitzen die beiden reducirten Gleichungen von (1) und (2) mindestens $(k-1)$ linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam."

Dem obigen Satze lässt sich hiedurch die folgende Fassung geben:

„Damit die beiden linearen Differentialgleichungen (1) und (2) k, aber auch nicht mehr linear-unabhängige particuläre Integrale gemein haben, ist es nothwendig und hinreichend, dass mit ihrer Resultante R, noch $(k-1)$ Differentialquotienten derselben von der Form:

$$\frac{dR}{da_i^{(m)}};\ \frac{d^2R}{[da_{n-1}^{(m-1)}]^i[da_n^{(m-3+\rho)}]^{2-i}};\ \dots\ \frac{d^{k-1}R}{[da_{n-1}^{(m-k+2)}]^i[da_n^{(m-k+\rho)}]^{k-i-1}},$$

wo $\rho \gtreqless 3$ ist, Null sind; aber keiner der gemeinsam verschwindenden von der Form:

$$\frac{d^kR}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^i[da_n^{(m-k+1)}]^{k-i-1}da^{(m)}} = (-1)^{n+1}b_0\frac{d^{k-1}r}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^i[da_n^{(m-k+1)}]^{k-i-1}}.$$

Verschwinden hingegen auch diese, ist aber für irgend ein i:

$$\frac{d^kR}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^i[da_n^{(m-k+\rho-1)}]^{k-i}} \neq 0,$$

wo ρ nicht grösser als drei ist, so haben zwar die linearen Gleichungen kein Integral, aber ihre reducirten k linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam."

IV.

Die voranstehenden Betrachtungen führen auch mit Leichtigkeit zu einer linearen Differentialgleichung, der jedes gemeinsame Integral von (1) und (2) genügt und deren jedes particuläre Integral auch umgekehrt diesen Gleichungen gemeinsam ist.

Um dieselbe abzuleiten, werde angenommen, die beiden Gleichungen (1) und (2) haben k linear-unabhängige particuläre Integrale gemein und werden dieselben mit $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_k$ bezeichnet. Die Grössen $\zeta_1 - \zeta_k = \eta_1$; $\zeta_2 - \zeta_k = \eta_2$; $\dots \zeta_{k-1} - \zeta_k = \eta_{k-1}$ sind dann $(k-1)$ den beiden reducirten Gleichungen gemeinsame linear-unabhängige particuläre Integrale. Dem R kann man dann die Form geben:

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$R = C\begin{vmatrix} F(\zeta_1) & \cdots & F(\zeta_{k-1}) & F(\zeta_k) & F(z_{k+1}) & \cdots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F^{(m-k)}(\zeta_1) & \cdots & F^{(m-k)}(\zeta_{k-1}) & F^{(m-k)}(\zeta_k) & F^{(m-k)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k)}(z_{m+1}) \\ F^{(m-k+1)}(\zeta_1) & \cdots & F^{(m-k+1)}(\zeta_{k-1}) & F^{(m-k+1)}(\zeta_k) & F^{(m-k+1)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k+1)}(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F^{(m)}(\zeta_1) & \cdots & F^{(m)}(\zeta_{k+1}) & F^{(m)}(\zeta_k) & F^{(m)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

$$= C\begin{vmatrix} \varphi(\eta_1) & \cdots & \varphi(\eta_{k-1}) & F(\zeta_k) & F(z_{k+1}) & \cdots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi^{(m-k)}(\eta_1) & \cdots & \varphi^{(m-k)}(\eta_{k-1}) & F^{(m-k)}(\zeta_k) & F^{(m-k)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k)}(z_{m+1}) \\ \varphi^{(m-k+1)}(\eta_1) & \cdots & \varphi^{(m-k+1)}(\eta_{k-1}) & F^{(m-k+1)}(\zeta_k) & F^{(m-k+1)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k+1)}(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi^{(m)}(\eta_1) & \cdots & \varphi^{(m)}(\eta_{k-1}) & F^{(m)}(\zeta_k) & F^{(m)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}.$$

Von den verschiedenen Formen, in welchen sich hieraus die gewünschte Gleichung ziehen lässt, will ich eine ableiten. Aus dem obigen Ausdrucke für R ergibt sich in derselben Weise wie in (III):

$$\frac{d^k R}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^{k-i}[da_n^{(m-k+1)}]^i} = i!\ (k-i)!\ C'\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_k \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \zeta_1^{(i-1)} & \zeta_2^{(i-1)} & \cdots & \zeta_k^{(i-1)} \\ \zeta_1^{(i+1)} & \zeta_2^{(i+1)} & \cdots & \zeta_k^{(i+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \zeta_1^{(k)} & \zeta_2^{(k)} & \cdots & \zeta_k^{(k)} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} F(z_{k+1}) & \cdots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F^{(m-k)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k)}(z_{m+1}) \end{vmatrix},$$

wo

$$C' = \binom{m-k+1}{0}\binom{m-k+2}{1}\cdots\binom{m}{k-1}C;$$

und aus

$$\frac{dR}{da^{(m)}} = (-1)^{m+k}C\begin{vmatrix} \varphi(\eta_1) & \cdots & \varphi(\eta_{k-1}) & F(z_{k+1}) & \cdots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi^{(m-k)}(\eta_1) & \cdots & \varphi^{(m-k)}(\eta_{k-1}) & F^{(m-k)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k)}(z_{m+1}) \\ \varphi^{(m-k+1)}(\eta_1) & \cdots & \varphi^{(m-k+1)}(\eta_{k-1}) & F^{(m-k+1)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k+1)}(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi^{(m-1)}(\eta_1) & \cdots & \varphi^{(m-1)}(\eta_{k-1}) & F^{(m-1)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-1)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}b_0 r$$

