DIE INTEGRATION

DER

PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

GRUNDLINIEN EINER ALLGEMEINEN INTEGRATIONSMETHODE.

VON

Dr. VICTOR SERSAWY,

PRIVATDOCENT FÜR MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT IN WIEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 13. MÄRZ 1881.

Unter dem Titel der Integration partieller Differentialgleichungen werden gemeinhin zwei von einander verschiedene analytische Probleme zusammengefasst. Das eine besteht in der Aufsuchung eines allgemeinen Integrales, welches die erforderliche Anzahl willkürlicher Functionen enthält, während das andere dahin abzielt, diese willkürlichen Bestandtheile der allgemeinen Lösung einer gewissen Anzahl ausserdem noch vorhandener, sogenannter Anfangsbedingungen anzupassen. Obwohl gerade in den wichtigsten Untersuchungen, nämlich in den physikalischen, beide Probleme regelmässig in dieser Verbindung auftreten, so ist es doch keinem Zweifel unterworfen, dass dieselben ihrem analytischen Charakter nach von einander unabhängig sind, also einzeln einer weiteren Untersuchung unterzogen werden können.

Die gegenwärtige Abhandlung stellt sich demgemäss die Aufgabe:

Die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_q z, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots}, \ldots\right),$$

d. h., alle Functionen der q Independenten $x_1, x_2, \ldots x_q$ aufzusuchen, welche für z gesetzt, der gegebenen Gleichung genügen.

Von etwaigen Anfangsbedingungen wird hiebei abgesehen.

In dieser Absicht wird vor Allem eine neue Form der Bedingungen aufgestellt, durch deren Erfüllung der Ausdruck

$$dz = z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + \ldots + z_q dx_q$$

integrabel wird. Mit Hilfe dieser neuen Form der Integrabilitätsbedingungen wird die Aufgabe jedesmal auf die Integration eines Systems von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt. Bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist dieses System stets bestimmt, indem es eben so viel Gleichungen als Unbekannte enthält; bei Differentialgleichungen höherer Ordnung enthält es immer weniger Gleichungen als Unbekannte, so dass einige der letzteren, so weit es sich um die Integration eben dieses Systems handelt, unbestimmt verbleiben.

Führt man nach vollzogener Integration die Integrationsconstanten als neue Veränderliche ein, so verwandelt sich die Aufgabe in ein Aggregat von Problemen, welche durch geeignete Wahl der unbestimmt gebliebenen Grössen in Pfaff'sche Probleme verwandelt werden. Nachdem die Gleichungen, welche die Wahl der unbestimmten Grössen bestimmen, abgeleitet und gezeigt worden ist, wie denselben Genüge geschieht, ist die Aufgabe für erledigt anzusehen.

Indem bezüglich der Einzelheiten der Untersuchungen wie natürlich auf die Abhandlung verwiesen werden muss, ist noch zu bemerken, dass Beispiele nur insoferne aufgenommen wurden, als sie zur Erläuterung einzelner Stellen dienlich sein konnten, und zwar aus dem Grunde, weil einerseits die Auswahl geeigneter Beispiele noch beschränkt, und andererseits der Rechnungsapparat auch bei einfach scheinenden Beispielen in der Regel ein sehr grosser ist.

Erster Abschnitt.

Die Integrabilitätsbedingungen.

1.

Ein Ausdruck von der Form:

$$dz = z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + \ldots + z_q dz_q, \tag{1}$$

— in welchem $z_1, z_2, \ldots z_q$ gegebene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_q$ und z bedeuten — wird unbeschränkt integrabel genannt, wenn derselbe durch eine einzige Beziehung in endlichen Dimensionen zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_q$ und z integrirt werden kann. Die Bedingung hiefür ist, wie bekannt, dass alle Gleichungen, welche aus der allgemeinen Formel:

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_s} + z_s \frac{\partial z_r}{\partial z} - \frac{\partial z_s}{\partial x_r} - z_r \frac{\partial z_s}{\partial z} = \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_s}\right) - \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_r}\right) = (r, s) = 0 \tag{2}$$

durch Specialisirung von r und s in $1, 2, \ldots q$ entstehen, identisch erfüllt sind. Ist dies der Fall, so können die (2) durch die folgenden ersetzt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 1)\,\delta x_1 + (1, 2)\,\delta x_2 + \ldots + (1, q)\,\delta x_q \\ 0 &= (2, 1)\,\delta x_1 + (2, 2)\,\delta x_2 + \ldots + (2, q)\,\delta x_q \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= (q, 1)\,\delta x_1 + (q, 2)\,\delta x_2 + \ldots + (q, q)\,\delta x_q, \end{aligned} \tag{3}$$

ohne dass damit zwischen den Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_q$ irgend eine Bedingung festgesetzt wird und umgekehrt, wenn die (3) gelten sollen, während die ebengenannten Variationen untereinander unabhängig bleiben, so kann dies nicht anders geschehen, als wenn die (2) identisch befriedigt sind. Man kann also sagen, dass der Ausdruck (1) unbeschränkt integrabel ist, wenn die Gleichungen (3) zwischen den Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_q$ keine Beziehungen involviren.

Sind die Gleichungen (2) nicht identisch befriedigt, so kann der Ausdruck (1) nur durch mehr als eine Relation zwischen den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_q$ und z integrirt werden, ist also nicht unbeschränkt integrabel, und gleichzeitig können die Gleichungen (3) nicht mehr bestehen, ohne die Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_q$ in Beziehung zu einander zu setzen. Es besteht also ein Zusammenhang zwischen der Integrabilität der Gleichung (1) und der Art, wie die (2) befriedigt werden können.

Um diesen Zusammenhang näher zu erkennen, nehmen wir an, dass m der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_q$ independent bleiben, und denken uns vermittelst der integrirenden Beziehungen

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_q$$

als Functionen von

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

dargestellt, welch' letztere dann unabhängig bleiben. Die Gleichung (1) verwandelt sich bei dieser Annahme in die folgende:

$$dz = \left(z_1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda}\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_1}\right) dx_1 + \ldots + \left(z_m + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda}\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_m}\right) dx_m \tag{4}$$

und diese muss, nachdem die $x_{m+1}, \ldots, x_m$ überall durch ihre Werthe in $x_1, x_2, \ldots x_m$ ersetzt worden sind, unbeschränkt integrabel sein. Entwickeln wir also die Ausdrücke, welche oben durch (r, s) bezeichnet worden sind, für die Gleichung (4) und bezeichnen sie zum Unterschiede durch eckige Klammern, so erhalten wir:

$$[i, k] = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left[z_i + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda}\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i}\right]\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[z_k + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda}\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k}\right]\right).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left[z_i + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda}\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i}\right]\right) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_{m+\lambda}}\right)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}\left(\frac{\partial z_{m+\lambda}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}\sum_{\mu=1}^{\mu=q-m}\left(\frac{\partial z_{m+\lambda}}{\partial x_{m+\mu}}\right)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i}\frac{\partial x_{m+\mu}}{\partial x_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m} z_{m+\lambda}\frac{\partial^2 x_{m+\lambda}}{\partial x_i\,\partial x_k},$$

sonach

$$[i, k] = \left\{(i, k) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}(i, m+\lambda)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k}\right\} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}\left\{(m+\lambda, k) + \sum_{\mu=1}^{\mu=q-m}(m+\lambda, m+\mu)\frac{\partial x_{m+\mu}}{\partial x_k}\right\}\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_i}.$$

Durch dieselben Relationen, welche wir soeben zur Bildung der Ausdrücke $[i, k]$ verwendet haben, verwandeln sich andererseits die Gleichungen (3) in die nachstehenden:

$$0 = \left[(1, 1) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}(1, m+\lambda)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_1}\right]\delta x_1 + \ldots + \left[(1, m) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}(1, m+l)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_m}\right]\delta x_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \left[(q, 1) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}(q, m+\lambda)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_1}\right]\delta x_1 + \ldots + \left[(q, m) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}(q, m+\lambda)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_m}\right]\delta x_m,$$

welche wegen der Unabhängigkeit der $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_m$ in Gleichungen von der Form:

$$0 = (i, k) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-m}(i, m+\lambda)\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k} \tag{5}$$

zerfallen, worin der Reihe nach für i alle ganzen Zahlen von 1 bis q, für k hingegen blos jene von 1 bis m zu setzen sind. Durch diese Gleichungen werden aber die $[i, k]$ identisch Null, woraus erhellt, dass die Gleichungen (3) eben jene Beziehungen zwischen den $x_1, x_2, \ldots x_q$ festsetzen, durch welche der Ausdruck (1) integrabel wird.

2.

Wie man sich durch directe Rechnung leicht überzeugt, ist das System (3) unmittelbar mit jenem System von Differentialgleichungen identisch, welches nach dem Pfaff'schen Verfahren für die hier gewählte Form resultiren würde. Dies lässt sich indess aus den Gleichungen (3) selbst erweisen, wie aus den folgenden kurzen Andeutungen entnommen werden kann.

Da der Natur der Sache nach $m < q$, und aus den Gleichungen (5), indem man $k = 1, 2, 3, \ldots, m$ setzt, m Systeme von je q Gleichungen zusammengestellt werden können, welche durch dieselben Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_k} \; (\lambda = 1, 2, \ldots, q-m)$$

befriedigt werden sollen, so werden durch Elimination der letzteren in jedem der erwähnten Systeme m Gleichungen entstehen, welche im Allgemeinen nicht identisch erfüllt sein werden. In diesem Falle, den wir zunächst betrachten wollen, können die Gleichungen (5) gleichzeitig nur dann befriedigt werden, wenn $m=1$ und q eine ungerade Zahl bedeutet, welches letztere übrigens, wie bekannt, ohne Integration bewerkstelligt werden kann. Dann ziehen sich nämlich die Gleichungen (5) auf das Eine, mit (3) identische System:

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 1) + (1, 2) \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + (1, q) \frac{dx_q}{dx_1} \\
0 &= (2, 1) + (2, 2) \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + (2, q) \frac{dx_q}{dx_1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (q, 1) + (q, 2) \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + (q, q) \frac{dx_q}{dx_1}
\end{aligned} \tag{6}$$

zurück, dessen Determinante verschwindet, so dass die Berechnung der Verhältnisse

$$\frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_q}{dx_1}$$

thatsächlich möglich ist. Da in den Klammerausdrücken dieser Gleichungen auch z enthalten ist, muss man, um integriren zu können, die aus (1) fliessende Gleichung

$$0 = z_1 + z_2 \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + z_q \frac{dx_q}{dx_1} - \frac{dz}{dx_1} \tag{7}$$

zu Hilfe nehmen.

Benützt man nun die Integralgleichungen, um die Integrationsconstanten

$$f_1, f_2, \ldots, f_q$$

als neue Variable an Stelle von $z, x_2, x_3, \ldots x_q$ einzuführen, so erhält man aus (1) die neue Gleichung:

$$0 = X_1 dx_1 + F_1 df_1 + \ldots + F_q df_q,$$

in welcher

$$F_i = z_2 \frac{\partial x_2}{\partial f_i} + \ldots + z_q \frac{\partial x_q}{\partial f_i} - \frac{\partial z}{\partial f_i}$$

zu verstehen ist. Der Coëfficient X_1 wird

$$z_1 + z_2 \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + z_q \frac{dx_q}{dx_1} - \frac{dz}{dx_1}$$

also wegen (7) identisch Null, und x_1 selbst ist nur mehr in einem, allen Coëfficienten F gemeinsamen Factor enthalten. In der That findet man, die Differentiation nach allen, also auch implicite enthaltenen x_1 und f_i durch eckige Klammern anzeigend:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial f_i} - \left[\frac{\partial z_1}{\partial f_i}\right] + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=q} \left\{ \left[\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_1}\right] \frac{\partial x_\lambda}{\partial f_i} - \left[\frac{\partial z_\lambda}{\partial f_i}\right] \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} \right\}$$

und hieraus, indem man die angezeigten Operationen ausführt und auf die Relationen (6) und (7) Rücksicht nimmt:

$$\frac{\partial \log F_i}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial z_2}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z_q}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_q}{\partial x_1}.$$

Dies ist ein Ausdruck, der wohl x_1 enthalten kann, aber von dem Stellenzeiger i unabhängig ist, daher sind alle F von der Form:

$$F_i = \Phi_i(f_1, f_2, \ldots f_q) e^{\int \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial z_2}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z_q}{\partial z}\frac{\partial x_q}{\partial x_1}\right) dx_1},$$

womit die gedachte Eigenschaft bewiesen ist.

Wenn ein $m > 1$ vorhanden ist, für welches die Gleichungen (5) gleichzeitig bestehen können, oder anders ausgedrückt, wenn mehr als Eine der Gleichungen (3) linear durch die anderen nicht mehr linear abhängigen dargestellt werden können, so sind die letzteren (siehe Frobenius: Über das Pfaff'sche Problem, Crelle 82) stets unbeschränkt integrabel, und ziehen aus diesem Grunde Integrale von der Form:

$$x_{m+1} = \psi_{m+1}(f_{m+1} \ldots f_q, f, x_1, \ldots, x_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_q = \psi_q(f_{m+1} \ldots, f_q, f, x_1, \ldots, x_m),$$
$$z = \psi(f_{m+1}, \ldots, f_q, f, x_1, \ldots, x_m)$$

nach sich, worin $f_{m+1}, \ldots, f_q; f$ die Integrationsconstanten bedeuten. Führt man auch hier statt der Variabeln $x_{m+1}, \ldots x_q, z$ die Integrationsconstanten als neue Veränderliche ein, so erhält man an Stelle der Gleichung (1) die folgende:

$$0 = F_{m+1} df_{m+1} + \ldots + F_q df_q + F df,$$

indem die Coëfficienten der Differentiale: $dx_1, \ldots dx_m$ identisch verschwinden. Man beweist in derselben Weise wie oben, dass, wenn die Gleichungen (5) gleichzeitig bestehen,

$$\frac{\partial \log F_\rho}{\partial x_i} = \frac{\partial z_{m+1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial z_q}{\partial z}\frac{\partial x_q}{\partial x_i} + \frac{\partial z_i}{\partial z}$$

ist, also für alle ρ denselben Werth erhält. Die Coëfficienten F enthalten also $x_1, x_2, \ldots x_m$ nicht anders als in einem allen gemeinsamen Factor, welcher übrigens nur für singuläre Werthsysteme verschwinden kann. Das Pfaff'sche Problem mit $q+1$ Variabeln wird also durch dieses Verfahren auf ein anderes mit $q+1-m$ Variabeln reducirt.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich der Charakter der Gleichungen (3) mit hinreichender Deutlichkeit:

> Statuiren nämlich die Gleichungen (3) zwischen den Variabeln des Systems einen Zusammenhang, so wird, wenn man dieselben integrirt, und die Integrationsconstanten als neue Variable einführt, das Problem (1) in ein anderes mit weniger Variabeln umgewandelt; und zwar ist die Anzahl der Veränderlichen, um welche das Problem vermindert wird, stets gleich der Anzahl der linear abhängigen Gleichungen in (3). Sind die Gleichungen (3) erfüllt, ohne eine Beziehung zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_q$ zu involviren, so ist die (1) unbeschränkt integrabel.

Wir bezeichnen demzufolge die Gleichungen (3) in der Folge als Integrabilitätsbedingungen im weiteren Sinne, geben denselben jedoch in unseren Anwendungen die Form:

$$
\begin{aligned}
\partial z_1 &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)\partial x_2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_q}{\partial x_1}\right)\partial x_q, \\
\partial z_2 &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_2}\right)\partial x_1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_q}{\partial x_2}\right)\partial x_q, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\partial z_q &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_q}\right)\partial x_1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_q}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_q}{\partial x_q}\right)\partial x_q,
\end{aligned} \tag{8}
$$

welche, wenn die Variationen ∂z_k durch deren explicite Werthe:

$$\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_1}\right)\partial x_1 + \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_2}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_q}\right)\partial x_q$$

ersetzt werden, unmittelbar in jene (3) übergeht. Es ist klar, dass die Integrabilitätsbedingungen auch in dieser Form im Wesentlichen den soeben definirten Charakter beibehalten.

3.

Um die Anwendung, welche ich von den Integrabilitätsbedingungen im Folgenden machen werde, an einem bekannten Beispiele zu zeigen, soll die Aufgabe gestellt werden, das allgemeine Integrale der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$0 = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_q, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_q}\right) \tag{α}$$

aufzufinden.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelungen ist, gewisse Functionen:

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

der Independenten:

$$x_1, x_2, \ldots, x_q$$

so zu bestimmen, dass sie

Erstens: In der angegebenen Reihenfolge bezüglich für

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_q}$$

eingesetzt, die Gleichung (α) identisch befriedigen, oder, was dasselbe ist, dass

$$0 = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_q, z, z_1, z_2, \ldots z_q) \quad \text{und} \tag{β}$$

Zweitens: Den Ausdruck:

$$dz = z_1\, dx_1 + z_2\, dz_2 + \ldots + z_q\, dz_q \tag{1}$$

unbeschränkt integrabel machen.

Ersetzt man nun nach dem Vorgange von L a g r a n g e die Gleichung (β) durch die folgenden:

$$0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right) + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial z_q}\left(\frac{\partial z_q}{\partial x_1}\right), \ldots, 0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_q}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_q}\right) + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial z_q}\left(\frac{\partial z_q}{\partial x_q}\right),$$

in welchen das Zeichen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \quad \text{für} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} + z_k \frac{\partial u}{\partial z}$$

gebraucht worden ist, und vergleicht dieselben mit den Integrabilitätsbedingungen (8), welche im gegenwärtigen Falle unmittelbar giltig sind, so ist ersichtlich, dass vor Allem die Gleichungen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_2}} = \ldots = \frac{dx_q}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_q}} = \frac{dz_1}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)} = \frac{dz_2}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)} = \ldots = \frac{dz_q}{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_q}\right)} = \frac{dz}{z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \ldots + z_q \frac{\partial \varphi}{\partial z_q}} \tag{γ}$$

erfüllt sein müssen.

Die Integralgleichungen dieses Systems führen auch zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_q$ Beziehungen ein; der Ausdruck (1) wird also durch Einführung der Integrationsconstanten als neue Variable in ein Pfaff'sches Problem verwandelt, dessen Behandlung indess bereits in unseren Lehrbüchern gezeigt zu werden pflegt.

Das System (γ) ist bestimmt; denn es enthält ebenso viele Gleichungen als Unbekannte, ein Umstand, der, wie schon in der Einleitung bemerkt, bei Differentialgleichungen höherer Ordnung nicht wiederkehrt.

Zweiter Abschnitt.

Die allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Independenten.

4.

Ist die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung mit zwei Independenten vorgelegt:

$$0=\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

so denken wir uns zunächst die Functionen von x und y:

$$z, p, q, r, s, t,$$

so bestimmt, dass sie in derselben Ordnung, beziehungsweise für

$$z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

eingesetzt, die gegebene Gleichung befriedigen. Es ist dann identisch

$$0=\varphi(x, y, z, p, q, r, s, t). \tag{2}$$

Differentiiren wir diese Gleichung zuerst nach allen x, dann nach allen y, und setzen hiebei

$$\frac{\partial z}{\partial y}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q, \quad \frac{\partial p}{\partial x}=r, \quad \frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=s, \quad \frac{\partial q}{\partial y}=t,$$

sowie

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+p\frac{\partial \varphi}{\partial z}+r\frac{\partial \varphi}{\partial p}+s\frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

und

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+q\frac{\partial \varphi}{\partial z}+s\frac{\partial p}{\partial p}+t\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

so erhalten wir die beiden Relationen:

$$\begin{aligned}
0&=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\\
0&=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3}$$

Multiplieiren wir umgekehrt die erste derselben mit dx, die zweite mit dy, addiren und integriren, so folgt:

$$\text{Const}=\varphi(x, y, z, p, q, r, s, t)-\int\frac{\partial \varphi}{\partial z}(dz-pdz-qdy)-\int\frac{\partial \varphi}{\partial p}(dp-rdx-sdy)-\int\frac{\partial \varphi}{\partial q}(dq-sdx-tdy);$$

wir können also, von einer willkürlichen Constanten abgesehen, die (2) durch jene (3) ersetzen, wenn nur die Beziehungen

$$\begin{aligned}
dz&=pdx+qdy,\\
dp&=rdx+sdy,\\
dq&=sdx+tdy
\end{aligned} \tag{4}$$

stattfinden, wobei es an sich gleichgiltig ist, wie viele und welche Relationen zu deren Befriedigung verwendet werden. Wählen wir aber aus allen Functionen z, p, q, r, s, t, welche die (2) befriedigen, jene aus, für welche zugleich die (4) unbeschränkt integrabel werden, so ergibt sich aus denselben:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

und das z dieser Gleichungen ist die gesuchte Lösung.

Entwickeln wir zunächst die Integrabilitätsbedingungen für die erste der Gleichungen (4), so folgen nach Anleitung der Formeln (8) des Artikels 3 die Relationen:

$$\partial p = r\partial x + s\partial y, \quad \partial q = s\partial x + t\partial y;$$

also ist die Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

integrabel, — im weiteren Sinne —, wenn die beiden anderen Beziehungen in (4) bereits befriedigt sind. Es kommt also nur darauf an, diese letzteren integrabel zu machen. Die Auseinandersetzungen des vorigen Abschnittes geben für

$$dp = rdx + sdy$$

die Integrabilitätsbedingungen:

$$\partial r = \frac{\partial r}{\partial x}\partial x + \frac{\partial s}{\partial x}\partial y, \quad \partial s = \frac{\partial r}{\partial y}\partial x + \frac{\partial s}{\partial y}\partial y, \tag{5}$$

für die Gleichung:

$$dq = sdx + tdy$$

aber die Bedingungen:

$$\partial s = \frac{\partial s}{\partial x}\partial x + \frac{\partial t}{\partial x}\partial y, \quad \partial t = \frac{\partial s}{\partial y}\partial x + \frac{\partial t}{\partial y}\partial y, \tag{6}$$

die Grössen z, p, q, r, s, t sind also so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen (3), (5), (6) gleichzeitig Genüge leisten.

Wir benützen nun den vorläufig noch unbestimmten Factor λ'', um mit dessen Hilfe aus den Gleichungen (5) und (6) die beiden folgenden zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} \partial r + \lambda''\partial s &= \frac{\partial r}{\partial x}\partial x + \frac{\partial s}{\partial x}(\partial y + \lambda''\partial x) + \frac{\partial t}{\partial x}\cdot\lambda''\partial y, \\ \partial s + \lambda''\partial t &= \frac{\partial r}{\partial y}\partial x + \frac{\partial s}{\partial y}(\partial y + \lambda''\partial x) + \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\lambda''\partial y, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und erkennen sofort, dass die (5) und (6) gleichzeitig mit den (3) nur dann bestehen können, wenn die Relationen:

$$\frac{\partial r + \lambda''\partial s}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial s + \lambda''\partial t}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial x}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} = \frac{\partial y + \lambda''\partial x}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} = \frac{\lambda''\partial y}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \tag{8}$$

befriedigt sind. Die drei letzten Glieder dieser Reihe:

$$\frac{\partial x}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} = \frac{\partial y + \lambda''\partial x}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} = \frac{\lambda''\partial y}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$$

erhalten durch die Bezeichnung:

$$\partial y = \lambda'\partial x \tag{9}$$

die Gestalt:

$$\lambda' + \lambda'' = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}}, \quad \lambda'\lambda'' = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}},$$

und hieraus ergibt sich unmittelbar, dass

λ' und λ''

die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \lambda - \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

sind.

Um unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir vorderhand die Annahme machen, dass beide Wurzeln dieser Gleichung endlich und von Null verschieden sind, eine Annahme, welche voraussetzt, dass weder $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ noch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ den Werth Null besitzen. Identificirt man $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit der einen Wurzel λ' der Gleichung (10), so ist die andere für den früher unbestimmten Factor λ'' zu setzen, und in den zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \lambda'' \frac{\partial s}{\partial x} = - \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial s}{\partial x} + \lambda'' \frac{\partial t}{\partial x} = - \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}},$$

welche noch in (8) enthalten sind, haben nun alle Bestandtheile bestimmte Werthe angenommen. Die Gleichungen (7) können auch in der Form:

$$0 = \left[\partial r - \frac{\partial r}{\partial x}\partial x - \frac{\partial s}{\partial x}\partial y\right] + \lambda'' \left[\partial s - \frac{\partial s}{\partial x}\partial x - \frac{\partial t}{\partial x}\partial y\right]$$

$$0 = \left[\partial r - \frac{\partial r}{\partial y}\partial x - \frac{\partial s}{\partial y}\partial y\right] + \lambda'' \left[\partial t - \frac{\partial s}{\partial y}\partial x - \frac{\partial t}{\partial y}\partial y\right]$$

geschrieben werden, sie ersetzen also entweder die (5) oder die (6). Es ist somit das eine Paar der Integrabilitätsbedingungen (5) und (6) von selbst befriedigt, wenn auf irgend eine mit den Gleichungen (8) verträgliche Weise dem anderen Paare bereits Genüge geschehen ist.

Die Gleichungen (8) enthalten in endlicher Form alle Variabeln des Problems, der Zahl nach acht, in Form von Differentialen nur fünf. Aber auch, wenn wir die Gleichungen (4) zu Hilfe nehmen, besitzen wir nur sechs Bestimmungsgleichungen für die sieben Grössen y, z, p, q, r, s, t. Verwandeln wir das allgemeine Zeichen der Variation ∂ in das für die Differentiation gebräuchliche d, so entsteht also das System simultaner, gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \lambda' \\
&\frac{dz}{dx} = p + \lambda' q \\
&\frac{dp}{dx} = r + \lambda' s \\
&\frac{dq}{dx} = s + \lambda' t \\
&\frac{dr}{dx} + \lambda'' \frac{ds}{dx} = - \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}} \\
&\frac{ds}{dx} + \lambda'' \frac{dt}{dx} = - \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}};
\end{aligned} \tag{11}$$

und dieses System bleibt unbestimmt, da nichts mehr vorhanden ist, wodurch es completirt werden könnte. Die Integration desselben muss ausgeführt werden, während eine der sieben Unbekannten, — wir wählen hiefür s — als eine vorläufig noch unbestimmte Function angesehen wird, und das System ist dann als integrirt zu erachten, wenn es gelungen ist, die Unbekannten

$$y, z, p, q, r \text{ und } t$$

als Functionen von x, s und der Integrationsconstanten darzustellen. Selbstverständlich ist, dass hiebei s nicht allein als Functionsargument in gewöhnlichem Sinne, sondern auch als Integrand unter Quadraturen in die Integralgleichungen eintritt. Das vollständige Integralsystem besteht also aus sechs Gleichungen und enthält sechs willkürliche Constante.

Differentiirt man eine Function der Variabeln x, y, z, p, q, r, s, t — Quadraturen, welche s enthalten, sind hiebei als Functionen von x anzusehen, — nach x, und setzt für die Differentialquotienten der Argumente deren Werthe aus dem Systeme (11), so wird das Resultat dieser Operation, welche wir durch D' bezeichnen, identisch Null, wenn die gedachte Function ein Integrale des obigen Systems ist. Für jedes Integrale F ist also:

$$D'F = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \lambda' \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial t} \right\} - \frac{1}{\lambda'} \frac{ds}{dx} \left\{ \lambda''^2 \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda'' \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} \right\} \equiv 0, \tag{12}$$

wobei in Analogie mit einer bereits benützten Bezeichnung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} + r \frac{\partial F}{\partial p} + s \frac{\partial F}{\partial q} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} + s \frac{\partial F}{\partial p} + t \frac{\partial F}{\partial q} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

geschrieben wurde. Da die Integration bei willkürlichem s vorzunehmen ist, müssen durch jedes Integrale des Systems (11) insbesondere die beiden Gleichungen:

$$0 = \lambda''^2 \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda'' \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

und

$$0 = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} \frac{\partial F}{\partial r} \right] + \lambda' \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \tag{13}$$

befriedigt werden.

Die Gleichung (12) wird unter Anderem auch durch die Supposition $F = \varphi$ identisch erfüllt. Die rechte Seite der Gleichung (2) wird also durch das vollständige Integralsystem auf eine Constante reducirt; demnach genügt es, die gegebene Gleichung (2) selbst unter die Integrale aufzunehmen, damit sich alle Rechnungen, wie erforderlich, in der That auf das vorgelegte Problem beziehen. Das Nämliche wird jedoch auch dadurch erreicht, dass man zwischen den Integrationsconstanten eine entsprechende Beziehung statuirt, eine Voraussetzung, welche wir als die allgemeinere festhalten wollen. In beiden Fällen wird die Anzahl der willkürlichen Constanten auf fünf reducirt.

5.

Wir benützen nun das gewonnene Integralsystem, um in den Relationen (4) des vorigen Artikels die Integrationsconstanten als neue Veränderliche einzuführen. Beziehen wir das Zeichen Σ auf alle unabhängigen Integrationsconstanten f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, so verwandeln sich die Gleichungen (4) in die folgenden:

$$
\begin{aligned}
0 &= \Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial f} - q\frac{\partial y}{\partial f}\right)df,\\
0 &= \Sigma\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\frac{\partial y}{\partial f}\right)df,\\
0 &= \Sigma\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\frac{\partial x}{\partial f}\right)df.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Aus ihnen ist das Differentiale von x entfallen, dass aber x — specielle Fälle ausgenommen — durch diese Transformation von selbst ausfalle, oder durch Hebung eines gemeinsamen Factors entfernt werden könne, ist schon desshalb nicht nachweisbar, weil in den (14) auch die unbestimmte Function s enthalten ist. Im Gegentheile, eben dieses s muss so bestimmt werden, dass x aus den (14) entfällt, da sonst eine Integration derselben nicht möglich ist.

Differentiiren wir nun die erste dieser Gleichungen nach allen darin enthaltenen x, so finden wir:

$$\frac{d}{dx}\sum\left(\frac{\partial z}{\partial f} - q\frac{\partial y}{\partial f}\right)df = \sum\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial f} - q\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial f} - \frac{dq}{dx}\frac{\partial y}{\partial f}\right)df = \sum\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\frac{\partial y}{\partial f}\right)df + \lambda'\sum\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\frac{\partial y}{\partial f}\right)df.$$

Die erste Gleichung in (14) enthält also kein x, wenn die beiden anderen bereits befriedigt sind; in Folge dessen genügt es, s so zu bestimmen, dass x aus diesen beiden zum Ausfall kommt. Damit dies geschehe, müssen die beiden Gleichungen:

$$0 = \frac{d}{dx}\sum\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\frac{\partial y}{\partial f}\right)df, \quad 0 = \frac{d}{dx}\sum\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\frac{\partial y}{\partial f}\right)df$$

durch geeignete Wahl von s befriedigt werden. Durch Ausführung der angezeigten Operationen und mit Benützung der (11) fliessen hieraus die Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum\left(\frac{\partial r}{\partial f} + \lambda'\frac{\partial s}{\partial f} - \frac{ds}{dx}\frac{\partial y}{\partial f}\right)df,\\
0 &= \sum\left(\frac{\partial s}{\partial f} + \lambda'\frac{\partial t}{\partial f} - \frac{dt}{dx}\frac{\partial y}{\partial f}\right)df.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Nach den Ausführungen des vorigen Artikels muss erwartet werden, dass mit der einen dieser Gleichungen zugleich auch der anderen Genüge geleistet werden kann. Dies in der That der Fall. Denn multipliciren wir die erste derselben mit $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, die zweite mit $\lambda''\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, und addiren die Resultate, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Relationen:

$$(\lambda'+\lambda'')\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \quad \lambda'\lambda''\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{ds}{dx} + \lambda''\frac{dt}{dx}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

die Gleichung:

$$0 = \sum\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial f} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df.$$

Andererseits ist nachgewiesen worden, dass in Folge des Integralsystems φ kein x enthält; demzufolge ist:

$$0 = \sum\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial f}\right]df.$$

Ziehen wir nun von dieser Gleichung die unmittelbar vorhergehende ab, und setzen hiebei für $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ seinen oben angegebenen Werth, so resultirt

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\sum\left(\frac{\partial z}{\partial f} - q\frac{\partial y}{\partial f}\right)df + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\sum\left(\frac{\partial p}{\partial f} - s\frac{\partial y}{\partial f}\right)df + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\sum\left(\frac{\partial q}{\partial f} - t\frac{\partial y}{\partial f}\right)df,$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist. Damit ist die Übereinstimmung mit den Entwicklungen des vorigen Artikels hergestellt, wozu noch bemerkt werden mag, dass die Integrabilitätsbedingungen (5) und (6) durch die Transformation des gegenwärtigen Artikels paarweise in die Gleichungen (15) übergehen.

Denken wir uns nun auf irgend eine Weise eine Lösung der (15) gefunden, und in den (14) eingeführt. Dann fällt x aus denselben heraus, und sie bleiben unverändert, wenn man nach der Substitution des richtigen s dem x einen beliebigen Werth ertheilt. Nach einem bekannten Schlusse können dann die Resultate der Substitution unmittelbar angegeben werden, wenn man das System der sogenannten Hauptintegrale zu Grunde legt. Bezeichnen wir also einen beliebigen concreten Werth von x mit x^0, die durch Einsetzung desselben in die Integralgleichungen sich ergebenden Werthe der Dependenten mit

$$y^0, z^0, p^0, r^0, s^0, t^0,$$

— wobei jedoch x^0 kein singulärer Werth sein darf — und führen diese Grössen an Stelle der f als Integrationsconstante ein, so verwandeln sich nach gehöriger Bestimmung von s die (14) in die folgenden:

$$\begin{aligned} dz^0 &= q^0\, dy^0, \\ dp^0 &= s^0\, dy^0, \\ dq^0 &= t^0\, dy^0, \end{aligned} \tag{16}$$

deren Integrale ohne Schwierigkeiten angegeben werden können. Setzen wir nämlich

$$z^0 = \Phi(y^0),$$

wo $\Phi(y_0)$ eine willkürliche Function von y^0 bedeutet, so folgt aus denselben:

$$q^0 = \Phi'(y^0), \quad t^0 = \Phi''(y_0),$$

indem für die Ableitungen einer Function die Lagrange'sche Bezeichnungsweise verwendet wurde. Der zweiten Gleichung in (16) wegen ist auch s^0 eine Function von y^0, denn setzt man

$$p^0 = \Psi(y^0),$$

so folgt

$$s^0 = \Psi'(y^0);$$

r^0 endlich kann dann vermittelst der gegebenen Gleichung berechnet werden. Also erhalten wir nach Ermittlung des s ein Gleichungssystem von folgender Gestalt:

$$z^0 = \Phi(y^0),\ q^0 = \Phi'(y^0),\ t^0 = \Phi''(y^0),\ p^0 = \Psi(y^0),\ s^0 = \Psi'(y^0),\ \varphi(x^0, y^0, z^0, p^0, r^0, s^0, t^0) = 0, \tag{17}$$

und damit sind die Beziehungen hergestellt, welche die Pfaff'schen Gleichungen (14) den Integrationsconstanten auferlegen.

Dieses Resultat lehrt:

Erstens, dass die Constanten des Integralsystems als Functionen Einer von ihnen anzusehen sind und

Zweitens, dass das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Independenten nie mehr als zwei willkürliche Functionen enthalten kann.

Beide Bemerkungen sind offenbar nicht an den Gebrauch der Hauptintegrale gebunden. Die Einführung der letzteren bringt die zwischen den Constanten einzuführenden Relationen in die einfache, in (17) angegebene Gestalt, bei jedem anderen Systeme müssen dieselben direct aus den Gleichungen (14) ermittelt werden.

Ist s bekannt, und sind die eben erwähnten Relationen zwischen den Constanten gefunden, und in das Integralsystem (11) eingeführt, so soll das so entstehende Integralsystem als das definitive Integralsystem bezeichnet werden. Es ist nun so beschaffen, dass die gesuchte Lösung ohne weiters angegeben werden kann. Da es nämlich in sieben Gleichungen die neun Grössen x, y, z, p, q, r, s, t und y^0 oder die an dessen Stelle gewählte independente Integrationsconstante enthält, so resultirt durch Elimination der letzteren und der Grössen p, q, r, s, t eine Gleichung, welche nur mehr z, x und y enthält, und offenbar die gesuchte Lösung ist.

6.

Den eben abgeschlossenen Entwicklungen gemäss werden wir im Folgenden eine der Integrationsconstanten dadurch auszeichnen, dass wir sie als Independente ansehen, während alle anderen als Functionen dieser Einen zu betrachten sind. Diese unabhängige Constante bezeichnen wir durch f ohne Index, so dass das noch zu bestimmende s, welches in letzter Linie von x und y abhängt, als Function von x und f anzusehen ist.