folgt:

$$\frac{d^k R}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^{k-i-1}[da_n^{(m-k+1)}]^i\, da^{(m)}} = \frac{i!\ (k-i-1)!}{\binom{m}{k-1}}C'\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \eta_1^{(i-1)} & \eta_2^{(i-1)} & \cdots & \eta_{k-1}^{(i-1)} \\ \eta_1^{(i+1)} & \eta_2^{(i+1)} & \cdots & \eta_{k-1}^{(i+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \eta_1^{(k-1)} & \eta_2^{(k-1)} & \cdots & \eta_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} F(z_{k+1}) & \cdots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F^{(m-k)}(z_{k+1}) & \cdots & F^{(m-k)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$= (-1)^{n+1} b_0 \frac{d^{k-1} r}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^{k-i-1} [da_n^{(m-k+1)}]^i}.$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe in die Entwicklung der ersten Determinante von

$$\frac{d^k R}{[da_n^{(m-k+1)}]^k} = k!\ C' \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_{k-1} & \zeta_k \\ \eta_1' & \eta_2' & \ldots & \eta_{k-1}' & \zeta_k' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(k-1)} & \eta_2^{(k-1)} & \ldots & \eta_{k-1}^{(k-1)} & \zeta_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F(z_{k+1}) & \ldots & F(z_{m+1}) \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ F^{(m-k)}(z_{k+1}) & \ldots & F^{(m-k)}(z_{m+1}) \end{vmatrix}$$

nach den Elementen ihrer letzten Colonne und setzt $\zeta_k = \zeta$, so erhält man:

$$\frac{d^k R}{[da_n^{(m-k+1)}]^k} =$$

$$\binom{m}{k-1} k \left\{ \frac{d^k R}{[da_n^{(m-k+1)}]^{k-1} da^{(m)}} \zeta^{k-1} - \binom{k-1}{1} \frac{d^k R}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]\ [da_n^{(m-k+1)}]^{k-2}\, da^{(m)}} \zeta^{k-2} \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{d^k R}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^{k-1} da^{(m)}} \zeta \right\}$$

$$= (-1)^{n+1} \binom{m}{k-1} k b_0 \left\{ \frac{d^{k-1} r}{[da_n^{(m-k+1)}]^{k-1}} \zeta^{(k-1)} - \binom{k-1}{1} \frac{d^{k-1} r}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]\ [da_n^{(m-k+1)}]^{k-2}} \zeta^{(k-2)} \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1} r}{[da_{n-1}^{(m-k+1)}]^{k-1}} \zeta \right\}.$$

Dieser Gleichung genügt also jedes der den beiden Gleichungen (1) und (2) gemeinsamen linear-unabhängigen particulären Integrale: $\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_k$. Da sie nun selbst von der $(k-1)$ten Ordnung ist, so ist ihr allgemeines Integral ζ von der Form:

$$\zeta = c_1(\zeta_1 - \zeta_k) + c_2(\zeta_2 - \zeta_k) + \ldots + c_{k-1}(\zeta_{k-1} - \zeta_k) + \zeta_k\ .$$

Jedes derartige Integral ist aber ein den beiden Gleichungen (1) und (2) gemeinsames Integral und somit ist jedes particuläre Integral der obigen Gleichung diesen beiden Gleichungen gemeinsam.

V. [1])

Wie schon in (II) erwähnt wurde, lassen sich zwei lineare Differentialgleichungen, die mehrere particuläre linear-unabhängige Integrale gemein haben, durch Einführung einer neuen Variabeln in andere transformiren, die nur mehr ein particuläres Integral gemeinsam besitzen. Von dieser Bemerkung ausgehend soll nun eine characteristische Beziehung für zwei lineare Differentialgleichungen, die particuläre Integrale gemein haben, hergeleitet werden.

Es werde zunächst vorausgesetzt, die beiden Gleichungen (1) und (2) in (I) haben nur ein particuläres Integral gemein, was zur Folge hat, dass $R = 0$ und $r \neq 0$ ist. Es lassen sich dann stets zwei Operations-Symbole von der $n$ten und $m$ten Ordnung:

---

[1]) Die hier entwickelten Sätze wurden ohne Rücksicht auf den von Herrn Königsberger aufgestellten Begriff der irreductibelen algebraischen Differentialgleichungen ausgesprochen, da mir dieselben die Grundlage für diesen Begriff bei den linearen algebraischen Differentialgleichungen zu bilden scheinen und ich hierauf bei einer anderen Gelegenheit näher einzugehen gedenke.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\left(p_0 \frac{d^m}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + p_{m-1} \frac{d}{dx} + p_m\right) y = P(y)$$

$$\left(q_0 \frac{d^n}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + q_{n-1} \frac{d}{dx} + q_n\right) y = Q(y)$$

auffinden, dergestalt, dass

$$P[F] = Q[f].$$

Denn die $(m+n+2)$ linearen Gleichungen, die zwischen $p_0, p_1 \ldots p_m$; $q_0, q_1 \ldots q_n$ bestehen müssen, damit diese Identität statt habe, sind nach diesen $(m+n+2)$ Grössen homogen und haben R zu ihrer Determinante. Da nun $R = 0$ und $r \neq 0$ ist, so sind diese Grössen berechenbar.

Haben die beiden Gleichungen (1) und (2) $(k+1)$ linear-unabhängige particuläre Integrale gemein, was nach den Criterien in (III) erkannt wird, so haben ihre reducirten Gleichungen k linear-unabhängige Integrale gemeinschaftlich. Ist $z = 0$ (l. c. p. 71) deren Differentialgleichung, so lässt sich mittelst zweier Operations-Symbole der obigen Art: p und q, von denen das erstere von der $(m-k)$ten und das zweite von der $(n-k)$ten Ordnung ist, den Gleichungen (1) und (2) die Gestalt geben:

$$F = p(z) + a$$
$$f = q(z) + b.$$

Die beiden linearen Gleichungen

$$p(z) + a = 0,$$
$$q(z) + b = 0,$$

die bezüglich von der $(m-k)$ten und $(n-k)$ten Ordnung nach z sind, haben nunmehr blos **ein** Integral gemeinsam und daher findet sich nach dem oben Auseinandergesetzten ein Operations-Symbol P der $(m-k)$ten und Q der $(n-k)$ten Ordnung dergestalt, dass

$$P[p(z)+a] = Q[q(z)+b)]$$

also

$$P[F] = Q[f].$$

Offenbar gilt auch die Umkehrung: Besteht zwischen F und f eine derartige Identität, so müssen $F = 0$ und $f = 0$ $(k+1)$ linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben. Denn bilden $y_1, y_2 \ldots y_{m+1}$ ein System linear-unabhängiger particulärer Integrale der Gleichung $f = 0$, und bezeichnet F_i die Substitution von y_i in F, so sind $F_1, F_2 \ldots F_{m+1}$ particuläre Integrale der homogenen Differentialgleichung der $(m-k)$ten Ordnung

$$P(F) = 0.$$

Es können somit von diesen $(m+1)$ particulären Integralen blos $(m-k)$ von einander linear-unabhängig sein, während die übrigen $(k+1)$, falls sie überhaupt von Null verschieden sind, lineare Ausdrücke dieser sein müssen. Wird etwa angenommen, dass

$$F_1, F_2 \ldots F_{m-k}$$

die linear-unabhängigen Integrale seien, so muss F_{m-k+i} sich in der Form darstellen lassen:

$$F_{m-k+i} = c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ldots + c_{m-k} F_{m-k},$$

wo die c Constanten sind, die auch Null sein können. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass jede derselben verschwinden muss. Denn wären eines oder mehrere c von Null verschieden, so müsste, da die obige

Identität erfordert, dass die denselben Ableitungen der abhängigen Variablen zugehörigen Coefficienten auf beiden Seiten einander gleich seien, die Relation:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{m-k} = 1,$$

statt haben und

$$y_{m-k+i} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{m-k-1} y_{m-k-1} + c_{m-k} y_{m-k}$$

sein. In Folge der Relation zwischen den c ginge aber diese über in:

$$y_{m-k+i} = c_1 (y_1 - y_{m-k}) + \ldots + c_{m.k-1} (y_{m-k-1} - y_{m-k}) + y_{m-k},$$

was der Voraussetzung widerspräche, dass $y_1, y_2 \ldots y_{m+1}$ linear-unabhängig sind; also muss

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-k} = 0$$

und somit

$$F_{m-k+i} = 0$$

sein für $i = 1, 2, \ldots k+1$.

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich demnach in den Satz zusammenfassen:

„Haben zwei lineare Differentialgleichungen $F = 0$ und $f = 0$, von denen jedenfalls eine nicht homogen und die erste von der $n$ten, die zweite von der $m$ten Ordnung ist, $(k+1)$ linear-unabhängige particuläre Integrale gemein, so lässt sich stets ein Operations-Symbol P der $(m-k)$ten und eines Q der $(n-k)$ten Ordnung bestimmen, dergestalt, dass die Identität obwaltet:

$$P[F] = Q[f].$$

Und umgekehrt: Besteht zwischen F und f eine derartige Identität, so haben die beiden linearen Differentialgleichungen

$$F = 0, \quad f = 0,$$

$(k+1)$ aber auch nicht mehr linear-unabhängige particuläre Integrale gemein.“

Ist $f = 0$ selbst von der $k$ten Ordnung, sind also die sämmtlichen particulären Integrale der Gleichung $f = 0$ in $F = 0$ enthalten, so lässt sich hinach F in die Form bringen:

$$F = Q[f],$$

wo Q ein Operations-Symbol der $(n-k)$ten Ordnung ist. Bezeichnet daher v das allgemeine Integral der nach f homogenen linearen Gleichung der $(n-k)$ten Ordnung:

$$Q[f] = 0,$$

so ist $f = v$ eine Integralgleichung von $F = 0$.

Man zieht hieraus den Satz:

Sind die sämmtlichen particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung der $k$ten Ordnung $f = 0$ in einer höheren, $n$ter Ordnung, $F = 0$ enthalten, so kommt die Integration der letzteren zurück auf die Integration von $f = 0$ und einer homogenen linearen Gleichung der $(n-k)$ten Ordnung.