Ertheilen wir dieser unabhängigen Constanten einen unendlich kleinen Zuwachs δf, so werden alle Integrationsconstanten und daher auch die Variabeln des Systems selbst und zwar ebenfalls unendlich kleine Zuwächse erleiden, welche wir durch das Zeichen δ kenntlich machen wollen. Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (14) und (15) in die folgenden:

$$Z = \delta z - q\delta y = 0$$

$$P = \delta p - s\delta y = 0$$

$$Q = \delta q - t\delta y = 0$$

$$R = \delta r + \lambda'\delta s - \frac{ds}{dx}\delta y = 0$$

$$T = \delta s + \lambda'\delta t - \frac{dt}{dx}\delta y = 0$$

Die Variation einer beliebigen Function F der Argumente x, y, z, p, q, r, s, t ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial r}\delta r + \frac{\partial F}{\partial s}\delta s + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t.$$

Definiren wir nun im Gegensatze zur Operation D' die Operation D'' durch die Gleichung:

$$D''F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}\frac{\partial F}{\partial r} + \lambda''\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}\frac{\partial F}{\partial t}\right\} - \frac{1}{\lambda'}\frac{ds}{dx}\left\{\lambda'^2\frac{\partial F}{\partial r} - \lambda'\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\right\},$$

so finden wir sofort:

$$D''F - D'F = (\lambda'' - \lambda')\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{ds}{dx}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}\frac{dt}{dx}\frac{\partial F}{\partial t}\right\},$$

und es wird:

$$\delta F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'}\delta y = Z\frac{\partial F}{\partial z} + P\frac{\partial F}{\partial p} + Q\frac{\partial F}{\partial q} + \left(\delta r - \frac{ds}{dx}\delta y\right)\frac{\partial F}{\partial r} + \left(\delta t - \frac{1}{\lambda'}\frac{dt}{dx}\delta y\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s}\delta s.$$

Es ist aber:

$$\delta r - \frac{ds}{dx}\delta y = R - \lambda'\delta s, \quad \delta t - \frac{1}{\lambda'}\frac{dt}{dx}\delta y = \frac{1}{\lambda'}(T - \delta s),$$

daher ist auch:

$$\delta F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'}\delta y = Z\frac{\partial F}{\partial z} + P\frac{\partial F}{\partial p} + Q\frac{\partial F}{\partial q} + R\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}T\frac{\partial F}{\partial t} - \delta s\left\{\lambda'\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial F}{\partial t}\right\},$$

oder endlich:

$$Z\frac{\partial F}{\partial z} + P\frac{\partial F}{\partial p} + Q\frac{\partial F}{\partial q} + R\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}T\frac{\partial F}{\partial t} = \delta F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'}\delta y + \delta s\left\{\lambda'\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial F}{\partial t}\right\}. \tag{18}$$

Diese Gleichung ist eine identische, das heisst, sie gilt für jedes F, und wir erkennen aus derselben, dass die Ausdrücke:

$$Z, P, Q, R, T,$$

wie es in unserer Absicht liegt, den Werth Null erhalten, wenn es gelungen ist, die Relation

$$0 = \delta F - \frac{D''F - D'F}{\lambda'' - \lambda'} \delta y + \delta s \left\{ \lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'} \frac{\partial F}{\partial t} \right\} \tag{19}$$

durch fünf, bezüglich der Grössen z, p, q, r, t von einander unabhängige F zu befriedigen. In der That folgen dann aus (18) fünf lineare homogene Gleichungen, in welchen Z, P, Q, R und T als Unbekannte angesehen werden können. Die Werthe derselben müssen also wegen der nicht verschwindenden Determinante mit Null zusammenfallen.

Die Definition von D'' unterscheidet sich von jener der Operation D' nur darin, dass in $D''F$ überall λ'' steht, wo in $D'F$ λ' zu finden war, und umgekehrt λ' an die Stelle von λ'' getreten ist. Ist also $D''F = 0$, so ist F ein Integrale jenes Differentialsystems, welches aus dem bisher Betrachteten durch eben dieselben Vertauschungen entsteht. Dieses Differentialsystem, welches auch dadurch gewonnen wird, dass man von vornherein $\frac{dy}{dx}$ nicht mit λ', sondern mit λ'' identificirt, bezeichnen wir im Gegensatze zu dem ersten als das zweite Differentialsystem und wird dasselbe integrirt, indem s abermals willkürlich bleibt, so muss jedes Integrale dieses Systems die Gleichung

$$0 = \lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'} \frac{\partial F}{\partial t} \tag{20}$$

identisch befriedigen. Nimmt man also in (19) für F ein Integrale des zweiten Systems, so verschwindet der Coëfficient von δs, sowie $D''F$ identisch, und es entsteht die Gleichung:

$$0 = \delta F + \frac{D'F}{\lambda'' - \lambda'} \delta y.$$

Wäre nun F zugleich ein Integrale des ersten Systems, so würde auch $D'F$ verschwinden, und nur mehr

$$\delta F = 0$$

zu machen sein. Wie leicht einzusehen, gibt es, so lange s unbestimmt bleibt, ausser dem φ keine Function, welche beiden Systemen zugleich als Integrale angehören könnte. Eine Function dieser Art müsste nämlich sowohl die Gleichung (20) als auch jene (13) befriedigen, was offenbar nur durch φ selbst geleistet wird. Stellt man also das Verlangen, dass eine Function F Integrale in beiden Systemen sein solle, so kann dies nur durch eine entsprechende Wahl für s hervorgerufen werden. Da nun die Gleichung (19) durch fünf von einander unabhängige F erfüllt werden muss, jedes der vorhandenen Systeme aber nur fünf von einander unabhängige Integrale besitzt, aus denen mit Hilfe der gegebenen Gleichung alle anderen Integrale zusammengesetzt werden können, so ist der gesuchte Werth von s derjenige, welcher sämmtliche Integrale des einen Systems in Integrale des anderen verwandelt. Bezeichnen wir nun die Integrale des zweiten Systems — es ist hier wie überall die allgemeinere Form vorausgesetzt — durch

$$g, g_1, g_2, \cdots, g_5,$$

so ist durch die Gleichungen

$$g_1 - \psi_1(g) = F_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$g_5 - \psi_5(g) = F_5,$$

zwischen welchen in Hinsicht auf die gegebene Gleichung eine Relation von der Form:

$$\vartheta(g, \psi_1, \psi_2 \cdots \psi_5) = \Theta(F_1, F_2, \ldots F_5) = 0$$

bestehen muss, die allgemeinste Form eines vollständigen Integralsystems gegeben, und der gesuchte Werth von s ist derjenige, welcher diese fünf Integrale des zweiten Systems in Integrale des ersten Systems verwandelt, das heisst, die Grössen $F_1, F_2, \ldots F_5$ in Functionen von $f_1 . f_2, \ldots f_5$ überführt. Setzt man endlich diese Functionen gleich Null, was zur Folge hat, dass $f_1, \ldots f_5$ als Functionen von f dargestellt werden können, wie bereits oben von der Theorie gefordert wurde, so wird auch $\partial F = 0$ und damit die Gleichung (19) vollständig befriedigt. Die Bestimmungsgleichungen für s erhalten also die Gestalt:

$$g_1 - \psi_1(g) = 0, \quad g_2 - \psi_2(g) = 0, \ldots, g_5 - \psi_5(g) = 0, \tag{21}$$

und setzt man in diesen Gleichungen für die Variabeln des Problems deren Werthe aus dem ersten Integralsysteme, so erhält man aus denselben nicht nur den gesuchten Werth von s, sondern auch die zwischen den Constanten einzuführenden Relationen.

In der That, bezeichnen wir irgend einen der Ausdrücke in den linken Seiten von (21) wieder mit F, so ist identisch die Gleichung:

$$0 = \lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{\lambda'} \frac{\partial F}{\partial t}$$

erfüllt. Ein Integrale, welches weder r noch t enthält, kann also auch kein s enthalten. Demnach gibt es nur zwei von einander unabhängige Integrale, welche die Grössen zweiter Ordnung r, s und t enthalten, aus allen anderen Integralen des vollständigen Systems können dieselben gleichzeitig zum Ausfall gebracht werden. Unter den linken Seiten in (18) befinden sich also ebenfalls nur zwei, welche bezüglich R und T von einander unabhängig sind, während aus allen anderen diese Grössen gleichzeitig eliminirt werden können. Diese letzteren Gleichungen erzeugen also, gleich Null gesetzt, keine Bestimmungsgleichungen für s. Übrigens verschwindet die rechte Seite in (18) auch für $F = \varphi$, man kann sonach aus den noch in Rede stehenden Gleichungen T entfernen, so dass für s nur eine Bestimmungsgleichung übrig bleibt. Es genügt daher auch, eine der Gleichungen (21), wenn nur in derselben s enthalten ist; denn bestimmt man daraus dieses letztere, und führt den gefundenen Werth desselben in die (14) ein, so verwandeln sich dieselben in Pfaff'sche Probleme, aus denen die noch fehlenden Relationen gewonnen werden können. Ich befolge in den weiter unten mitgetheilten Beispielen in der Regel diesen Weg, da er zugleich als Controle der Rechnung dient.

7.

Indem ich mich nun zur Darstellung der praktischen Rechnung wende, will ich zunächst einige einfache Fälle anführen, um hieran die Erörterungen über den allgemeinen Fall anzuschliessen. Selbstverständlich liegt die eigenthümliche Schwierigkeit des Problems immer in der Bestimmung von s; ich hebe also zunächst einige Fälle hervor, in welchen diese Bestimmung verhältnissmässig leicht vollzogen werden kann.

Dies ist insbesondere der Fall, wenn in beiden Integralsystemen je zwei Integrale existiren, welche keine Quadraturen über s enthalten. Bezeichnen wir dieselben respective durch F, f, G, g, so ist auch in den Gleichungen:

$$F - \chi(f) = 0 \quad \text{und} \quad G - \psi(g) = 0$$

keine Quadratur enthalten, und man kann die Grössen r, s und t sofort durch die Variabeln des Problems ausdrücken. Substituirt man den erhaltenen Werth in eines der Differentialsysteme, so entsteht eine Differentialgleichung, mit deren Hilfe dasselbe System vervollständigt werden kann. Enthalten voranstehende Gleichungen nur r, s, t, x und y, so sind durch dieselben und die gegebene Gleichung sofort die wahren Werthe von r, s, t bestimmt.

So verhält es sich beispielsweise bei der sehr bekannten Gleichung:

$$r - a^2 t = 0$$

Die Gleichung (10) ist hier:

$$\lambda^2 - a^2 = 0,$$

also lauten die beiden Differentialsysteme wie folgt:

$$\frac{dy}{dx}=a \quad , \qquad \frac{dy}{dx}=-a$$

$$\frac{dz}{dx}=p+aq \; , \qquad \frac{dz}{dx}=p-aq$$

$$\frac{dp}{dx}=r+as \; , \qquad \frac{dp}{dx}=r-as$$

$$\frac{dq}{dx}=s+at \; , \qquad \frac{dq}{dx}=s-at$$

$$\frac{dr}{dx}-a\frac{ds}{dx}=0 \; , \qquad \frac{dr}{dx}+a\frac{ds}{dx}=0$$

$$\frac{ds}{dx}-a\frac{dt}{dx}=0 \; , \qquad \frac{ds}{dx}+a\frac{dt}{dx}=0.$$

Die Integralgleichungen des ersten Systems sind:

$$y=f_1+ax, \quad z=f_5+x(f_3+af_4)+f_2x^2+4a\int dx\int sdx,$$

$$p=f_3+f_2x+2a\int sdx, \quad q=f_4+\frac{f_2x}{a}+2\int sdx, \quad r=f_2+as, \quad t=\frac{f_2}{a^2}+\frac{s}{a};$$

von den Integralen des zweiten Systems genügt es, das eine

$$r+as=g_2$$

zu kennen. Denn setzt man

$$f_2=2a^2\Phi''(f_1), \quad g_2=2a^2\Psi''(g_1),$$

so folgt aus den Gleichungen

$$r+as=2a^2\Psi''(y+ax)$$
$$r-as=2a^2\Phi''(y-ax)$$

sofort der richtige Werth von s:

$$s=-a\Phi''(y-ax)+a\Psi''(y+ax).$$

Ausserdem findet man

$$r=a^2\Phi''(y-ax)+a^2\Psi''(y+ax)$$
$$t=\Phi''(y-ax)+\Psi''(y+ax).$$

Es ist durchaus nicht schwierig, aus diesen Gleichungen den Werth von z ohne weitere Rechnung anzugeben, doch dürfte eben die Einfachheit des Problems empfehlen, den Gang der Rechnung vollständig durchzugehen. Zunächst wollen wir also mit dem gefundenen Werthe von s in die (14) eingehen, um nachzuweisen, dass x wirklich ausgefallen ist. Die erste dieser Gleichungen lautet in unserem Falle:

$$\partial p-s\partial y=\partial f_3+x\partial f_2+2a\int\frac{\partial s}{\partial f_1}dx.\partial f_1-s\partial f_1=0;$$

es ist nun

$$\frac{\partial s}{\partial f_1}\partial f_1=-a\Phi'''(f_1)\partial f_1+a\Psi'''(f_1+2ax)\partial f_1,$$

also

$$\int\frac{\partial s}{\partial f_1}\partial f_1\,dx=-ax\Phi'''(f_1)\partial f_1+\frac{1}{2}\Psi''(f_1+2ax)\partial f_1,$$

unsere Gleichung geht also über in die folgende:

$$\partial f_3+a\Phi''(f_1)\partial f_1=0.$$

Die letzte Gleichung in (14) gibt in gleicher Weise:

$$\partial f_4 - \Phi''(f_1)\partial f_1 = 0,$$

und endlich die erste:

$$\partial f_5 - f_4 \partial f_1 = 0.$$

Die Integrale dieser Relationen sind gegeben durch die Gleichungen:

$$f_5 = \Phi(f_1), \quad f_4 = \Phi'(f_1), \quad f_3 = -a\Phi'(f_1), \quad f_2 = 2a^2\Phi''(f_1),$$

womit nun alle nothwendigen Beziehungen gewonnen sind.

Mit dem gefundenen Werthe von s folgt ferner:

$$\int s dx = -ax\Phi''(f_1) + \frac{1}{2}\Psi'(f_1+2ax),$$

$$\int dx \int s dx = -a\frac{x^2}{2}\Phi''(f_1) + \frac{1}{4a}\Psi(f_1+2ax),$$

und das definitive Integralsystem wird:

$$\begin{aligned}
y &= f_1 + ax \\
z &= \Phi(f_1) + \Psi(f_1+2ax) \\
p &= -a\Phi'(f_1) + a\Psi'(f_1+2ax) \\
q &= \Phi'(f_1) + \Psi'(f_1+2ax) \\
r &= a^2\Phi''(f_1) + a^2\Psi''(f_1+2ax) \\
s &= -a\Phi''(f_1) + a\Psi''(f_1+2ax) \\
t &= \Phi''(f_1) + \Psi''(f_1+2ax)
\end{aligned}$$

und indem man noch in dem Ausdrucke für z an Stelle von f_1, dessen Werth aus der ersten Gleichung setzt, erhält man die wohlbekannte Lösung:

$$z = \Phi(y-ax) + \Psi(y+ax).$$

Auch dann, wenn nur eines der beiden Integralsysteme Quadraturen enthält, tritt eine Vereinfachung ein. Sei etwa:

$$F - \chi(f) = 0 \tag{α}$$

ein Integrale des ersten Systems, welches von Quadraturen frei ist, während in allen Integralen des zweiten Systems Quadraturen auftreten, so wird das Resultat, welches durch Substitution der Integralwerthe aus dem zweiten Systeme in (α) entsteht, ebenfalls Quadraturen enthalten. Da aber die letzteren bei constantem y auszuführen sind, sind sie durch die Operation D'' aufhebbar, und man kann durch fortgesetzte Anwendung dieser Operation immer so viel Gleichungen erzeugen, als zur Elimination der Integrale nothwendig sind. Das Eliminationsresultat ist eine Differentialgleichung für s, in welcher das letztere mit dem Zeichen D'' behaftet ist; die Integrationsconstanten sind also als Functionen von y anzusehen.

Als Beispiel hiefür mag die Gleichung:

$$x^2 r - y^2 t = 0$$

dienen. Sie liefert für λ die Werthe:

$$\lambda' = -\frac{y}{x}, \quad \lambda'' = \frac{y}{x}$$

und damit die beiden Differentialsysteme:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}, & \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}, \\
\frac{dz}{dx} &= p-\frac{y}{x}q, & \frac{dz}{dx} &= p+\frac{y}{x}q, \\
\frac{dp}{dx} &= r-\frac{y}{x}s, & \frac{dp}{dx} &= r+\frac{y}{x}s, \\
\frac{dq}{dx} &= s-\frac{y}{x}t, & \frac{dq}{dx} &= s+\frac{y}{x}t, \\
\frac{dr}{dx}+\frac{y}{x}\frac{ds}{dx} &= -\frac{2r}{x}, & \frac{dr}{dx}-\frac{y}{x}\frac{ds}{dx} &= -\frac{2r}{x}, \\
\frac{ds}{dx}+\frac{y}{x}\frac{dt}{dx} &= -\frac{2yt}{x^2}, & \frac{ds}{dx}-\frac{y}{x}\frac{dt}{dx} &= -\frac{2yt}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Da sich im ersten Systeme sofort zwei Integrale ohne Quadraturen ergeben:

$$xy = f, \quad x^2r+xys = F,$$

so begnügen wir uns hiemit, und integriren das zweite System. Ein vollständiges Integralsystem ist:

$$y = gx$$

$$r = g^2t = \frac{g_3}{x^2}+gs-\frac{2g}{x^2}\int xs\,dx$$

$$p = g_2+gg_4-\frac{g_3}{x}+\frac{2g}{x}\int xs\,dx$$

$$q = g_4-\frac{g_3}{gx}+\frac{2}{x}\int xs\,dx$$

$$z = g_5+x(g_2+gg_4)-2g_3\log x+4g\int\frac{dx}{x}\int xs\,dx.$$

Wir wollen hier für den Augenblick davon absehen, dass aus diesen Gleichungen leicht zwei Integrale ohne Quadraturen gebildet werden können, nämlich;

$$xr-ys+p = g_2+gg_4$$

und

$$p-\frac{y}{x}q = g_2;$$

vielmehr bilden wir aus den beiden oben angeführten Integralen des ersten Systems die Gleichung:

$$x^2r+xys = \chi(xy),$$

und substituiren darin die Variabeln durch ihre Integralwerthe aus dem zweiten Systeme.

Dadurch folgt als Bestimmungsgleichung für s:

$$g_3+2gx^2s-2g\int xs\,dx-\chi(gx^2) = 0,$$

und indem man die Operation D'' anwendet:

$$xD''s+s-\chi' = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$xs = \Phi(g)+\int\chi'(gx^2)\,d'x,$$

wobei, um Verwechslungen zu vermeiden, der Sinn des Integralzeichens durch die dem Differentiationszeichen angefügten Accente gekennzeichnet ist. Setzen wir:

$$gx^2 = u,$$

so wird, da g als constant anzusehen ist,

$$dx = \frac{du}{2\sqrt{gu}},$$

also

$$s = \frac{\Phi(g)}{x} + \frac{1}{2\sqrt{u}} \int \frac{\chi'(u)\,du}{\sqrt{u}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$s = \frac{\Phi(g)}{x} + \Psi(u) = \frac{1}{x}\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy).$$

Verwenden wir hingegen die Gleichung:

$$x^2 r - xy\,s + xp = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

welche mit Hilfe des ersten der angeführten Integrale ohne Quadraturen gewonnen wird, um in Verbindung mit der Gleichung:

$$x^2 r + xys = \chi(xy)$$

s zu berechnen, so erhalten wir:

$$2xy s - xp = \chi(xy) - x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

eine Gleichung, welche nach dem ersten Falle zu behandeln ist. Differentiiren wir selbe nach dem Zeichen D', so folgt:

$$2xy\,D's = \psi\left(\frac{y}{x}\right) + 2\,\frac{y}{x}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

wofür man wegen der Willkürlichkeit des ψ auch schreiben kann:

$$xy\,D's = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Da nun $xy = f$ bei der Differentiation D' constant bleibt, wird weiter:

$$s = \Phi^1(f) + \frac{1}{f}\int \psi\left(\frac{f}{x^2}\right) d'x,$$

ein Ausdruck, welcher durch die Substitution:

$$f = x^2 u$$

in die Form:

$$s = \Phi_1(f) + \frac{1}{x}\,\Psi_1(u)$$

gebracht wird, die mit der oben gefundenen im wesentlichen identisch ist.

Geht man aber von dem dritten der oben angegebenen Integrale des zweiten Systems aus, und bildet die Gleichung:

$$p - \frac{y}{x}\,q = \chi\left(\frac{y}{x}\right),$$

so besitzt man sofort ein intermediäres Integrale erster Ordnung und man erhält in allen drei Fällen für z den Werth:

$$z = x\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy).$$

Wie ersichtlich, ist die Rechnung davon unabhängig, ob Integrale ohne Quadraturen gefunden werden können oder nicht, eine Bemerkung, welche nicht ohne Werth ist, wenn man bedenkt, dass die Auffindung von Integralen ohne Quadraturen, — wenn solche überhaupt existiren — in der Regel mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist.

Im Allgemeinen hat weder das eine noch das andere Integralsystem von Quadraturen freie Integrale. Die Bestimmungsgleichung für s enthält dann Quadraturen von zweierlei Sinn, das ist sowohl solche, welche aus dem ersten System, als auch solche, welche aus dem zweiten System herstammen. Man kann nun, wie sogleich gezeigt werden wird, durch hinreichend fortgesetzte Anwendung eines der Operationszeichen D' oder D'' immer die eine Art von Integralzeichen entfernen, und erhält als Resultat eine Gleichung, welche noch Quadraturen der zweiten Art in sich fasst. Denken wir uns, um die Vorstellung zu fixiren, unsere Absicht dahin gerichtet, die Integrale des zweiten Systems zu eliminiren, so entstehen unter den verschiedenen, im Eliminationsresultate noch verbleibenden Integralzeichen des ersten Systems Ausdrücke von der Form:

$$R(x, s, D''s, D''^2 s, \ldots)$$

und die Bestimmungsgleichung für s erhält die Gestalt:

$$0 = \vartheta(R_1, \int R_2 d'x, \int R_3 d'x, \ldots), \tag{β}$$

worin abermals der Charakter der Integrationen durch einen dem Differentiationszeichen d angefügten Accent auch äusserlich kenntlich gemacht worden ist.

Ein jeder Versuch, durch Anwendung der Operation D' auch die noch verbliebenen Integrale erster Art zu entfernen, führt zu Gleichungen, welche Differentialquotienten von der Form:

$$D'^{(i)} D''^{(k)} s$$

enthalten, also neuerdings zu partiellen Differentialgleichungen, deren Ordnung überdies die der gegebenen Gleichung in der Regel übersteigt. Es gibt also nur eine Möglichkeit, die Integrale der ersten Art zu entfernen und diese tritt dann ein, wenn es gelingt, aus den Gleichungen, welche durch successive Anwendung der Operation D'' gewonnen werden, eine andere zu bilden, in welcher jene R, welche sich unter Integralzeichen befinden, als Functionen des von Integralzeichen freien R dargestellt werden können, ohne dass s selbst oder eine der Operationen D' oder D'' hiebei zur Verwendung kommen. In der That, ist

$$R_2 = \omega_2(x, R_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_i = \omega_i(x, R_1),$$

so kann man durch successive Anwendung der Operation D' die Integralzeichen erster Art aus (β) entfernen so dass schliesslich R_1 durch eine Beziehung zwischen

$$x, R_1, D' R_1, D'^2 R_1, \ldots$$

gegeben ist. Die Integration dieser Gleichung, bei welcher die Integrationsconstanten als Functionen von f anzusehen sind, gibt R_1, und indem man für dasselbe dessen oben definirten Werth setzt, erhält man eine Relation zwischen

$$x, s, D''s, D''^2 s, \ldots$$

deren Integration endlich zu dem gesuchten Werthe von s führt. Bei der letzteren Integration sind selbstverständlich die Integrationsconstanten als Functionen von g zu betrachten.

Es erübrigt also noch zu zeigen, dass die bei der Anwendung der Operation D'' unter den Integralzeichen erster Art auftretenden Ausdrücke in der That auf die angegebene Form gebracht werden können.

Ist J irgend eine Function von y und x, so ist:

$$D'J = \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial J}{\partial y}$$

$$D''J = \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda'' \frac{\partial J}{\partial y}$$

also

$$D''J - D'J = (\lambda'' - \lambda') \frac{\partial J}{\partial y}; \qquad (\gamma)$$

ferner ist, wie man leicht berechnet:

$$\frac{\partial D'J}{\partial y} = D' \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial \lambda'}{\partial y} \frac{\partial J}{\partial y}. \qquad (\delta)$$

Ist also J ein Integrale des ersten Systems, etwa

$$J = \int S d'x \quad \text{oder} \quad D'J = S,$$

so folgt aus (γ):

$$D''J = S - (\lambda' - \lambda'') \frac{\partial J}{\partial y}$$

und aus (δ):

$$\frac{\partial J}{\partial y} = e^{-\int \frac{\partial \lambda}{\partial y} d'x} \int \frac{\partial S}{\partial y} e^{\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x} d'x,$$

somit gilt als Regel für die Anwendung der Operation D'' auf Integrale der ersten Art:

$$D''J = S - (\lambda' - \lambda'') e^{-\int \frac{\partial \lambda'}{\partial y} d'x} \int \frac{\partial S}{\partial y} e^{\int \frac{\partial \lambda'}{d y} d'x} d'x.$$

Im zweiten Theile dieses Ausdruckes treten Integrale von der Form

$$\int \frac{\partial f(x, s)}{\partial y} d'x = \int \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} d'x$$

auf. Ersetzt man $\frac{\partial s}{\partial y}$ durch den damit identischen Werth

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{D's - D''s}{\lambda' - \lambda''},$$

so verwandelt sich das obige Integrale in folgendes:

$$\int \frac{\partial f}{\partial s} \frac{D's}{(\lambda' - \lambda'')} d'x - \int \frac{\partial f}{\partial s} \frac{D''s}{(\lambda' - \lambda'')} d'x.$$

Der Subtrahend dieses Ausdruckes hat bereits die angestrebte Form. Der Minuend lässt sich immer von der Grösse $D's$ befreien. In der That, sucht man eine Function H von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{(\lambda' - \lambda'')} \frac{\partial f}{\partial s},$$

so folgt:

$$D'H = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{D's}{\lambda - \lambda'} \frac{\partial f}{\partial s}$$

und es wird:

$$\int \frac{D's}{\lambda' - \lambda''} \frac{\partial f}{\partial s} d'x = H - \int \frac{\partial H}{\partial x} d'x.$$

Da nun H kein $D's$ enthalten kann, so ist durch diese Operation $D's$ thatsächlich entfernt und gezeigt, dass $D''J$ in die angegebene Form überführt werden kann. Bezüglich der von Integralzeichen freien Theile besteht von vornherein kein Zweifel, unsere Behauptung ist daher zunächst für die erste Differentiation bewiesen.

Dass auch bei weiterer Differentiation unter allen Zeichen $\int$ die Form R hergestellt werden kann, lässt sich beweisen, indem man zeigt, dass dies beim Übergange von der $n$ten zur $(n+1)$ten Ordnung der Fall ist. Was die von Integralzeichen freien Theile anbelangt, so leuchtet ohneweiters ein, dass sie stets die besprochene Form erhalten. Es genügt sonach, ein Integrale von der Form:

$$J = \int R(x, s, D''s, \ldots, D''^{(n)}s)\, d'x$$

zu betrachten. In Folge der Differentiationsregel ist nun:

$$D''J = R - (\lambda'-\lambda'')e^{-\int\frac{\partial\lambda'}{\partial y}d'x}\int\Big[\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\partial R}{\partial D''^{(i)}.s}\,\frac{\partial D''^{(i)}.s}{\partial y}\Big]e^{\int\frac{\partial\lambda'}{\partial y}d'x}\,d'x.$$

Das Integrale:

$$\int\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\,d'x$$

enthält keine höheren Differentialquotienten, und ist überdies früher bereits berücksichtigt worden, es ist also blos nöthig, Integrale von der Form

$$\int\sum_{i=0}^{i=n}A_i\frac{\partial D''^{(i)}.s}{\partial y}\,d'x$$

zu behandeln. Hierin sind die Coëfficienten A_i Functionen von $x, s, D's, \ldots, D''^{(n)}.s$.

Es ist nun:

$$\frac{\partial D''^{(i)}.s}{\partial y} = \frac{D'D''^{(i)}s - D''^{(i+1)}.s}{\lambda'-\lambda''},$$

unser Integrale wird also:

$$\int\sum_{i=0}^{i=n}\frac{A_i}{\lambda'-\lambda''}D'D''^{(i)}.s.d'x - \int\sum_{i=0}^{i=n}\frac{A_i}{\lambda'-\lambda''}D''^{(i+1)}.s\,d'x$$

und der Subtrahend hat bereits die angestrebte Form. Um auch den Minuend zu transformiren, bestimmen wir zunächst eine Function H_1 von $x, s, D''s, \ldots D''^{(n)}s$ so, dass

$$\frac{\partial H_1}{\partial D''^{(n)}.s} = \frac{A_n}{\lambda'-\lambda''};$$

dann wird:

$$D'H_1 = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial s}D's + \frac{\partial H_1}{\partial D''s}DD''s + \ldots + \frac{\partial H_1}{\partial D''^{(n-1)}.s}D'D''^{(n-1)}s + \frac{A_n}{\lambda'-\lambda''}D'D''^{(n)}s,$$

also

$$\int\frac{A_n}{\lambda'-\lambda''}D'D''^{(n)}s\,d'x = H_1 - \int\frac{\partial H_1}{\partial x}\,d'x - \int\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{\partial H_1}{\partial D''^{(i)}.s}D'D''^{(i)}s\,d'x.$$

Da nun durch die Einsetzung dieses Werthes in den obigen Minuend ein neues Integral derselben Art entsteht, in welchem jedoch die Ordnung i, bis zu welcher die Ableitungen $D''^{(i)}s$ aufsteigen, gegen früher um Eins erniedrigt ist, so ist damit unsere Behauptung bewiesen; denn man kann durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens die Ordnungszahl bis auf Null erniedrigen, das heisst alle D' entfernen. Damit ist nun allgemein nachgewiesen, dass durch fortgesetzte Anwendung der Operation D'' die oben erwähnte Form thatsächlich zum Vorschein kommt.

Dass durch geeignete Verbindung der so erhaltenen Gleichungen jederzeit eine andere gebildet werden könne, aus welcher zunächst R_1 und mittelbar s sich berechnen lassen, kann a priori nicht nachgewiesen werden. Im Gegentheile, es gibt unendlich viele Gleichungen, in welchen diese Forderung einen sachlichen Widerspruch bedingt. Es ist dies in der Regel ein Beweis, dass das unbekannte s Transcendenten enthält, welche durch Differentialgleichungen mit ganzzahligem Ordnungsindex nicht definirt werden können. Dann muss man also die vorhandenen Gleichungen entweder durch Transcendente, welche hiezu geeignet sind, zu integriren suchen, oder zur Reihenentwicklung schreiten.

Für den practischen Gebrauch empfiehlt sich in mehreren Fällen eine zweite Differentiationsregel für Integrale von der Form:

$$J = \int S d' x,$$

nämlich:

$$D'' J = \int D'' S . d' x + \int \frac{\partial J}{\partial y} (D' D'' y - D'' D' y) d' x.$$

Sie stammt aus der leicht zu beweisenden Formel:

$$D' D'' J - D'' D' J = \frac{\partial J}{\partial y} (D' D'' y - D'' D' y),$$

und zeigt insbesondere, dass, wenn

$$D' D'' y - D'' D' y = 0,$$

die Differentiation nach dem Zeichen D'' einfach unter dem Integralzeichen ausgeführt werden kann. Dieser Fall tritt insbesondere dann ein, wenn λ' und λ'' absolute Constante sind.

Es sei die Gleichung gegeben:

$$r - t = \frac{2\nu p}{x},$$

worin ν zunächst als ganzzahlig und positiv vorausgesetzt wird. Wir erhalten hier für λ die Gleichung:

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

und setzen demzufolge:

$$\lambda' = 1, \quad \lambda'' = -1.$$

Es genügt, wenigstens soweit es sich um die Bestimmung von s handelt, in beiden Systemen nur die Gleichungen

$$D' y = 1, \qquad D'' y = -1,$$

$$D' s - D' t = \frac{2\nu s}{x}, \qquad D'' s + D'' t = \frac{2\nu s}{x},$$

zu integriren. Danach wird im ersten Systeme:

$$y = x - f \quad \text{oder} \quad f = x - y$$

und

$$t = F + s - 2\nu \int \frac{s}{x} d' x;$$

im zweiten Systeme

$$y = g - x \quad \text{oder} \quad g = x + y.$$

Wir bilden also die Gleichung

$$t - s + 2\nu \int \frac{s d' x}{x} - \chi(x - y) = 0,$$

und differentiiren dieselben nach dem zweiten System, da es augenscheinlich einerlei ist, ob man zuerst t aus dem zweiten System einsetzt und dann nach D'' differentiirt, oder ob man sogleich differentiirt und den Werth von $D''t$ aus dem zweiten System nimmt. Es folgt also:

$$-2D''s+\frac{2\nu s}{x}+2\nu\int\Big(\frac{D''s}{x}-\frac{s}{x^2}\Big)d'x-2\chi'=0.$$

Differentiirt man diese Gleichung $(\nu-1)$mal mit dem Zeichen D'' so erhält man:

$$-\Big\{\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}\Big\}+\nu\int\frac{d'x}{x}\Big\{\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}\Big\}-2^{\nu-1}\chi^{(\nu)}=0,$$

oder, wenn

$$R=\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}$$

gesetzt wird:

$$-R+\nu\int\frac{Rd'x}{x}-2^{\nu-1}\chi^{(\nu)}=0.$$

Man kann also das Integralzeichen der ersten Art entfernen; in der That, durch Differentiation nach dem Zeichen D' folgt sofort

$$D'R=\frac{\nu R}{x}$$

und daraus

$$R=x^\nu\Phi(x-y).$$

Die Bestimmungsgleichung für s lautet demnach:

$$\sum_{i=0}^{i=\nu}\frac{(-1)^{\nu-i}}{x^{\nu-i}}\frac{D''^{(i)}s}{i!}=x^\nu\Phi(x-y).$$

Die Integration dieser Gleichung bereitet keine Schwierigkeiten, sie gibt s in der Form:

$$s=\sum_0^\nu x^i[\mu_i\varphi^{(i+2)}(x-y)+\nu_i\psi^{(i+2)}(x+y)],$$

worin

$$\varphi^{(i+2)}(x-y)=\frac{d^{i+2}\varphi(x-y)}{[d(x-y)]^{i+2}},\qquad \psi^{(i+2)}(x+y)=\frac{d^{i+2}\psi(x+y)}{[d(x+y)]^{i+2}}$$

zu verstehen ist. Die Berechnung der Coëfficienten μ_i und ν_i aus der Gleichung für s selbst ist umständlich, es empfiehlt sich daher, da z von der Form

$$z=\sum_{k=0}^{k=\nu}x^k[A_k\varphi^{(k)}(x-y)+B_k\psi^{(k)}(x+y)]$$

sein muss, die Coëfficienten A_k und B_k direct aus der gegebenen Gleichung zu berechnen. Man erhält:

$$A_k=A_0(-1)^k\frac{2^k}{k!}\frac{\binom{\nu}{k}}{\binom{2\nu}{k}},\qquad B_k=B_0(-1)^k\frac{2^k}{k!}\frac{\binom{\nu}{k}}{\binom{2\nu}{k}},$$

also da A_0 und B_0 unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden können;

$$z=\sum_{k=0}^{k=\nu}(-1)^k\frac{2^k}{k!}\frac{\binom{\nu}{k}}{\binom{2\nu}{k}}x^k[\varphi^{(k)}(x-y)+\psi^{(k)}(x+y)].$$

So ergibt sich beispielsweise für $\nu=3$, das heisst für die Gleichung:

$$r-t=\frac{6p}{x}$$

das Integrale

$$z=[\varphi(x-y)+\psi(x+y)]-x[\varphi'(x-y)+\psi'(x+y)]+\frac{2x^2}{5}\varphi''(x-y)+\psi''(x+y)]-\frac{x^3}{15}[\varphi'''(x-y)+\psi'''(x+y)].$$

Ist ν eine negative ganze Zahl, hat also die gegebene Gleichung die Form:

$$r-t+\frac{2\nu p}{x}=0,$$

so kann man das Integrale

$$t-s-2\nu\int\frac{s}{x}\,d'x-\chi(x-y)=0,$$

welches im gegebenen Falle an die Stelle des im Vorhergehenden zu Grunde gelegten treten würde, nicht zum Ausgangspunkte der Rechnung nehmen, da wie ersichtlich durch fortgesetztes Differentiiren eine Identität wie im früheren Falle nicht erzielt werden kann. Wir benützen daher ein Integrale, welches sich aus der Integration der Gleichungen:

$$D'r-D's=\frac{2\nu p}{x^2}-\frac{2\nu r}{x}$$

$$D'p=r+s$$

ergibt, nämlich das Integrale:

$$[(2\nu+1)r-2\nu s-t]x^{2\nu+1}+4\nu\,.\,\nu+1\,.\int x^{2\nu}s\,d'x-\Phi(x-y)=0.$$

Differentiirt man nun nach dem Zeichen D'' und setzt für die auftretenden Differentialquotienten

$$D''r,\quad D''t$$

deren Werthe aus dem zweiten Systeme, so folgt:

$$-(x^{2\nu+1}D''s+\nu x^{2\nu}s)+(\nu+1)\int(x^{2\nu}D''s+2\nu x^{\nu-1}s)\,d'x-2\Phi'=0,$$

und diese Gleichung verwandelt sich durch die Substitution

$$s=ux^{-(2\nu+1)}$$

in die nachstehende:

$$-\left[D''u-(\nu+1)\frac{u}{x}\right]+(\nu+1)\int_a\left[\frac{D''u}{x}-\frac{u}{x^2}\right]d'x-2\Phi'=0,$$

welche im früheren Falle ein Analogon besitzt. Wir schliessen hieraus sofort, dass s die Form:

$$s=\sum_{k=0}^{k=\nu+1}\frac{C_k\varphi^{(k)}(x-y)+D_k\psi^{(k)}(x+y)}{x^{2\nu-k+1}},$$

also z die Form:

$$z=\sum_{k=0}^{k=\nu-1}\frac{A_k\varphi^{(k)}(x-y)+B_k\psi^{k}(x+y)}{x^{2\nu-k-1}}$$

besitzt. Die directe Berechnung der Coëfficienten aus der gegebenen Gleichung gibt dann:

$$\frac{A_k}{A_0}=\frac{B_k}{B_0}=(-1)^k\cdot\frac{2^k}{k!}\frac{\binom{\nu-1}{k}}{\binom{2\nu-2}{k}}$$

und die Lösung ist:

$$z = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k!} \frac{\binom{\nu-1}{k}}{\binom{2\nu-2}{k}} \frac{\varphi^{(k)}(x-y)+\psi^{(k)}(x+y)}{x^{2\nu-k-1}}.$$

Man findet insbesondere für $\nu = 2$, also für die Gleichung

$$r-t = -\frac{4p}{x}$$

die Lösung

$$z = \frac{1}{x^3}[\varphi(x-y)+\psi(x+y)] - \frac{1}{x^2}[\varphi'(x-y)+\psi'(x+y)].$$

Ist ν keine ganze Zahl, so kann die unbekannte Grösse s nicht durch eine Differentialgleichung mit ganzzahligem Ordnungsindex definirt werden. Da aber die Bedeutung gebrochener oder irrationaler Ordnungsexponenten bei der Differentiation noch nicht so weit aufgeklärt ist, um sie im Calcul anwenden zu können, muss man zur Reihenentwicklung schreiten.