Die Anwendung, die dieser Satz im Falle findet, als zwei gegebene lineare Differentialgleichungen gemeinsame particuläre Integrale besitzen, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzungen.

2) Es soll nun das dem eben behandelten Probleme zur Seite stehende gelöst und die Differentialgleichung der niedrigsten Ordnung aufgesucht werden, welche die sämmtlichen particulären Integrale zweier gegebenen linearen Differentialgleichungen enthält.

Die Lösung dieser Aufgabe ist für den Fall, dass beide Gleichungen kein particuläres Integral gemeinsam haben, durch die folgende Bemerkung gegeben, die ohne weiteres evident ist.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

„Haben die beiden linearen Differentialgleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, von denen mindestens eine nicht homogen und die erste von der $n$ten, die zweite von der $m$ten Ordnung sei, kein particuläres Integral gemein, so lassen sich stets zwei Operations-Symbole p und q bezüglich von der $(m+1)$ten und $(n+1)$ten Ordnung bestimmen, welche die Identität herstellen:

$$p(\varphi) = q(\psi).$$

Besitzen jedoch die linearen Differentialgleichungen $F = 0$ der $n$ten und $f = 0$ der $m$ten Ordnung, von denen mindestens eine nicht homogen sei, $(k+1)$ linear unabhängige particuläre Integrale gemeinsam und ist $z = 0$ deren lineare Differentialgleichung der $k$ten Ordnung, so lassen sich nach dem Vorhergehenden (1) zwei Operations-Symbole P und Q bezüglich von der $(n-k)$ten und $(m-k)$ten Ordnung bestimmen, welche die Identitäten liefern:

$$F \equiv P(z)$$
$$f \equiv Q(z).$$

Da die beiden homogenen Differentialgleichungen nach z der $(n-k)$ten und $(m-k)$ten Ordnung:

$$P(z) = 0,$$
$$Q(z) = 0,$$

nunmehr kein particuläres Integral gemeinsam haben können, so lassen sich nach l. c. p. 74 zwei Operations-Symbole R und S bezüglich von der Ordnung $(m-k)$ und $(n-k)$ auffinden, welche die Identität herstellen:

$$R[P(z)] \equiv S[Q(z)]$$

oder

$$R[F] \equiv S[f].$$

Jeder dieser Ausdrücke verschwindet für die Substitution der particulären Integrale sowohl von $F = 0$ als auch von $f = 0$ und daher sind in jeder der beiden identischen linearen Gleichungen der $(m+n-k)$ten Ordnung:

$$R[F] = S[f] = 0$$

die sämmtlichen Integrale sowohl von $F = 0$ als auch $f = 0$ enthalten. Wie ihre Herleitung zeigt, sind diese Gleichungen auch die der niedrigsten Ordnungen von dieser Beschaffenheit.

Man übersieht, wie durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auch die Differentialgleichung der niedrigsten Ordnung gebildet werden kann, welche die sämmtlichen particulären Integrale mehrerer linearer Gleichungen in sich vereiniget. Aber auch die früheren Sätze in (1) lassen sich für den Fall erweitern, dass nicht blos zwei, sondern mehrere Gleichungen zugleich in Betracht gezogen werden. Doch dürfte es zweckmässig sein, vorerst ein gewisses Eliminations-Problem zu erledigen.

VI.

1) Ich will mir erlauben die Lösung dieses Problems mit einer allgemeinen Bemerkung über die Elimination einer Variabeln aus zwei simultanen Differentialgleichungen zwischen drei Variabeln einzuleiten, die sich durch die früheren Entwicklungen aufdrängt und, wie ich glaube, nicht ganz überflüssig erscheinen dürfte. Dieselbe wird an Deutlichkeit gewinnen, ohne an Allgemeinheit einzubüssen, wenn ich sie an die linearen Gleichungen (1) und (2) in (I) knüpfe. Nimmt man an, dass in diesen Gleichungen die Coefficienten eine zweite von x abhängige Variable z sammt ihren Differentialquotienten, in jedem bis zu einer gewissen Ordnung enthalten, so ist R das Resultat der Elimination der Variabeln y aus den beiden Gleichungen. Der Differentialgleichung nach $z: R = 0$ schreibt man nun zumeist, wie mir scheinen will, nicht nur die Eigenschaft zu, durch zusammenfallende Werthe von z befriedigt zu werden, welche aus den beiden gegebenen

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Gleichungen für dasselbe y sich ergeben, sondern auch, dass jede ihrer Lösungen gemeinsame particuläre Integrale der beiden gegebenen Gleichungen bestimme. Doch die letztere Supposition ist unbegründet. Denn nach den Auseinandersetzungen in (II) kann es immerhin Werthe des z geben, deren jeder $R=0$ genügt, die jedoch so beschaffen sind, dass nicht die durch sie in (1) und (2) bestimmten linearen Differentialgleichungen nach y ein particuläres Integral gemein haben, sondern blos deren Reducirten.

Von den unzähligen Beispielen, die sich leicht zur Illustration dieser Thatsache formen liessen, möge eines angeführt werden.