Bei der Gleichung

$$c^2 x^{\frac{4}{3}} r - t = 0,$$

für welche

$$\lambda' = \frac{1}{c} x^{-\frac{2}{3}} \qquad \lambda'' = -\frac{1}{c} x^{-\frac{2}{3}},$$

also

$$f = 3x^{\frac{1}{3}} - cy, \qquad g = 3x^{\frac{1}{3}} + cy,$$

ist

$$D'D''y - D''D'y = \frac{4}{2c} x^{-\frac{5}{3}},$$

somit von Null verschieden. Es genügt auch hier, von der Gleichung

$$D's - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{c} D't = 0$$

des ersten Systems auszugehen. Das Integrale derselben ist

$$F = t - cx^{\frac{2}{3}} s + \frac{2c}{3}\int x^{-\frac{1}{3}} s d'x,$$

wir bilden also die Gleichung

$$t - cx^{\frac{2}{3}} s + \frac{2c}{3}\int x^{-\frac{1}{3}} s d'x - f(3x^{\frac{1}{3}} - cy) = 0$$

und differentiiren unter Berücksichtigung der oben gegebenen Differentiationsregel nach dem Zeichen D''. Es folgt nach mehreren Reductionen:

$$-2c\left[x^{\frac{4}{3}} D''s + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} s\right] + \frac{2c}{3}\int \left[x^{\frac{4}{3}} D''s + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} s\right] \frac{d'x}{x} - 2f'(3x^{\frac{1}{3}} - cy) = 0$$

und, wenn wir

$$x^{\frac{4}{3}} D''s + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} s = R$$

setzen:

$$D'R - \frac{R}{3x} = 0.$$

Die Bestimmungsgleichung für s wird demnach:

$$xD''s + \frac{s}{3} = \Phi\left(3x^{\frac{1}{3}} - cy\right),$$

und hieraus fliesst für s die Relation:

$$x^{\frac{1}{3}} s = \varphi\left(3x^{\frac{1}{3}} + cy\right) + \psi\left(3x^{\frac{1}{2}} - cy\right),$$

Das allgemeine Integrale der gegebenen Gleichung ist:

$$z = \Phi\left(3x^{\frac{1}{3}} + cy\right) + \Psi\left(2x^{\frac{1}{3}} - cy\right) - 3x^{\frac{1}{3}}\left[\Phi'\left(3x^{\frac{1}{3}} + cy\right) + \Psi'\left(3x^{\frac{1}{3}} - cy\right)\right]$$

Die vorliegende Gleichung ist übrigens nur ein specieller Fall der allgemeinen Gleichung:

$$(2\nu+1)^2 x^{\frac{4\nu}{2\nu+1}} r - t = 0,$$

welche durch die Substitution:

$$x = \xi^{2\nu+1}$$

in die neue Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\nu}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

übergeht und für ganzzahlige ν im Vorigen bereits erledigt ist.

Die Erörterungen dieses und des vorigen Artikels beruhen auf der stillschweigend gemachten Voraussetzung, dass die beiden Wurzeln λ' und λ'' der Gleichung (10) und daher auch die beiden Differentialsysteme, von denen die Rede war, von einander verschieden sind. Es genügen einige kurze Bemerkungen, um auch den Fall gleicher Wurzeln zu erledigen.

Denken wir uns die beiden Wurzeln für den Augenblick noch verschieden, so muss, da die aus denselben entspringenden Differentialsysteme beim stetigen Übergange des λ'' in λ' in eines zusammenfallen, es möglich sein, jedem Integrale des einen Systems ein Integrale des andern Systems so zuzuordnen, dass beim stetigen Übergange von λ'' zu λ' das letztere mit dem ersten zusammenfällt. Ist also, wie früher, F irgend ein beliebiges Integrale des zweiten Systems von der Form

$$F = G - \psi(y) = 0,$$

so verwandelt sich die Gleichung (10) in die folgende:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{ds}{dx}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{\lambda'}\frac{dt}{dx}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{ε}$$

und beim Grenzübergange ziehen sich die hierin enthaltenen Ableitungen von F auf die gleichnamigen Ableitungen eines dem ersten Systeme angehörigen Integrales

$$f_1 - \psi(f) = 0$$

zurück. Man kann also die Bestimmungsgleichung (ε) direct aus einem Integrale des ersten Systems ableiten; sie enthält nur Bestandtheile des ersten Systems und setzt der Berechnung von s keine anderen Schwierigkeiten entgegen, als die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen überhaupt.

Die Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

gibt für λ' und λ'' den gemeinsamen Werth

$$\lambda' = \lambda'' = -\frac{s}{t} = -\frac{r}{s},$$

so dass das Differentialsystem:

$$Dy = -\frac{s}{t}$$

$$Dz = p - \frac{s}{t}q$$

$$Dp = 0$$

$$Dq = 0$$

$$sDr - rDs = 0$$

$$tDs - sDt = 0$$

entsteht. Dasselbe wird integrirt durch die Relationen;

$$z = f_5 + (f_1 - f_3 f_2)x$$

$$p = f_1$$

$$q = f_2$$

$$r = f_3 s$$

$$t = \frac{s}{f_3}$$

$$y = f_4 - x f_3.$$

Zur Bestimmung von s benützen wir die Gleichung:

$$y + x\frac{r}{s} = \psi\left(\frac{r}{s}\right),$$

und erhalten an Stelle der (ε) die folgende:

$$1 + \frac{ds}{dx}\left(\frac{x}{s} - \frac{1}{s}\psi'\left(\frac{r}{s}\right)\right) = 0,$$

somit

$$s = \frac{\varphi\left(\frac{r}{s}\right)}{x - \psi'\left(\frac{r}{s}\right)}$$

und hieraus die bekannte Lösung.

Die einfache Construction des Differentialsystems erlaubt jedoch, die Lösung zu finden, ohne dass der Werth von s ausdrücklich berechnet wird. Es werden nämlich im gegenwärtigen Falle die Gleichungen (14) durch die folgenden ersetzt:

$$\partial f_1 = s(\partial f_4 - x\partial f_3),$$

$$f_3 \partial f_2 = s(\partial f_4 - x\partial f_3),$$

$$\partial f_5 - f_2 \partial f_4 = x(\partial f_1 - f_3 \partial f_2),$$

aus welchen sich sofort die Beziehungen:

$$\partial f_1 = f_3 \partial f_2, \quad \partial f_5 = f_2 \partial f_4$$

ergeben. Setzen wir also

$$f_1 = \varphi(f_2), \quad f_4 = \psi(f_2),$$

woraus sich

$$f_5 = f_2 \psi(f_2) - \int \psi(f_2) df_2 \quad \text{und} \quad f_3 = \varphi'(f_2)$$

ergibt, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{r}{s} = \varphi'(q), \quad p = \varphi(q), \quad y + \frac{r}{s}x = \psi(q)$$

$$z - \left(p - \frac{r}{s}q\right)x = q\psi(q) - \int \psi(q) dq,$$

und hieraus abermals die Lösung:

$$z = x\varphi(q) + yq - \Psi(q)$$
$$o = x\varphi'(q) + y - \Psi'(q).$$

8.

Im Artikel 4 wurde vorausgesetzt, dass beide Wurzeln der Gleichung (10) endlich und von Null verschieden seien oder, was dasselbe ist, dass weder $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ noch $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ den Werth Null annehme. Indem ich mich nun zur Behandlung dieser speciellen Fälle wende, will ich zunächst darauf aufmerksam machen, dass der Fall, in welchem eine der beiden Wurzeln bestimmt und endlich, die andere aber unendlich ist, immer auf den anderen zurückgeführt werden kann, in welchem die eine Wurzel ebenfalls bestimmt und endlich ist, die andere aber den Werth Null annimmt. Man kann nämlich statt der Gleichungen (7) des Artikels 4 auch die folgenden:

$$\lambda''_1 \partial r + \partial s = \frac{\partial r}{\partial x}\lambda''_1 \partial x + \frac{\partial s}{\partial x}(\lambda''_1 \partial y + \partial x) + \frac{\partial t}{\partial x}.\partial y$$

$$\lambda''_1 \partial s + \partial t = \frac{\partial r}{\partial y}\lambda''_1 \partial x + \frac{\partial s}{\partial y}(\lambda''_1 \partial y + \partial x) + \frac{\partial t}{\partial y}.\partial y$$

benützen, was dieselben Folgen nach sich zieht, als ob man statt λ'' den Factor $\frac{1}{\lambda''_1}$ eingeführt hätte. Setzt man nun

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \lambda'_1,$$

so resultiren die Beziehungen:

$$\frac{\lambda'_1\lambda''_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} = \frac{\lambda'_1 + \lambda''_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} = \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}},$$

so dass λ'_1 und λ''_1 der Gleichung:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \lambda_1^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Genüge leisten. Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber die reciproken Werthe der Wurzeln der Gleichung (10), womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wie vorauszusehen war, besteht diese Zurückführung im Wesentlichen darin, dass in dem zu construirenden Differentialsysteme y als die unabhängige Variable angesehen wird.

Somit können wir uns auf den Fall

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

beschränken. Die Gleichungen (3) des Artikels 4 lauten dann:

$$0 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$0 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}$$

und, da aus denselben $\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ entfallen sind, genügt es, die Integrabilitätsbedingungen (5) in Anspruch zu nehmen. Man erschliesst solcher Art das folgende System von Proportionen:

$$\frac{dr}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} = \frac{ds}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} = \frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}.$$

Bezeichnet man den Quotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial s}}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}},$$

welcher nichts Anderes ist, als die eine von Null verschiedene Wurzel der Gleichung:

$$0 = \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

abermals mit λ', so resultirt das Differentialsystem:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda'$$

$$\frac{dz}{dx} = p + \lambda' q$$

$$\frac{dq}{dx} = r + \lambda' s$$

$$\frac{dp}{dx} = s + \lambda' t$$

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}$$

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}.$$

In demselben muss t als die unbestimmte Grösse angesehen werden. Transformirt man vermittelst der Integrale dieses Systems die Gleichung:

$$\partial p = r \partial x + s \partial y,$$

so fällt aus derselben x heraus, die Gleichung

$$\partial q = s \partial x + t \partial y$$

enthält aber auch nach dieser Transformation x und man muss t so bestimmen, dass ersteres zum Ausfall kommt.

Es besteht nun die Identität:

$$\frac{\partial F}{\partial z} Z + \frac{\partial F}{\partial p} P + \frac{\partial F}{\partial q} Q + \frac{\partial F}{\partial r} R - \left(\lambda' \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s}\right) T = \partial F - \frac{D''F - D'F}{-\lambda'} \partial y - \partial t \left(\lambda'^2 \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda' \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

in welcher D' und D'' eine durch den vorliegenden speciellen Fall modificirte Bedeutung haben, deren Discussion, wie oben vorgenommen, im Wesentlichen zu denselben Resultaten führt.

Der vorliegende Fall unterscheidet sich also von dem allgemeinen blos durch die äussere Form des Differentialsystems und in den unmittelbaren Consequenzen, welche diese zur Folge hat, während der allgemeine Gang der Rechnung derselbe bleibt. Es mag jedoch bemerkt werden, dass auch die Construction dieses Differentialsystems kein abweichendes Verfahren bedingt. Indem wir nämlich

$$\lambda' = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial s}}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}$$

gesetzt haben, ist für λ'' der Werth Null zu setzen, wodurch das allgemeine Differentialsystem sofort in das hier gefundene übergeht. Der blosse Anblick der Relationen (8) zeigt übrigens, dass denselben auch durch die Annahme

$$\frac{dy}{dx}=0, \qquad \lambda''=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}$$

genügt werden kann, wodurch sich nun der vorliegende Fall vollständig dem allgemeinen unterordnet. Da aber in einem der möglichen Differentialsysteme nur t für die unbestimmt verbleibende Variable genommen werden kann, empfiehlt es sich, auch im zweiten Systeme nicht s, sondern t als Unbekannte zu betrachten.

Die Gleichung:

$$r-\alpha s^2=0,$$

für welche

$$\lambda'=0, \quad \lambda''=-2\alpha s$$

gibt Anlass zu den beiden Systemen:

$$\begin{aligned}
D'y&=0\,; & D''y&=-2\alpha s\,,\\
D'z&=p\,, & D''z&=p-2\alpha sq\,,\\
D'p&=r\,, & D''p&=r-2\alpha s^2=-\alpha s^2\,,\\
D'q&=s\,, & D''q&=s-2\alpha st\,,\\
D'r-2\alpha s\,D's&=0\,, & D''r&=0\,,\\
D's-2\alpha s\,D't&=0\,, & D''s&=0\,,
\end{aligned}$$

Wir erhalten daher im zweiten System:

$$r=\alpha g^2, \quad s=g, \quad y=g_1-2\alpha g x$$

im ersten:

$$y=f.$$

Wir bilden also die Gleichung:

$$y=\varphi(g)-2\alpha g x,$$

und erhalten durch Einsetzung des Werthes von y aus dem ersten System:

$$f=\varphi(g)-2\alpha g x.$$

Bei der Integration im ersten System bleibt f constant, und es wird

$$d'x=\frac{g\varphi'(g)-\varphi(g)+f}{2\alpha g^2}\,dg.$$

Es folgt somit zunächst

$$p=\Phi_2(f)+\frac{fg}{2}+\alpha(g\Psi'-\Psi),$$

und hierauf:

$$z=\Phi_3(f)+x\Phi_2(f)+\frac{f}{2}\left[\Psi'(g)-\frac{\Psi(g)}{g}\right]+\frac{f^2}{4\alpha}\log g+\alpha\int\frac{g\Psi'(g)-\Psi(g)}{g}.\Psi''(g)\,dg,$$

worin

$$\varphi(g)=g\vartheta(g) \quad \text{und} \quad g\vartheta'(g)=2\alpha\Psi''(g)$$

zu verstehen ist.

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (14) ein, so ergibt sich, dass Φ_2 eine absolute Constante sein muss. Die Lösung ist also:

$$z=\Phi(y)+bx+\frac{y}{2}\left[\Psi'(g)-\frac{\Psi(g)}{g}\right]+\frac{y^2}{4\alpha}\log g+\alpha\int\frac{g\Psi'(g)-\Psi(g)}{g}\,\Psi''(g)\,dg$$

$$y=\varphi(g)-2\alpha g x, \quad \varphi(g)=g\vartheta(g), \quad g\vartheta'(g)=2\alpha\Psi''(g).$$

Von den sonst noch möglichen Fällen verdient blos derjenige Erwähnung, in welchem sowohl $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ als auch $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ den Werth Null besitzen, und zwar wegen der eigenthümlichen Form der hier auftretenden Differentialsysteme. Da die vorgelegte Gleichung von den Ableitungen zweiter Ordnung nur s enthält, bringen wir sie in die Form

$$s = \psi(x, y, z, p, q),$$

und finden dann durch Verfolgung des allgemeinen Gedankenganges die Proportionen:

$$\frac{\partial r + \lambda''\partial s}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial s + \lambda''\partial t}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial x}{0} = \frac{\partial y + \lambda''\partial x}{1} = \frac{\lambda''\partial y}{0}.$$

Diese können befriedigt werden durch die Annahme $\lambda'' = \infty$, welche gibt:

$$\frac{\partial s}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial \alpha}\right)} = \frac{\partial t}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{0}$$

oder durch die Annahme: $\lambda'' = 0$, aus welcher folgt:

$$\frac{\partial r}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial s}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial x}{0} = \frac{\partial y}{1}.$$

Mit den nöthigen Ergänzungen treten hier also die folgenden zwei Differentialsysteme auf:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{r} = \frac{dq}{s} = \frac{ds}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{dt}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}$$

und

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q} = \frac{dp}{s} = \frac{pq}{t} = \frac{dr}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)} = \frac{ds}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}.$$

Ich unterlasse es, direct nachzuweisen, dass auch hier der allgemeine Gang der Rechnung unverändert bleibt. Es folgt dies auch indirect aus einem Satze über die Transformation der behandelten Differentialgleichungungen, welcher lehrt:

> dass bei Einführung neuer Independenten an Stelle von x und y die Werthe von λ eine lineare Transformation erfahren.

In der That, setzt man

$$x = u(\xi, \eta), \quad y = v(\xi, \eta),$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta}{\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta}.$$

Bezeichnet man also die beiden Werthe, welche $\frac{dy}{dx}$ annehmen kann, wie bisher durch λ, das Verhältniss $\frac{d\eta}{d\xi}$ durch Λ, so ist demnach:

$$\lambda = \frac{\Lambda\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\xi}}{\Lambda\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial x}{\partial\xi}}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Setzt man insbesondere:

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta,$$

so folgt

$$\Lambda = -\frac{\alpha\lambda - \gamma}{\beta\lambda - \delta}$$

und den Werthen

$$\lambda' = 0, \quad \text{und} \quad \lambda'' = \infty$$

entsprechen die Werthe

$$\Lambda' = -\frac{\gamma}{\delta}, \quad \Lambda'' = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Zugleich ist klar, dass man die Einführung neuer Null- oder Unendlichkeitswerthe immer vermeiden kann. Sonach kann man singuläre Werthe von λ durch eine lineare Transformation entfernen, und dadurch kehrt das Problem unter den allgemeinen Fall zurück.

In Folge dessen kann die Gleichung

$$s = z$$

ebenfalls nach der allgemeinen Methode behandelt werden. Die beiden Differentialsysteme lauten:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{r} = \frac{dq}{s} = \frac{ds}{p} = \frac{dt}{q}$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q} = \frac{dp}{s} = \frac{dq}{t} = \frac{dr}{p} = \frac{ds}{q}$$

Aus dem ersten System folgt sofort:

$$p - \int r dx = \varphi(y),$$

und indem man mehrmals im Sinne des zweiten Systems differentirt, schliesslich:

$$D''t - \int t d^{\prime\prime} x = \varphi^{\prime\nu}(y),$$

eine Gleichung, welche durch die Supposition:

$$t = \Sigma X_m Y_m, \quad Y'_m = \alpha_m Y_m, \quad \int X_m dx = \alpha_m X_m + \gamma_m,$$

in welchen X_m eine Function x, Y_m eine Function von y allein bedeutet, und die Summe in t auf beliebige m bezogen werden kann, befriedigt wird. Damit folgt

$$z = \Sigma A_m e^{\frac{x}{\alpha_m} + \alpha_m y},$$

aus welcher Lösung leicht die bekannten Formen hergestellt werden können.

Dritter Abschnitt.

Die allgemeine partielle Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten.

9.

Indem wir nun zur Integration der allgemeinen Gleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten übergehen, stellt sich das Bedürfniss ein, eine übersichtliche Bezeichnungsweise einzuführen.

Die allgemeine Gleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten enthält neben diesen Independenten, die wir wieder mit x und y bezeichnen, die Dependente z und alle Ableitungen bis zur $p$ten Ordnung, welche durch successive Differentiation nach x und y erhalten werden. Wir werden dieselben zunächst durch gewisse Functionen von x und y ersetzen, denen wir vor der Hand nur die eine Eigenschaft auferlegen, dass die gegebene Gleichung identisch befriedigen, und zwar soll diejenige Function, welche an Stelle des Differentialquotienten

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$$

zu setzen ist, durch

$$(\alpha, \beta)$$

bezeichnet werden. In allen diesen Klammerausdrücken soll der erste Index α angeben, wie oft in dem entsprechenden Differentialquotienten t nach x abgeleitet wurde, während der zweite Index dieselbe Bedeutung bezüglich der Independenten y haben soll; die Summe der beiden Indices ist offenbar die Gesammtordnung der Differentiation. Vermittelst dieser Bezeichnungen gewinnt die vorgelegte Gleichung die Gestalt:

$$0 = \varphi[x, y, (0,0); (10), (01); \ldots\ldots; (p,0), (p-1,1), (p-2,2), \ldots, (1, p-1), (0,p)], \tag{1}$$

wobei die eingeführte Bezeichnung auch auf z als die nullte Ableitung seiner selbst ausgedehnt worden ist. Die Zahl der in (1) eintretenden Argumente ist also:

$$\binom{p+2}{2} + 2.$$

Wir ersetzten die Gleichung (1) durch zwei andere, indem wir zuerst nach x, und hierauf nach y differentiiren. Bei dieser Differentiation setzen wir, so lange

$$\alpha + \beta < p:$$

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} = (\alpha+1, \beta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} = (\alpha, \beta+1),$$

und machen der Kürze wegen:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,0)}(1,0) + \frac{\partial\varphi}{\partial(1,0)}(2,0) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p-1)}(1,p-1) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sum_{\alpha+\beta=0}^{\alpha+\beta=p-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}(\alpha+1,\beta),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,0)}(0,1) + \frac{\partial\varphi}{\partial(1,0)}(1,1) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p-1)}(0,p) \quad = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \sum_{\alpha+\beta=0}^{\alpha+\beta=p-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}(\alpha,\beta+1).$$

Dadurch erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\frac{\partial(p,0)}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}\frac{\partial(0,p)}{\partial x} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \sum_{i=0}^{i=p} \frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial x} \\
0 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\frac{\partial(p,0)}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}\frac{\partial(0,p)}{\partial y} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \sum_{i=0}^{i=p} \frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial y},
\end{aligned} \tag{2}$$

welche die (1) bis auf eine Integrationsconstante ersetzen, wenn nachstehende Relationen:

$$d(0,0) = (1,0)\,dx + (0,1)\,dy \tag{3_0}$$

$$\begin{aligned} d(1,0) &= (2,0)\,dx + (1,1)\,dy \\ d(0,1) &= (1,1)\,dx + (0,2)\,dy \end{aligned} \tag{3_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d(\alpha,\beta) = (\alpha+1,\beta)\,dx + (\alpha,\beta+1)\,dy \tag{$3_{\alpha+\beta}$}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} d(p-1,0) &= (p,0)\,dx + (p-1,1)\,dy \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d(0,p-1) &= (1,p-1)\,dx + (0,p)\,dy \end{aligned} \tag{3_{p-1}}$$

befriedigt sind. Dies findet auch dann statt, wenn die voranstehenden Gleichungen (3) nicht unbeschränkt integrabel sind, sind aber die letzteren unbeschränkt integrabel, so folgt aus denselben:

$$(\alpha,\beta)=\frac{\partial^{\alpha+\beta}z}{\partial x^\alpha\partial y^\beta}$$

und das Problem ist gelöst.

Heben wir nun irgend eine der Gleichungen (3), etwa die folgende:

$$d(\alpha,\beta)=(\alpha+1,\beta)dx+(\alpha,\beta+1)dy$$

der Gruppe $(3_{\alpha+\beta})$ heraus, so lauten nach den Gleichungen (8) des Artikels 3 die Integrabilitätsbedingungen für dieselbe

$$d(\alpha+1,\beta)=(\alpha+2,\beta)dx+(\alpha+1,\beta+1)dy,$$
$$d(\alpha,\beta+1)=(\alpha+1,\beta+1)dx+(\alpha,\beta+2)dy.$$

Diese sind, so lange $(\alpha+\beta)<p$, unter den Gleichungen der nächstfolgenden Gruppe $(3_{\alpha+\beta+1})$ enthalten, so dass die Gleichungen irgend einer der in (3) formirten Gruppen zugleich die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen der unmittelbar vorhergehenden Gruppe sind. Daraus folgt, dass wir nur für die Gleichungen der letzten Gruppe besondere Integrabilitätsbedingungen aufzustellen haben. Diese lauten:

$$d(p,0)=\frac{\partial(p,0)}{\partial x}dx+\frac{\partial(p-1,1)}{\partial x}dy,\ldots,d(p-i,i)=\frac{\partial(p-i,i)}{\partial x}dx+\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial x}dy,\ldots,d(1,p-1)=$$
$$\frac{\partial(1,p-1)}{\partial x}dx+\frac{\partial(0,p)}{\partial x}dy, \tag{4}$$
$$d(p-1,1)=\frac{\partial(p,0)}{\partial y}dx+\frac{\partial(p-1,1)}{\partial y}dy,\ldots,d(p-i-1,i+1)=\frac{\partial(p-i,i)}{\partial y}dx+\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial y}dy,\ldots,d(0,p)=$$
$$\frac{\partial(1,p-1)}{\partial y}dx+\frac{\partial(0,p)}{\partial y}dy$$

und sind sogleich so geordnet worden, dass in der ersten Zeile alle jene zusammentreffen, welche Ableitungen von x enthalten, in der zweiten dagegen alle jene, in denen Ableitungen nach y auftreten.

Wir bezeichnen nun p vorläufig noch unbestimmte Factoren durch die Zeichen:

$$[p-1,0],[p-2,1],\ldots,[p-i,i-1],\ldots,[0,p-1],$$

und bilden die Gleichungen:

$$[p-1,0]\,d(p,0)+\ldots[p-i-1,i]\,d(p-i,i)+\ldots+[0,p-1]\,d(1,p-1)=$$
$$=\frac{\partial(p,0)}{\partial x}[p-1,0]dx+\ldots+\frac{\partial(p-i,i)}{\partial x}\Big\{[p-i-1,i]dx+[p-i,i-1]\Big\}dy+\ldots+\frac{\partial(0,p)}{\partial x}[0,p-1]dy, \tag{5}$$

$$[p-1,0]\,d(p-1,1)+\ldots+[p-i,i-1]\,d(p-i,i)+\ldots+[0,p-1]\,d(0,p)=$$
$$=\frac{\partial(p,0)}{\partial y}[p-1,0]dx+\ldots+\frac{\partial(p-i,i)}{\partial y}\Big\{[p-i-1,i]dx+[p-i,i-1]\Big\}dy+\ldots+\frac{\partial(0,p)}{\partial y}[0,p-1]dy.$$

Verglichen mit den (2) führen dieselben zu den Proportionen:

$$\frac{[p-1,0]\,d(p,0)+\ldots+[p-i-1,i]\,d(p-i,i)+\ldots+[0,p-1]\,d(1,p-1)}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}$$

$$=\frac{[p-1,0]\,d(p-1,1)+\ldots+[p-i,i-1]\,d(p-i,i)+\ldots+[0,p-1]\,d(0,p)}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} \qquad (6)$$

$$=\frac{[p-1,0]\,dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}=\ldots\ldots\ldots=\frac{[p-i-1,i]\,dx+[p-i,i-1]\,dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}=\ldots\ldots\ldots=\frac{[0,p-1]\,dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}.$$

Da einer der unbestimmten Factoren, wie aus diesen Beziehungen zu ersehen, willkürlich ist, setzen wir

$$[p-1,0]=1,$$

und betrachten zunächst die $p+1$ letzten Glieder der voranstehenden Reihe (6). Dieselben gehen mit der Bezeichnung

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1$$

in die Gleichungen:

$$\lambda_1+[p-2,1]=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}},\ldots\ldots,[p-i-1,i]\,\lambda_1+[p-i,i-1]=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}},\ldots\ldots,[0,p-1]\,\lambda_1=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}$$

über, vermittelst welcher sowohl λ_1 als auch die noch unbestimmten $p-1$ Factoren berechnet werden können.

Bedeutet nämlich λ eine willkürliche Grösse, so wird:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\left\{\lambda^{p-1}-[p-2,1]\lambda^{p-2}+\ldots+(-1)^i[p-i-1,i]\lambda^{p-i-1}+\ldots+(-1)^{p-1}.[0,p-1]\right\}(\lambda-\lambda_1)=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\left\{\begin{array}{l}\lambda^p-[p-2,1]\lambda^{p-1}+\ldots+(-1)^i[p-i-1,i]\,\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^{p-1}[0,p-1]\lambda\\ \qquad-\lambda_1\lambda^{p-1}+\ldots+(-1)^i\lambda_1[p-i,i-1]\,\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^{p-1}\lambda_1[1,p-2]\lambda+(-1)^p\lambda_1[0,p-1]\end{array}\right\},$$

das ist:

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\lambda^p-\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}\lambda^{p-1}+\ldots+(-1)^i\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^p\frac{\partial\varphi}{\lambda(0,p)}.$$

Sind also

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_p$$

die Wurzeln der Gleichung:

$$P(\lambda)=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\lambda^p-\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}\lambda^{p-1}+\ldots\ldots+(-1)^i\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\lambda^{p-i}+\ldots\ldots+(-1)^p\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}=0, \qquad (7)$$

und setzt man:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1,$$

so wird

$$\begin{aligned}[p-2,1]&=\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_p\\ [p-3,2]&=\lambda_2\lambda_3+\ldots+\lambda_{p-1}\lambda_p\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [0,p-1]&=\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_p.\end{aligned} \qquad (8)$$

Wir erhalten also mit Zuziehung der Gleichungen (3) das folgende Differentialsystem:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \lambda_1 \\
&\frac{d(0,0)}{dx} = (1,0)+\lambda_1(0,1) \\
&\frac{d(1,0)}{dx} = (2,0)+\lambda_1(1,1) \\
&\frac{d(0,1)}{dx} = (1,1)+\lambda_1(0,2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d(\alpha,\beta)}{dx} = (\alpha+1,\beta)+\lambda_1(\alpha,\beta+1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d(p-1,0)}{dx} = (p,0)+\lambda_1(p-1,1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d(0,p-1)}{dx} = (1,p-1)+\lambda_1(0,p)
\end{aligned}
\right\} \qquad (9)
$$

$$
\frac{d(p,0)}{dx}+[p-2,1]\frac{d(p-1,1)}{dx}+\ldots+[p-i-1,i]\frac{d(p-i,i)}{dx}+\ldots+[0,p-1]\frac{d(1,p-1)}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}
$$

$$
\frac{d(1,p-1)}{dx}+[p-2,1]\frac{d(p-2,2)}{dx}+\ldots+[p-i,i-1]\frac{d(p-i,i)}{dx}+\ldots+[0,p-1]\frac{d(0,p)}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}.
$$

10.

In dem Differentialsysteme (9) sind

$$\binom{p+1}{2}+3$$

Gleichungen zur Bestimmung von

$$\binom{p+2}{2}+1$$

Grössen gegeben; von den letzteren sind also

$$p-1$$

durch das System nicht bestimmt, und müssen während der Integration desselben als willkürliche Functionen von x und den Integrationsconstanten angesehen werden.

Wir wählen hiefür die Grössen:

$$(1,p-1),\quad (2,p-2),\ldots,(p-1,1), \tag{10}$$

und werden dieselben später so bestimmen, dass aus den einzuführenden Pfaff'schen Gleichungen das x entfällt. Die Integration betrachten wir dann als vollzogen, wenn die Dependenten des Systems (9), als Functionen des x, der $\binom{p+1}{2}+3$ Integrationsconstanten und der in (10) angeführten willkürlich bleibenden Variabeln dargestellt worden sind. Da Integrationen über solche Glieder, welche einige der willkürlichen Grössen enthalten, nicht ausgeführt, sondern nur angezeigt werden können, werden diese unbestimmten Grössen im Allgemeinen nicht nur frei, sondern auch unter Integralzeichen auftreten, deren Anzahl bis zu

$$\binom{p+1}{2}+3$$

aufsteigen kann.

Differentiirt man eine Function F, deren Argumente die Variabeln des Problems sind, und setzt statt der Differentialquotienten der Variabeln deren Werthe aus dem Systeme (9) ein, so soll das Resultat dieser Operation durch

$$D_1 F$$

bezeichnet werden. Die Ausführung dieser Rechnung gibt:

$$D_1 F = \tag{11}$$
$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}} \frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\} + \lambda_1 \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(0,p)}} \frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\} - \sum \frac{d(\alpha,\beta)}{dx} \left\{\frac{[\alpha-1,\beta]}{[p-1,0]} \frac{\partial F}{\partial(p,0)} + \frac{[\alpha,\beta-1]}{[0,p-1]} \frac{\partial F}{\partial(0,p)} - \frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\},$$

wobei der Symmetrie wegen die Bezeichnung $[p-1,0]$ für 1 beibehalten wurde, und die Summe über alle Ausdrücke (α,β), für welche

$$\alpha+\beta = p$$

auszudehnen ist. Hiebei ist ausserdem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)} (\alpha+1,\beta)$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} + \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)} (\alpha,\beta+1)$$

zu verstehen und in diesen Formeln die Summe über alle (α,β) zu erstrecken, für welche

$$\alpha+\beta < p.$$

Ist insbesondere F ein Integrale des Systems (9), so ist

$$D_1 F = 0.$$

Das vollständige Integralsystem besteht aus

$$N = \binom{p+1}{2}+3$$

Gleichungen mit eben so vielen Integrationsconstanten und jedes Integral des Systems muss sich als Function von je N von einander unabhängigen Integralen darstellen lassen. Da nun identisch

$$D_1 \varphi = 0,$$

so ist die rechte Seite der gegebenen Gleichung selbst als Function der Integrationsconstanten darstellbar. Es kann sonach durch eine entsprechend gewählte Relation zwischen den letzteren die gegebene Gleichung stets befriedigt werden. Wir denken uns diese Wahl vollzogen, so dass in dem Integralsystem nur mehr

$$\binom{p+1}{2}+2$$

willkürliche Constanten enthalten sind.

Führen wir nun in den Gleichungen (3) die Integrationsconstanten als neue Variable ein, so entstehen

$$\binom{p+1}{2}$$

Gleichungen von der Form:

$$\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f} - (\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right] df = 0, \tag{12}$$

worin das Zeichen Σ auf alle Integrationsconstanten zu beziehen ist, und $\alpha+\beta$ alle ganzen Zahlen von 0 bis $p-1$ bedeuten kann. Aus denselben ist dx entfallen, es muss also auch x aus ihnen entfernt werden, das heisst, die in denselben auftretenden bisher noch unbestimmten Grössen (10) müssen so gewählt werden, dass die linken Seiten dieser Gleichungen (12), wenn sie der Operation D_1 unterworfen werden, die Null zum Resultate geben.

Betrachten wir zunächst eine Gleichung, für welche

$$\alpha+\beta < p-1$$

ausfällt und differentiiren dieselbe nach x, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dx}\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f} - (\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right] df = \sum\frac{\partial}{\partial f}\left[\frac{d(\alpha,\beta)}{dx} - (\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{dx}\right] df + \sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta+1)}{\partial f}\frac{dy}{dx} - \frac{d(\alpha,\beta+1)}{dx}\frac{\partial y}{\partial f}\right] df,$$

also mit Rücksicht auf das System (9)

$$\frac{d}{dx}\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f} - (\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right] df = \sum\left[\frac{\partial(\alpha+1,\beta)}{\partial f} - (\alpha+1\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right] df + \lambda_1 \sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta+1)}{\partial f} - (\alpha,\beta+2)\frac{\partial y}{\partial f}\right] df.$$

Es folgt hieraus, dass die Variable x aus allen Gleichungen (12) von selbst entfällt, wenn dies durch geeignete Wahl der Grössen (10) bereits bei jenen bewirkt worden ist, für welche

$$\alpha+\beta = p-1.$$

Ist dies nämlich geschehen, so ist es möglich, die Ausdrücke

$$\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f} - (\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right] df = 0, \quad \alpha+\beta = p-1$$

durch Beziehungen zwischen den Constanten auf den Werth Null zu bringen, die vorhin entwickelte Identität zeigt aber, dass dann aus den Gleichungen, für welche $\alpha+\beta = p-2$, das x zum Ausfall kommt, und durch Wiederholung dieses Schlusses beweist man, dass in Folge der gemachten Annahme in der That in allen Gleichungen (12) x zum Verschwinden gebracht werden kann. Somit genügt es, jene Gleichungen

$$0 = D_1 \sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f} - (\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right] df$$

zu erfüllen, in welchen $\alpha+\beta$ den Werth $p-1$ besitzt.

Die Ausführung der hier angezeigten Operation ergibt nun die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum\left[\frac{\partial(p,0)}{\partial f} + \lambda_1\frac{\partial(p-1,1)}{\partial f} - (p-1,1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right] df, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \sum\left[\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f} + \lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f} - (p-i-1,i+1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right] df, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \sum\left[\frac{\partial(1,p-1)}{\partial f} + \lambda_1\frac{\partial(0,p)}{\partial f} - (0,p)'\frac{\partial y}{\partial f}\right] df,
\end{aligned} \tag{13}$$

in welchen der Kürze halber für die Ableitung einer Function u nach x die Lagrange'sche Bezeichnung

$$\frac{du}{dx} = u'$$

benützt worden ist.

Da uns nur $p-1$ unbestimmte Grössen zur Verfügung stehen, können die eben aufgestellten p Gleichungen nur dann befriedigt werden, wenn eine derselben eine Folge der $p-1$ anderen ist. Dass dies der Fall ist, lässt sich in der That beweisen. Wir finden nämlich, dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\sum\left\{\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}-(p-i-1,i+1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right\}df=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum df.\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum df\sum_{i=0}^{i=p-1}\lambda_1[p-i-1,i]\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\cdot\sum\frac{\partial y}{\partial f}df\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i](p-i-1,i+1)'.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist in Folge der Gleichungen (9)

$$=\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial f}df,$$

während die beiden ersten sich zur Summe:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum df\sum_{i=0}^{i=p-1}\{[p-i-1,i]+\lambda_1[p-i,i-1]\}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}$$

vereinigen lassen. Setzt man nämlich fest, dass ein Ausdruck von der Form

$$[\alpha,\beta]$$

den Werth Null annimmt, sobald einer der Indices eine negative Zahl vorstellt, so kann die Summation bezüglich des Index i wieder auf die Werthe

$$i=0,1,2,\ldots,p-1$$

ausgedehnt werden. Bei derselben Festsetzung ist aber allgemein:

$$[p-i-1,i]+\lambda_1[p-i,i-1]=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}},$$

es wird also:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\sum\left\{\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}-(p-i-1,i+1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right\}df=$$

$$=\sum df\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\frac{\partial(p,0)}{\partial f}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}\frac{\partial(0,p)}{\partial f}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial f}\right\}.$$

Es hat sich nun andererseits ergeben, dass durch Einsetzung der aus den Integralgleichungen von (9) fliessenden Werthe der Variabeln in die Gleichung (1) die Veränderliche x zum Ausfall kommt, und da wir das Integralsystem in einer Form voraussetzen, vermöge welcher die (1) identisch befriedigt ist, haben wir die Identität:

$$0=\sum df\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial f}+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}\right\},$$

in welcher die innere Summe auf alle vorhandenen (α,β) zu beziehen ist. Subtrahirt man diese Gleichung von der unmittelbar vorhergehenden, so folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\sum df\left\{\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}-(p-i-1,i+1)'\frac{\partial y}{\partial f}\right\}=$$

$$=-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}\left\{\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df\right\}.$$

In dem letzten Ausdrucke ist das äussere Summenzeichen nur über jene Glieder zu erstrecken, für welche $\alpha+\beta\leqq p-1$, da jene, für welche die Indexsumme p wird, sich bei der Subtraction gegenseitig tilgen. In die rechte Seite der letzten Gleichung treten also nur die linken Theile der Gleichungen (12) ein, was beweist, dass zwischen den Gleichungen, welche noch befriedigt werden müssen, eine lineare Beziehung besteht, und daher eine derselben eine Folge aller anderen ist. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

Denken wir uns nun die unbestimmt verbliebenen Grössen (10) so gewählt, dass die (13) befriedigt sind, so fällt x aus allen (12) heraus. Führt man also die Hauptintegrale ein, indem man die Werthe der Dependenten des Systems (9), welche einem concreten, nicht singulären Werthe x^0 des x entsprechen, also die Grössen

$$y^0,(\alpha,\beta)^0$$

als Integrationsconstanten wählt, so reduciren sich die Gleichungen (12) auf Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)^0}{\partial y^0}=(\alpha,\beta+1)^0,$$

worin die Summe $\alpha+\beta$ alle Werthe von 0 bis $p-1$ erhalten kann. Da hieraus folgt:

$$(\alpha,\beta)^0=\frac{\partial^\beta(\alpha,0)^0}{(\partial y^0)^\beta},\ \alpha+\beta\leqq p-1,$$

so erkennen wir, dass die Werthe der Constanten, welche den (12) Genüge leisten, Ableitungen der p Grössen

$$(0,0)^0,(1,0)^0,(2,0)^0,\ldots(\alpha,0)^0,\ldots(p-1,0)^0$$

sind, welche schliesslich willkürlich bleiben. Setzen wir also

$$(\alpha,0)^0=\Phi_\alpha(y^0),$$

wo α von Null bis $p-1$ variiren kann und die Φ_α willkürliche Functionen sind, so ist:

$$\begin{array}{r}
(0,0)^0=\Phi_0(y^0),(0,1)^0=\Phi'_0(y^0),(0,2)^0=\Phi''_0(y^0),\ldots\ldots,(0,p)^0=\Phi_0^{(p)}(y^0);\\
(1,0)^0=\Phi_1(y^0),(1,1)^0=\Phi'_1(y^0),\ldots\ldots,(1,p-1)^0=\Phi_1^{(p-1)}(y^0);\\
(2,0)^0=\Phi_2(y^0),\ldots\ldots,(2,p-2)^0=\Phi_2^{(p-2)}(y^0);\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(p-1,0)^0=\Phi_{p-1}(y^0),(p-1,1)^0=\Phi'_{p-1}(y^0);
\end{array}$$

und hierin ist allgemein:

$$\Phi_\alpha^{(i)}(y^0)=\frac{d^i\Phi_\alpha(y^0)}{(dy^0)^i}$$

zu verstehen.

Aus diesen Formeln ergeben sich zwei wichtige Folgerungen, nämlich:

erstens, dass alle Integrationsconstanten als Functionen Einer von ihnen anzusehen sind und

zweitens, dass das allgemeine Integrale einer partiellen Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit zwei Independenten nie mehr als p willkürliche Functionen enthalten kann.

Beide Folgerungen sind offenbar nicht an den Gebrauch der Hauptintegrale gebunden. Benützt man irgend ein anderes vollständiges Integralsystem, so müssen die zwischen den Constanten einzuführenden Relationen direct aus den Gleichungen (12) genommen werden.

Denken wir uns nun die Werthe der Grössen (10) und der Constanten gefunden und in das vollständige Integralsystem von (9) eingeführt, so verwandelt sich dasselbe in das definitive Integralsystem, welches die gesuchte Lösung bereits in sich enthält. Da es nämlich aus

$$\binom{p+2}{2}+1$$

Gleichungen zwischen den

$$\binom{p+2}{2}+2$$

Variabeln der Aufgabe und der unabhängigen Integrationsconstante besteht, so können die letztere und die

$$\binom{p+2}{2}-1 \text{ Grössen } (\alpha,\beta),$$

für welche $\alpha+\beta>0$ eliminirt werden. Es bleibt dann eine Gleichung, welche nur mehr

$$z, x \text{ und } y$$

enthält und offenbar die gesuchte Lösung ist.

II.

Bezeichnen wir die unabhängige Constante, auf welche den Ergebnissen des vorigen Artikels zufolge alle anderen bezogen werden, durch f, so wird eine Änderung des f auch die Werthe aller anderen Integrationsconstanten, also mittelbar auch die Werthe der Variabeln verändern, sonach ein unendlich kleiner Zuwachs δf von f die Variationen

$$\delta y, \delta(0,0), \delta(1,0), \ldots, \delta(\alpha,\beta), \ldots \delta(0,p)$$

erzeugen. Es erhalten sonach die Gleichungen (12) die Gestalt:

$$P(\alpha,\beta)=\delta(\alpha,\beta)-(\alpha,\beta+1)\delta y=0, \quad \alpha+\beta\leqq p-1,$$

während die (13) in die folgenden:

$$\begin{aligned}
Z_{p-1,\,0} &= \delta(p,0)+\lambda_1\,\delta(p-1,1)-(p-1,1)'\delta y=0\\
Z_{p-2,\,1} &= \delta(p-1,1)+\lambda_1\,\delta(p-2,2)-(p-2,2)'\delta y=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_{p-i-1,i} &= \delta(p-i,i)+\lambda_1\,\delta(p-i-1,i+1)-(p-i-1,i+1)'\delta y=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_{0,\,p-1} &= \delta(1,p-1)+\lambda_1\,\delta(0,p)-(0,q)'\delta y=0
\end{aligned} \tag{14}$$

übergehen. Eine beliebige Function der Variabeln des Problems wird unter den gleichen Verhältnissen die Variation:

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\delta(\alpha,\beta) \qquad \alpha+\beta \gtreqless p$$

erleiden.

Wir denken uns nun ein zweites Differentialsystem aufgestellt, welches sich von dem bisher behandelten dadurch unterscheidet, dass an die Stelle von λ_1 irgend eine andere Wurzel λ_i der Gleichung (7) getreten ist. Hiebei ändern sich auch die Werthe

$$[\alpha,\beta], \quad \alpha+\beta=p-1,$$

und zwar in einer Weise, welche wir sogleich besprechen werden. Die Klammerausdrücke dieser Art, welche wir bisher benützt haben, sind nichts Anderes als die mit entsprechenden Potenzen von -1 multiplicirten

Coëfficienten jenes Polynoms, welches aus dem Polynom der Gleichung (7) durch Division mit $\lambda-\lambda_1$ entsteht. Die Klammernausdrücke des neuen Systems, welche wir durch

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta}{\lambda_i}, \quad \alpha+\beta=p-1$$

bezeichnen, werden also in ähnlicher Weise durch Division desselben Polynoms mit $\lambda-\lambda_i$ gewonnen werden. Bezeichnen wir nun das Polynom, welches aus (7) durch Division mit

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_i)$$

entsteht, wie folgt:

$$P_2=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\Big\{\lambda^{p-2}-\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-3,1}{\lambda_1\,\lambda_i}\lambda^{p-3}+\Big[\ldots+(-1)^i\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-i,i-2}{\lambda_1\,\lambda_i}\lambda^{p-i}+\ldots+(-1)^{p-2}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-2}{\lambda_1\,\lambda^i}\Big]$$

so erscheinen umgekehrt die Ausdrücke $[\alpha,\beta]$, welche von jetzt ab als

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta}{\lambda_1}$$

bezeichnet werden müssen, durch Multiplication von P_2 mit $\lambda-\lambda_i$. Somit ist allgemein

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho,\rho-1}{\lambda_1}=\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho-1,\rho-1}{\lambda_1\,\lambda_i}+\lambda_i\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho,\rho-2}{\lambda_1\,\lambda_i} \tag{15}$$

und diese Formel kann auch für die Grenzfälle $\rho=1$ und $\rho=p$ beibehalten werden, wenn festgesetzt wird, dass die Ausdrücke

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta}{\lambda_1,\lambda_i}$$

den Werth Null erhalten, sobald einer der Stellenzeiger α, β eine negative Zahl ist.

Andererseits treten die Ausdrücke $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta}{\lambda_i}$ als Coëfficienten des Polynoms auf, welches durch Multiplication von P_2 mit $\lambda-\lambda_1$ entsteht. Daher ist:

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho,\rho-1}{\lambda_i}=\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho-1,\rho-1}{\lambda_1\,\lambda_i}+\lambda_1\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-\rho,\rho-2}{\lambda_1\,\lambda_i} \tag{16}$$

und da wir die Grössen $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta}{\lambda_1,\lambda_i}$, sobald die Wurzeln λ_1 und λ_i gefunden sind, leicht berechnen können, sind alle Stücke in diesen Formeln als gegeben anzusehen.

Ändern wir nun in (11) rechterseits λ_1 in λ_i und dem entsprechend die Ausdrücke $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta}{\lambda_1}$ in $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta}{\lambda_i}$, so entsteht ein Ausdruck, welchen wir durch D_iF bezeichnen. Es ist sonach

$$D_iF=$$

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\cdot\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\}+\lambda_i\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}\cdot\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}-\Sigma(\alpha,\beta)'\left\{\frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha-1,\beta}{\lambda_i}}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-1,0}{\lambda_i}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta-1}{\lambda_i}}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-1}{\lambda_i}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\}$$

worin die Summe über dieselben (α,β) wie in (11) auszudehnen ist. D_iF wird identisch Null, wenn F ein Integrale des soeben construirten Differentialsystems ist.

Wir bilden nun die Differenz D_1F-D_iF, und finden:

$$D_1F-D_iF=$$

$$(\lambda_1-\lambda_i)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}-\Sigma(\alpha,\beta)'\left\{\left[\frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha-1,\beta}{\lambda_1}}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-1,0}{\lambda_1}}-\frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha-1,\beta}{\lambda_i}}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{p-1,0}{\lambda_i}}\right]\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\left[\frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta-1}{\lambda_1}}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-1}{\lambda_1}}-\frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha,\beta-1}{\lambda_i}}{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0,p-1}{\lambda_i}}\right]\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}$$

wozu zu bemerken ist, dass die Grössen $\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$ welche der Symmetrie wegen beibehalten wurden, beide den Werth 1 besitzen. Den Formeln (15) und (16) zufolge ist:

$$\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}$$

also

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix};$$

darnach wird:

$$\frac{\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta \\ \lambda_i \end{bmatrix} = (\lambda_i-\lambda_1) \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}$$

sowie

$$\frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} = \frac{\lambda_i \begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1\lambda_i \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}} = (\lambda_1-\lambda_i) \frac{\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1\lambda_i \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}.$$

Es ist also:

$$\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i} = \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}} \frac{\partial F}{\partial(0,p)} \right\} + \Sigma \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix} (\alpha,\beta)' \left\{ \frac{\partial F}{\partial(p,0)} - \frac{1}{\lambda_1\lambda_i \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(0,p)} \right\}.$$

In dieser Gleichung, welche identisch, d. h. für jede beliebige Function F giltig ist, führen wir an Stelle der Variabeln deren Integralwerthe aus dem ersten System ein, es ist dann

$$-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}} = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}} = \sum \frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} (\alpha,\beta)'}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}}$$

und die Summation wie überall, wo nicht ausdrücklich etwas Anderes bedungen ist, über alle (α,β), für welche $\alpha+\beta=p$ ist, zu erstrecken. Dadurch geht die letzte Gleichung über in die folgende:

$$\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix} (\alpha,\beta)' + \frac{\partial F}{\partial(0,p)} \sum \frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}} (\alpha,\beta)'. \tag{17}$$

Wir bilden nun den Ausdruck:

$$\delta F - \frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i} \delta y =$$

$$S \frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)} P(\alpha,\beta) + \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)} \delta(\alpha,\beta) - \frac{\partial F}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix} (\alpha,\beta)' \delta y - \frac{\partial F}{\partial(0,p)} \sum \frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0,p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}} (\alpha,\beta)' \delta y,$$

worin S eine Summation bedeutet, welche auf alle Complexionen α, β, für welche $\alpha+\beta \leqq p-1$ auszudehnen ist. Wir betrachten zunächst die beiden negativen Glieder dieses Ausdruckes und bemerken, dass in den Summen derselben, wegen der daneben stehenden Klammerausdrücke

$$\begin{bmatrix} p-1,-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} p,-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}$$

die Grösse $(p,0)'$ nicht auftreten kann. Für alle anderen aber gelten die Beziehungen:

$$(p-\rho-1,\rho-1)'\delta y = -Z_{p-\rho-1,\rho}+\delta(p-\rho.\rho)+\lambda_1\delta(p-\rho-1,\rho+1),$$

wie aus den (13) gefunden wird. Schreiben wir also $(p-\rho-1,\rho+1)$ statt (α,β) und versehen demzufolge die Summenzeichen mit der Grenzbezeichnung $\rho=0$ bis $\rho=p-1$, so erhalten die fraglichen zwei Glieder die Gestalt:

$$-\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}\begin{bmatrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}\{-Z_{p-\rho-1,\rho}+\delta(p-\rho,\rho)+\lambda_1\delta(p-\rho-1,\rho+1)\}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}\frac{\begin{bmatrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}\{-Z_{p-\rho-1,\rho}+\delta(p-\rho,\rho)+\lambda_1\delta(p-\rho-1,\rho+1)\},$$

und haben zur Summe den Betrag:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}Z_{p-\rho-1,\rho}\times\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\begin{bmatrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\begin{bmatrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}\right\}$$

$$-\Sigma\,\delta(p-\rho,\rho)\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\begin{bmatrix}p-\rho-1,\rho\\ \lambda_i\end{bmatrix}+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\begin{bmatrix}p-\rho,\rho-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\right\}.$$

Also ist

$$\delta F-\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1-\lambda_i}\delta y = S\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}P(\alpha,\beta)+\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}Z_{p-\rho-1,\rho}\times\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\begin{bmatrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\begin{bmatrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}\right\}$$

$$-\sum_{\rho=0}^{\rho=p}\delta(p-\rho,\rho)\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\frac{\begin{bmatrix}p-\rho-1,\rho\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\begin{bmatrix}p-\rho,\rho-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\}$$

wobei in der letzten Summe als obere Grenze $\rho=p$ eingeführt werden konnte, da das der Supposition $\rho=p$ entsprechende Glied identisch verschwindet.

Wir finden hieraus endlich die Identität:

$$S\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}P(\alpha,\beta)+\sum_{\rho=0}^{\rho=p-1}Z_{p-\rho-1,\rho}\left\{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\begin{bmatrix}p-\rho-2,\rho\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}+\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\frac{\begin{bmatrix}p-\rho-1,\rho-1\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix}0,p-2\\ \lambda_1\lambda_i\end{bmatrix}}\right\}$$
$$\equiv\delta F-\frac{D_1F-D_iF}{\lambda_1\lambda_i}\delta y+\Sigma\,\delta(\alpha,\beta)\left\{\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\},\tag{18}$$

in deren rechten Seite die am Eingange der Transformation benützte Bezeichnung restituirt worden ist.

Setzt man in dieser Gleichung $F=\varphi$, so wird wegen $\varphi=0$ die rechte Seite selbst zu Null, und es folgt:

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha,\beta)}P(\alpha,\beta)+\sum_{\rho=0}^{\rho=p}\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\begin{bmatrix}p-\rho-1,\rho\\ \lambda_1\end{bmatrix}Z_{p-\rho-1,\rho}=0,\tag{19}$$

das ist eine Gleichung, die in anderer Form bereits weiter oben entwickelt worden ist. Die Anzahl der P ist nun gleich der Anzahl der Ableitungen von höchstens $p-1$ter Ordnung, das ist:

$$\binom{p+1}{2}$$

die Anzahl der Z ist p. Ich werde nun zeigen, dass aus (18) stets

$$\binom{p+1}{2}+p-1$$

in Bezug auf die Grössen P und Z lineare und homogene Gleichungen abgeleitet werden können, welche in Verbindung mit der Gleichung (19) wegen nicht verschwindender Determinante den Grössen P und Z die Werthe Null auferlegen.

12.

Wir bezeichnen jenes Differentialsystem, welches durch die Supposition

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_i$$

entspringt, kurz als das $i$te Differentialsystem und beweisen zunächst einige wichtige Eigenschaften des ihm zugehörenden Integralsystems.

Wir denken uns in allen Systemen die Integration ausgeführt, während die in (10) angeführten Grössen willkürlich bleiben. Ist nun F ein Integrale des $i$ten Systems, also:

$$D_i F=$$

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\}+\lambda_i\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}-\Sigma(\alpha,\beta)'\left\{\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}-\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}\right\}=0.$$

so müssen die Coëfficienten der Grössen:

$$(p-1,1)',\ (p-2,2)',\ldots(2,p-2)',\ (1,p-1)'$$

identisch verschwinden, da diese letzteren Grössen sonst nicht willkürlich bleiben. Es müssen also durch jedes Integral F des $i$ten Systems die Gleichungen, welche durch Specialisirung des

$$(\alpha,\beta)\text{ in }(p-1,1),\ (p-2,2)\ldots(2,p-2),\ (1,p-1)$$

aus der Formel

$$\frac{\begin{bmatrix}\alpha-1,\beta\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}p-1,0\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}+\frac{\begin{bmatrix}\alpha,\beta-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0,p-1\\ \lambda_i\end{bmatrix}}\frac{\partial F}{\partial(0,p)}-\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}=0 \tag{20}$$

entstehen, identisch erfüllt sein, somit auch die Gleichung:

$$0=\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\frac{\partial F}{\partial(p,0)}\right\}+\lambda_i\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}-\frac{\partial F}{\partial(0,p)}\right\}.$$

In der Gleichung (20), welche übrigens durch die Suppositionen $(\alpha,\beta)=(p,0)$ und $(\alpha,\beta)=(0,p)$ eine identische wird, dividiren wir durch $\frac{\partial F}{\partial(p,0)}$, und setzen

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial(0,p)}}{\frac{\partial F}{\partial(p,0)}}=\varepsilon\,.$$

Wir erhalten sodann

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial(p-1,1)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \begin{bmatrix} p-2,1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \varepsilon \frac{\begin{bmatrix} p-1,0 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}, \ldots$$

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial(p-i,i)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \begin{bmatrix} p-i-1,i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \varepsilon \frac{\begin{bmatrix} p-i,i-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}, \ldots, \frac{\dfrac{\partial F}{\partial(1,p-1)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \varepsilon \frac{\begin{bmatrix} 1,p-2 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}$$

und folgern hieraus, dass die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial(p,0)}\omega^p - \frac{\partial F}{\partial(p-1,i)}\omega^{p-1} + \ldots + (-1)^i \frac{\partial F}{\partial(p-i,i)}\omega^{p-i} + \ldots + (-1)^p \frac{\partial F}{\partial(0,p)} = 0 \qquad (21)$$

die Wurzeln:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots \lambda_p$$

mit der Gleichung (7) gemein hat; die Wurzel λ_i ist abgeworfen, und dafür die Wurzel

$$\frac{\varepsilon}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 0,p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial(0,p)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(p,0)}}$$

aufgenommen. Die letztere kann, wenn F von φ verschieden ist, nicht mit λ_i zusammenfallen, da aus dieser Annahme, wie leicht zu sehen, alle

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(p,0)}} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(\alpha,\beta)}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}}$$

folgen, und daher F entweder eine Function von φ oder diesem letzteren gleich sein müsste; Beides widerspricht der Voraussetzung. Daher kann es auch, so lange die Grössen (10) willkürlich sind, ausser φ keine Function geben, welche in zwei Systemen zugleich Integrale sein könnte, da in diesem Falle die Gleichung (21) alle Wurzeln mit (7) gemeinsam haben müsste.

Wir ziehen aus den (20) noch eine weitere Folgerung. Verschwinden nämlich $\frac{\partial F}{\partial(p,0)}$ und $\frac{\partial F}{\partial(0,p)}$, so erhält auch $\frac{\partial F}{\partial(\alpha,\beta)}$ den Werth Null, das heisst, wenn ein Integrale weder $(p,0)$ noch $(0,p)$ enthält, so kann es auch keine andere Ableitung p ter Ordnung enthalten. Berechnen wir demnach aus zwei Integralen des i ten Systems die Grössen $(p,0)$ und $(0,p)$, und setzen deren Werthe in ein drittes ein, so müssen alle anderen Ableitungen p ter Ordnung von selbst ausfallen. Es gibt also nur zwei Integrale, welche bezüglich der Grösse p ter Ordnung von einander unabhängig sind. Hieraus ergibt sich der Schluss, dass, so lange die Grössen (10) unbestimmt bleiben, das vollständige Integralsystem des i ten, also auch eines jeden anderen der p möglichen Differentialsysteme in zwei Gruppen zerlegt werden kann. Die erste Gruppe besteht aus zwei von einander unabhängigen Integralen, deren jedes Ableitungen p ter Ordnung enthält, und die wegen dieser Eigenschaft, die sogleich eine Wichtigkeit erlangen wird, wesentliche Integrale genannt werden sollen. Die zweite Gruppe umfasst alle übrigen Integrale, welche nun die Ableitungen p ter Ordnung nur insoferne enthalten, als sie als Functionen der wesentlichen Integrale dargestellt werden können. [1]

---

[1] Es lässt sich immer ein Paar wesentlicher Integrale aufstellen von der Beschaffenheit, dass das eine Integrale kein $(0,p)$ das andere kein $(p,0)$ enthält. Wird im System $\frac{dy}{dx} = \lambda_1$ das erste mit W_1, das letzte mit W_2 bezeichnet, so muss

Es ist klar, dass unendlich viele Paare wesentlicher Integrale aufgestellt werden können, eines derselben muss jedoch die gegebene Gleichung selbst enthalten, da diese augenscheinlich ebenfalls ein wesentliches Integrale ist. Jedes System hat also neben der gegebenen Gleichung nur mehr Ein wesentliches Integrale.

Kehren wir nun zur Gleichung (18) zurück und setzen in derselben irgend ein Integrale des $i$ten Systems an die Stelle von F, so verschwinden, wie man sofort sieht, die Coëfficienten der Variationen $\delta(\alpha,\beta)$, diese fallen also identisch aus. Zugleich wird $D_i F = 0$ und die rechte Seite in (18) reducirt sich auf

$$\delta F - \frac{D_1 F}{\lambda_1 - \lambda_2}\,\delta y.$$

So lange die Grössen (10) unbestimmt verbleiben, kann F nicht auch zugleich ein Integrale des ersten Systems sein, wir wählen also diese unbestimmten Grössen so, dass

$$D_1 F = 0$$

und haben dann noch

$$\delta F = 0$$

zu machen. F ist durch die für die Grössen (10) getroffene Wahl auf eine Function der Integrationsconstanten des ersten Systems reducirt, und damit nun auch $\delta F = 0$ werde, müssen die in Folge früherer Untersuchungen zwischen den Constanten bestehenden Relationen so gewählt werden, dass sich der zuletzt gefundene Werth von F von selbst auf Null reducirt. Jede Function von F, welche die rechte Seite in (18) zum Verschwinden bringt, verwandelt die (18) selbst in eine lineare, homogene Gleichung zwischen den Grössen $P(\alpha,\beta)$ und $Z_{p-\rho-1\rho}$. Da es sich um das Nullwerden dieser Ausdrücke handelt, müssen wir so viele F dieser Art aufsuchen, als Grössen P und Z vorhanden sind, also, da φ selbst die von den F verlangte Eigenschaft besitzt, noch

$$\binom{p+1}{2} + p - 1.$$

Eine genaue Betrachtung der Gleichung (18) lehrt indess, dass unter diesen Functionen sich mindestens $p-1$ vorfinden müssen, welche $(p.0)$ oder $(0,p)$ enthalten, da im Gegentheile die Coëfficienten der Z gleich

---

die Gleichung $D_1 W_1 = 0$ mit der vorletzten Gleichung in (9), die Gleichung $D_1 W_2 = 0$ mit der letzten desselben Systems zusammenfallen. Also ist:

$$\frac{\partial W_1}{\partial(p-i,i)} = \begin{bmatrix} p-i-1, i \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial(p,0)}, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial(p-i,i)} = \frac{\begin{bmatrix} p-i, i-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0, p-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial(0,p)} \quad \text{u.s.f.}$$

Man kann ferner leicht zeigen, dass man immer zwei wesentliche Integrale aufstellen kann, welche zusammen die gegebene Gleichung ersetzen. Es ist nämlich φ immer darstellbar als Function der Integrationsconstanten. Ist also

$$F = f.$$

ein wesentliches Integrale, so muss zwischen der Constanten f dieses Integrals und den übrigen Integrationsconstanten eine Relation bestehen, welche aus der gegebenen Gleichung $\varphi = 0$ ihren Ursprung nimmt. Sei daher etwa

$$f = \vartheta(f_1, f_2, \ldots)$$

und ersetzt man hierin die Constanten $f_1, f_2, \ldots$ durch ihre Werthe in den Variabeln des Systems, so entsteht rechter Hand ein Ausdruck, welcher augenscheinlich wieder ein wesentliches Integrale ist. Bezeichnen wir diesen Ausdruck durch G, so sind F und G zwei von φ unabhängige Integrale, welche jedoch zusammen die gegebene Gleichung ersetzen, denn dieselbe reducirt sich augenscheinlich auf die Relation:

$$F - G = 0.$$

Ersetzt man nun in F ein etwa vorhandenes $(0,p)$ durch seinen aus der gegebenen Gleichung $\varphi = 0$ fliessenden Werth, und in G das etwa vorhandene $(p,0)$ ebenso durch dessen aus $\varphi = 0$ sich ergebenden Werth, so hat man also zwei wesentliche Integrale f und g, von denen das erste kein $(0,p)$, das zweite kein $(p,0)$ enthält und welche zusammen die gegebene Gleichung ersetzen, denn diese lautet

$$f - g = 0.$$

Null ausfallen würden, und daher aus dem Verschwinden der rechten Seite auf das Verschwinden der Z keineswegs geschlossen werden könnte. Wir haben nun φ unter die Functionen F aufgenommen, es gibt also in jedem System nur mehr Eine Function von der verlangten Art, welche von φ unabhängig ist; es ist dies je Eines der zwei wesentlichen Integrale. Die Anzahl dieser von φ und nach dem oben Vorgetragenen auch unter sich unabhängigen Integrale ist $p-1$ also die geforderte. Wir verändern somit in (18) i der Reihe nach in 2, $3, \ldots p$, und setzen in die erste der so erhaltenen Gleichungen für F ein wesentliches Integrale des 2ten, in die zweite Gleichung ein wesentliches Integrale des 3ten, endlich in die letzte Gleichung ein wesentliches Integrale des $p$ten Systems. Werden nun die unbestimmten Grössen (10) so bestimmt, dass sich diese $p-1$ wesentliche Integrale auf Integrale des ersten Systems und vermöge der zwischen den Integrationsconstanten dieses Systems herrschenden Relationen auf Null reduciren, so verschwinden die rechten Seiten der eben aufgezählten Gleichungen identisch, und wir haben, die (19) mitgerechnet, p Gleichungen für die unbekannten P und Z.

Da die übrigen Gleichungen (18) wohl die Z enthalten können, aber nicht nothwendig enthalten müssen, können wir zur Aufstellung der noch fehlenden $\binom{p+1}{2}$ Gleichungen Integrale der zweiten Gruppe nehmen, und zwar genügen, da jedes System $\binom{p+1}{2}+1$ solcher Integrale besitzt, die Integrale irgend eines Systems für sich. Diese Integrale enthalten nun die Grössen $(p, 0)$ und $(0, p)$ nur insoferne, als sie als Functionen wesentlicher Integrale dargestellt werden können. Die Gleichungen (18), welche durch Einsetzung solcher Integrale entstehen, gestatten also, die Z gleichzeitig zu entfernen, und die resultirenden Gleichungen sind nicht mehr Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Grössen (10), sondern nur identische Transformationen der Pfaff'schen Probleme (12).

Die gesuchten Werthe der Grössen (10) sind also diejenigen, welche ein vollständiges System von Integralen irgend eines vom ersten verschiedenen Systems in ein vollständiges Integralsystem des ersten Differentialsystems verwandeln oder mit anderen Worten, welche bewirken, dass alle p Integralsysteme in Eines zusammenfallen.

Wir bezeichnen also ein wesentliches Integrale des $i$ten Systems durch W_i, ein im Allgemeinen beliebiges Integrale der zweiten Gruppe desselben Systems durch w_i, sowie eine Reihe von $p-1$ willkürlichen Functionsformen durch $\psi_2, \psi_3, \ldots \psi_p$. Dann sind:

$$W_2-\psi_2(w_2), \quad W_3-\psi_3(w_3), \ldots, \quad W_p-\psi_p(w_p)$$

wesentliche Integrale des 2ten, 3ten, $\ldots p$ten Systems. Wir bestimmen die Grössen (10) so, dass sich diese Differenzen auf Functionen der Integrationsconstanten reduciren, und führen dann zwischen den Constanten des ersten Systems solche Relationen ein, dass die eben genannten Functionen den Werth Null annehmen, d. h., wir betrachten die Gleichungen:

$$W_2-\psi_2(w_2)=0, \quad W_3-\psi_3(w_3)=0, \ldots, \quad W_p-\psi_p(w_p)=0, \tag{22}$$

nachdem in denselben die Variabeln durch ihre aus dem ersten Integralsysteme fliessenden Werthe ersetzt worden sind, als Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Grössen:

$$(p-1, 1), \quad (p-2, 2), \ldots (2. p-2), \quad (1, p-1).$$

Die Anzahl der Gleichungen (22) ist gleich der Anzahl der zu bestimmenden Grössen, es genügt also, die letzteren aus den (22) zu berechnen. Die Einführung der berechneten Werthe in die Gleichungen (12) verwandelt diese in Pfaff'sche Gleichungen und die Integration derselben liefert die noch fehlenden Relationen zwischen den Constanten. Dieselben Relationen erhält man auch dadurch, dass man — unter den Grössen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ die der zweiten Gruppe des Systems i angehörigen Integrale verstanden — in den Gleichungen:

$$v_1-\varphi_1(w_i)=0, \quad v_2-\varphi_2(w_i)=0, \quad v_3-\varphi_3(w_i)=0, \ldots$$

für die Variabeln deren Werthe aus dem ersten System und für die Grössen (10) die aus den Gleichungen (22) gefundenen Werthe setzt.

Die vorangehenden Entwicklungen setzen mit Nothwendigkeit voraus, dass die Integration der p Differentialsysteme bei völliger Unbestimmtheit der unter (10) angeführten Grössen vollzogen werde. Diese letzteren gehen also in die Integralgleichungen nicht nur als Functionsargumente im gewöhnlichen Sinne ein, sondern auch als Integranden in nach x auszuführenden Quadraturen. Im Allgemeinen enthält also eine jede Gleichung von der Form:

$$W_i - \psi_i(w_i) = 0$$

Quadraturen aus dem $i$ten System, das heisst solche, in welchen w_i als Constante anzusehen ist. Indem man nun die Variabeln durch ihre Werthe aus dem ersten System ersetzt, werden anderseits Quadraturen aus dem ersten System eingeführt, in welchen also w_1 als Constante anzusehen ist. Die Bestimmungsgleichungen enthalten also im Allgemeinen Quadraturen von zweierlei Sinn, und die Differentiation mit dem Zeichen D_1 kann wohl die Quadraturen des ersten Systems, nicht aber auch die anderen noch enthaltenen Quadraturen entfernen. Bezeichnen wir, um eine Quadratur aus dem $i$ten System zu kennzeichnen, das Differentiale unter dem Integralzeichen durch $d_i x$, und sei demnach

$$J = \int S d_i x,$$

ein Integrale aus dem $i$ten System, so gilt für die Differentiation $D_1 J$ die Regel:

$$D_1 J = S + (\lambda_1 - \lambda_i)\frac{\partial J}{\partial y}$$

und es ist:

$$\frac{\partial J}{\partial y} = e^{-\int \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} d_i x} \int \frac{\partial S}{\partial y} e^{\int \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} d_i x}$$

sowie

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{D_1 S - D_i S}{\lambda_1 - \lambda_i}.$$

Die Differentiationsregeln sind also, wie vorauszusehen war, im Wesentlichen dieselben wie bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung und die gegenwärtige Rechnung unterscheidet sich von der dortigen überhaupt nur darin, dass S nicht Eine, sondern im Allgemeinen alle unbestimmten Grössen (10) zu gleicher Zeit enthält. Durch fortgesetzte Anwendung der Operation D_1 entstehen also unter dem Integralzeichen Ausdrücke von der Form:

$$R[x; (p-1, 1),\ D_1(p-1, 1),\ D^2_1(p-1, 1)\ldots;\ (p-2, 2),\ D_1(p-2, 2), \ldots;\ (1, p-1),\ D_1(1, p-1), \ldots].$$

Gelingt es nun, aus den gewonnenen Gleichungen eine Relation herzustellen, in welcher die unter den Integralzeichen befindlichen Theile sich als Functionen des von Integralzeichen freien Theiles darstellen lassen, so kann man durch wiederholte Anwendung der Operation D_i die Integralzeichen des $i$ten Systems entfernen und es entsteht eine Gleichung zwischen

$$x, R, D_i R, D_i^2 R, \ldots.$$

Die Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung, bei welcher die Integrationsconstanten als Functionen von w_i anzusehen sind, ergibt dann eine Relation zwischen x und den verschiedenen Ableitungen der unbestimmten Grössen (10) genommen nach dem Zeichen D_1. Dieser Vorgang wiederholt sich $p-1$ mal, da uns eben so viele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen. Wir erhalten also ein System simultaner Differentialgleichungen von der Form:

$$\Theta_1[x; (p-1, 1),\ D_1(p-1, 1), \ldots;\ (p-2, 2),\ D_1(p-2, 2), \ldots;\ (1, p-1),\ D_1(1, p-1), \ldots] = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Theta_{p-1}[x, (p-1, 1),\ D_1(p-1, 1), \ldots;\ (p-2, 2),\ D_1(p-2, 2), \ldots;\ (1, p-1),\ D_1(1, p-1), \ldots] = 0,$$

durch dessen Integration endlich die Werthe der unbekannten Grössen erhalten werden. Lassen sich Gleichungen dieser Art nicht bilden, so muss man zur Reihenentwicklung schreiten, ausgenommen man wäre zufällig im Besitze solcher Transcendenten, welche den vorliegenden Gleichungen Genüge thun.

13.

Wir bezeichnen im Folgenden die Coëfficienten des Quotienten, welcher aus der Division von

$$\lambda^p - \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\lambda^{p-1} + \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-2,2)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\lambda^{p-2} - \ldots + (-1)^i \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\lambda^{p-i} + \ldots + (-1)^p \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}$$

durch

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_k)$$

entsteht, durch

$$\begin{bmatrix} p-k,0 \\ \lambda_1,\ldots\lambda_k \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} p-k-1,1 \\ \lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_k \end{bmatrix}, \ldots, \pm\begin{bmatrix} \alpha,\beta \\ \lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_k \end{bmatrix}, \ldots,$$

das heisst, wir setzen:

$$(\lambda-\lambda_{k+1})(\lambda-\lambda_{k+2})\ldots(\lambda-\lambda_p) =$$

$$\lambda^{p-k} - \begin{bmatrix} p-k-1,1 \\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k \end{bmatrix}\lambda^{p-k-1} + \ldots + (-1)^i\begin{bmatrix} p-k-i,i \\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k \end{bmatrix}\lambda^{p-k-i} + \ldots + (-1)^{p-k}\begin{bmatrix} 0,p-k \\ \lambda_1\ldots\lambda_k \end{bmatrix},$$

wobei wir der Symmetrie wegen

$$\begin{bmatrix} p-k,0 \\ \lambda_1\ldots\lambda_k \end{bmatrix} = 1$$

machen und festsetzen, dass ein Klammernausdruck der Art

$$\begin{bmatrix} p-k-i,i \\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k \end{bmatrix}$$

den Werth Null annimmt, sobald einer bei den Indices in der oberen Reihe einer negativen Zahl gleich wird. Diese Bezeichnungsweise ist nur eine Erweiterung der bisher gebrauchten und es ist augenscheinlich

$$\begin{bmatrix} \alpha,\beta \\ \lambda_1,\ldots\lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-1.\beta \\ \lambda_1\ldots\lambda_k\lambda_{k+1} \end{bmatrix} + \lambda_{k+1}\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1\ldots\lambda_k\lambda_{k+1} \end{bmatrix}$$

und daher

$$\begin{bmatrix} \alpha,\beta \\ \lambda_1,\ldots\lambda_{k-1}\lambda_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha,\beta \\ \lambda_1\ldots\lambda_{k-1}\lambda_{k+1} \end{bmatrix} = (\lambda_{k+1}-\lambda_k)\begin{bmatrix} \alpha,\beta-1 \\ \lambda_1\ldots\lambda_{k-1}\lambda_k\lambda_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Behalten wir im Übrigen die Bezeichnungen des vorigen Artikels bei und setzen

$$F_i = W_i - \psi_i(w_i),$$

so verschwinden, wenn man in (18)

$$F = F_i = 0$$

substituirt, rechter Hand die Variationen $\delta(\alpha,\beta)$ und δF und es bleibt noch

$$\frac{D_1 F - D_i F}{\lambda_1 - \lambda_i}\delta y = \left\{\left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)}\sum\begin{bmatrix} \alpha-1,\beta-1 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}(\alpha,\beta)' + \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)}\sum\frac{\begin{bmatrix} \alpha,\beta-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1\begin{bmatrix} 0.p-2 \\ \lambda_1\lambda_i \end{bmatrix}}(\alpha,\beta)'\right\}\delta y.$$

g*

Man kann also die rechte Seite in (18) auch dadurch annulliren, dass man

$$\eta_i(F_i) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha,\beta') + \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)} \sum \frac{\begin{bmatrix} \alpha, \beta-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} (\alpha,\beta)' = 0$$

macht.