Sind in den beiden linearen Gleichungen:

$$a_0 y''+a_1 y'+a_2 y+a=0,$$
$$b_0 y''+b_1 y'+b_2 y+b=0,$$

die Coefficienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2z''+3z'+z+x^2 & b_0 &= 3z''+5z'+2z+(x-1) \\ a_1 &= 5z''+7z'+2z-2x & b_1 &= (2x+1)z''-(4x^2+3)z'-2(2x^2+x+2)z-x \\ a_2 &= 2x(2x+1)z''+(4x^2+1)z'-(2x-1)z+2 & b_2 &= z'+z+1 \\ a &= -2x^3 & b &= \text{const.}, \end{aligned}$$

so verschwindet für $z=e^{-x}$ der Ausdruck R, den man durch Elimination des y aus den beiden Gleichungen gewinnt; aber die durch Substitution dieses Werthes sich ergebenden linearen Gleichungen:

$$x^2 y''-2xy'+2y-2x^3=0,$$
$$(x-1)y''-xy'+y+b=0$$

haben dennoch kein particuläres Integral gemeinsam, sondern blos ihren Reducirten wird gleichzeitig durch $y=x$ genügt.

Die erwähnte Supposition trifft jedoch zu, wenn die linearen Gleichungen (1) und (2) homogen nach y sind, da (l. c. p. 66) dann das Verschwinden ihrer Resultante die nothwendige und hinreichende Bedingung ist, damit dieselben particuläre Integrale gemein haben. Die Entwicklungen dieser Note ermöglichen es jedoch, noch in einem zweiten Falle aus (1) und (2) eine dritte Gleichung abzuleiten, deren jede Lösung stets gemeinsame Lösungen derselben bestimmt, nämlich dann, wenn die Variable z blos im letzten von y freien Terme der beiden Gleichungen, von denen wenigstens eine nicht homogen vorausgesetzt wird, auftritt.

Denn haben die Reducirten der beiden Gleichungen, in deren Coefficienten also die Variable z und deren Derivirten nicht vorkommen, $(k-1)$ und nicht mehr particuläre Integrale gemeinsam, so stellt nach (III) die Identität:

$$\frac{d^{k-1} R}{\left[da_{n-1}^{(m-k+\rho)}\right]^i \left[da^{(m-k+2)}\right]^{k-i-1}}=0$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dar, damit die beiden linearen Gleichungen k linear unabhängige particuläre Integrale gemein haben. Jedes z, das dieser Gleichung genügt, bestimmt also k den beiden gegebenen Gleichungen gemeinsame linear unabhängige particuläre Integrale und bildet daher mit jedem dieser k Integrale und jedem aus ihnen linear zusammengesetzten Integrale Lösungs-Systeme der beiden simultanen Gleichungen.

Zu einer Gleichung von der gewünschten Beschaffenheit wäre man auch leicht durch gesonderte Betrachtung der beiden Fälle gelangt, in denen die Reducirten der beiden Gleichungen (1) und (2) kein particuläres Integral gemein haben oder deren mehrere. Denn im ersten Falle hat $R=0$ die gewünschte Eigenschaft, dass jede ihrer Lösungen gemeinsame Lösungen in (1) und (2) hervorruft. Der zweite Fall, in welchem diese Gleichungen $(k-1)$ linear unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben, lässt sich aber unmittelbar auf den ersteren zurückführen. Denn stellt $u=0$ die Differentialgleichung dieser gemeinsamen Integrale dar,

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so lassen sich stets Operations-Symbole p und q bezüglich von der $(n-k+1)$ten und $(m-k+1)$ten Ordnung auffinden, vermittelst welcher die Identitäten statthaben:

$$F = p(u)+a,$$
$$f = q(u)+b.$$

Die reducirten der beiden nach u linearen Gleichungen:

$$p(u)+a = 0,$$
$$q(u)+b = 0$$

haben dann kein particuläres Integral gemeinsam und die Resultante R der beiden linearen Gleichungen gibt also, gleich Null gesetzt, eine Differentialgleichung nach z, deren jedes particuläre Integral in diesen Gleichungen dasselbe u und somit gemeinsame Integrale von $F = 0$ und $f = 0$ bestimmt.

Mit dieser Elimination ist auch eine Aufgabe gelöst, von der ein specieller Fall schon durch Herrn Fuchs[1] und ein zweiter l. c. p. 79 behandelt wurde.[2] Man kann ihr die nachfolgende Fassung geben:

Die lineare Differentialgleichung zu bilden, deren jedes particuläre Integral ein gegebener linearer Differentialausdruck eines particulären Integrals einer gegebenen linearen Differentialgleichung ist.

Diese Aufgabe ist offenbar ein specieller Fall des oben erörterten Eliminations-Problems. Denn ist

$$F = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y + a = 0, \qquad (\alpha)$$

die gegebene und gesucht die lineare Differentialgleichung, deren particuläre Integrale z mit den y in der Beziehung stehen:

$$z = b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \ldots + b_m y + b, \qquad (\beta)$$

so hat diese die Eigenschaft, dass jede ihrer Lösungen z in den beiden linearen Gleichungen (α) und (β) gemeinsame Lösungen y bestimmt. Sie wird also in der eben auseinandergesetzten Weise gefunden und ist, wenn

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

und

$$b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \ldots + b_m y = 0$$

$(k-1)$ linear unabhängige particuläre Integrale gemein haben, nach z von der $(n-k+1)$ten Ordnung.