Wir zeigen zunächst, dass, wenn $\eta_i(F_i) = 0$, auch

$$\xi_i(F_i) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-2, \beta \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha,\beta)' + \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)} \sum \frac{\begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} (\alpha,\beta)' = 0$$

sein muss. In der That, es ist

$$\xi_i(F_i)+\lambda_i \eta_i(F_i) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right) + \lambda_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial(p,0)} \sum (\alpha,\beta)' \left\{ \begin{bmatrix} \alpha-2, \beta \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(0,p)} \sum (\alpha,\beta)' \left\{ \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha, \beta-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} \right\},$$

also in Folge der Relation (15) und mit Rücksicht auf die Relationen

$$\sum \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta \\ \lambda_1 \end{bmatrix} (\alpha,\beta)' = - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}} \quad \text{und} \quad \sum \begin{bmatrix} \alpha, \beta-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} (\alpha,\beta)' = - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}}$$

auch:

$$\xi_i(F_i)+\lambda_i \eta_i(F_i) = \left\{ \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}} \frac{\partial F_i}{\partial(p,0)} \right\} + \lambda_i \left\{ \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(0,p)}} \frac{\partial F_i}{\partial(0,p)} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet aber identisch, wie eingangs des vorigen Artikels bemerkt worden ist, also ist auch

$$\xi_i(F_i)+\lambda_i \eta_i(F_i) = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

In der Transformation, welche zur Gleichung (18) geführt hat, sind die Grössen $(\alpha,\beta)'$ als dem ersten Differentialsystem angehörige Differentialquotienten anzusehen, dasselbe muss also auch in den Ausdrücken $\xi_i(F_i)$ und $\eta_i(F_i)$ geschehen, die Gleichungen

$$\eta_i(F_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, p$$

können also zur Completirung des ersten Systems verwendet werden. In der That besteht dasselbe nach Hinzufügung dieser Gleichungen aus

$$\binom{p+1}{2} + 3 + (p-1) = \binom{p+2}{2} + 1$$

Gleichungen mit eben so viel Dependenten, ist also völlig bestimmt. Die Integrale desselben haben nun die Eigenschaft, die Gleichungen (12) unmittelbar in Pfaff'sche Gleichungen zu verwandeln, so dass nach Befriedigung dieser das definitive System gewonnen ist. Die Gleichungen

$$\xi_i(F_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, p$$

sind eine nothwendige Folge der obigen, mit welchen sie durch die identischen Relationen:

$$D_2 F_2 = 0, \quad D_3 F_3 = 0, \ldots, D_p F_p = 0$$

verbunden sind. Sie geben daher eine Completirung, welche wohl der Form, nicht aber dem Wesen nach von der obigen verschieden ist.

Da in den Ergänzungsgleichungen die Differentialquotienten $(\alpha, \beta)'$ linear enthalten sind, so hat es keine Schwierigkeit, dieselbe zu berechnen. Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man die in der Anmerkung des vorigen Artikels charakterisirten wesentlichen Integrale zu Grunde legt. Ist nämlich f_i ein wesentliches Integrale des $i$ten Systems, welches kein $(0,p)$ enthält, g_i das Ergänzungsintegrale, welches kein $(p,0)$ enthält, so ist nach dem obigen:

$$\varphi = f_i - g_i = 0, \tag{α}$$

also:

$$\begin{aligned}
&\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial(p-\rho,\rho)}}{\dfrac{\partial f_i}{\partial(p,0)}} = \begin{bmatrix} p-\rho-1, \rho \\ \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \frac{\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x}\right) + \lambda_i \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial f_i}{\partial(p,0)}} = \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(p,0)}} \\
&\frac{\dfrac{\partial g_i}{\partial(p-\rho,\rho)}}{\dfrac{\partial g_i}{\partial(0,p)}} = \frac{\begin{bmatrix} p-\rho, \rho-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0, p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}}, \quad \frac{\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x}\right) + \lambda_i \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial g_i}{\partial(0,p)}} = \frac{\lambda_i \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(0,p)}},
\end{aligned} \tag{β}$$

wie unmittelbar aus den Gleichungen (20) und (21) gefunden wird. Anderseits ist zufolge der Relation (α):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial g_i}{\partial y}\right); \frac{\partial \varphi}{\partial(p,0)} = \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)}, \frac{\partial \varphi}{\partial(0,p)} = -\frac{\partial g_i}{\partial(0,p)}; \tag{γ}$$

und damit ergibt sich aus (β)

$$\lambda_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\right) \equiv 0. \tag{δ}$$

Die Gleichung (7) erhält nun die Gestalt:

$$0 = \left(\lambda \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)} + \frac{1}{\begin{bmatrix} 0, p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} \frac{\partial g_i}{\partial(0,p)}\right) \cdot \sum_{0}^{p-1} (-1)^{\rho} \lambda^{p-\rho-1} \begin{bmatrix} p-\rho-1, \rho \\ \lambda_i \end{bmatrix};$$

der zweite Factor dieses Ausdruckes ist nichts Anderes als der Quotient, der durch Division des Polynoms (7) mit $\lambda - \lambda_i$ entsteht, er verschwindet also für alle Werthe $\lambda = \lambda_k$, welche von λ_i verschieden sind. Hieraus folgt, dass der erste Factor durch die Substitution $\lambda = \lambda_i$ identisch der Null gleich werden muss, d. h., dass

$$\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)} + \frac{1}{\begin{bmatrix} 0, p-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}} \frac{\partial g_i}{\partial(0,p)} = 0. \tag{ε}$$

Bilden wir nun die Ausdrücke ξ_i und η_i für beide wesentliche Integrale, und setzen dieselben, wie verlangt, gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\xi_i(f_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-2, \beta \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha, \beta)' = 0,$$

$$\xi_i(g_i) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial g_i}{\partial(0,p)} \frac{\sum \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha, \beta)'}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} = 0,$$

$$\eta_i(f_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial(p,0)} \sum \begin{bmatrix} \alpha-1, \beta-1 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha, \beta)' = 0,$$

$$\eta_i(g_i) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial g_i}{\partial(0,p)} \frac{\sum \begin{bmatrix} \alpha, \beta-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix} (\alpha, \beta)'}{\lambda_1 \begin{bmatrix} 0, p-2 \\ \lambda_1 \lambda_i \end{bmatrix}} = 0.$$

Wegen (δ) und (ε) ist

$$\xi_i(g_i)+\lambda_i\eta_i(f_i)=0,$$

also ist die dritte der voransstehenden Gleichungen von der zweiten nur der Form nach verschieden, und man kann die Werthe der in den obigen Relationen enthaltenen Summen ohneweiters berechnen. Das Resultat ist von der Form:

$$\sum_{\rho=o}^{\rho=p-2}\left[{p-2-\rho,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right](p-\rho,\rho)'=A_i,\quad \sum_{\rho=1}^{\rho=p-1}\left[{p-1-\rho,\rho-1 \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right]=B_i,\quad \sum_{\rho=2}^{\rho=p}\left[{p-\rho,\rho-2 \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right](p-\rho,\rho)'=C_i. \qquad (\zeta)$$

In den linken Seiten dieser Gleichungen sind von den Ausdrücken $(p-\rho,\rho)'$ nur je $p-1$ enthalten.

Ist nun

$$P_{1,i}(\lambda)=\frac{P_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}=\frac{P(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_i)}=\sum_{\rho=0}^{\rho=p-2}(-1)^\rho\lambda^{p-2-\rho}\left[{p-2-\rho,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right],$$

so ist augenscheinlich

$$P_{1,i}(\lambda_k)=0,$$

wenn k von i verschieden ist, sowie

$$P_{1,i}(\lambda_i)=P'_1(\lambda_i).$$

Setzen wir nun für $\rho=0$ bis $\rho=p-2$

$$(p-\rho,\rho)'=(-1)^\rho\sum_{\sigma=2}^{\sigma=p}\frac{\lambda_\sigma^{p-\rho-2}A_\sigma}{P_1'(\lambda_\sigma)},$$

so wird

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=p-2}\left[{p-2-\rho,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right](p-\rho,\rho)'=\sum_{\sigma=2}^{\sigma=p}\frac{A_\sigma}{P_1'(\lambda_\sigma)}\sum_{\rho=0}^{\rho=p-2}(-1)^\rho\left[{p-\rho-2,\rho \atop \lambda_1\,\lambda_i}\right]\lambda_\sigma^{p-2-\rho}=A_i\,;$$

damit ist die erste Gleichung in (ζ) befriedigt, aus der zweiten folgt dann der Werth von $(1,p-1)'$ und aus der dritten endlich $(0,p)'$.

Dasselbe Resultat erhält man durch eine Methode der successiven Berechnung, welche auf die eingangs dieses Artikels entwickelten Eigenschaften der Klammerausdrücke $[\alpha,\beta]$ begründet ist. Setzt man nämlich in (ζ) für den Index i der Reihe nach $2,3,\ldots p$, so entstehen die drei Reihen:

$$\sum\left[{\alpha-2,\beta \atop \lambda_1\,\lambda_2}\right](\alpha,\beta)'=A_2,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta \atop \lambda_1\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=A_3,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta \atop \lambda_1\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=A_p;$$

$$\sum\left[{\alpha-1,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_2}\right](\alpha,\beta)'=B_2,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=B_3,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=B_p;$$

$$\sum\left[{\alpha,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_2}\right](\alpha,\beta)'=C_2,\ \sum\left[{\alpha,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=C_2,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=C_p.$$

Bezeichnet man die Operation

$$-\frac{u_{i+1}-u_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\quad\text{durch }\Delta u_{i+1},$$

so ergibt die Bildung der Differenzreihen die Gleichungen:

$$\sum\left[{\alpha-2,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=\Delta A_3,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_3\,\lambda_4}\right](\alpha,\beta)'=\Delta A_4,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-2,\beta-1 \atop \lambda_1\,\lambda_{p-1}\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=\Delta A_p,$$

$$\sum\left[{\alpha-1,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=\Delta B_3,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_3\,\lambda_4}\right](\alpha,\beta)'=\Delta B_4,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-2 \atop \lambda_1\,\lambda_p\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=\Delta B_p,$$

$$\sum\left[{\alpha,\beta-3 \atop \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\right](\alpha,\beta)'=\Delta C_3,\ \sum\left[{\alpha,\beta-3 \atop \lambda_1\,\lambda_3\,\lambda_4}\right](\alpha,\beta)'=\Delta C_4,\ \ldots\ldots,\ \sum\left[{\alpha,\beta-3 \atop \lambda_1\,\lambda_{p+1}\,\lambda_p}\right](\alpha,\beta)'=\Delta C_p,$$

zu welchen sich leicht die Reihe für die Ausdrücke:

$$\sum\begin{bmatrix}\alpha-3,\beta\\ \lambda_1\lambda_k\lambda_{k+1}\end{bmatrix}$$

bilden lässt. Die Fortsetzung dieser Operation bewirkt, dass endlich die Differentialquotienten $(\alpha,\beta)'$ getrennt erscheinen, und zwar, wie eine leichte Überlegung zeigt, nachdem alle Wurzeln in die eckigen Klammern einbezogen worden sind. Dann erhält man nämlich Summen von der Form

$$\sum\begin{bmatrix}\alpha-p+i,\beta-i\\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p\end{bmatrix}(\alpha,\beta)',$$

da aber $\alpha+\beta=p$ und daher $\alpha-p+i=-(\beta-i)$, so ist diese Summe auch

$$\sum\begin{bmatrix}-(\beta-i),(\beta-i)\\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p\end{bmatrix}(\alpha,\beta)',$$

dieser Ausdruck besteht also nur aus einem einzigen Gliede, nämlich jenem, welches dem Werthe $\beta=i$ entspricht. Es ist aber in jedem System $[0,0]=1$, so dass in der That die Differentialquotienten $(\alpha,\beta)'$ separirt erscheinen.

Da bei diesen Rechnungen Integrale aller Systeme mit Ausnahme des ersten in Verwendung kommen, so enthalten die Schlussgleichungen im Allgemeinen Quadraturen der verschiedenen Systeme. Diese können durch die Anwendung der Operationen $D_2,\ldots D_p$ nicht entfernt werden, da die Ausdrücke $(\alpha,\beta)'$ dem ersten System angehören und daher durch Anwendung der Operationen $D_2,\ldots,D_p$ wieder partielle Differentialgleichungen entstehen. Die Entfernung der Integralzeichen muss also successive nach dem bereits hinreichend beschriebenen Verfahren vorgenommen und im äussersten Falle zur Reihenentwicklung geschritten werden.

Die vorhergehenden Entwicklungen geben Gelegenheit, den Fall gleicher Wurzeln zu betrachten, in welchem also die Anzahl der untereinander verschiedenen Differentialsysteme kleiner ist als die Ordnungszahl p des gegebenen Problems. Die Bestimmungsgleichungen für die Grössen (10) zeichnen sich dadurch aus, dass sie stetig in gewisse Grenzgleichungen übergehen, sobald einige oder mehrere der Wurzeln der Greichung (7) stetig in einen gemeinsamen Werth übergeführt werden. Diese Grenzgleichungen müssen dann dazu benützt werden, um die nöthige Anzahl von Gleichungen wieder herzustellen.

Um eine bestimmte Vorstellung zu haben, nehmen wir an, dass

die Wurzel	λ_1	σ_1 mal,
" "	λ_2	σ_2 " ,
. . . . .	. . .	. . .
" "	λ_m	σ_m " ,

vorhanden sei, wonach

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m=p$$

sein muss. Es entstehen nun offenbar so viel Gleichungen als erforderlich, wenn man als Wurzeln der Gleichung (7) die Werthe

$$\lambda_1,\lambda_1+\varepsilon_{21},\lambda_1+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{31},\ldots,\lambda_1+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{31}+\ldots+\varepsilon_{\sigma_1 1};$$
$$\lambda_2,\lambda_2+\varepsilon_{22},\lambda_2+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{32},\ldots,\lambda_2+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{32}+\ldots+\varepsilon_{\sigma_2 2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

in den Gleichungen des vorliegenden Artikels einführt und hierauf zur Grenze für verschwindend ε übergeht. Die wesentlichen Integrale, von denen man ausgeht, sind früheren Entwicklungen zufolge stets in der Form

$$W-\psi(w)$$

vorausgesetzt. Da nun σ_1 anfängliche Systeme sich mit dem Verschwinden der ε auf das System

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1$$

zusammenziehen, so müssen sich die Integrale dieser Systeme in eine Form bringen lassen, in deren Folge sie beim Grenzübergange in ein und dasselbe System übergehen. Man wird also W_1 als die gemeinsame Grenze der $W_2, W_3, \dots, W_\sigma$ und ebenso w_1 als die gemeinsame Grenze der $w_2, w_3, \dots, w_\sigma$ ansehen können. Die Functionsformen $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_\sigma$ müssen jedoch keineswegs mit ψ_1 zusammenfallen. Da Ähnliches auch für jede andere der oben angeführten Wurzelgruppen gilt, so erhellt, dass je σ_1 von einander unabhängige Functionen des Argumentes w_1, je σ_2 des Argumentes w_2, u. s. f. in die allgemeine Lösung eintreten werden.

Das Resultat der vorzunehmenden Grenzübergänge kann natürlich erst dann ausgegeben werden, wenn die betreffenden Integrale der einzelnen Systeme gefunden sind.

14.

Zur Erläuterung des Vorgetragenen diene das Problem:

$$0=(p,0)+B_1(p-1,1)+B_2(p-2,2)+\dots+B_i(p-i,i)+\dots+B_p(0,p), \qquad (\alpha)$$

in welchem die Coëfficienten $B_1, B_2, \dots B_p$ constante Grössen sind. Die Gleichung (7), Art. 9 wird hier:

$$0=\lambda^p-B_1\lambda^{p-1}+B_2\lambda^{p-2}+\dots+(-1)^iB_i\lambda^{p-i}+\dots+(-1)^pB_p \qquad (\beta)$$

und wir wollen zunächst voraussetzen, dass die Wurzeln derselben sämmtlich von einander verschieden sind. Wir bezeichnen dieselben in beliebiger Reihenfolge durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p,$$

so dass

$$P(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha_2)\dots(\lambda-\alpha_i)\dots(\lambda-\alpha_p)$$

ist. Die Integration der verschiedenen Differentialsysteme geht ohne Schwierigkeit vor sich und ergibt insbesondere im $i$ten System die Gleichungen:

$$y=w_i+\alpha_i x,$$

$$(p,0)+\left[\begin{matrix}p-2,1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-1,1)+\left[\begin{matrix}p-3,2\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-2,2)+\dots+\left[\begin{matrix}0,p-1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](1,p-1)=W_i,$$

$$(p-1,1)+\left[\begin{matrix}p-2,1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-2,2)+\left[\begin{matrix}p-3,2\\ \alpha_i\end{matrix}\right](p-3,3)+\dots+\left[\begin{matrix}0,p-1\\ \alpha_i\end{matrix}\right](0,p)=V_i.$$

Es ist sonach

$$W_i-\alpha_i\psi_i(y-\alpha_i x)=f_i$$

ein wesentliches Integrale, welches kein $(0,p)$ enthält, und

$$\alpha_i V_i+\alpha_i\psi_i(y-\alpha_i x)=-g_i$$

das Ergänzungsintegrale, denn es ist

$$f_i-g_i=W_i+\alpha_i V_i=0$$

nichts Anderes als die gegebene Gleichung selbst. Eines der wesentlichen Integrale aus jedem System nehmend, erhält man ein System von Gleichungen, welches zur Berechnung der unbestimmten Grössen (10) verwendet werden kann. Der Theorie gemäss sind nämlich in den wesentlichen Integralen des 2ten, 3ten, ...$p$ten Systems die Grössen des Problems durch ihre Werthe aus dem ersten System zu ersetzen und die so erhaltenen Ausdrücke gleich Null setzen. Da aber in allen genannten Integralen nur für $(p,0)$ dessen Werth aus dem ersten Integralsystem gesetzt werden kann, so genügt es, den obigen Gleichungen die aus dem ersten System fliessende:

$$W_1-\alpha_1\psi_1(y-\alpha_1 x)=0$$

hinzuzufügen. Dadurch entsteht das System:

$$(p,0)+\left[{p-2,1 \atop \alpha_1}\right](p-1,1)+\left[{p-3,2 \atop \alpha_1}\right](p-2,2)+\ldots+\left[{0,p-1 \atop \alpha_1}\right](1,p-1)=\alpha_1\psi_1(y-\alpha_1 x)$$

$$(p,0)+\left[{p-2,1 \atop \alpha_2}\right](p-1,1)+\left[{p-3,2 \atop \alpha_2}\right](p-2,2)+\ldots+\left[{0,p-1 \atop \alpha_2}\right](1,p-1)=\alpha_2\psi_2(y-\alpha_2 x)$$

$$(p,0)+\left[{p-2,1 \atop \alpha_3}\right](p-1,1)+\left[{p-3,2 \atop \alpha_3}\right](p-2,2)+\ldots+\left[{0,p-1 \atop \alpha_3}\right](1,p-1)=\alpha_3\psi_3(y-\alpha_3 x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p,0)+\left[{p-2,1 \atop \alpha_p}\right](p-1,1)+\left[{p-3,2 \atop \alpha_p}\right](p-2,2)+\ldots+\left[{0,p-1 \atop \alpha_p}\right](1,p-1)=\alpha_p\psi_p(y-\alpha_p x)$$

aus welchem zunächst die Grössen

$$(p,0),(p-1,1),(p-2,2),\ldots,(1,p-1)$$

und vermöge der gegebenen Gleichung schliesslich auch $(0,p)$ berechnet werden können.

Zufolge der für die Grössen

$$\left[{p-k,k-1 \atop \alpha_i}\right]$$

gegebenen Definition ist nun

$$P_i(\lambda)=\lambda^{p-1}-\left[{p-2,1 \atop \alpha_i}\right]\lambda^{p-2}+\left[{p-3,2 \atop \alpha_i}\right]\lambda^{p-3}+\ldots\ldots+(-1)^{p-1}\left[{0,p-1 \atop \alpha_i}\right]=\frac{P(\lambda)}{\lambda-\alpha_i}$$

es wird also

$$P_i(\alpha_k)\equiv 0,$$

wenn k von i verschieden ist, während

$$P_i(\alpha_i)=P'(\alpha_i)$$

ausfällt. Es ist also:

$$(p,0)=\frac{\alpha^p{}_1}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{\alpha^p{}_2}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{\alpha^p{}_p}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p-i,i)=\frac{(-1)^i\alpha_1{}^{p-i}}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{(-1)^i\alpha_2{}^{p-i}}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{(-1)^i\alpha_2{}^{p-i}}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1,p-1)=\frac{(-1)^{p-1}\alpha_1}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{(-1)^{p-1}\alpha_2}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{(-1)^{p-1}\alpha_p}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x),$$

woraus sich leicht:

$$(0,p)=\frac{(-1)^p}{P'(\alpha_1)}\psi_1(y-\alpha_1 x)+\frac{(-1)^p}{P'(\alpha_2)}\psi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\frac{(-1)^p}{P'(\alpha_p)}\psi_p(y-\alpha_p x)$$

ergibt.

Da die Werthe $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_p$ constant sind, kann man die Herstellung und Integration der Pfaff'schen Probleme umgehen, denn es ist klar, dass die gesuchte allgemeine Lösung in der Gleichung:

$$(0,0)=z=\Phi_1(y-\alpha_1 x)+\Phi_2(y-\alpha_2 x)+\ldots+\Phi_p(y-\alpha_p x)$$

enthalten ist.

Durch die Methode der Ergänzung erhält man zunächst an Stelle der Gleichungen (ξ) die folgenden:

$$\sum\left[{\alpha-2,\beta \atop \alpha_1\ \alpha_i}\right](\alpha,\beta)'=-\alpha^2_i\psi'_i(y-\alpha_i x),\ \sum\left[{\alpha-1,\beta-1 \atop \alpha_1\ \alpha_i}\right](\alpha,\beta)'=\alpha_i\psi'_i(y-\alpha_i x),\ \sum\left[{\alpha,\beta-2 \atop \alpha_1\ \alpha_i}\right](\alpha,\beta)'=-\psi_i(y-\alpha_i x)$$

also für die dort mit A_i, B_i, C_i bezeichneten Grössen respective:

$$-\alpha^2{}_i\psi_i'(y-\alpha_i x),\quad \alpha_i\psi_i'(y-\alpha_i x),\quad -\psi_i'(y-\alpha_i x),$$

sonach wird:

$$(p-\rho,\rho)' = (-1)^{\rho+1} \sum_{\sigma=2}^{\sigma=p} \frac{\alpha_\sigma^{p-\rho}}{P_1'(\alpha_\sigma)} \psi'_\sigma(y-\alpha_\sigma x).$$

Ersetzt man hierin y durch seinen Werth

$$y = w_1 + \alpha_1 x$$

aus dem ersten System und integrirt hierauf, so tritt vor die Function ψ_σ noch der Factor

$$\frac{-1}{\alpha_\sigma - \alpha_1}$$

heraus und es ist eine willkürliche Function von w_1 hinzuzufügen. Sonach erhält man:

$$(p-\rho,\rho) = (-1)^\rho \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} \frac{\alpha_\sigma^{p-\rho}}{P_1'(\alpha_\sigma)} \psi_\sigma(y-\alpha_\sigma x),$$

also denselben Werth wie oben.

Im Falle gleicher Wurzeln kann die Lösung durch einen einfachen Grenzübergang aus den erhaltenen Gleichungen gewonnen werden. Besitzt nämlich die Gleichung (β) die Wurzel

$$\begin{array}{ll} \beta_1 & \sigma_1 \text{ mal} \\ \beta_2 & \sigma_2 \text{ mal} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_m & \sigma_m \text{ mal} \end{array}$$

so setze man

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_1 + \varepsilon_1, \quad \alpha_3 = \beta_1 + 2\varepsilon_1, \ldots, \ \alpha_{\sigma_1} = \beta_1 + (\sigma_1 - 1)\varepsilon,$$
$$\alpha_{\sigma_1+1} = \beta_2, \quad \alpha_{\sigma_1+2} = \beta_2 + \varepsilon_2, \quad \alpha_{\sigma_1+3} = \beta_2 + 2\varepsilon_2, \ldots, \ \alpha_{\sigma_1+\sigma_2} = \beta_2 + (\sigma_{2-1})\varepsilon_2 \quad \text{u. s. f.}$$

und berücksichtige, dass beim Grenzübergange die Functionen

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\sigma_1}$$

nicht in eine und dieselbe Functionsform übergehen müssen. Es folgt dann für $(0,p)$ beispielsweise ein Werth von der Form:

$$(0,p) = \psi_{11}(y-\beta_1 x) + x\psi_{12}(y-\beta_1 x) + \ldots + x^{\sigma_1-1}\psi_{1,\sigma_1}(y-\beta_1 x) +$$
$$+ \psi_{21}(y-\beta_2 x) + x\psi_{22}(y-\beta_2 x) + \ldots + x^{\sigma_2-1}\psi_{2,\sigma_2}(y-\beta_2 x) + \ldots$$

und daraus

$$(0,0) = \Psi_{11}(y-\beta_1 x) + x\Psi_{12}(y-\beta_1 x) + \ldots + x^{\sigma_1-1}\Psi_{1\sigma_1}(y-\beta_1 x) +$$
$$+ \Psi_{21}(y-\beta_2 x) + x\Psi_{22}(y-\beta_2 x) + \ldots + x^{\sigma_2-1}\Psi_{2\sigma_2}(y-\beta_2 x) + \ldots$$

worin die Functionen:

$$\Psi_{11}, \ldots, \Psi_{1\,\sigma_1}, \ \Psi_{21}, \ldots, \Psi_{2\,\sigma_2}, \ldots$$

völlig willkürlich sind.

Dieselbe Lösung erhält man, wenn man in der Gleichung:

$$(0,0) = \Psi_{11}(y-\beta_1 x) + \Psi_{21}(y-\beta_2 x) + \ldots + \Psi_{m1}(y-\beta_m x),$$

auf welche sich im gegenwärtigen Falle die früher gefundene Lösung zusammenzieht, β_i durch $\beta_i + \varepsilon_i$ ersetzt und in der Entwicklung

$$\Psi_{i_1}(y-\beta_i x-\varepsilon_i x) = \Psi_{i_1}(y-\beta_i x) - x\varepsilon_i \Psi'_{i_1}(y-\beta_i x) + \ldots + (-1)^{\sigma_i-1} x^{\sigma_i-1} \frac{\varepsilon_i^{\sigma_i-1}}{(\sigma_{i-1})!} \Psi_{i_1}^{(\sigma_i-1)}(y-\beta_i x),$$

welche mit dem $(\sigma_i - 1)$ Gliede abzuschliessen ist,

$$(-1)^k \frac{\varepsilon_i^k}{k!} \Psi_{i_1}^{(k)}(y-\beta_i x) \quad \text{durch} \quad \Psi_{i,k+1}(y-\beta_i x)$$

ersetzt, ein Vorgang, welcher übrigens nur desshalb möglich ist, weil die Wirkungen, welche eine Veränderung der λ hervorbringt, in den Integralen unmittelbar ersichtlich werden. Wo dies nicht der Fall ist, müssen die nothwendigen Gleichungen durch successive Vervollständigung eines beliebigen Differentialsystems gewonnen werden.

Die Gleichung:

$$x^3(3,0)+(\alpha+\beta+\gamma)x^2y(2,1)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)xy^2(1,2)+\alpha\beta\gamma y^2(0,3)+3x^2(2,0)+$$
$$\{(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\}xy(1,1)+3\alpha\beta\gamma y^2(0,2)+x(1,0)+\alpha\beta\gamma y(0,1)=0$$

verwandelt sich durch die Substitution

$$y=e^{\eta},\quad x=e^{\xi}$$

in die Gleichung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial\xi^3}+(\alpha+\beta+\gamma)\frac{\partial^3 z}{\partial\xi^2\partial\eta}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\frac{\partial^3 z}{\partial\xi\partial\eta^2}+\alpha\beta\gamma\frac{\partial^3 z}{\partial\eta^3}=0,$$

und hat demzufolge die Lösung:

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\alpha})+\Psi(yx^{-\beta})+\Psi(yx^{-\gamma}).$$

Ist $\beta=\alpha$, so setze man zunächst

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\beta})+\Psi(yx^{-\gamma})$$

und

$$\beta=\alpha+\varepsilon.$$

Da nun für verschwindendes ε

$$yx^{-\beta}=yx^{-\alpha-\varepsilon}=yx^{-\alpha}-\varepsilon\log x\,.\,yx^{-\alpha},$$

so gibt die Entwicklung von $\Phi(yx^{-\beta})$ bis einschliesslich der ersten Potenz von ε den Ausdruck

$$\Phi(yx^{-\beta})=\Phi(yx^{-\alpha}-\varepsilon\log x\,.\,yx^{-\alpha})=\Phi(yx^{-\alpha})-\varepsilon\log x\,.\,yx^{-\alpha}\Phi'(yx^{-\alpha});$$

ersetzen wir nun

$$-\varepsilon yx^{-\alpha}\Phi'(yx^{-\alpha})\quad\text{durch}\quad\Phi_1(yx^{-\alpha}),$$

so wird

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\alpha})+\log x\,\Phi_1(yx^{-\alpha})+\Psi(yx^{-\gamma})$$

und dies ist die Lösung der Gleichung:

$$0=x^3(3,0)+(2\alpha+\gamma)x^2y(2,1)+(\alpha^2+2\alpha\gamma)xy^2(1,2)+\alpha^2\gamma y^3(0,3)+3x^2(2,0)+\{2\alpha+\gamma+\alpha^2+2\alpha\gamma\}xy(1,1)+$$
$$+3\alpha^2\gamma y^2(0,2)+x(1,0)+\alpha^2\gamma y(0,1).$$

In gleicher Weise folgt für die Gleichung:

$$0=x^3(3,0)+3\alpha x^2y(2,1)+3\alpha^2xy^2(1,2)+\alpha^3y^3(0,3)+3x^2(2,0)+(3\alpha+3\alpha^2)xy(1,1)+3\alpha^3y^2(0,2)+x(1,0)+$$
$$+\alpha^3y(0,1)$$

die Lösung:

$$(0,0)=\Phi(yx^{-\alpha})+\log x\,\Phi_1(yx^{-\alpha})+(\log x)^2\Phi_2(yx^{-\alpha}).$$

15.

Wie ersichtlich, erfordern die Entwicklungen dieses Abschnittes, dass die Gleichung (7) des Artikels 9 eben so viele Wurzeln besitzt, als die Ordnungszahl Einheiten beträgt, und dass diese Wurzeln ebenso von Null als von Unendlich verschieden sind. Es treten jedoch Nullwerthe für die Wurzeln auf, sobald eine geschlossene Reihe von Endcoëfficienten:

$$\ldots\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial(2,p-2)},\frac{\partial\varphi}{\partial(1,p-1)},\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}$$

verschwinden, während, im Falle eine geschlossene Reihe anfänglicher Coëfficienten:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}, \frac{\partial\varphi}{\partial(1,p-1)}, \frac{\partial\varphi}{\partial(2,p-2)}, \ldots\ldots$$

den Werth Null besitzt, die in Folge dieses Umstandes fehlenden Wurzeln als unendlich gross angesehen werden müssen. In beiden Fällen können durch eine Transformation der Independenten an Stelle der Null- und Unendlichkeitswerthe der Wurzeln beliebige endliche Werthe eingeführt werden, so dass die eben erwähnten Probleme sich wieder den Voraussetzungen der vorhergehenden Artikel unterordnen.

Es beruht dies auf dem Umstande, dass λ bei Substituirung neuer Independenten stets linear transformirt wird. Sind nämlich

$$\xi = u(x,y), \quad \eta = v(x,y)$$

die Transformationsgleichungen, so folgt unmittelbar für den Werth von $\frac{d\eta}{d\xi}$, den wir mit Λ bezeichnen wollen:

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\eta}{\partial y}}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\xi}{\partial y}},$$

und hiemit ist die gedachte Eigenschaft bereits bewiesen. So folgt insbesondere für die lineare Transformation

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y$$

$$\Lambda = \frac{\gamma + \lambda\delta}{\alpha + \lambda\beta}.$$

Den Nullwerthen von λ entspricht dann der Werth

$$\Lambda_0 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

den Unendlichkeitswerthen hingegen

$$\Lambda_\infty = \frac{\delta}{\beta}$$

und es ist klar, dass man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stets so wählen kann, dass keine neuen Null- oder Unendlichkeitswerthe eingeführt werden, Es ist hiefür genügend, die Transformationsparameter als allgemeine mit den Constanten des Problems in keiner Beziehung stehende Constanten anzusehen. Damit sind auch diese speciellen Fälle auf den allgemeinen Fall zurückgeführt.

Vierter Abschnitt.

Das allgemeine Problem.

16.

Die Complication, welche durch Vermehrung der Independenten von 2 auf q in allen Zahlenverhältnissen des Problems hervorgebracht wird, macht es zur Nothwendigkeit, der Bezeichnung der zu betrachtenden Grössen eine erhöhte Aufmerksamkeit zuzuwenden. Bekanntlich besteht der erste Schritt zur Lösung unseres Problems darin, dass wir die zu suchende Dependente und deren Ableitungen, insoferne sie in der gegebenen Gleichung enthalten sind, durch gewisse Functionen der Independenten:

$$x_1, x_2, \ldots, x_q$$

ersetzen, welche zunächst nur die eine Eigenschaft besitzen, dass sie an Stelle der entsprechenden Ableitungen in die gegebene Gleichung eingesetzt, dieselbe identisch befriedigen. Da diese Functionen der fortwährende Gegenstand unserer Untersuchungen sein werden, sind sie es hauptsächlich, welche eine übersichtliche

Bezeichnungsweise erfordern. Diejenige Bezeichnungsweise, welche sich, wie es scheint, den Bedürfnissen der Rechnung am besten anschliesst, ist die bereits im vorigen Abschnitte gebrauchte, welche natürlich eine entsprechende Erweiterung erfahren muss. Wir bezeichnen also jene Function, welche an die Stelle von

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_q} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_q^{\alpha_q}}$$

zu substituiren sein wird, durch das Symbol:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q),$$

so dass die Stelle, welche irgend ein Index in der voranstehenden Complexion einnimmt, diejenige der unabhängigen Variabeln kennzeichnet, nach welcher abgeleitet werden soll, während der Werth des Index — der natürlich ganzzahlig ist — angibt, wie oft die Differentiation nach der gedachten Independenten vorzunehmen ist Der Summe der in einer Complexion enthaltenen Indices ist selbstverständlich die Ordnungszahl des betreffenden Differentialquotienten von z. Findet nach einer der Independenten eine Ableitung nicht statt, so wird der betreffende Index gleich Null gesetzt, so dass die Anzahl der Indices stets gleich q erhalten wird. Diese Bezeichnungsweise reicht aus, so lange die Indices α allgemeine Werthe besitzen, oder so lange nicht einzelne derselben eine besondere Aufmerksamkeit erregen. Überall, wo ein Zweifel entstehen könnte, wollen wir daher unter die Reihe der Differentiations-Indices die Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis q anbringen, und zwar so, dass über jedem einzelnen Index der unteren Reihe die Ordnungszahl der Differentiation nach jener Independenten geschrieben wird, deren Index mit dem eben gedachten der unteren Reihe zusammenfällt. Demnach wird beispielsweise die Ableitung

$$\frac{\partial^{10} z}{\partial x_1^3\,\partial x_i^7} \quad \text{durch die Function} \quad \begin{pmatrix} 3, & 0, & \ldots, & 7, & \ldots, & 0 \\ 1, & 2, & \ldots, & i, & \ldots, & q \end{pmatrix}$$

zu ersetzen sein. Für einige specielle Ableitungen werden wir noch kürzere Bezeichnungen einführen und an Ort und Stelle definiren. Die Grösse z, deren Darstellung als Function der Independenten $x_1, x_2, \ldots x_q$ den wesentlichen Inhalt unseres Problems bildet, ist nach diesem Bezeichnungssysteme durch die Function

$$(0, 0, \ldots, 0)$$

zu ersetzen.

Ertheilt man den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_q$ die Zuwächse $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ und entwickelt den Werth, welchen z für die Argumente $x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, \ldots\ldots, x_q+\xi_q$ annimmt, nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen der Zuwächse $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ — da es sich hier nur um die Form dieser Entwickelung handelt, ist eine Untersuchung über die Zulässigkeit derselben überflüssig — so tritt, von rein numerischen Coëfficienten abgesehen, zu dem Differentialquotienten:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q),$$

das Product

$$\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, \ldots, \xi_q^{\alpha_q}$$

hinzu, in welchem, wenn die Grössen ξ nach der natürlichen Reihenfolge ihrer Indices geordnet werden, die Potenz-Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ dieselbe Ordnung innehalten, wie die Differentiations-Indices der nebenstehenden Complexion. Der Inbegriff aller Glieder von der Ordnung σ in dieser Entwickelung kann also auch als eine ganze, rationale und homogene Function der q Argumente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ angesehen werden und folgt daraus sofort, dass die Anzahl der möglichen Differentialquotienten σ^{ter} Ordnung gleich ist der Anzahl der Glieder einer algebraischen Form vom Grade σ und der Dimension q. Bezeichnen wir diese Anzahl durch N_σ, so ist

$$N_\sigma = \binom{q-1+\sigma}{\sigma} = \binom{q-1+\sigma}{q-1},$$

wobei unter

$$\binom{m}{k}$$

der $k$te Coëfficient in der Entwickelung des Binomes

$$(1+x)^m$$

verstanden wird. Die Anzahl aller in der vorgelegten Differentialgleichung enthaltenen partiellen Differentialquotienten, das heisst die Anzahl aller Ableitungen bis zur $p$ten Ordnung, die letzte mit eingeschlossen, ergibt sich hieraus gleich

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} N_\sigma = \binom{q}{1} + \binom{q+1}{2} + \ldots + \binom{q-1+p}{p}.$$

Zählt man z als die Ableitung nullter Ordnung seiner selbst hinzu, so ist also die Anzahl aller Ableitungen von höchstens $p$ter Ordnung

$$N = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=p} N_\sigma = 1 + \binom{q}{q-1} + \binom{q+1}{q-2} + \ldots + \binom{q-1+p}{q-1} = \binom{p+q}{q}.$$

Indem nun im Allgemeinen zwischen diesen $\binom{q+p}{q}$ Ableitungen und den q Independenten $x_1, x_2, \ldots x_q$ eine Beziehung festgesetzt wird, entsteht die allgemeine partielle Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit q Independenten. Sei dieselbe dargestellt durch die Gleichung:

$$0 = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_q, z, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_q} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_q^{\alpha_q}}, \ldots\right),$$

so haben die vorher eingeführten Functionen vor Allem die Relation:

(1) $$0 = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_q, (0, 0, \ldots 0), \ldots (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q) \ldots)$$

identisch zu befriedigen. Die Anzahl der in der rechten Seite von (1) enthaltenen Argumente ist nach dem Vorigen:

$$\binom{q+p}{q} + q$$

Aus der oben aufgestellten Analogie in der Bedeutung der Indices α lässt sich ein recurrentes Verfahren für die Bildung sämmtlicher Ableitungen irgend einer bestimmten Ordnung herleiten. Multiplicirt man nämlich eine algebraische Form vom Grade σ und der Dimension q mit einer linearen Form derselben Dimension, so entsteht eine Form $q$ter Dimension aber vom Grade $(\sigma+1)$. Da aber bei dieser Multiplication in allen Gliedern zuerst der Exponent von ξ_1, hierauf jener von ξ_2 u. s. f. je um eine Einheit erhöht werden, so folgt, dass man aus den Complexionen der σten Ordnung jene der Ordnung $\sigma+1$ erhält, wenn man in allen Complexionen der Ordnung σ zunächst den ersten, hierauf den zweiten Index u. s. f. je um eine Einheit erhöht. Der Inbegriff der so entstehenden q Reihen enthält nothwendigerweise alle Complexionen $(\sigma+1)$ter Ordnung, und zwar einige mehr als Einmal, da jede Complexion $(\sigma+1)$ter Ordnung aus denen der σten Ordnung so oft entstehen kann, als die erste von Null verschiedene Indices besitzt. Und umgekehrt behält man von den Complexionen $(\sigma+1)$ter Ordnung jene bei, in welchen der Index der $i$ten Stelle von Null verschieden ist, so entstehen alle Complexionen σter Ordnung, indem man in den beibehaltenen Complexionen den Index der $i$ten Stelle um eine Einheit verringert.

Nach diesen Vorbereitungen besteht unsere Aufgabe darin, die Functionen

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_q)$$

so zu bestimmen, dass sie

1. der Gleichung (1) identisch genügen und
2. gewisse, sogleich näher zu entwickelnde Integrabilitätsbedingungen befriedigen.

Diese Aufgabe kann nach dem Verfahren von Lagrange in folgender Weise transformirt werden:

Differentiirt man die Gleichung (1) nach x_k und setzt, so lange

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_q<p,$$

für

$$\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\alpha_q)}{\partial x_k}$$

den Ausdruck

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k+1,\ldots\alpha_q),$$

so folgt,

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k\ldots,\alpha_q)}\cdot\frac{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)}{\partial x_k}. \tag{2}$$

worin die Summe im zweiten Gliede auf alle Complexionen zu erstrecken ist, deren Indexsumme kleiner ist als p, während in die Summation des letzten Gliedes alle Complexionen $p$ter Ordnung einzubeziehen sind.

Multiplicirt man nun die Gleichungen, welche sich aus (2) durch Specialisirung des k in $1, 2,\ldots, q$ ergeben, beziehungsweise mit $dx_1, dx_2,\ldots, dx_q$ und addirt, so folgt durch unbestimmte Integration:

$$\text{Const.}=\varphi-\int\sum\frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)}\left[d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)-\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\,dx_k\right],$$

in welchem Ausdrucke die unmittelbare, hinter dem Integralzeichen stehende Summe auf alle Complexionen von niedrigerer als der $p$ten Ordnung zu erstrecken ist. Es ergibt sich hieraus, dass die Gleichungen (2) jene (1) bis auf eine willkürliche Integrationsconstante ersetzen, sobald für alle Complexionen von geringerer als der $p$ten Ordnung:

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\,dx_k. \tag{3}$$

Wenn nun noch diese Gleichungen (3) unbeschränkt integrabel sind, so sind, wie man ohneweiters einsieht, die Functionen

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)$$

die partiellen Ableitungen von $(0, 0,\ldots 0)$; diese letztere Grösse ist demnach die gesuchte Lösung. Unsere Aufgabe ist also gelöst, wenn es gelungen ist, die Functionen $(\alpha_1,\ldots\alpha_q)$ so zu bestimmen, dass sie die Gleichungen (2) identisch befriedigen, während die (3) unbeschränkt integrabel sind. Da nämlich die durch die Integration eingeführte Constante willkürlich ist, wird sie im Verlaufe der Rechnung stets gleich Null gemacht werden können, und damit sind alle Bedingungen des Problems erfüllt.

17.

Im ersten Abschnitte sind die Bedingungen angegeben worden, unter welchen Gleichungen von der Form (3) im weiteren Sinne integrabel werden. Betrachten wir zunächst nur jene unter den Gleichungen (3), bei welchen die Summe der in der linken Seite auftretenden Indices $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_q$ kleiner ist als $p-1$, oder, wie wir der Kürze wegen sagen wollen, die Gleichungen von niedrigeren als der $(p-1)$ten Ordnung und entwickeln für eine derselben die Integrabilitätsbedingungen im Sinne des Artikels 3, so erhalten wir q Gleichungen, welche aus der Formel:

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)=\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\,dx_k$$

hervorgehen, wenn man den Index i der Reihe nach die ganzen Zahlen $1, 2,\ldots. q$ bedeuten lässt. Man erkennt sofort, dass jede dieser Gleichungen unter den (3) bereits mitenthalten ist, wenn die Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p-1,$$

wie wir vorausgesetzt haben. Aus den Gleichungen (3) lassen sich also stets Gruppen von je q Gleichungen zusammenstellen, so dass die Gleichungen einer Gruppe zugleich die Integrabilitätsbedingungen für eine gewisse ebenfalls unter den (3) befindliche Gleichung nächst niedriger Ordnung sind. Daraus folgt, dass alle Gleichungen niederer Ordnung integrabel sind, sobald dies bei den Gleichungen der höchsten Ordnung der Fall ist; es ist also blos nöthig, die Integrabilitätsbedingungen für jene unter den Gleichungen (3) zu entwickeln, bei denen

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q = p-1.$$

Man erhält diese Bedingungen, indem man in der Formel

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} \frac{\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_i,\ldots\alpha_k+1,\ldots\alpha_q)}{\partial x_i}\, dx_k \tag{4}$$

für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ alle Complexionen $(p-1)$ter Ordnung setzt und hierauf i alle Zahlen $1, 2, \ldots q$ der Reihe nach bedeuten lässt. Die solcherart entstehenden Relationen sind die nothwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen.

Es ist zunächst zu bemerken, dass — die Gleichungen (4) in ihrer Gesammtheit betrachtet — sowohl in den linken Seiten, hier mit dem Zeichen der totalen Differentiation versehen, als auch in den rechten Seiten, hier mit dem Zeichen der partiellen Differentiation verbunden, alle Ableitungen $p$ter Ordnung enthalten sind, wie aus dem im vorigen Artikel aufgestellten recurrenten Bildungsgesetze unmittelbar zu entnehmen ist. Anderseits ist klar, dass sich diese Gleichungen von selbst in q Gruppen scheiden, je nach der Independenten, nach welcher in der rechten Seite und zwar partiell abzuleiten ist, und zwar entstehen die Integrabilitätsbedingungen der $i$ten Gruppe, wenn man in (4) den Index i festhält und statt der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ alle Complexionen $(p-1)$ter Ordnung substituirt. Jede solche Gruppe enthält aber so viel Gleichungen als Differentialquotienten $(p-1)$ter Ordnung, das ist

$$\binom{q-1+p-1}{q-1}$$

und in den rechten Seiten aller Gleichungen einer und derselben Gruppe sind abermals sämmtliche Complexionen $p$ter Ordnung enthalten. Aus einer und derselben Complexion

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) \quad \text{der } (p-1)\text{ten Ordnung}$$

können q von den Gleichungen (4) abgeleitet werden, deren jede einer anderen Gruppe angehört; daher ist jede der Gleichungen (4) definirt, wenn man einerseits die Complexion $(p-1)$ter Ordnung angibt, aus der sie hergeleitet ist, und anderseits die Gruppe, der sie angehört.

Wir vereinigen nun die Gleichungen einer jeden Gruppe zu einer neuen Gleichung, indem wir jedes Individuum einer Gruppe mit einem vorläufig noch unbestimmten Factor multipliciren und die erhaltenen Producte addiren. Zur Kennzeichnung der hiemit eingeführten Factoren genügt es nach dem eben Gesagten, die Complexion anzugeben, aus welcher die mit denselben multiplicirten Gleichungen entstehen und die Gruppe, welcher dieselben angehören. Daher bezeichnen wir den Factor der Gleichung (4) durch

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q]^{(i)}$$

und erhalten aus der $i$ten Gruppe die Relation:

$$\sum[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q]^{(i)}\, d(\alpha_1,\ldots\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q) = \sum[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q]^{(i)} \sum_{k=1}^{k=q} \frac{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)}{\partial x_i}\, dx_k,$$

wobei die Summenzeichen, bei denen sich keine nähere Angabe befindet, bedeuten, dass die Summation über alle Ausdrücke, für welche

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_k+\ldots\alpha_q = p-1,$$

zu erstrecken ist. Durch Specialisirung von i in $1, 2, \ldots q$ resultiren hieraus q Gleichungen, den q Gruppen entsprechend, in welche sich die Integrabilitätsbedingungen formiren lassen.

Wie aus einer vorhin gemachten Bemerkung ohneweiters fliesst, sind in den rechten Seiten einer jeden der zuletzt aufgestellten q Gleichungen die Ableitungen aller Functionen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ enthalten, deren Indexsumme p beträgt. Benützen wir also zum deutlichen Unterschiede die Symbole:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$$

zur Bezeichnung der Ableitungen $p$ter Ordnung, und ordnen die rechten Seiten der letzten Gleichung nach diesen, so entsteht die Formel:

$$\sum [\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q]^{(i)} d(\alpha_1, \ldots \alpha_i+1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q) =$$

$$\sum \frac{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{k=q} [\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_k - 1, \ldots, \beta_q]^{(i)} dx_k, \tag{5}$$

wobei

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1$$

und

$$\beta_1 + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_k + \ldots + \beta_q = p$$

zu halten ist.

Wir haben damit q Gleichungen erhalten, welche unmittelbar mit jenen (2) des vorigen Artikels verglichen werden können. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, fassen wir in den (2) die Glieder von niederer als der $p$ten Ordnung unter die Bezeichnung:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q)} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q),\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p \tag{6}$$

zusammen und ersetzen hienach den Index k durch i, sowie die Complexionen $p$ter Ordnung, welche dort durch $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ bezeichnet wurden, durch die hier eingeführten Complexionen $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$. Dann lauten die (2) wie folgt:

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1 \ldots, \beta_q)} \frac{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}{\partial x_i}.\ \beta_1 + \ldots + \beta_q = p,$$

und durch Vergleichung dieser Relation mit der obigen (5) folgt, dass für alle Werthe des $i = 1, 2, \ldots, q$ und für alle Complexionen $p$ter Ordnung:

$$\frac{\sum [\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q]^{(i)} d(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q)}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} = \frac{\sum_{k=1}^{k=q} [\beta_1, \ldots, \beta_k - 1, \ldots, \beta_q]^{(i)} dx_k}{\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_q)}}$$

sein muss. Die Summe linker Hand ist hiebei auf alle Complexionen zu erstrecken, für welche

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p - 1.$$

Eine unmittelbare Folge dieser Gleichungen ist, dass der unbestimmte Factor, mit welchem irgend eine der Gleichungen (4) multiplicirt worden ist, nur abhängig sein kann von der Complexion, aus welcher die zu vervielfachende Gleichung entstanden ist, keineswegs aber von der Gruppe, in welche die betreffende Gleichung eingeordnet wurde. Es resultirt dies aus dem Umstande, dass die Nenner rechter Hand von i unabhängig sind. Daher ist der Index, welcher den unbestimmten Factoren beigefügt worden, überflüssig und die zu erfüllenden Gleichungen lauten:

$$\frac{\sum[\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q]\,d(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots\alpha_q)}{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} = \frac{\sum_{k=1}^{k=q}[\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_q]\,dx_k}{\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)}} \tag{7}$$

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q = p-1, \qquad \beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q = p.$$

Die Ausdrücke auf beiden Seiten in (7) bilden sich nach einfachen Gesetzen. Was zunächst die Brüche links betrifft, so ist jeder derselben durch den Index i bestimmt, für welchen er zu bilden ist. Schreibt man nämlich alle Complexionen $(p-1)$ter Ordnung an, und schliesst jede einzelne mit eckigen Klammern ein, so hat man alle unbestimmten Factoren, welche in den Zähler eingehen, wobei man übrigens bemerken wird, dass diese zugleich alle unbestimmten Factoren sind, welche überhaupt in Rechnung treten. Man erhält nun den Zähler, welcher zu dem Nenner $-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$ gehört, indem man jeden unbestimmten Factor mit dem totalen Differentiale jener Ableitung $p$ter Ordnung multiplicirt, deren Indexreihe aus der des nebenstehenden Factors durch Erhöhung des α_i um eine Einheit entsteht und die erhaltenen Producte addirt.

Die Brüche rechterseits sind durch die Complexionen bestimmt, welche im Nenner auftreten. Der Zähler ist eine Summe von der Form:

$$X_1\,dx_1+\ldots+X_k\,dx_k+\ldots+X_q\,dx_q,$$

und der Coëfficient X_k von dx_k ist jener unbestimmte Factor:

$$[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_q],$$

dessen Indexfolge aus der des Nenners entsteht, indem man den Index der $k$ten Stelle um Eins verringert.

Der Natur der Sache nach können die Indices innerhalb der eckigen Klammern niemals negative Zahlen werden. Es müssen also Klammerausdrücke, welche bei Befolgung dieser Gesetze negative Indices erhalten würden, der Null gleich gesetzt werden.

18.

Die Gleichungen (7) repräsentiren ein System simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen, in welchen eine beliebige der Variabeln als Independente angesehen werden kann. Wir bestimmen hiezu x_1, und setzen allgemein

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \lambda_k$$

so dass λ_1, wo es der Symmetrie wegen beibehalten wurde, den Werth 1 besitzt. Da ferner einer der unbestimmten Factoren willkürlich ist, setzen wir

$$[p-1,0,0,\ldots,0] = 1$$

und verwenden durchgehends die Lagrange'sche Bezeichnung der Differentialquotienten, wonach

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)' = \frac{d}{dx_1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)$$

zu verstehen ist. Durch diese Suppositionen erhalten wir aus (7) das System:

$$\sum[\alpha_1,\ldots,\alpha_i\ldots,\alpha_q](\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q)' = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0,\ldots,0)}},\alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q = p-1; \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k[\beta_1,\dots,\beta_k-1,\dots,\beta_q] = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1,\dots\beta_k,\dots\beta_q)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p,0,\dots,0)}}, \quad \beta_1+\dots+\beta_k+\dots+\beta_q = p. \tag{9}$$

Wir fügen sowie bei den runden Klammern in zweifelhaften Fällen auch bei den Ausdrücken mit eckigen Klammern eine untere Indexreihe hinzu, durch welche die Stelle der oberen Indices angegeben wird, und setzen insbesondere:

$$[1] = \begin{bmatrix} p-1, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0 \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{bmatrix}, \qquad (1) = \begin{pmatrix} p, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0 \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{pmatrix}$$

$$[2] = \begin{bmatrix} 0, & p-1, & \dots, & 0, & \dots, & 0 \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{bmatrix}, \qquad (2) = \begin{pmatrix} 0, & p, & \dots, & 0, & \dots, & 0 \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$

$$[i] = \begin{bmatrix} 0, & 0, & \dots, & p-1, & \dots, & 0 \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{bmatrix}, \qquad (i) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & p, & \dots, & 0 \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$

$$[q] = \begin{bmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & p-1 \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{bmatrix}, \qquad (q) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & p \\ 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & q \end{pmatrix}.$$

A.

Die Anzahl der Gleichungen, welche durch Specialisirung von $(\beta_1,\dots,\beta_k,\dots,\beta_q)$ aus (9) entstehen, ist um eine Einheit geringer als die Anzahl der Differentialquotienten $p$ter Ordnung, also gleich:

$$\binom{q-1+p}{q-1} - 1.$$

Diese Gleichungen enthalten die unbestimmten Factoren, deren noch

$$\binom{q-1+p-1}{q-1} - 1$$

geblieben sind, und ausser diesen die

$$q-1$$

unbekannten Grössen:

$$\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q.$$

Es sind also um

$$\left\{\binom{q-1+p}{q-1} - 1\right\} - \left\{\binom{q-1+p-1}{q-1} - 1 + (q-1)\right\} = \binom{q-2+p}{q-2} - (q-1)$$

Gleichungen mehr vorhanden als unbekannte Grössen. Berechnet man die

$$\binom{q-2+p}{q-1} + (q-2)$$

Unbekannten aus eben so vielen mit einander verträglichen Gleichungen und setzt die erhaltenen Werthe in die übrigen Gleichungen ein, so entstehen also

$$\binom{q-2+p}{q-2} - (q-1)$$

Bedingungsgleichungen, welche bestimmte Beziehungen zwischen den Ableitungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1,\dots\beta_q)}$$

enthalten und aus diesem Grunde im Allgemeinen nicht befriedigt sein werden. Es kann nun augenscheinlich nur zweierlei der Fall sein. Entweder sind in Folge der besonderen Beschaffenheit der vorgelegten Gleichung diese Bedingungsgleichungen identisch erfüllt, und dann sind jene Gleichungen des Systems (9), aus denen sie hervorgegangen sind, überflüssig. Oder die Bedindungsgleichungen, von denen jetzt die Rede ist, sind nicht erfüllt und dann steht der eine Theil der Gleichungen (9) mit dem anderen im Widerspruche. Scheiden wir also aus dem System (9) jene Gleichungen aus, welche zur Berechnung der Unbekannten dienlich und hinreichend sind, so können im ersten Falle die übrigen weggelassen werden, da sie den Vorigen keinen neuen Inhalt hinzufügen; im zweiten Falle müssen sie weggelassen werden, da sonst ein Widerspruch entstünde. Unter allen Umständen müssen also, nachdem ein zur Berechnung der Unbekannten geeignetes System aus (9) ausgeschieden ist, die übrig bleibenden Gleichungen gestrichen werden, und es handelt sich vor Allem darum, diese Ausscheidung in entsprechender Weise vorzunehmen.

Wir bezeichnen mit Rücksicht auf spätere Untersuchungen:

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(p,0,\ldots,0)}}=[\beta_1,\ldots,\beta_q],$$

wodurch ein Irrthum nicht entstehen kann, da in den eben eingeführten Klammernausdrücken die Summe der Indices immer p beträgt, während in den unbestimmten Factoren diese Summe immer nur $p-1$ ausmacht, und schreiben demnach die Gleichungen (9) in der Form:

$$[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q]=\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{k-1},\ldots,\beta_q],\ \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q+\ldots+\beta_q=p. \tag{10}$$

Um nun die nothwendig gewordene Auswahl unter diesen Gleichungen in übersichtlicher Weise vorzunehmen, legen wir einem Klammernausdrucke von der Form:

$$[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k\ldots,\beta_q]$$

nach dem ersten Index den Rang β_1 bei, ohne auf die Indexsumme Rücksicht zu nehmen. Da zur Construction der Gleichung (10) die Angabe der Complexion genügt, welche in die Klammer linker Hand eintritt, so werden wir im übertragenen Sinne auch von der Gleichung (10) sagen, sie besitze den Rang β_1. Um im Folgenden eine gleichförmige Ausdrucksweise zu ermöglichen, müssen wir jedoch für die einzifferigen Complexionen:

$$\begin{bmatrix}0,p,\ldots,0\\1,2,\ldots,q\end{bmatrix},\ \ldots\ldots,\begin{bmatrix}0,0,\ldots,p\\1,2,\ldots,q\end{bmatrix}$$

deren Bedeutung aus der kurz vorher gegebenen Definition ohneweiters folgt, und für die folgenden:

$$\begin{bmatrix}0,p-1,\ldots,0\\1,\ 2\ldots,\ q\end{bmatrix},\ \ldots\ldots,\begin{bmatrix}0,0,\ldots p-1\\1,2.\ \ldots,\ q\end{bmatrix}$$

deren Bedeutung weiter oben angegeben wurde, eine Ausnahme bedingen, indem wir denselben, obwohl der erste Index Null ist, dennoch einen von Null verschiedenen Rang beilegen. Wenn also von Ausdrücken die Rede sein wird, deren Rang von Null verschieden ist, so werden darunter nicht nur die Ausdrücke, deren erster Index von Null verschieden ist, sondern auch die einzifferigen Complexionen der betreffenden Ordnung zu verstehen sein.

Setzen wir nun für den Augenblick die Grössen $\lambda_2,\ldots,\lambda_q$ als bekannt voraus und schreiben die Formel (10) per extensum auf, wie folgt:

$$[\beta_1,\ldots,\beta_q]=[\beta_1-1,\beta_2,\ldots,\beta_q]+\lambda_2[\beta_1,\beta_2-1,\ldots,\beta_q]+\ldots\ldots+\lambda_q[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q-1],$$

so sehen wir, dass, so lange die Complexion linker Hand einen von Null verschiedenen Rang besitzt, der erste der auf der rechten Seite auftretenden unbestimmten Factoren, das ist

$$[\beta_1-1,\ \beta_2,\ldots\beta_q]$$

im Range stets um eine Einheit niedriger ist, als alle übrigen in derselben Formel enthaltenen, und ziehen daraus den Schluss, dass alle unbestimmten Factoren von gegebenem Range berechnet werden können, wenn die Berechnung der Factoren nächst höheren Ranges und der λ auf irgend eine Weise bereits vollzogen ist. Da ferner der unbestimmte Factor

$$[\beta_1-1,\, \beta_2, \ldots \beta_q]$$

in den Gleichungen vom Range β_1 nur einmal auftritt, und daher, so lange β_1 von Null verschieden ist, für jeden zu bestimmenden Factor nur Eine Gleichung vorhanden ist, so sieht man, dass, sobald die Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_q$ bekannt sind, das System jener Gleichungen (10), in welchen $\beta_1 > 0$ zur Berechnung der unbestimmten Factoren jederzeit geeignet ist. Es ist aber auch ausreichend, denn die Anzahl der Gleichungen, welche der aufgestellten Bedingung genügen, ist gleich der Anzahl der Complexionen $(p-1)$ter Ordnung, also auch gleich der Anzahl der unbestimmten Factoren, wobei der leichteren Ausdrucksweise wegen einerseits die identische Gleichung:

$$[p,0,0,\ldots,0] = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(1)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(1)}} = 1$$

und andererseits der Factor

$$[p-1,0,\ldots,0] = [1] = 1$$

mitgezählt wurden.

Um die noch fehlenden Werthe der $(q-1)$ Grössen $\lambda_2, \ldots, \lambda_q$ zu finden, heben wir aus den Gleichungen (10) die folgenden heraus:

$$\frac{\lambda_1[1]}{1} = \frac{\lambda_1 \begin{bmatrix} p-2,0,1,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots k,\ldots,q \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} p-1,0,\ldots,0,\ldots,0 \\ 1,\ 2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-1,0,\ldots,1,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix}} = \ldots = \frac{\lambda_1 \begin{bmatrix} p-i-1,0,\ldots,i,\ldots,0 \\ 1\ldots,2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} p-i,0,\ldots,i-1,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,k,\ldots q \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p-i,0,\ldots,i,\ldots,0 \\ 1,\ 2,\ldots k,\ldots,q \end{bmatrix}}$$

$$= \ldots\ldots = \frac{\lambda_k \begin{bmatrix} 0,0,\ldots,p-1,\ldots,0 \\ 1,2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,0,\ldots,p,\ldots,0 \\ 1.2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix}}, \tag{11}$$

in welchen der Symmetrie wegen die allgemeinen Zeichen

$$[1] \text{ und } \lambda_1,$$

statt ihres gemeinsamen Werthes 1 beibehalten werden. Es sind dies p Gleichungen, welche die $(p-1)$ regelmässig abgestuften Factoren:

$$\begin{bmatrix} p-2,0,\ldots,1,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix}, \ldots\ldots, \begin{bmatrix} p-i,0,\ldots,i-1,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,\ k,\ldots,q \end{bmatrix}, \ldots\ldots, \begin{bmatrix} 0,0,\ldots,p-1,\ldots,0 \\ 1,2,\ldots,\ k,\ldots,q \end{bmatrix} = [k] \tag{α}$$

und die Grösse λ_k enthalten, sonach zur Bestimmung dieser Grössen hinreichend sind.

Verstehen wir unter ω_k eine willkürliche Grösse, bilden das Product:

$$\left\{ \sum_{i=0}^{i=p-1} (-1)^i \omega_k^{p-i-1} \begin{bmatrix} p-i-1,0,\ldots,i,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix} \right\} \cdot \{\omega_k - \lambda_k\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i \omega_k^{p-i} \left\{ \begin{bmatrix} p-i-1,0,\ldots,i,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} p-i,0,\ldots,i-1,\ldots,0 \\ 1,2,\ldots,\ k,\ldots,q \end{bmatrix} \right\}$$

und ersetzen im Resultate die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von ω_k durch die aus den Gleichungen (11) fliessenden Werthe derselben, so folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(1)} \left\{ \sum_{i=0}^{i=p-1} (-1)^i \omega_k^{p-i-1} \begin{bmatrix} p-i-1,0,\ldots,i,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix} \right\} \times \{\tilde{\omega}_k - \lambda_k\} = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i \omega_k^{p-i} \frac{\partial\varphi}{\partial \begin{pmatrix} p-i,0,\ldots,i,\ldots,0 \\ 1,\ldots 2,\ldots,k,\ldots,q \end{pmatrix}}.$$

$\omega_k - \lambda_k$ ist also ein Theiler des letzten Polynoms, oder mit anderen Worten, λ_k ist eine Wurzel der Gleichung:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial(1)}\,\omega_k^p - \frac{\partial\varphi}{\partial\begin{pmatrix} p-1,0,\ldots,1,\ldots,0 \\ 1,2,\ldots,k,\ldots,q \end{pmatrix}}\,\omega_k^{p-1} + \ldots + (-1)^i \frac{\partial\varphi}{\partial\begin{pmatrix} p-i,0,\ldots,i,\ldots,0 \\ 1,2,\ldots,k,\ldots,q \end{pmatrix}}\,\omega_k^{p-i} + \ldots \tag{12}$$

$$+(-1)^p \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial(k)} = P(\omega_k).$$

Mit λ_k zugleich werden aber die oben unter (α) angeführten unbestimmten Factoren bestimmt. Wählt man nämlich aus den p Wurzeln der Gleichung (12) eine aus, um sie mit λ_k zu identificiren, so sind die genannten unbestimmten Factoren rationale, symmetrische Functionen der übrigen $p-1$ Wurzeln, und man erhält sie entweder durch Division des Polynoms $P(\omega_k)$ mit $\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}(\omega_k - \lambda_k)$ als Coëfficienten der Grössen $(-1)^i \omega_k^{p-i-1}$ oder durch directe Rechnung aus den Gleichungen (11). Man wird bemerken, dass in den Nennern in (11), den letzten ausgenommen, nur solche Complexionen enthalten sind, in denen der Index von Null verschieden ist; man muss also, um λ_k zu bestimmen, noch die Gleichung, welche die einzifferige Complexion

$$\begin{bmatrix} 0,0,\ldots,p,\ldots,0 \\ 1,2,\ldots,k,\ldots,q \end{bmatrix}$$

enthält, zu Hilfe nehmen.

Specialisirt man in (12) die Zahl k in $2,3,\ldots,q$, so erhält man der Reihe nach Gleichungen für $\lambda_2, \ldots, \lambda_q$, nachdem man noch aus (10) die aus den einzifferigen Complexionen

$$\begin{bmatrix} 0,p,\ldots,0 \\ 1,2,\ldots,q \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,0,p,\ldots,0 \\ 1,2,3,\ \ldots,q \end{bmatrix}, \ldots\ldots, \begin{bmatrix} 0,0,\ldots,p \\ 1,2,\ldots,q \end{bmatrix}$$

entstehenden Gleichungen zu Hilfe genommen hat.

Da solcherart die Werthe der Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_q$ und der unbestimmten Factoren vom höchsten Range gefunden sind, ist gezeigt, dass aus jenen Gleichungen in (10), deren Rang von Null verschieden ist, alle Unbekannten eindeutig berechnet werden können; es sind also aus dem System (10) alle Gleichungen nullten Ranges wegzustreichen.

Es gibt nun Complexionen $p$ter Ordnung überhaupt:

$$\binom{q-1+p}{q-1}.$$

Complexionen, deren erster Index von Null verschieden ist

$$\binom{q-1+p-1}{q-1}$$

und da in dieser Anzahl eine einzifferige Complexion mitgezählt ist, sind ausserdem noch

$$q-1$$

einzifferige Complexionen vorhanden, die Anzahl der Complexionen nullten Ranges, also auch die Zahl der vernachlässigten Gleichungen, ist demnach

$$\left[\binom{q-1+p}{q-1} - \binom{q-1+p-1}{q-1}\right] - (q-1) = \binom{q-2+p}{q-2} - (q-1).$$

Diese Anzahl fällt zusammen mit der Zahl der Ableitungen $p$ter Ordnung einer Function von $q-1$ Argumenten, wenn die $(q-1)$ einzifferigen Ableitungen $p$ter Ordnung nicht gezählt werden. Es ist also zu erwarten, dass im Verlaufe der Rechnung eine gleich grosse Anzahl von Bedingungen auftreten wird, welche die hier verloren gegangenen Beziehungen ersetzen müssen.

B.

Indem nun ein Theil der Gleichungen (10) vernachlässigt, der andere aber zur Berechnung der unbekannten Grössen verwendet wurde, verbleiben noch die Gleichungen:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2,\quad \frac{dx_3}{dx_1}=\lambda_3,\ldots,\quad \frac{dx_q}{dx_1}=\lambda_q$$

und die q Gleichungen (8). Diese enthalten in endlicher Form alle Variabeln des Problems, mit dem Zeichen $\frac{d}{dx_1}$ behaftet nebst den Independenten $x_2, x_3, \ldots, x_q$ nur die Variabeln der $p$ten Ordnung.

Wir nehmen also die Gleichungen (3) zu Hilfe und haben sonach das System:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2,\quad \frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_3,\ldots\ldots,\frac{dx_q}{dx_1}=\lambda_q$$

$$(\alpha_1,\ldots\alpha_k\ldots,\alpha_q)'=\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q),\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p \tag{I}$$

$$\Sigma[\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q](\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q)'=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}},\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q=p-1.$$

Da in der ersten Zeile $(q-1)$, in der zweiten $\binom{q-1+p}{p-1}$, und in der dritten q Gleichungen enthalten sind, besitzen wir im Ganzen:

$$(q-1)+\binom{q-1+p}{q-1}+q=\binom{q-1+p}{p-1}+2q-1$$

Gleichungen zur Bestimmung der

$$\binom{q+p}{q}+q-1$$

Dependenten des Systems und daher um

$$\left\{\binom{q+p}{p}+q-1\right\}-\left\{\binom{q+p-1}{p-1}+2q-1\right\}=\binom{q-1+p}{p}-q=\binom{q-1+p}{q-1}-q$$

Gleichungen weniger als zu bestimmende Grössen vorhanden sind. Eine gleiche Anzahl der letzteren muss also während der Integration als unbestimmt angesehen werden. Da nun überhaupt

$$\binom{q-1+p}{q-1}$$

Ableitungen $p$ter Ordnung vorhanden sind, und vermöge der q letzten Gleichungen des Systems (I) die Differentialquotienten der einzifferigen Functionen

$$(1), (2), \ldots, (q)$$

durch die Differentialquotienten der übrigen Functionen $p$ter Ordnung ausgedrückt werden können, empfiehlt es sich, die letzteren als die willkürlich bleibenden Grössen anzusehen. Sonach verbleiben während der Integration des Systems (*I*) alle Dependenten $p$ter Ordnung mit Ausnahme der einzifferigen unbestimmt, und wir betrachten dieses System als integrirt, wenn es gelungen ist, alle übrigen Dependenten des Systems als Functionen der Independenten x_1, der erforderlichen Anzahl Integrationsconstanten und der willkürlichen Grössen darzustellen. Es ist übrigens klar, dass die letzteren in den Integralgleichungen nicht nur als Functionsargumente im gewöhnlichen Sinne, sondern auch unter Integralzeichen auftreten werden. Die Anzahl der Integrationsconstanten ist gleich der Anzahl der Gleichungen, also:

$$\binom{q+p-1}{p-1}+2q-1.$$

19.

Eine Function der in dem System (I) auftretenden Argumente wird im engeren Sinne ein Integrale dieses Systems genannt, wenn deren Ableitung nach x_1 mit Rücksicht auf die Gleichungen (I) identisch verschwindet. Um also die Definitionsgleichung der Integrale zu erhalten, entwickeln wir den Differentialquotienten von

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_q, \ldots, (\alpha_1, \ldots, \alpha_q), \ldots]$$

nach x_1 und setzen denselben gleich Null. Da vorausgesetzt werden muss, dass in der Function F auch Quadraturen über die willkürlich gebliebenen Grössen enthalten sind, so bemerken wir, dass alle Bestandtheile dieser Art als Functionen von x_1, welche im Allgemeinen auch sämmtliche Integrationsconstanten enthalten, anzusehen sind. Danach wird zunächst:

$$\frac{dF}{dx_1}=\sum_{k=1}^{k=q}\frac{\partial F}{\partial x_k}\lambda_k+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}\sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\lambda_k+\sum\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}(\beta_1,\ldots,\beta_q)'.$$

Hierin ist die erste der zwei Summen, bei welchen sich keine nähere Angabe befindet, auf alle Complexionen von niederer als der $p$ten Ordnung, die zweite hingegen auf alle Complexionen $p$ter Ordnung zu erstrecken.

Wir schreiben die erhaltene Gleichung in der Form:

$$\frac{dF}{dx_1}=\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\right\}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}(\beta_1,\ldots,\beta_q)'$$

und benützen die Bezeichnung:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial F}{\partial x_k}+\sum\frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q),\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p, \tag{13}$$

um sie noch weiter zur Gleichung:

$$\frac{dF}{dx_1}=\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)+\sum\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}(\beta_1,\ldots,\beta_q)',\ \beta_1+\ldots+\beta_q=p$$

abzukürzen.

Aus den Gleichungen (8) folgt nun:

$$(k)'=-\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial k_k}\right)}{[k]\dfrac{\partial\varphi}{\partial(1)}}-S\frac{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}{[k]}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)',\ \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q=p-1$$

worin das Zeichen S vorübergehend dazu gebraucht wurde, um anzuzeigen, dass die Summation rechter Hand über alle Complexionen, für welche $\alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q=p-1$, mit Ausnahme der Complexionen

$$[1],\ [2],\ldots,[q]$$

auszudehnen ist. Mit Rücksicht auf die Relationen:

$$\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{[k]\,\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}} = \frac{\lambda_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\lambda_k[k]\,\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}} = \frac{\lambda_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(k)}}$$

wird weiter

$$\frac{dF}{dx_1} = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(k)}}\,\frac{\partial F}{\partial(k)}\right\} + S\,\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}\,(\beta_1,\ldots,\beta_q)'$$

$$-\sum_{k=1}^{k=q}\frac{\partial F}{\partial(k)}\,S\,\frac{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q]}{[k]}\,(\alpha,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)',$$

oder, da die letzte Summe auch gleich:

$$S\,(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)'\sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_q]}{[k]}\,\frac{\partial F}{\partial(k)},\quad \beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q = p,$$

und wenn wir noch die Abkürzung einführen:

$$F_k = \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(k)}}\,\frac{\partial F}{\partial(k)}$$

endlich

$$\frac{dF}{dx_1} = \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k F_k - S\,(\beta_1,\ldots,\beta_q)'\left\{\sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_q]}{[k]}\,\frac{\partial F}{\partial(k)} - \frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_k)}\right\}.$$

In dieser Gleichung kann übrigens das Zeichen S wieder durch Σ ersetzt werden, da die Coëfficienten der einzifferigen Grössen

$$(1)',\quad (2)',\ldots,(q)'$$

identisch gleich Null werden. Bezeichnen wir also die in der rechten Seite der letzten Gleichung definirte Operation mit D_I, das heisst, verstehen wir:

$$D_I F = \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k F_k + \sum(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)'\left\{\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)} - \sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots\beta_q]}{[k]}\,\frac{\partial F}{\partial(k)}\right\}, \qquad (14)$$

$$\beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q = p,$$

so ist F ein Integrale des Systems (I), wenn

$$D_I F \equiv 0.$$

Wir bemerken, ohne vorderhand auf die Eigenschaften der Integrale näher einzugehen, dass jedes Integrale des Systems (I) allen Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)} - \sum_{k=1}^{k=q}\frac{[\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_q]}{[k]}\,\frac{\partial F}{\partial(k)} = 0;\quad \beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_q = p \qquad (15)$$

identisch genügen muss, da im Gegentheile gegen die Voraussetzung eine Relation zwischen den willkürlich gebliebenen Grössen gegeben wäre. Aus eben diesem Grunde folgt aber auch, dass die gegebene Gleichung selbst nicht unter allen Umständen zu den Integralen des Systems (I) gehören kann. In der That, setzen wir in (14) φ statt F, so verschwinden die F_k, jetzt φ_k identisch und es folgt:

$$D_I\varphi = \Sigma(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)' \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)} - \sum_{k=l}^{k=q} \frac{[\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_q]}{[k]} \frac{\partial\varphi}{\partial(k)} \right\}.$$

Benützen wir die Relation

$$\lambda_k[k] = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(k)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(1)}}$$

um den Coëfficienten von $(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)'$ zu transformiren, so wird derselbe gleich:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)} - \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k[\beta_1,\ldots,\beta-1,\ldots,\beta_q].\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}.$$

Von den Ausdrücken dieser Art werden bei allen Problemen jene gleich Null, bei denen die Complexion $(\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_q)$ einen von Null verschiedenen Rang besitzt, während die Coëfficienten nullten Ranges nur bei besonderer Beschaffenheit der gegebenen Gleichung verschwinden. Die gegebene Gleichung wird also durch die Integralgleichungen des Systems (I) im Allgemeinen nicht auf Constante reducirt, doch kann der Ausdruck, welcher entsteht, wenn man in φ an Stelle der Variabeln deren Werthe aus dem Integralsystem substituirt, neben den Integrationsconstanten nur mehr die Variabeln nullten Ranges, nicht aber x_1 enthalten, wie aus dem Werthe von $D_I\varphi$ unmittelbar zu erkennen ist.