2. Durch die Lösung dieser Aufgabe ist man nunmehr in den Stand gesetzt, die früher angeregte Erweiterung der Sätze in (VI) auszuführen. Ich will dieselbe an dem Falle vornehmen, dass die sämmtlichen particulären Integrale jeder der drei linearen Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, die bezüglich von der Ordnung k_1, k_2, k_3 seien, in der linearen Differentialgleichung der $n$ten Ordnung $F = 0$ enthalten seien, da sich von hieraus der allgemeine Fall, wo an die Stelle von drei linearen Differentialgleichungen m treten, vollständig übersehen lässt. Von diesen drei Gleichungen will ich vorerst annehmen, dass keine zwei, noch die Reducirten irgend zweier particuläre Integrale gemeinsam haben.

Da die sämmtlichen particulären Integrale von $f_1 = 0$ in $F = 0$ enthalten sind, so lässt sich immer ein Operations-Symbol der $(n-k_1)$ten Ordnung p bestimmen (V, 1) dergestalt, dass

$$F = p[f_1].$$

[1] Journal für Mathematik, Bd. 68.

[2] Der dortigen Elimination liegt die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, dass die beiden Reducirten kein particuläres Integral gemein haben.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Sind nun die particulären Integrale $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{k_2+1}$ von f_2 linear unabhängig, so sind auch die Ausdrücke $f_1(\eta_1), f_1(\eta_2) \ldots f_1(\eta_{k_2+1})$, deren jeder der Gleichung

$$p[f_1] = 0$$

genügt, wegen der gemachten Voraussetzungen linearunabhängig von einander und können somit als (k_2+1) linear unabhängige particuläre Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung nach $f_1(\eta)$:

$$\varphi[f_1(\eta)] = 0$$

betrachtet werden, deren Bildungsweise soeben in (1) gelehrt wurde.

Da nun die sämmtlichen Integrale dieser Gleichung der (k_1+k_2)ten Ordnung in $p[f_1] = 0$ enthalten sind, so muss sich ein Operations-Symbol q der $(n-k_1-k_2)$ten Ordnung auffinden lassen (V. 1, l. c. V.) dergestalt, dass

$$F = p[f_1] = q[\varphi(f_1)].$$

Der Gleichung:

$$q[\varphi(f_1)] = 0$$

wird wieder durch jedes particuläre Integral von $f_3 = 0$ genügt. Sind nun $\eta_1', \eta_2' \ldots \eta_{k_3}'$ linear unabhängige Integrale von $f_3 = 0$, so wird die obige Gleichung durch jeden der Ausdrücke

$$\varphi[f_1(\eta_1')];\ \varphi[f_1(\eta_2')];\ \ldots \varphi[f_1(\eta_{k_3+1}')]$$

befriedigt. Diese Ausdrücke sind aber wegen der gemachten Voraussetzungen linear unabhängig von einander, da die lineare Relation

$$c_1\varphi[f_1(\eta_1')] + c_2\varphi[f_1(\eta_2')] + \ldots + c_{k_3+1}\varphi[f_1(\eta_{k_3+1}')] = 0,$$

wo die c Constanten sind, wie man sich leicht überzeugt, zur Folge hätte, dass entweder — wenn $\Sigma c = 0$ ist — eine oder beide Reducirten von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ mit der Reducirten von $f_3 = 0$, oder — wenn $\Sigma c \neq 0$ ist — die Gleichungen $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ particuläre Integrale gemein haben. Die obigen Ausdrücke können daher als linear unabhängige Integrale einer nach $\varphi[f_1(\eta)]$ linearen homogenen Gleichung betrachtet werden.

Ist daher

$$\psi[\varphi(f_1)] = 0$$

diese Gleichung, welche von der Ordnung $(k_1+k_2+k_3)$ ist, so sind deren sämmtliche Integrale in

$$F = q[\varphi(f_1)] = 0$$

enthalten. Daher muss es ein Operations-Symbol χ der $(n-k_1-k_2-k_3)$ten Ordnung geben, für welches

$$q[\varphi(f_1)] = \chi\{\psi[\varphi(f_1)]\}.$$

Hiernach ist also:

$$F = \chi\{\psi[\varphi(f_1)]\},$$

wo der Differentialausdruck f_1 von der Ordnung k_1 und die Operations-Symbole φ, ψ, χ bezüglich von der Ordnung k_2, k_3 und $n-(k_1+k_2+k_3)$ sind.

Die vorstehenden Auseinandersetzungen führen somit zu dem folgenden Satze:

Sind die sämmtlichen particulären Integrale jeder der linearen Gleichungen:

$$f = 0;\ f_1 = 0;\ f_2 = 0;\ \ldots f_m = 0$$

die bezüglich von der Ordnung k, k_1, k_2, $\ldots k_m$ seien, in einer linearen Differentialgleichung der $n$ten Ordnung

$$F = 0$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

enthalten, so lassen sich, wenn weder zwei der obigen Gleichungen, noch ihre Reducirten ein particuläres Integral gemeinsam haben, Operations-Symbole $p_1, p_2 \dots p_m, p_{m+1}$ bezüglich von der Ordnung $k_1, k_2 \dots k_m, n-(k+k_1+\dots+k_m)$ auffinden, dergestalt, dass die Identität obwaltet:

$$F = p_{m+1}\left[p_m \dots [p_1(f)]\right].$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man, wenn man durch wiederholte Anwendung des l. c. p. 74 auseinandergesetzten Verfahrens zunächst die homogene lineare Differentialgleichung der niedrigsten Ordnung sucht, welche die sämmtlichen particulären Integrale von $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ in sich vereinigt und beachtet, dass die sämmtlichen Integrale dieser Gleichung in $F = 0$ enthalten sein müssen. Die Anwendung von (V, 1) führt dann unmittelbar zur obigen Formel.