Nun muss aber die gegebene Gleichung (1) unter allen Umständen befriedigt werden. Sind die Gleichungen (10) alle mit einander verträglich, so geschieht dies sowie bei den früher behandelten Problemen durch eine Beziehung zwischen den Integrationsconstanten, sind aber in (10) einige oder alle Gleichungen nullten Ranges im Widerspruche mit den übrigen, so muss man zu der gegebenen Gleichung die Gleichung, welche aus (1) durch Substitution der Integralwerthe der Variabeln entsteht, als Bedingungsgleichung für die Variabeln nullten Ranges hinzufügen. Es möge sogleich bemerkt werden, dass diese Bedingungsgleichung jederzeit dadurch erfüllt werden kann, dass man die Grössen nullten Ranges als absolute Constante ansieht, da dann $D_I\varphi$ identisch verschwindet.

Die hier gefundenen Eigenthümlichkeiten haben selbstverständlich ihren Grund darin, dass das System (10) im Allgemeinen ein überbestimmtes ist. Wie seinerzeit bemerkt wurde, ist der Überschuss der in (10) enthaltenen Gleichungen über die in denselben enthaltenen Unbekannten oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Grössen nullten Ranges, gleich der Zahl:

$$\binom{q-2+p}{q-2} - (q-1).$$

Es gibt daher nur zwei Classen von Problemen, bei welchen keine Bedingungsgleichungen auftreten, nämlich:

Erstens: Die Gleichungen erster Ordnung, und bei diesen Problemen ist überdies das Differentialsystem (I) jederzeit bestimmt, denn die Anzahl der fehlenden Gleichungen:

$$\binom{q-1+p}{p} - q$$

wird für $p=1$ gleich Null.

Zweitens: Die Gleichungen beliebiger Ordnung mit zwei Independenten, die wir in den vorigen Abschnitten ausführlich behandelt haben.

20.

Die nächste Aufgabe ist nun, den Einfluss zu untersuchen, welchen die Integration des Systems (I) auf die Integrabilitätsbedingungen ausübt. Zu diesem Behufe benützen wir die Integralgleichungen, um an Stelle der Dependenten des Systems (I) die Integrationsconstanten als neue Veränderliche einzuführen. Hiebei wollen wir die Veränderung, welche irgend eine Variable des Systems, etwa u, erleidet, sobald x_1 allein einen unendlich kleinen Zuwachs erleidet, wie bisher durch du bezeichnen, die Veränderung aber, welche durch Incremente aller Constanten hervorgerufen werden, durch δu andeuten, so dass die Gesammtänderung, welche u überhaupt erfahren kann, durch

$$du+\delta u$$

dargestellt wird. Dann entsteht aus der Gleichung (3) des Artikels 16 durch Variation des x_1 und sämmtlicher constanter Parameter die folgende:

$$d(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)+\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\lambda_k dx_1 + \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\delta x_k$$

und hieraus wegen der Beziehungen (1):

$$\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\delta x_k, \quad (\alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q < p. \tag{16}$$

Diese Gleichungen enthalten dx_1 nicht, um dieselben integriren zu können, muss also x_1 selbst zum Ausfalle gebracht werden. In der That wird es stets möglich sein, die in diesen Gleichungen noch enthaltenen willkürlichen Grössen, — es sind dies, wie erinnerlich, alle Functionen $(\alpha_1,\ldots\alpha_q)$ der $p$ten Ordnung, die einzifferigen (1), (2)...(q) ausgenommen — so zu bestimmen, dass x_1 aus allen Gleichungen verschwindet.

Wir bringen die Gleichung (16) in die Form:

$$0 = \delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\delta x_k,$$

und bezeichnen den Ausdruck rechter Hand, ohne Rücksicht auf den Werth, den derselbe erhalten soll, durch

$$P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q), \quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q < p,$$

eine Bezeichnung, welche vollkommen ausreicht, da jede einzelne der Gleichungen (16) durch die Complexion $(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)$, welche ihr zu Grunde liegt, vollkommen gekennzeichnet ist. Dann muss mit Hilfe der Differentialgleichungen (I) die Ableitung von P nach x_1, das heisst

$$\frac{d}{dx_1}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q) = 0$$

ausfallen. Es ist nun:

$$\frac{d}{dx_1}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q) = \frac{d\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}{dx_1} - \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\frac{d\delta x_k}{dx_1} - \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)'\delta x_k,$$

and andererseits:

$$0 = \delta\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\frac{d\delta x_k}{dx_1} - \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q);$$

daher wird:

$$\frac{d}{dx_1}P(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q) = \delta\left\{\frac{d}{dx_1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)\right\} + \sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)$$
$$- \sum_{k=1}^{k=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)'\delta x_k.$$

Da in allen diesen Ausdrücken

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p,$$

so ist laut (I)

$$\frac{d}{dx_1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q).$$

und wir erhalten als Bedingung dafür, dass x_1 aus den P entfalle, die Gleichungen:

$$Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \partial (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q)' \partial x_k = 0.$$

Hier ist nun zu unterscheiden, ob

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q$ gleich oder kleiner ist als $(p-1)$.

Im ersten Falle erlaubt die Gleichung (17) keine weitere Veränderung, im letzteren aber ist:

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + 1 + \ldots + \alpha_q < p,$$

und daher:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q)' = \sum_{i=1}^{i=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) \lambda_i.$$

Mit diesem Werthe verwandelt sich nun die Gleichung (17) in die folgende:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \partial (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q} \partial x_k \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q) \\ &= \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \partial (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_k) - \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_q \sum_{i=1}^{i=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) \partial x_i \\ &= \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k \left\{ \partial (\alpha_1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) - \sum_{i=1}^{i=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_k + 1, \ldots, \alpha_q) \partial x_i \right\}. \end{aligned}$$

Sind demnach von den Gleichungen (17) diejenigen identisch erfüllt, für welche

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1,$$

so fällt aus jenen Gleichungen in (16), bei denen ebenfalls:

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1$$

ist, x_1 heraus und dieselben verwandeln sich in Pfaff'sche Probleme, welche durch Beziehungen zwischen den Constanten allein befriedigt werden können. Denken wir uns nun die hiezu erforderlichen Relationen zwischen den Constanten hergestellt, so verschwinden zufolge der letzten Formel auch diejenigen unter den Gleichungen (17), für welche

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 2,$$

wonach sich dieselbe Schlussfolgerung auch auf die Gleichungen niederer Ordnung fortsetzen lässt. Es erhellt daraus, dass x_1 aus allen Ausdrücken P zum Ausfall gebracht werden kann, wenn dies nur bei denen der höchsten Ordnung bereits geschehen ist. Daher genügt es, von den Gleichungen (17) blos jene beizubehalten, für welche

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p - 1.$$

Die Anzahl der noch zu erfüllenden Bedingungen ist also gleich der Anzahl der Complexionen $(p-1)$ter Ordnung, das ist:

$$\binom{q-1+p-1}{q-1}$$

Die Zahl der Complexionen $p$ter Ordnung besteht aus drei Theilen, da in derselben

Erstens: die einzifferigen Complexionen, q an der Zahl;

Zweitens: die $\binom{q-1+p-1}{q-1}-1$ Complexionen, deren erster Index von Null verschieden ist, endlich

Drittens: die Complexionen vom nullten Range enthalten sind.

Von der Gesammtzahl dieser Complexionen sind nun die q ersten durch das System (I) bestimmt, $\binom{p-1+q-1}{q-1}$ durch die Bedingungsgleichungen (17), die letzteren haben also Eine Bedingungsgleichung für die Grössen nullten Ranges zur Folge.

Da nach Erfüllung der (17) aus den Relationen (16) x_1 entfällt, so verwandeln sich diese in Pfaff'sche Gleichungen, deren Lösung dann diejenigen Beziehungen zwischen den Integrationsconstanten ergibt, aus denen schliesslich das allgemeine Integrale der gegebenen Gleichung resultirt.

Denkt man sich die Bedingungsgleichungen (17) integrirt, so ist die Form, in welcher die eben erwähnten Pfaff'schen Gleichungen auftreten, in dem einen Falle leicht herzustellen, wenn als Integrationsconstante des Systems (I) die Anfangswerthe der Dependenten genommen werden, welche vermöge der Integralgleichungen einem concreten, nicht singulären Werthe x_1^0 des x_1 entsprechen. Bezeichnen wir diese Anfangswerthe durch oben angefügte „^{0}", so reduciren sich die Gleichungen (16) auf die Form:

$$\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)^0 = \sum_{k=2}^{k=q} (\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)^0 \delta x_k{}^0,\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p;$$

setzt man also:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)^0 = \Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q),$$

wobei unter

$$\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)$$

irgend eine Function der Anfangswerthe $x_2^0,\ldots x_q^0$ zu verstehen ist, so ist:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_q)^0 = \frac{\partial\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)}{\partial x^0{}_k},$$

und hieraus folgt sofort:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_q)^0 = \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q}\Phi(\alpha,\ldots,0,\ldots,0)}{(\partial x_2{}^0)^{\alpha_2}\ldots(\partial k_k{}^0)^{\alpha_k}\ldots(\partial x_q{}^0)^{\alpha_q}}.$$

Somit ist jede der Integrationsconstanten bestimmt, sobald für die Functionen:

$$\Phi(0,0,\ldots.0),\quad \Phi(1,0,\ldots,0),\quad \Phi(p-1,0,\ldots.0)$$

eine Wahl getroffen worden ist. Da nun die Bedingungsgleichungen für die Grössen 0ten Ranges nur auf die Form dieser Functionen Einfluss üben können, so schliessen wir:

Erstens: dass $(q-1)$ der Integrationsconstanten unabhängig, alle anderen aber als Functionen dieser anzusehen sind und

Zweitens: dass das allgemeine Integrale einer Differentialgleichung $p$ter Ordnung mit q Independenten nie mehr als p willkürliche Functionen enthalten können. Doch muss sogleich bemerkt werden, dass diese zweite Schlussfolgerung nur in gewissem Sinne richtig ist, welcher aber dem ausgesprochenen Satze, wie sich später zeigen wird, ohne Zwang beigelegt werden kann.

Wendet man nicht die Hauptintegrale an, sondern irgend ein anderes vollständiges Integralsystem, so behalten diese Bemerkungen augenscheinlich ihre Giltigkeit; die Relationen zwischen den Integrationsconstanten erhalten aber dann nicht die einfache hier angegebene Gestalt, vielmehr müssen sie erst durch die factische Integration der Gleichungen (16) gewonnen werden.

21.

Zur Construction des Systems (I) genügt es, festzusetzen, welcher von den p möglichen Werthen des λ_k mit $\frac{dx_k}{dx_1}$ zu identificiren ist. Wir haben weiter oben gesehen, dass durch diese Festsetzung auch die Werthe der unbestimmten Factoren

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q], \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1$$

festgelegt wird, so dass alle Bestandtheile des Systems (I) bestimmt erscheinen.

Da wir im Folgenden gezwungen sein werden, zwischen den verschiedenen Werthen zu unterscheiden, welche λ_k annehmen kann, und die wir im Allgemeinen als endlich, von Null und unter einander verschieden voraussetzen, bezeichnen wir denjenigen dieser Werthe, welcher zum Aufbaue des Systems (I) verwendet wurden, durch λ_k^I. Scheiden wir dann aus der Gesammtheit der Wurzelwerthe λ diejenigen aus, welche mit dem Index „^{I}" bezeichnet sind, so ist es immer möglich, aus den übrigen λ Werthen einen Complex zusammenzustellen, der seinerseits abermals zur Bildung eines dem Systeme (I) analogen Differentialsystems verwendet werden kann. Wir bezeichnen diesen Complex durch

$$\lambda_2^{II}, \lambda_3^{II}, \ldots, \lambda_q^{II}$$

und nennen das aus demselben hervorgehende Differentialsystem das System (II). In gleicher Weise unterscheiden wir noch ein System (III), welches aus den Wurzeln

$$\lambda_2^{III}, \lambda_3^{III}, \ldots, \lambda_q^{III}$$

entsteht und so fort, bis endlich mit dem Systeme (P), das den Wurzeln

$$\lambda_2^P, \lambda_3^P, \ldots, \lambda_q^P$$

entspricht, der gesammte Wurzelvorrath erschöpft wird. Die bisherige Bezeichnungsweise reicht nicht aus, um auch in den von der Wahl des Wurzelcomplexes abhängigen Bestandtheilen deren Herkunft anzugeben. Daher bezeichnen wir die unbestimmten Factoren im Systeme (K) durch

$$\left[\underset{K}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q}\right], \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1,$$

so dass das Zeichen

$$\left[\underset{I}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q}\right]$$

mit dem bisher verwendeten

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_q]$$

identisch ist. Dessgleichen bezeichnen wir eine Differentiation nach x_1, wenn hiebei das System (K) zu berücksichtigen ist, durch

$$D_K$$

und gebrauchen diese Bezeichnung, wo Zweifel entstehen könnten, auch innerhalb des betreffenden Systems an Stelle des bisher benützten Lagrange'schen Zeichens. Das System (K) hat dann die Form:

$$\left.\begin{aligned}
&D_K x_2 = \lambda_2^K, \; \ldots, \; D_K x_q = \lambda_q^K \\
&D_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q) = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^K (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q), \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q < p \\
&\sum \left[\underset{K}{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q}\right] D_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q) = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial (1)}}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p-1
\end{aligned}\right\} \quad (K)$$

und irgend eine Function F der hier vorkommenden Argumente ist ein Integral dieses Systems, wenn

$$D_K F = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^K F_i + \sum D_K(\beta_1, \dots, \beta_q) \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\beta_1, \dots, \beta_q)} - \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix} i \\ K \end{matrix}\right]} \frac{\partial F}{\partial(i)} \right\} = 0.$$

$$\beta_1 + \dots + \beta_q = p.$$

Die Ausdrücke

$$[\beta_1, \dots, \beta_q] = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1, \dots, \beta_q)}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}}.$$

in welchen $\beta_1 + \dots + \beta_q = p$, bedürfen als in allen Systemen gleichbleibend keiner näheren Bezeichnung des Systems; die unbestimmten Factoren im Systeme (K) sind also aus den Gleichungen:

$$[\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_q] = \sum_{i=2}^{i=q} \lambda_i^K \left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right], \quad \beta_1 + \dots + \beta_i + \dots + \beta_q = p \tag{18}$$

zu berechnen. Da die linken Seiten dieser Gleichungen sich nicht ändern, wenn man die Wurzelwerthe eines vom Kten verschiedenen Complexes mit den entsprechenden Werthen eines anderen ebenfalls vom Kten verschiedenen Complexes vertauscht, so folgt, dass die Ausdrücke

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right]$$

bezüglich aller oberen Stellenzeiger der λ, welche von 1 verschieden sind, symmetrisch sein müssen.

Sowie nun die Gleichungen (18) stets befriedigt werden können, so lange der Rang der auf der linken Seite auftretenden Complexion von Null verschieden ist, so können auch alle Ausdrücke

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right],$$

deren Rang von Null verschieden ist, ihrerseits zur Berechnung neuer Ausdrücke

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_\mu - 1, \dots, \beta_q \\ K, L\end{matrix}\right]$$

verwendet werden, welche den Gleichungen

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_q \\ L\end{matrix}\right] = \sum_{q=1}^{q=\mu} \lambda_\mu^L \left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_\mu - 1, \dots, \beta_q \\ K, L\end{matrix}\right] \tag{19}$$

Genüge leisten. Es folgt dies durch eine Schlussweise, welche sich von der analogen des Art. 18 nur dadurch unterscheidet, dass hier die Werthe $\lambda_2^L, \dots, \lambda_q^L$ von vornherein gegeben sind.

Aus dem Bildungsgesetze dieser Grössen folgt unmittelbar, dass dieselben bezüglich der von K und L verschiedenen Indices symmetrisch sind, sie müssen also auch bei einer Vertauschung von L mit K denselben Werth behalten, also ist:

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_\mu - 1, \dots, \beta_q \\ K, L\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_\mu - 1, \dots, \beta_p \\ L, K\end{matrix}\right].$$

Ist nun der Rang der Complexion

$$\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_q$$

von Null verschieden, so ist:

$$\left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_q \\ K\end{matrix}\right] = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left[\begin{matrix}\beta_1, \dots, \beta_i - 1, \dots, \beta_\mu - 1, \dots, \beta_q \\ KL\end{matrix}\right]$$

und andererseits

$$\left[\underset{L}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}\right]=\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^K\left[\underset{KL}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q}\right],$$

somit:

$$\left[\underset{K}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}\right]-\left[\underset{L}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}\right]=-\sum_{\mu=2}^{\mu=q}(\lambda_\mu^K-\lambda_\mu^L)\left[\underset{KL}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q}\right]$$

Diese Gleichung drückt eine Eigenschaft der in Betrachtung stehenden Grössen aus, welche, wie wir sogleich zeigen wollen, für alle Complexionen ohne Unterschied des Ranges giltig ist. Es wurde seinerzeit bemerkt, dass in denjenigen von den Gleichungen (10), welche ein vollständiges und zugleich widerspruchfreies System bilden, jede der Grössen:

$$[\beta_1-1,\ldots,\beta_q]$$

nur Einmal als Unbekannte vorkommt, eine Bemerkung, welche selbstverständlich auch für die Grössen

$$\left[\underset{K}{\beta_1-1,\ldots,\beta_q}\right]$$

im Systeme (18) Geltung hat. Da hiebei der Rang der Complexion $\beta_1,\ldots,\beta_q$ von Null verschieden sein muss, somit β_1 den Werth 1 noch annehmen kann, so kann der Rang der letzteren Grössen bis auf Null herabsinken, was übrigens schon daraus hervorgeht, dass die erwähnten Gleichungen hinreichen, um alle Ausdrücke der genannten Art zu berechnen. Ist umgekehrt ein solcher Ausdruck vom Range Null, also etwa

$$\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right],\quad \gamma_2+\ldots+\gamma_q=p-1$$

gegeben, so ist es leicht, jene Gleichung herzustellen, welche den vorgelegten Ausdruck enthält, und, wie natürlich, einen von Null verschiedenen Rang besitzt, da sie zu dem Systeme gehören soll, aus welchem die unbestimmten Factoren zu berechnen möglich ist. Es ist dies offenbar die folgende:

$$[1,\gamma_2,\ldots,\gamma_q]=\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]+\sum_{i=2}^{i=q}\lambda_i^K\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]$$

Die Grösse linker Hand gestattet aber auch die Zerlegung:

$$[1,\gamma_2,\ldots,\gamma_q]=\left[\underset{L}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]+\sum_{i=2}^{i=q}\lambda_i^L\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]$$

und hieraus folgt:

$$\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]=-\sum_{i=2}^{i=q}\left\{\lambda_i^K\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\lambda_i^L\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]\right\}$$

das ist:

$$=-\sum_{i=2}^{i=q}(\lambda_i^K-\lambda_i^L)\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\sum_{i=2}^{i=q}\lambda_i^L\left\{\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]\right\}$$

Da im zweiten Theile der rechten Seite nur Complexionen vom ersten Range auftreten, kann man

$$\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]=-\sum_{\mu=2}^{\mu=q}(\lambda_\mu^K-\lambda_\mu^L)\left[\underset{KL}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_\mu-1,\ldots,\gamma_q}\right]$$

substituiren und erhält dann

$$\left[\underset{K}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]-\left[\underset{L}{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q}\right]=-\sum_{i=2}^{i=q}(\lambda_i^K-\lambda_i^L)\left\{\left[\underset{K}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q}\right]-\sum_{\mu=2}^{\mu=q}\lambda_\mu^L\left[\underset{KL}{1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_\mu-1,\ldots,\gamma_q}\right]\right\}.$$

Es ist nun

$$\left[\begin{matrix}1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q\\ K\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}0,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q\\ KL\end{matrix}\right] + \sum_{\mu=2}^{\mu=q}\lambda_\mu^L\left[\begin{matrix}1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_\mu-1,\ldots,\gamma_q\\ KL\end{matrix}\right]$$

und, indem man diesen Werth in der vorigen Gleichung substituirt, endlich:

$$\left[\begin{matrix}0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q\\ K\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}0,\gamma_2,\ldots,\gamma_q\\ L\end{matrix}\right] = -\sum_{i=2}^{i=q}(\lambda_i^K-\lambda_i^L)\left[\begin{matrix}0,\gamma_2,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_q\\ KL\end{matrix}\right], \tag{20}$$

was zu beweisen war.

Wir werden in den folgenden Untersuchungen Veranlassung finden, diese Zerlegung weiter fortzusetzen, und die Gleichungen

$$\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots\beta_q\\ K,L\end{matrix}\right] = \sum_{\rho=1}^{\rho=q}\lambda_\rho^M\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ K,L,M\end{matrix}\right]$$

aufzustellen, welche ihrerseits zu einer analogen Discussion und zu weiterer Zerlegung Anlass geben. Dadurch gewinnen wir eine Reihe von Ausdrücken der Form

$$\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1\ldots,\beta_\sigma-1,\ldots,\beta_q\\ K,L,M,N\end{matrix}\right] \text{ u. s. w.}$$

welche wir nach der Anzahl der in der unteren Reihe stehenden Indices in eine Stufenfolge bringen, der zufolge Ausdrücke mit Einem lateinischen Index zur ersten Stufe, solche mit zwei lateinischen Indices zur zweiten Stufe u. s. w. zählen. Es ist klar, dass man nicht weiter als bis zur $p$ten Stufe fortschreiten kann.

Von den Klammerausdrücken irgend einer Stufe können im Allgemeinen nur jene in Ausdrücke der nächst höheren Stufe zerlegt werden, deren Rang von Null verschieden ist, also können umgekehrt aus den Ausdrücken einer bestimmten Stufe im Allgemeinen nicht alle Ausdrücke der nächst niederen Stufe zusammengesetzt werden, sondern nur diejenigen, deren Rang von Null verschieden ist. Ist aber die gedachte Zerlegung für alle Complexionen in jeder Stufe durchführbar, so lässt sich der Ausdruck:

$$\Sigma[\beta_1,\ldots,\beta_q]\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_q^{\beta_q},\quad \beta_1+\ldots+\beta_q = p \tag{21}$$

in p lineare Factoren zerlegen. In der That ist dann:

$$\sum[\beta_1,\ldots,\beta_q]\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_q^{\beta_q} = \sum\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_q^{\beta_q}\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^I\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ I\end{matrix}\right] = \sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^I\,\xi_\mu\sum\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ I\end{matrix}\right]\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_q^{\beta_q},$$

und da man für

$$\sum\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ I\end{matrix}\right]\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_\mu^{\beta_\mu-1}\ldots\xi_q^{\beta_q}$$

immer denselben Werth erhält, wie man auch μ wählen möge, so wird der obige Ausdruck gleich

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^I\,\xi_\mu\right)\cdot\left(\sum\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_q\\ I\end{matrix}\right]\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_k^{\beta_k-1}\ldots\xi_q^{\beta_q}\right)$$

worin nun der zweite Factor in derselben Weise weiter zerlegt werden kann. Man gewinnt also schliesslich die Gleichung:

$$\sum[\beta_1,\ldots,\beta_q]\,\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_q^{\beta_q} = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^I\,\xi_\mu\right)\cdot\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^{II}\,\xi_\mu\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^P\,\xi_\mu\right),$$

wie behauptet worden.

Die Factorenfolge rechts ist symmetrisch bezüglich der Indices $I, II, \ldots, P$, das heisst, sie behält denselben Werth, wenn man alle λ-Werthe irgend eines Systems gleichzeitig gegen die entsprechenden λ-Werthe eines anderen Systems, also beispielsweise

$$\lambda_2^K \text{ mit } \lambda_2^L \text{ und gleichzeitig } x_3^K \text{ mit } \lambda_3^L, \ldots, \lambda_q^K \text{ mit } \lambda_q^L$$

vertauscht. Bei jeder anderen Vertauschung ändert sich der Werth der rechten Seite. Man erkennt daraus, dass, je nachdem die Vertheilung der Wurzelwerthe λ in die p verschiedenen Systeme vorgenommen wurde, eine grössere oder geringere Zahl der Gleichungen (10) in Art. 18 und der analogen höheren Stufe erfüllt sein werden. Im Allgemeinen gibt es also unter allen möglichen Gruppirungen der λ-Werthe Eine, für welche die Anzahl der mit einander verträglichen Gleichungen des Systems (10) und der analogen höheren Stufe die grösste ist.

22.

Wir definiren nun den Ausdruck $\binom{K,L}{i}(F)$ durch die Gleichung:

$$\binom{K,L}{i}(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + \sum D_K(\beta_i, \ldots, \beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\begin{bmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ K, L \end{bmatrix}}{\lambda_\rho^K \begin{bmatrix} \rho \\ K, L \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)}, \tag{22}$$

$$\beta_1 + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_\rho + \ldots + \beta_q = p.$$

und suchen den Werth von

$$\delta F - \sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,L}{i}(F)\, \delta x_i.$$

Wie aus den Festsetzungen des Art. 20 erinnerlich ist, verwenden wir das Zeichen δ, um die Veränderung anzuzeigen, welche die unmittelbar auf dieses Zeichen folgende Grösse durch unendlich kleine Variationen der Integrationsconstanten erleidet. Das Zeichen δx_1 ist also gleich Null und wird in den folgenden Entwicklungen nur der Symmetrie wegen beibehalten.

Zunächst ist also:

$$\delta F = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)} \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) + \sum \frac{\partial F}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)} \delta(\beta_1, \ldots, \beta_q),$$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q < p, \qquad \beta_1 + \ldots + \beta_q = p,$$

und andererseits ist

$$\sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,L}{i}(F)\, \delta x_i = \sum_{i=1}^{i=q} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \delta x_i + \sum_{i=1}^{i=q} \delta x_i \sum D_I(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\begin{bmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ I, L \end{bmatrix}}{\lambda_\rho^I \begin{bmatrix} \rho \\ L \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)}$$

Subtrahirt man die letzte Gleichung von der unmittelbar vorhergehenden, nachdem zuvor für $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$ dessen ausführlicher Werth substitsirt worden ist, so folgt mit der Bezeichnung des Art. 20:

$$\delta F - \sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,K}{i}(F)\, \delta x_i = \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) + \sum \frac{\partial F}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)} \delta(\beta_1, \ldots, \beta_q)$$

$$- \sum_{i=1}^{i=q} \delta x_i \sum D_I(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\begin{bmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ I, L \end{bmatrix}}{\lambda_\rho^I \begin{bmatrix} \rho \\ I, L \end{bmatrix}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)}.$$

Das erste Glied der rechten Seite verbleibt in seiner gegenwärtigen Gestalt bis zum Schlusse der Transformation; das dritte kann in folgender Art geschrieben werden:

$$-\sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\rho}{I,\,L}} \sum \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q}{I,L} \sum_{i=1}^{i=q} D_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q)\partial x_i,$$

und dieser Ausdruck, in welchem

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_\rho+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q = p-1$$

zu halten ist, soll zunächst einer weiteren Transformation unterzogen werden. Wegen (17) in Art. 20 ist

$$-\sum_{i=1}^{i=q} D_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q) \equiv Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) - \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^l\,\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q),$$

und diese Beziehung verwandelt den zu transformirenden Ausdruck in den folgenden:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\rho}{I,\,L}} \sum \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q}{I,\,L} Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q)$$

$$-\sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\rho}{I,\,L}} \sum \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_q}{I,L} \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^l\,\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q).$$

Wir schreiben den ersten Theil dieses Ausdruckes in der Form:

$$\sum Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_q}{I,L}}{\lambda'_\rho \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\rho}{I,\,L}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)},$$

welche er dann bis zum Schlusse beibehält.

Im zweiten Theile des gefundenen Ausdruckes verändern wir die Ordnung der Summation und schreiben ihn wie folgt:

$$-\sum \partial(\beta_1,\ldots,\beta_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\rho}{I,\,L}} \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^l \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q}{I,\,L}$$

worin nun wieder die auf die Complexionen $(\beta_1,\ldots,\beta_q)$ bezügliche Summation der Bedingung

$$\beta_1+\ldots+\beta_q = p$$

unterworfen ist. In Folge aller dieser Veränderungen wird also:

$$\partial F - \sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,\,L}{i}(F)\,\partial x_i =$$

$$= \sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)} P(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) + \sum Z(\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho-1,\ldots,\alpha_q}{I,\,L}}{\lambda'_\rho \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\rho}{I,\,L}} \frac{\partial F}{\partial(\rho)}$$

$$+\sum \partial(\beta_1,\ldots,\beta_q) \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)} - \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\lambda'_\rho \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\rho}{I,\,L}} \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^l \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}{I,L} \right\}.$$

Von den Ausdrücken

$$\sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i' \left[\underset{I,\,L}{\beta_1, \ldots \beta_i - 1, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q}\right],$$

die im letzten Gliede auftreten, kann ein Theil in einen Klammerausdruck erster Stufe zusammengezogen werden denn wir wissen aus dem vorigen Artikel, dass

$$\left[\underset{L}{\beta_1, \ldots \beta_i, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q}\right] = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i' \left[\underset{I,\,L}{\beta_1, \ldots \beta_i - 1, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q}\right],$$

sobald der Rang der Complexion $\beta_1, \ldots \beta_i, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q$ von Null verschieden ist. Ist dies jedoch nicht der Fall, so ist die rechte Seite in der letzten Gleichung dem Werthe nach von der linken Seite verschieden, das Gleichheitszeichen also nicht mehr giltig. Wir bezeichnen nun den Werth der rechten Seite, wie auch die Complexion der β beschaffen sein möge, durch

$$\left[\left(\underset{L}{\beta_1, \ldots \beta_i, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q}\right)\right] = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i' \left[\underset{I,\,L}{\beta_1, \ldots \beta_i - 1, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q}\right],$$

wonach

$$\left[\left(\underset{L}{\beta_1, \ldots \beta_i, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q}\right)\right]$$

für alle Complexionen $\beta_1, \ldots \beta_i, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q$, deren Werth von Null verschieden ist, mit

$$\left[\underset{L}{\beta_1, \ldots \beta_i, \ldots \beta_\rho - 1, \ldots \beta_q}\right]$$

zusammenfällt und erhalten mit dieser Bezeichnung schliesslich:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) + \sum Z(\gamma_1, \ldots, \gamma_q) \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\left[\underset{I,\,L}{\gamma_1, \ldots, \gamma_\rho - 1, \ldots, \gamma_q}\right]}{\lambda_\rho' \left[\underset{I,\,L}{\rho}\right]} \frac{\partial F}{\partial(\rho)} = \tag{23}$$

$$= \partial F - \sum_{i=1}^{i=q} \binom{I,\,L}{i} (F)\, \partial x_i - \sum \partial(\beta_1, \ldots \beta_\rho, \ldots, \beta_q) \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_\rho, \ldots \beta_q)} - \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\left[\left(\underset{L}{\beta_1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q}\right)\right]}{\left[\underset{L}{\rho}\right]} \frac{\partial F}{\partial(\rho)} \right\}$$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q < p - 1, \qquad \gamma_1 + \ldots + \gamma_q = p - 1, \qquad \beta_1 + \ldots + \beta_\rho + \ldots + \beta_q = p.$$

So oft nun die rechte Seite dieser Identität den Werth Null erhält, entsteht eine Gleichung, welche in Bezug auf die Grössen P und Z linear und homogen ist. Gelingt es also, die rechte Seite so oft gleich Null zu machen als P und Z vorhanden sind, und zwar so, dass die daraus entstehenden Gleichungen von einander unabhängig sind, so erhalten die Grössen P und Z insgesammt den Werth Null, und damit sind endlich alle Bedingungen des Problems erfüllt.

23.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung einiger Eigenschaften der Integrale der verschiedenen Systeme, welche in dem Vorkommen willkürlicher Grössen in den Differentialsystemen begründet und für die Lösung der noch zu erfüllenden Aufgabe von Bedeutung sind. Wir gehen hiebei von dem Systeme (K) aus, welches durch die Gleichungen (K) des Art. 21 definirt ist und als Repräsentant aller Systeme angesehen werden kann.

Denken wir uns das System (K) integrirt, während die in demselben enthaltenen willkürlichen Grössen, — welche übrigens, wie aus den Ausführungen des Art. 18 ersichtlich ist, in allen Systemen dieselben bleiben, —

keiner Beschränkung unterworfen werden, so muss jedes Integrale, das ist jede Function F, welche die Gleichungen (K) des Art. 21 identisch befriedigt, auch der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q)} = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ K\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}\rho\\ K\end{matrix}\right]} \frac{\partial F}{\partial(\rho)} \tag{24}$$

identisch Genüge leisten, und zwar für alle

$$\beta_1+\ldots+\beta_\rho+\ldots+\beta_q=p$$

ohne Unterschied. Ein Integrale, welches keine der Grössen

$$(1),\ (2),\ldots,(q)$$

enthält, kann also auch keine andere der Grössen $p$ter Ordnung enthalten, da die Annahme

$$\frac{\partial F}{\partial(1)}=\frac{\partial F}{\partial(2)}=\ldots\ldots=\frac{\partial F}{\partial(\rho)}=\ldots\ldots=\frac{\partial F}{\partial(q)}=0$$

für jede Complexion $\beta_1,\ldots\beta_q$ der $p$ten Ordnung die Relation:

$$\frac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}=0$$

zur Folge hat. Berechnen wir daher aus q von einander unabhängigen Integralen die Werthe der einzifferigen Grössen: $(1), (2),\ldots(q)$ und setzen dieselben in irgend ein anderes Integral desselben Systems ein, so müssen in letzterem alle Grössen $p$ter Ordnung gleichzeitig zum Ausfall kommen. Es gibt daher in jedem Systeme nur q Integrale, welche bezüglich der Grössen $p$ter Ordnung von einander unabhängig sind. Sonach kann jedes vollständige Integralsystem in zwei Gruppen zerlegt werden; die eine besteht aus q von einander unabhängigen Integralen, welche im Allgemeinen alle Grössen $p$ter Ordnung enthalten und wegen dieser Eigenschaft als wesentliche Integrale bezeichnet werden sollen; die zweite Gruppe umfasst alle übrigen Integrale des Systems und diese enthalten die Grössen $p$ter Ordnung nur insoferne, als sie als Functionen der wesentlichen Integrale dargestellt werden können.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\rho)}}{\left[\begin{matrix}\rho\\ K\end{matrix}\right]\dfrac{\partial F}{\partial(1)}}=\zeta_\rho,$$

so verwandelt sich die Gleichung (24) in die folgende:

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(1)}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ K\end{matrix}\right], \tag{25}$$

welche dadurch ausgezeichnet ist, dass sie einen den Gleichungen (9) im Art. 18 völlig analogen Bau besitzt. Wegen der Bedeutung dieser Gleichungen erkennt man hieraus, dass, wenn an Stelle der gegebenen Gleichung die neue:

$$F=0$$

gegeben wäre, das neue Problem die Wurzeln

$$\lambda_1^K,\ \lambda_2^K,\ldots\lambda_q^K$$

gegen die Grössen

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ldots,\zeta_q$$

umgetauscht, alle anderen λ-Werthe aber, und zwar in derselben Vertheilung wie beim gegebenen Probleme, beibehalten hat. Ausserdem ist die Zerlegung (18) im Art. 21 bei F für alle Complexionen $p$ter Ordnung ausführbar, da die Gleichung (24) ebenfalls für alle Complexionen $p$ter Ordnung giltig ist.

Wir nehmen nun an, dass dies auch bei der Zerlegung (19) desselben Artikels der Fall sei, dann ist für alle $\beta_1+\ldots+\beta_\rho+\ldots+\beta_q=p$:

$$\left[\underset{K}{\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}\right] \equiv \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left[\underset{K,\,L}{\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}\right]$$

und damit folgt:

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial F}{\partial(1)}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left[\underset{K,\,L}{\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}\right] = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \left[\underset{K,\,L}{\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots\beta_q}\right]$$

worin L alle von K verschiedenen Indices bedeuten kann. Ausser den Grössen ζ kann also jeder Wurzelcomplex des gegebenen Problems, den mit dem Index K versehenen ausgenommen, zur Construction der dem Probleme $F=0$ entsprechenden Differentialsysteme verwendet werden, doch sind hierbei die unbestimmten Factoren gleich

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_\rho \left[\underset{K,\,L}{\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}\right]$$

zu setzen. Sonach folgt aus der obigen Aufstellung insbesondere das System:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2^L,\ \ldots,\ \frac{dx_q}{dx_1}=\lambda_q^L \\ &\frac{d}{dx_1}(\alpha_1,\ldots\alpha_i,\ldots,\alpha_q)=\sum_{i=1}^{i=q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_q)\lambda_i^L,\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_q<p. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$\sum \frac{d}{dx_1}(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho)\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\zeta_\rho\left[\underset{K,\,L}{\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}\right] = -\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial(1)}},\ \beta_1+\ldots+\beta_\mu+\ldots+\beta_\rho+\ldots+\beta_q=p \qquad (27)$$

Die Gleichungen (26) finden sich in derselben Form und mit derselben Bedeutung der gebrauchten Zeichen auch im Systeme (L) des Problems $\varphi=0$; die Gleichungen (27) verwandeln sich aber, wenn man für die ζ wieder ihre Werthe restituirt, in die folgenden:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_\mu}\right)+\sum\frac{d}{dx_1}(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_q)\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\frac{\left[\underset{K,\,L}{\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q}\right]}{\left[\underset{K}{\rho}\right]}\frac{\partial F}{\partial(\rho)}=0,$$

welche endlich, wenn man, was offenbar berechtigt ist, das Zeichen

$$\frac{d}{dx_1}\quad\text{durch } D_L$$

ersetzt und bemerkt, dass

$$\left[\underset{K}{\rho}\right]=\lambda_\rho^L\left[\underset{K,\,L}{\rho}\right],$$

in die Relationen

$$\binom{L,\,K}{\mu}(F)=0$$

übergehen. Durch die Gleichungen (26) und (27) wird eine Operation definirt, welche häufig wiederkehren wird, so dass wir sie mit einem eigenen Namen bezeichnen wollen. Da es jedesmal nur auf die wesentlichen Integral des betreffenden Systems ankommt, soll also diese Operation als „die Zerlegung der Function F in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (L)" bezeichnet werden. Die Integration des Systems (K) im Art. 21 bewirkt demgemäss die Zerlegung der Function φ in ihre wesentlichen Integrale nach dem System (K) u. s. w.