Ich will nunmehr den allgemeineren Fall behandeln, in dem die obigen Voraussetzungen über $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ fallen gelassen werden. Doch soll dieser Fall nicht durch blosse Erweiterung des vorhergehenden Verfahrens erörtert, sondern dasselbe in etwas modificirter Weise angewendet werden, welche zugleich zeigen wird, dass im obigen Satze die eine Einschränkung, wonach keine zwei der drei Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ ein particuläres Integral gemein haben sollen, überflüssig ist.

Es sollen über $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, deren sämmtliche Integrale in $F = 0$ enthalten sind, im Vorhinein keine Voraussetzungen gemacht, sondern erst aus dem Entwicklungsgange die nothwendigen erkannt und festgestellt werden.

Da die sämmtlichen Integrale von $f_1 = 0$ in $F = 0$ enthalten sein sollen, so gibt es ein Operations-Symbol p der $(n-k_1)$ten Ordnung, für welches

$$F = p[f_1].$$

In der Gleichung $p[f_1] = 0$ sind nun die sämmtlichen Integrale von $f_2 = 0$ enthalten. Man bilde daher die Gleichung, deren jedes Integral von der Form $f_1(\eta)$ ist, wenn η ein Integral von $f_2(\eta) = 0$ ist. Dieselbe wird durch Anwendung des Verfahrens in (1) auf die beiden Gleichungen

$$f_2(\eta) = 0,$$
$$f_1(\eta) = z$$

gewonnen. Die sich hiedurch ergebende Differentialgleichung $\varphi(z) = 0$ ist nach z von der Ordnung $k_2-\lambda$, wenn λ die Anzahl der linear unabhängigen particulären Integrale bezeichnet, welche den Reducirten von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ gemein sind.

Die sämmtlichen Integrale von

$$\varphi[f_1(\eta)] = 0$$

sind aber in $p[f_1(y)] = 0$ enthalten, da für $y = \eta$ stets F verschwindet. Somit besteht ein Operations-Symbol q der $n-(k_1+k_2-\lambda)$ Ordnung, für welches

$$F = p[f_1]$$
$$= q[\varphi(f_1)].$$

In der Gleichung $q[\varphi(f_1)] = 0$ sind nun wieder die sämmtlichen Integrale von $f_3 = 0$ enthalten. Um diesen Umstand in derselben Weise wie vorher zu verwerthen, ist es zuvörderst nothwendig, die Gleichung zu bilden, deren jedes particuläre Integral die Form $\varphi[f_1(\eta')]$ besitzt, wo η' ein particuläres Integral von $f_3(\eta') = 0$ bedeutet. Die Ordnung dieser Gleichung $\psi(v) = 0$, welche nach (1) aus

$$f_3(\eta') = 0,$$
$$\varphi[f_1(\eta')] = v$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

erhalten wird, kann aber a priori bestimmt werden, indem man die Zahl der linear-unabhängigen particulären Integrale feststellt, welche die Reducirten von $f_3(\eta')=0$ und $\varphi[f_1(\eta')]=0$ mit einander gemein haben. Um diese Zahl zu finden, sollen die Lösungen der Reducirten von $\varphi[f_1(\eta)]=0$ aufgesucht und zu diesem Behufe angenommen werden, es sei:

$$f_1(y)=\psi_1(y)+a,$$
$$\varphi(u)=\chi(u)+b.$$

wo $\psi_1(y)$ und $\chi(u)$ die Reducirten bezüglich von $f_1=0$ und $\varphi(u)=0$ sind und somit

$$\chi[\psi_1(y)]=0$$

die Reducirte der Gleichung $\varphi[f_1(y)]=0$ darstellt.

Der Gleichung nach y:

$$\chi[\psi_1(y)]=0$$

wird genügt, durch jedes y, welches $\psi_1(y)$ zu Null macht und ausserdem durch jedes y, welches mit dem allgemeinen Integrale u der Gleichung $\chi(u)=0$ in der Beziehung steht:

$$\psi_1(y)=u.$$

Nun ist aber in Folge der Bildungsweise von $\varphi[f_1(y)]=0$

$$u=c_1 f_1(\eta_1)+c_2 f_1(\eta_2)+\ldots+c_{k_2-\lambda+1} f_1(\eta_{k_2-\lambda+1}),$$

wenn zwischen den Constanten c die Relation herrscht:

$$\Sigma c=0.$$

Wegen dieser Gleichung zwischen den c geht der obige Ausdruck über in:

$$u=\psi_1(c_1\eta_1+c_2\eta_2+\ldots+c_{k_2-\lambda+1}\eta_{k_2-\lambda+1}),$$

somit:

$$\psi_1(y)=\psi_1(c_1\eta_1+c_2\eta_2+\ldots+c_{k_2-\lambda+1}\eta_{k_2-\lambda+1})$$

oder

$$y=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\ldots+c_{k_2-\lambda+1}\eta_{k_2-\lambda+1}.$$

Diese Summe stellt aber wegen $\Sigma c=0$ das allgemeine Integral der Reducirten von $f_2(\eta)=0$ dar.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich somit, dass die Reducirte von $\varphi[f_1(y)]=v$ nur verschwindet für die particulären Integrale der Reducirten der Gleichungen $f_1=0$ und $f_2=0$. Es hat daher dieselbe mit der Reducirten von $f_3(y)=0$ alle und keine anderen particulären Integrale gemeinsam, als welche der Reducirten von $f_3(y)=0$ mit den Reducirten von $f_1=0$ und $f_2=0$ gemein sind.

Bezeichnen also λ' und λ'' die Anzahl der linear unabhängigen particulären Integrale, welche die Reducirte von $f_3=0$ bezüglich mit der Reducirten von $f_1=0$ und $f_2=0$ gemein hat, bezeichnet ferner h die Anzahl solcher Integrale, welche die Reducirten dieser drei Gleichungen gemeinsam haben, so ist die Gleichung $\psi(v)=0$ nach v von der Ordnung $k_3-(\lambda'+\lambda''-h)$.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Da nun die sämmtlichen Integrale der Gleichung $\psi\left[\varphi\,|\,f_1(y)\right] = 0$ in $F = q\left[\varphi\,|\,f_1(y)\right] = 0$ enthalten sind, so besteht ein Operations-Symbol χ der Ordnung $n-(k_1+k_2+k_3-\lambda-\lambda'-\lambda''+h)$, welches die Identität herstellt:

$$F = \chi\{\psi[\varphi(f_1)]\}.$$

Von den drei hier auftretenden Operations-Symbolen φ, ψ, χ ist das erste von der Ordnung $k_2-\lambda$, das zweite von der $[k_3-(\lambda'+\lambda''-h)]$ten und das letzte von der $[n-(k_1+k_2+k_3-\lambda-\lambda'-\lambda''+h)]$ten Ordnung, wobei λ, λ', λ'' und h die Anzahl der linear unabhängigen particulären Integrale bezeichnen, welche bezüglich den Reducirten von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$, $f_1 = 0$ und $f_3 = 0$, $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ und denen aller drei Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ gemein sind.

Ist $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0$, so ist auch $h = 0$ und man hat den vorher behandelten specielleren Fall.

VII.

Das in (VI, 1) behandelte Problem der Transformation (p. 19) lässt eine weitgehende Verallgemeinerung zu, die im letzten Grunde auf gewissen aus den particulären Integralen einer linearen Gleichung zusammengesetzten Functionen beruht, deren Existenz aufzuweisen ich mich hier begnügen will, während deren eingehende Untersuchung ich einer anderen Gelegenheit vorbehalte. Diese Functionen, die auch bei Systemen simultaner linearer Differentialgleichungen auftreten und bei der Auflösung eines derartigen Systems ebenso wie bei dem erwähnten Transformationsprobleme sich als die Analoga der Potenzsummen der Wurzelsysteme algebraischer Gleichungen manifestiren, ergeben sich aus der Identität (6) durch dieselben Überlegungen, welche l. c. p. 79 auf sie führten. Es genügt daher den hieraus fliessenden Satz anzuführen, welcher lautet:

Sind y_1, $y_2 \ldots y_{n+1}$ ein System linear unabhängiger particulärer Integrale der linearen Differentialgleichung:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y + a = 0,$$

so lässt sich jede aus der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} y_1^{(\mu)} & y_1^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & y_1 & 1 \\ y_2^{(\mu)} & y_2^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ y_{n+1}^{(\mu)} & y_{n+1}^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & y_{n+1} & 1 \end{Vmatrix}$$

entnommene Determinante $(n+1)$ten Grades durch ein Product aus $e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ und einer in den Coefficienten der Gleichung und deren Differentialquotienten ganzen Function ausdrücken.

Um diese Function zu erhalten, setze man die Differenz $\mu - n = m$ und bilde die Matrix:

$$\begin{Vmatrix} a_{m,0} & a_{m,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m,\mu} & a^{(m)} \\ & a_{m-1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m-1,\mu-1} & a^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_n & a \end{Vmatrix}, \qquad (a)$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wo $a_{i,k}$ die in (I) angegebene Bedeutung hat. Dann ist irgend eine aus der Matrix von gleicher Mächtigkeit

$$\left\| \begin{array}{ccccc} y_1^{(\mu)} & y_1^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot\, y_1 & 1 \\ y_2^{(\mu)} & y_2^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot\, y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_{n+1}^{(\mu)} & y_{n+1}^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot\, y_{n+1} & 1 \end{array} \right\| \qquad (y)$$

entnommene Determinante $(n+1)$ten Grades gleich der aus den übrigen Colonnen der Matrix (a) gebildeten Determinante $(m+1)$ten Grades multiplicirt mit $a_0^{-(n+1)} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ und einer Potenz von (-1), deren Exponent die Anzahl der Vertauschungen angibt, welche nöthig sind, um diese m Colonnen der Reihe nach zu den m ersten der Matrix (a) zu machen. Dieser Satz lässt sich übrigens, wie ich in der angekündigten Arbeit zeigen werde, auch direct ohne Vermittelung der Identität (6) nachweisen.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 47_2

Autor(en)/Author(s): Escherich Gustav von

Artikel/Article: Über die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen. II. 1-24