Da nun φ in q wesentliche Integrale zerlegt werden kann, und jedes dieser Integrale der Gleichung (24) identisch genügt, so gilt die vorige Entwicklung für alle q wesentlichen Integrale. Bezeichnen wir also die q wesentlichen Integrale des Systems (K) durch

$$K_1,\, K_2, \ldots K_\sigma, \ldots K_q,$$

so ändern sich gleichzeitig mit F auch die Grössen ζ, so dass wir dieselben mit doppeltem Index versehen müssen. Demnach setzen wir:

$$\zeta_{\sigma,\rho} = \frac{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\rho)}}{\begin{bmatrix}\rho\\ K\end{bmatrix}\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}}$$

und erhalten nun neben den Gleichungen (26) die folgenden:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=q} \zeta_{\sigma,\rho} \sum \begin{bmatrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ K,L\end{bmatrix} D_L(\beta_1,\ldots,\beta_q) = -\frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}}$$

und diese geben mit Hilfe der Grössen $Z_{\sigma,\tau}$, welche die Eigenschaft haben, dass

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} \zeta_{\sigma,\rho} Z_{\sigma,\tau} = \begin{cases}0, \text{ wenn } \tau \gtrless \rho,\\ 1, \text{ wenn } \rho = \tau,\end{cases}$$

die Relationen:

$$\sum \begin{bmatrix}\beta_1\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ KL\end{bmatrix} D_L(\beta_1\ldots,\beta_\mu\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q) = -\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} Z_{\sigma,\rho} \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} \tag{28}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen ändern ihren Werth nicht, wenn μ mit ρ vertauscht wird; dasselbe ist jedoch bei der rechten Seite im Allgemeinen nicht der Fall. Um dies zu zeigen, bemerken wir, dass wegen der Definition der K die Identität besteht.

$$0 \equiv \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \left\{ \frac{\left(\dfrac{\partial K^\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} - \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(\mu)}} \frac{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\mu)}}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} \right\}$$

Multiplicirt man dieselbe mit $Z_{\sigma,\rho}$ und summirt bezüglich des σ zwischen den Grenzen 1 und q, so folgt:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} Z_{\sigma\rho} \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} = \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}}$$

und durch die Supposition:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} \lambda_{\sigma\rho} \frac{\left(\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}} = A(\mu,\rho) \tag{α}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K A(\mu,\rho) = \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}}.$$

Augenscheinlich ist nun $A(\mu,\rho)$ der Ausdruck, um den es sich handelt, der also die Eigenschaft besitzen soll, bei Vertauschung der μ mit ρ unverändert zu bleiben. Nehmen wir an, das letztere sei thatsächlich der Fall, so kann in der letzten Gleichung $A(\rho,\mu)$ statt $A(\mu,\rho)$ gesetzt werden, und sie lautet dann:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=b} \lambda_\mu^K A(\rho,\mu) = \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}\right) = \sum_\mu \frac{A(\rho,\mu)}{\begin{bmatrix}\mu \\ K\end{bmatrix}} \frac{\partial \varphi}{\partial(\mu)}. \tag{β}$$

Aus (α) folgt nun

$$\left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right) = \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \frac{A(\mu,\tau)}{\begin{bmatrix}\tau \\ K\end{bmatrix}} \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\tau)}$$

setzen wir also noch zur Abkürzung

$$\frac{A(\mu,\tau)}{\begin{bmatrix}\tau \\ K\end{bmatrix}} = B(\mu,\tau),$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) &= B(\mu,1)\frac{\partial \varphi}{\partial(1)} + B(\mu,2)\frac{\partial \varphi}{\partial(2)} + \ldots + B(\mu,q)\frac{\partial \varphi}{\partial(q)} \\
\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_\mu}\right) &= B(\mu,1)\frac{\partial K_1}{\partial(1)} + B(\mu,2)\frac{\partial K_1}{\partial(2)} + \ldots + B(\mu,q)\frac{\partial K_1}{\partial(q)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{\partial K_q}{\partial x_\mu}\right) &= B(\mu,1)\frac{\partial K_q}{\partial(1)} + B(\mu,2)\frac{\partial K_q}{\partial(2)} + \ldots + B(\mu,q)\frac{\partial K_q}{\partial(q)}.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung, dass

$$A(\mu,\rho) = A(\rho,\mu)$$

hat also die Relation:

$$\begin{vmatrix}
\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right), & \dfrac{\partial \varphi}{\partial(1)}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial(2)}, & \ldots, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial(q)} \\
\left(\dfrac{\partial K_1}{\partial x_\mu}\right), & \dfrac{\partial K_1}{\partial(1)}, & \dfrac{\partial K_1}{\partial(2)}, & \ldots, & \dfrac{\partial K_1}{\partial(q)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\left(\dfrac{\partial K_q}{\partial x_\mu}\right), & \dfrac{\partial K_q}{\partial(1)}, & \dfrac{\partial K_q}{\partial(2)}, & \ldots, & \dfrac{\partial K_q}{\partial(q)}
\end{vmatrix} = 0$$

zur Folge, welche beweist, dass die gemachte Voraussetzung nur dann bestehen kann, wenn φ ohne Rücksicht auf die Beziehungen des Problems, identisch als Function der wesentlichen Integrale K ausgedrückt werden kann. Dies setzt nun wieder voraus, dass φ selbst ein Integral des Systems (K) sei, oder mit anderen Worten, dass die Gleichungen (18), Art. 21, für alle Complexionen $p$ter Ordnung befriedigt sind.

Wir setzen für die folgenden Entwicklungen fest, dass die Zerlegung des Art. 21 durch alle Stufen möglich sei, dann sind selbstverständlich auch alle bisher nothwendig gewordenen Voraussetzungen erfüllt, und die Gleichungen (28) entstehen eindeutig aus der Zerlegung aller wesentlichen Integrale K in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (L). Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der Combinationen zweiter Classe mit Wiederholungen aus q Elementen, das ist

$$\binom{q+1}{2}.$$

Die Gleichungen (26) und (28) zusammengenommen bilden nun ein System von Differentialgleichungen, in welchem das System (L) unseres Hauptproblems mit enthalten ist. Multipliciren wir nämlich die Gleichungen (28) mit λ_μ^K und summiren für alle Werthe von $\mu=1$ bis $\mu=q$, so folgt:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^K\sum\left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{K,L} D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q)=-\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q}Z_{\sigma\rho}\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^K\frac{\left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\frac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}}$$

Da aber die K Integrale des Systems (K) sind, ist:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^K\frac{\left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}{\frac{\partial K_\sigma}{\partial(1)}}=\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}}\cdot\zeta_{\varepsilon,\mu}.$$

also wird der Ausdruck rechter Hand gleich

$$-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}}.$$

Links erhält man durch Änderung der Summationsordnung

$$\sum D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q)\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\lambda_\mu^K\left[\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_{KL}$$

und in Folge der obigen Voraussetzungen:

$$\sum D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q)\left[\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_L$$

durch diese Operationen folgen also die Gleichungen:

$$\sum\left[\beta_1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\right]_L D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\rho,\ldots,\beta_q)=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(1)}},\quad \rho=1,2,\ldots,q,$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen (26) eben das System (L) constituiren. Also sind die Gleichungen (28) eine Erweiterung des Systems (L), und zwar sind:

$$\binom{q+1}{2}-q=\binom{q}{2}$$

neue Gleichungen hinzugekommen. Unter den Integralen des Systems (26), (28) befinden sich somit auch die q a priori vorhanden gewesenen wesentlichen Integrale des Systems (L), welche im Vereine mit den $\binom{q}{2}$ neuen wesentlichen Integralen die Gesammtheit der wesentlichen Integrale des Systems (26), (28) repräsentiren.

Zerlegt man also die gegebene Gleichung in ihre wesentlichen Integrale nach dem System (K) und die letzteren wieder in deren wesentliche Integrale nach dem System (L), so entstehen $\binom{q+1}{2}$ Functionen, aus denen 1. ihrer Definition zufolge die wesentlichen Integrale des Systems (K) und 2. nach dem eben Bewiesenen auch die wesentlichen Integrale des Systems (L) zusammengesetzt werden können. Die Differentialgleichungen, welche diese Functionen definiren, machen identisch:

$$\binom{L,K}{i}(K_\sigma) = 0.$$

Es sei nun M_σ ein wesentliches Integrale des Systems (M), so bewirken die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} & D_K x_2 = \lambda_2^K, \ldots, D_K x_q = \lambda_q^K, \\ & D_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \ldots, \alpha_q) = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu + 1, \ldots, \alpha_q)\lambda_\mu^K, \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu + \ldots \alpha_q < p \\ & \sum D_k(\beta_1, \ldots, \beta_\mu, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma\mu}\left[\beta_1 \ldots \beta_i - 1, \ldots \underset{NK}{} \beta_\mu - 1, \ldots \beta_q\right] = -\frac{\left(\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right)}{\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}}, \beta_1 + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_\mu + \beta_q = p, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

in welchen

$$\eta_{\sigma\mu} = \frac{\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)}}{\left[\begin{matrix}\mu \\ M\end{matrix}\right]\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}} \tag{30}$$

zu verstehen ist, die Zerlegung von M_σ in seine wesentlichen Integrale nach dem System (K). Sind also die Functionen:

$$M_{\sigma,\tau}$$

die wesentlichen Integrale dieses Systems (29), so muss jedes derselben identisch den Gleichungen:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^K \left\{ \left(\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_i}\right) - \frac{\left(\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right)}{\dfrac{\partial M_\sigma}{\partial(i)}} \frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)} \right\} \tag{31}$$

und

$$0 = \frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1, \ldots; \beta_b)} - \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\dfrac{\partial M_{\sigma\tau}}{\partial(i)}}{\eta_{\sigma,i}\left[\begin{matrix} i \\ MK \end{matrix}\right]} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma\mu}\left[\begin{matrix}\beta_1 \ldots \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q \\ M,K\end{matrix}\right] \tag{32}$$

Genüge leisten.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma\tau}}$$

und summirt über τ von $\tau = 1$ bis $\tau = q$, so ergibt sich, da M_σ eine Function der wesentlichen Integrale $M_{\sigma,\tau}$, und daher:

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma,\tau}} \frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}$$

sein muss,

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma,\tau}} \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)}}{\eta_{\sigma i}\left[\begin{matrix} i \\ MK\end{matrix}\right]} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma,\mu}\left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q \\ MK\end{matrix}\right]$$

und durch Änderung der Summationsordnung:

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}=\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\eta_{\sigma\mu}\sum_{i=1}^{i=q}\frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]}{\eta_{\sigma i}\left[\begin{matrix}i\\ MK\end{matrix}\right]}\sum_{\tau=1}^{\tau=q}\frac{\partial M_\sigma}{\partial M_{\sigma,\tau}}\cdot\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)}$$

das ist

$$=\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\eta_{\sigma\mu}\sum_{i=1}^{i=q}\frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]}{\eta_{\sigma i}\left[\begin{matrix}i\\ MK\end{matrix}\right]}\frac{\partial M_\sigma}{\partial(i)}.$$

Wegen der Bedeutung von $\eta_{\sigma i}$ wird die rechte Seite dieser Gleichung auch

$$=\frac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\eta_{\sigma\mu}\sum_{i=1}^{i=q}\lambda_i^K\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\eta_{\sigma\mu}\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ M\end{matrix}\right]$$

also schliesslich:

$$=\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ M\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}\mu\\ M\end{matrix}\right]}\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)}$$

Die Gleichungen (29) ersetzen sonach die Beziehungen:

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}=\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\frac{\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ M\end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix}\mu\\ M\end{matrix}\right]}\frac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)},$$

da sie dieselben zur nothwendigen Folge haben.

Nun setzen wir in (32)

$$\vartheta_{\sigma,\tau,i}=\frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(i)}}{\eta_{\sigma i}\left[\begin{matrix}i\\ MK\end{matrix}\right]\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}$$

so dass dieselben die Form

$$\frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}=\sum_{i=1}^{i=q}\vartheta_{\sigma,\tau,i}\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\eta_{\sigma,\mu}\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]$$

annehmen und benützen die Relationen:

$$\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_q\\ MK\end{matrix}\right]=\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\lambda_\rho^L\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_{\rho-n}\\ MKL\end{matrix}\right],$$

um die vorigen in die folgenden zu transformiren:

$$\frac{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}}{\dfrac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}=\sum_{\rho=1}^{\rho=q}\lambda_\rho^L\sum_{i=1}^{i=q}\vartheta_{\sigma,\tau,i}\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\eta_{\sigma,\mu}\left[\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_\mu-1,\ldots,\beta_\rho-1,\ldots,\beta_q\\ MLK\end{matrix}\right].$$

m*

Diese zeigen, welche Werthe bei einer neuerlichen Zerlegung der Integrale $M_{\sigma,\tau}$ in wesentliche Integrale des Systems (L) als unbestimmte Factoren auftreten und es entsteht das Differentialsystem:

$$\left.\begin{array}{c} D_L x_2 = \lambda_2^L, \ldots, D_L x_q = \lambda_q^L \\ D_L(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q) = \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^L (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q), \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q < p \\ \sum D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{i=1}^{i=q} \vartheta_{\sigma,\tau,i} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma,\mu} \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ MLK\end{matrix}\right] = - \frac{\left(\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right)}{\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}, \end{array}\right\} \quad (33)$$

also endlich, wenn

$$\Theta_{\sigma,\tau,\omega}$$

solche Grössen sind, dass

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=q} \vartheta_{\sigma,\tau,i} \Theta_{\sigma,\tau,\omega} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \omega \gtrless i \\ 1, \text{ wenn } \omega = i \end{cases}$$

$$\sum D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma,\mu} \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \ldots, \beta_q \\ MKL\end{matrix}\right] = - \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \Theta_{\sigma,\tau,i} \frac{\left(\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right)}{\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}. \quad (34)$$

Multipliciren wir nun die letzte Gleichung mit λ_ρ^K und summiren bezüglich des ρ von $\rho = 1$ bis $\rho = q$, so folgt:

$$\sum D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \eta_{\sigma,\mu} \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q \\ ML\end{matrix}\right] = - \sum_\tau \frac{\Theta_{\sigma,\tau,i}}{\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}} \cdot \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \lambda_\rho^k \left(\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right),$$

worin die rechte Seite wegen Gleichungen (31) und durch die Einsetzung der Werthe von $\vartheta_{\sigma,\tau,i}$ und $\eta_{\sigma,\mu}$ successive in

$$- \frac{\left(\frac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial M_\sigma}{\partial(1)}}$$

übergeht. Ersetzt man nun auch links $\eta_{\sigma,\mu}$ durch seinen weiter oben angegebenen Werth und vereinigt alle Glieder der Gleichung auf einer Seite, so folgt:

$$\left(\frac{\partial M_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum D_L(\beta_1 \ldots \beta_q) \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \frac{\left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_q \\ ML\end{matrix}\right]}{\lambda_\mu^L \left[\begin{matrix}\mu \\ ML\end{matrix}\right]} \cdot \frac{\partial M_\sigma}{\partial(\mu)} = 0, \text{ das heisst:}$$

$$\binom{L, M}{i}(M_\sigma) = 0.$$

Variirt man in (34) σ und τ der Reihe nach in $1, 2, \ldots, q$, so ergibt eine Reihe von Schlüssen, welche den obigen ganz analog ist, dass sich aus den so erhaltenen Gleichungen eindeutig die Relationen:

$$\sum \left[\begin{matrix}\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\rho - 1, \beta_q \\ MKL\end{matrix}\right] D_L(\beta_1, \ldots, \beta_q) = - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} H_{\sigma,\mu} \sum_{\tau=1}^{\tau=q} \Theta_{\sigma,\tau,i} \frac{\left(\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial x_\rho}\right)}{\frac{\partial M_{\sigma,\tau}}{\partial(1)}}. \quad (35)$$

ergeben, worin die Grössen $H_{\sigma,\mu}$ die im gegenwärtigen Falle eintretenden $Z_{\sigma,\mu}$ bedeuten. Dieselben bleiben bei einer Vertauschung von i, μ und ρ untereinander ungeändert und zwar auf beiden Seiten, wenn alle Integrale M_σ identisch durch die wesentlichen Integrale $M_{\sigma,\tau}$ dargestellt werden können, was nach den

Voraussetzungen, die den vorliegenden Untersuchungen zu Grunde liegen, ohnehin der Fall sein muss. Die Anzahl dieser Gleichungen ist sonach gleich der Anzahl der Combinationen der dritten Classe mit Wiederholungen aus q Elementen, das ist

$$\binom{q+2}{3}.$$

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass in dem System (26), (35) das System (L) des ursprünglichen Problems wieder enthalten ist, so dass das letztere zu $\binom{q+2}{3}$ Gleichungen ergänzt worden ist.

Da die Ausdrücke, auf welche sich unsere Schlüsse bezogen haben, auch wenn man in der begonnenen Weise weiter schreitet, stets dieselbe Form behalten, so ist klar, wie sich diese Resultate erweitern lassen; sie enthalten die Hilfsmittel, welche uns endlich die Befriedigung der aufgestellten Forderungen ermöglichen.

24.

Wir halten vorderhand noch an den Voraussetzungen fest, welche den Entwicklungen des vorigen Artikels zu Grunde liegen und ziehen also nur solche Gleichungen in Betracht, bei denen die am Schlusse des Art. 21 angeführte Zerlegung durch alle Stufen durchgeführt werden kann. In diesem Falle kann die allgemeine Lösung sofort gefunden werden.

Wir bezeichnen nach den Ergebnissen des Art. 20, welchen zufolge — und zwar, wie leicht ersichtlich, in jedem Systeme — je $(q-1)$ Integrations-Constanten unabhängig sind, $(q-1)$ Integrale der zweiten Gruppe in irgend einem Systeme, also etwa im Systeme (K) durch

$$w_2^K,\ w_3^K, \ldots, w_q^K$$

und setzen alle Integrale, aus welchem Systeme immer sie herrühren mögen, in der Form:

$$W^{rK}-\Phi^K(w_2^K, w_3^K, \ldots w_q^K) = 0$$

voraus, in der Absicht, die Variation δF in Gleichung (23) des Art. 22 von vornherein gleich Null zu machen.

Setzen wir nun in dieser Gleichung $L = II$ und für F ein wesentliches Integrale des Systems (II), so verschwinden in der rechten Seite die Variationen der Grössen $p$ter Ordnung. Stellen wir dann die Gleichungen

$$\binom{I,\ II}{i}(F) = 0$$

auf, so verschwindet die rechte Seite, da δF wegen der besonderen Form der Integrale von vornherein verschwindet, und das System (I) wird um $\binom{q}{2}$ Gleichungen vermehrt. Man kann also durch diesen Vorgang die rechte Seite q mal der Null gleich machen und demzufolge q Gleichungen von der Art erzielen, wie sie zum Schlusse des Art. 22 postulirt worden sind.

Nehmen wir ein wesentliches Integrale des Systems (III) und zerlegen dasselbe zunächst in seine wesentlichen Integrale nach dem Systeme (II), so bewirken die hierauf bezüglichen Gleichungen, dass in der Gleichung (23) die Variationen $p$ter Ordnung verschwinden, da durch die aufgestellten Gleichungen die Coëfficienten derselben identisch der Null gleich werden, wie im vorigen Artikel bewiesen worden ist. Durch diese Zerlegung erhalten wir $\binom{q+1}{2}$ Functionen, welche untereinander unabhängig sind und aus denen sich die wesentlichen Integrale des Systems (III) zusammensetzen lassen. Aber jedes andere wesentliche Integrale des Systems (III) muss, wie aus dem Charakter eines vollständigen Integralsystems ohneweiters folgt, aus eben denselben Functionen zusammengesetzt werden können. Fügen wir also noch die Anforderung bei, diese $\binom{q+1}{2}$ wesentlichen Integrale der zweiten Stufe noch weiter in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (I) zu zerlegen, so wird nach dem Bewiesenen:

$$\binom{I,\ III}{i}(F) = 0$$

und in der rechten Seite besitzen alle Theile den Werth Null. Die linke Seite aber zerfällt in $\binom{q+1}{2}$ Theile von derselben Form, deren jeder für sich gleich Null sein muss, da sie mit willkürlichen Bestandtheilen multiplicirt erscheinen. Bei diesem Vorgange sind

$$\binom{q+1}{2}$$

Gleichungen der verlangten Form entstanden und gleichzeitig ist das System (I) auf

$$(q-1)+\binom{q+p-1}{p-1}+\binom{q+2}{3}$$

Gleichungen vervollständigt worden.

In dieser Weise fortschreitend erkennt man, dass durch successive Zerlegung der wesentlichen Integrale vom Systeme (P) angefangen bis zum System (I) die linke Seite der Gleichung (23) in

$$\binom{q-1+p-1}{q-1}$$

Theile zerfällt, deren jeder, sowie der Ausdruck, aus dem sie entstanden, bezüglich der Z linear ist und von denen jeder einzelne gleich Null werden muss, da sie mit willkürlichen Factoren multiplicirt erscheinen. Da nun durch diesen Vorgang so viele Gleichungen gewonnen werden als Z vorhanden sind, genügt es, zu denselben jene Gleichungen hinzuzufügen, welche aus den noch vorhandenen

$$\binom{q-1+p}{p-1}$$

von einander unabhängigen Integralen der zweiten Gruppe irgend eines Systems entstehen, um endlich alle Gleichungen zu haben, welche erfordert werden. Da die letzteren dann untereinander unabhängig sind, so folgt aus denselben ohneweiters:

$$P=0,\ Z=0$$

und die Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt. Durch diese Rechnungen ist gleichzeitig das System (I) auf

$$(q-1)+\binom{q+p-1}{p-1}+\binom{q-1+p}{p}=\binom{q+p}{p}+(q-1)$$

Gleichungen angewachsen. Es ist also jetzt complet, denn es besteht aus ebensoviel Gleichungen als Dependente in ihm enthalten sind. Die Integralgleichungen desselben verwandeln nun die Gleichungen $P=o$ in Pfaff'sche Probleme und die Integration dieser letzteren ergibt endlich das definitive Integralsystem.

In den Fällen, bei welchen die bisher festgehaltenen Voraussetzungen nicht eintreffen, kann man in allen zu integrirenden Systemen die Zerlegung der Klammerausdrücke auf diejenigen Complexionen beschränken, für welche sie in dem gegebenen Stadium der Rechnung möglich ist und im Übrigen den soeben beschriebenen Rechnungsvorgang beibehalten. Dies hat zur Folge, dass die erhaltenen Integrale nicht, wie gefordert werden muss, als Functionen ihrer Unter Intergrale dargestellt werden können. Man wird vielmehr durch Einsetzung der Integralwerthe in jene wesentlichen Integrale, deren Zerlegung sie ihren Ursprung verdanken, Bedingungsgleichungen für gewisse Grössen:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q) \text{ der } p\text{ten Ordnung}$$

erhalten. Diese Bedingungsgleichungen erstrecken sich nicht bloss auf diejenigen Grössen dieser Art, welche den Rang Null besitzen, da schon durch die zweite Zerlegung alle Grössen nullten Ranges von der Form

$$\left[\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q\\ K\end{matrix}\right],\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_q=p-1$$

im Allgemeinen aus den Klammerausdrücken der nächst höheren Stufe nicht mehr zusammengesetzt werden können und daher auch von den Ausdrücken

$$[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q],\ \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q=p$$

einige, deren Rang von Null verschieden ist, nicht mehr jenen Werth annehmen, der ihnen der gegebenen Gleichung wegen zukommen sollte. Wir entwickeln daher, nachdem sämmtliche λ-Werthe berechnet und in p Systeme eingereiht worden sind, das Product

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^I \xi_\mu\right) \ldots \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^{II} \xi_\mu\right) \ldots \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^P \xi_\mu\right) = \sum \{\beta_1, \ldots, \beta_q\} \, \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_q^{\beta_q}, \; \beta_1 + \ldots + \beta_q = p$$

und legen die so erhaltenen Ausdrücke $\{\,\}$ der Rechnung zu Grunde. Mit diesen Ausdrücken, welche die erforderlichen Zerlegungen durch alle Stufen hindurch gestatten, kann nun der oben beschriebene Vorgang vollständig durchgeführt werden. Die solcherart erhaltenen Werthe der Variabeln erfüllen nun ihrerseits die gegebene Gleichung ebenfalls nicht und wir erhalten durch Einsetzung derselben in die gegebene Gleichung abermals eine Bedingungsgleichung. Da nun aber klar ist, dass von den Ausdrücken $[\beta_1, \ldots, \beta_q]$ nur jene mit den gleichnamigen $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ nothwendig zusammenfallen müssen, welche zur Construction der Gleichungen (12) verwendet wurden, so folgt sofort, dass alle anderen $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$, deren Complexion $\beta_1, \ldots, \beta_q$ nicht in den (12) auftritt, in die Bedingungsgleichung eintreten können. Es sind also gleichsam alle Bedingungsgleichungen des vorigen Falles in eine einzige zusammengeschoben worden; da aber die letztere willkürliche Functionen enthält, so zerfällt sie in mehrere Theile, deren jeder für sich gleich Null gemacht werden muss.

Bezeichnen wir nun, um kürzer reden zu können, diejenigen Complexionen für $\beta_1, \ldots, \beta_q$, für welche die Ausdrücke

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_q\} \text{ mit den gleichnamigen } [\beta_1, \ldots, \beta_q]$$

nicht zusammenfallen, da die ihnen entsprechenden Grössen $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ gewissen Bedingungen unterliegen, als bedingte Complexionen, und setzen in (23) Art. 22 φ an Stelle von F, so werden die Ausdrücke $\binom{I, K}{i}(\varphi)$ identisch Null und es folgt:

$$\sum \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1 \ldots \alpha_q)} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) + \frac{\partial\varphi}{\partial(1)} \sum \left\{ {\gamma_1, \ldots \gamma_q \atop I} \right\} Z(\gamma_1 \ldots \gamma_q) =$$

$$-\sum \partial(\beta_1, \ldots, \beta_q) \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1 \ldots \beta_q)} - \sum_{i=1}^{i=q} \lambda_i^I \left\{ {\beta_1, \ldots, \beta_i - 1, \ldots, \beta_q \atop I} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial(1)} \right\},$$

wie man übrigens durch directe Berechnung der Summe

$$\sum \left\{ {\gamma_1 \ldots \gamma_q \atop I} \right\} Z(\gamma_1 \ldots \gamma_q)$$

in Verbindung mit der Forderung, dass $\partial\varphi$ gleich Null sei, finden kann. Man erkennt hieraus, dass man die Bedingungsgleichung jederzeit dadurch erfüllen kann, dass man die bedingten Grössen $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ gleich absoluten Constanten setzt, welche letzteren übrigens, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, auch gleich Null gemacht werden können.

Was endlich die Form der Bedingungsgleichung anbelangt, so ist dieselbe augenscheinlich eine Beziehung zwischen den Ableitungen der in den letzten Integralgleichungen enthaltenen willkürlichen Functionen nach den dieselben constituirenden Argumenten:

$$\overset{I}{w_2}, \ldots \overset{I}{w_q}; \ldots, \overset{II}{w_2}, \ldots, \overset{II}{w_q}; \ldots, \overset{P}{w_2}, \ldots, \overset{P}{w_q};$$

zerfällt also im Allgemeinen in mehrere partielle Differentialgleichungen der $p$ten Ordnung, jedoch mit je $(q-1)$ Independenten. Die Bedingungsgleichung, respective die einzelnen Theile, in die sie zerlegt werden muss, haben also zur Folge, dass die eben genannten Argumente nicht mehr, wie früher, untereinander unabhängig, sondern in festen Verbindungen in die betreffenden willkürlichen Functionen eintreten, so dass diese letzteren im äussersten Falle in die Form:

$$\Phi_2(w_2) + \Phi_3(w_3) + \ldots + \Phi_q(w_q)$$

aufgelöst werden müssen.

Soll nun der in Art. 20 ausgesprochene Satz über die Anzahl der willkürlichen Functionen auch in diesem Falle seine Giltigkeit beibehalten, so müssen unter der Bezeichnung: „willkürliche Function der Argumente $w_2, \ldots, w_q$" auch Functionen in aufgelöster Form verstanden werden oder mit anderen Worten, es müssen immer alle Bestandtheile, welche die Integrale $w_2, \ldots, w_q$ eines und desselben Systems enthalten, als eine einzige Function dieser Argumente angesehen werden. Da aber den gebrauchten Ausdrücken der eben präcisirte Sinn ohne Zwang beigelegt werden kann, so kann der citirte Satz in unveränderter Form aufrecht erhalten bleiben.

Wie weit die erwähnte Auflösung der Functionsform zu gehen hat und wie dieselbe zu vollziehen ist, hängt natürlich damit zusammen, wie weit und in welcher Art die Zerlegung des Art. 21 ausführbar ist und muss in jedem einzelnen Falle durch die Rechnung selbst gefunden werden.

Für die praktische Rechnung ist es nützlich zu bemerken, dass die Completirungsgleichungen der verschiedenen Systeme durch partielle Differentiation gewonnen werden können. Setzen wir, was zum Beweise genügt, voraus, dass das wesentliche Integrale K_σ des Systems (K) von den einzifferigen Grössen $p$ter Ordnung nur (σ) enthalte und schreiben für alle Fälle die Klammern $\} \{$ anstatt der $[\ ]$, so folgt aus den Gleichungen (24) des Art. 23:

$$\frac{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_q)}}{\dfrac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)}} = \frac{\left\{\begin{matrix} \beta_1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} \sigma \\ K \end{matrix}\right\}}.$$

Besitzt also, wie überall in den Schlussgleichungen K_σ die Form:

$$K_\sigma = W_\sigma - \Phi(w_2^K, \ldots, w_q^K) = 0,$$

so folgt durch partielle Ableitung nach x_i

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{\left\{\begin{matrix} \beta_1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} \sigma \\ K \end{matrix}\right\}} \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_\sigma, \ldots, \beta_i + 1, \ldots, \beta_q)$$

und wegen:

$$\left\{\begin{matrix} \beta_1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K \end{matrix}\right\} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left\{\begin{matrix} \beta_1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ K, L \end{matrix}\right\},$$

welche Gleichung nun für alle Complexionen und zwar in jeder Stufe richtig ist, auch

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma, \ldots, \beta_i + 1, \ldots, \beta_q)}{\left\{\begin{matrix} \sigma \\ K \end{matrix}\right\}} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L \left\{\begin{matrix} \beta_1, \ldots, \beta_\mu - 1, \ldots, \beta_\sigma - 1, \ldots, \beta_q \\ KL \end{matrix}\right\}.$$

$$\beta_1 + \ldots + \beta_\mu + \ldots + \beta_\sigma + \ldots + \beta_i + \ldots + \beta_q = p.$$

Diese Gleichung kann auch in der Form:

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{\left\{\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \ldots, \alpha_\sigma - 1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q \\ KL \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} \sigma \\ K \end{matrix}\right\}} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^L (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu + 1, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q)$$

$$= \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)} \frac{\left\{\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \ldots, \alpha_\sigma - 1, \ldots, \alpha_i, \ldots \alpha_q \\ KL \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} \sigma \\ K \end{matrix}\right\}} D_L(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_q),$$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu + \ldots + \alpha_\sigma + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p - 1$$

geschrieben werden und die letzte ist unmittelbar identisch mit:

$$0 = \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i}\right) + \sum D_L(\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\sigma,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_q) \frac{\left\{\begin{matrix}\beta_1,\ldots,\beta_\mu,\ldots,\beta_\sigma-1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_q \\ KL\end{matrix}\right\}}{\lambda_\sigma^L \left\{\begin{matrix}\sigma \\ KL\end{matrix}\right\}} \frac{\partial K_\sigma}{\partial(\sigma)},$$

das ist mit der Gleichung

$$0 = \binom{LK}{i}(K_\sigma)$$

wie sie sich bei den gemachten Voraussetzungen über K_σ ergeben würde. Hiemit ist zugleich die aufgestellte Behauptung bewiesen.

In allen Integrationen, welche bei der successiven Construction des definitiven Intergralsystems zu vollziehen sind, sind gewisse Ableitungen $p$ter Ordnung als unbestimmt anzusehen, was zur Folge hat, dass dieselben in die Integralgleichungen im Allgemeinen nicht nur als Functionsargumente im gewöhnlichen Sinne, sondern auch als Integranden unter Quadraturen eintreten. Es ist also nothwendig, zu zeigen, wie solche Quadraturen sich Differentiationen gegenüber, welche einem anderen Systeme angehören, verhalten. Es genügt hiebei, zu zeigen, wie die partielle Differentiation auszuführen ist. Sei also Q_K eine Quadratur nach dem System (K), wesshalb wir schreiben:

$$Q_K = \int q d_K x_1,$$

so ist offenbar:

$$D_K \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_2^K}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_q^K}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} = \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

$$D_K \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda_2^K}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_q^K}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} = \frac{\partial q}{\partial x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_K \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} + \frac{\partial \lambda_2^K}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_q^K}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial Q_K}{\partial x_q} = \frac{\partial q}{\partial x_q}.$$

Die Integration dieses Systems, welches in jedem einzelnen Falle auszuführen ist, gibt die Regeln für die partielle Differentiation. Wegen der rechten Seiten in den vorigen Gleichungen treten nun unter die Integralzeichen Ausdrücke ein, wie

$$\frac{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_i},$$

da aber die Ausdrücke, welche von Integralzeichen frei sind, wie aus dem kurz vorher Bewiesenen folgt, sich in Ausdrücke verwandeln lassen, welche bloss das Operationszeichen D_L enthalten, so müssen, damit man integriren könne, auch die Theile unter dem Integralzeichen auf dieselbe Form gebracht werden. Es ist nun

$$D_K\Omega - D_L\Omega = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (\lambda_\mu^K - \lambda_\mu^L) \frac{\partial \Omega}{\partial x_\mu}$$

und diese Formel muss dazu benützt werden, um möglichst viele von den partiellen Ableitungen durch die totalen Differentiale D_K und D_L auszudrücken, von denen die ersteren durch partielle Integration entfernt werden können. Es ist nicht vorauszusehen, dass hiedurch alle partiellen Ableitungen zum Verschwinden gebracht werden können, doch kann man durch wiederholte Anwendung der Formeln:

$$\frac{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_\rho} = \frac{\partial(\beta_1-1,\ldots,\beta_\rho+1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_1}, \quad D_K(\beta_1-1,\ldots,\beta_\rho+1,\ldots,\beta_q) = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda_\mu^K \frac{\partial(\beta_1-1,\ldots,\beta_\rho+1,\ldots,\beta_q)}{\partial x_\mu}$$

alle Ausdrücke dieser Art in partielle Ableitungen der bedingten Grössen verwandeln. Der Complex, der nun unter dem Integralzeichen verbleibt, enthält also nur bedingte Grössen und ist entweder identisch gleich Null oder verschwindet in Folge der Bedingungsgleichungen aus der Rechnung. Ist aber keines von beiden der Fall, so kann derselbe gleich Null gesetzt werden, da stets alle Bedingungsgleichungen entfallen, sobald die bedingten Ableitungen den Werth Null erhalten. Man erhält dann Ausdrücke, welche ausserhalb und innerhalb der Integralzeichen totale Differentiale derselben Art enthalten und nach den im vorigen Abschnitt entwickelten Principien weiter zu behandeln sind.

Die in diesem Abschnitte vorgenommenen Untersuchungen beruhen in mehrfacher Hinsicht auf der Voraussetzung, dass die Werthe λ, welche aus einer und derselben Gleichung (12) fliessen, untereinander verschieden sind. Trifft dies nicht ein, so fallen natürlich diejenigen unter den Integralen $w_2, \ldots, w_q$, welche aus derselben Wurzel entspringen, zusammen und dies hat zur Folge, dass bei der Zerlegung in wesentliche Integrale in zwei oder mehreren der willkürlichen Functionen einige oder alle Argumente w dieselben sind. In diesen Fällen muss man, um dass allgemeine Integrale zu finden, die Methode anwenden, welche im vorigen Abschnitte bei gleicher Gelegenheit benützt wurde und übrigens bei ähnlichen Anlässen in der Analysis allgemein gebräuchlich ist.

Zum Schlusse ist noch zu bemerken, dass durch Einführung neuer Independenten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ die λ-Werthe eine lineare Transformation erfahren. In der That ist, wenn $\dfrac{d\xi_i}{d\xi_1} = \Lambda_i$ und $\dfrac{dx_\rho}{dx_1} = \lambda_\rho$ gesetzt wird:

$$\Lambda_i = \frac{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho} \lambda_\rho}{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho} \lambda_\rho}, \text{ also bei der linearen Transformation: } \xi_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=q} \alpha_{i_\rho} x_\rho \qquad \Lambda_i = \frac{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \alpha_{i_\rho} \lambda_\rho}{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=q} \alpha_{1\rho} \lambda_\rho}.$$

Man erkennt hieraus, dass etwa vorhandene Null- oder Unendlich-Werthe der λ durch lineare Substitution der Independenten in endliche, von Null verschiedene Λ-Werthe verwandelt werden können. Betrachtet man noch die Substitutionsparameter als allgemeine, mit den gegebenen Grössen des Problems in keiner Relation stehende Constante, so können auf diesem Wege auch keine neuen Null- oder Unendlichkeits-Werthe der λ eingeführt werden. Sonach können diese bisher nicht berücksichtigten speciellen Fälle jederzeit auf den allgemeinen Fall zurückgeführt werden und damit sind unsere gegenwärtigen Untersuchungen geschlossen.

25.

Ist nun ein concretes Beispiel gegeben, wie das folgende:

$$\begin{gathered}(300) + (\lambda'_2 + \lambda''_2 + \lambda'''_2)(210) + (\lambda'_3 + \lambda''_3 + \lambda'''_3)(201) + (\lambda'_2\lambda''_2 + \lambda''_2\lambda'''_2 + \lambda'''_2\lambda'_2)(120) + (\lambda'_3\lambda''_3 + \lambda''_3\lambda'''_3 + \lambda'''_3\lambda'_3)(102) + \\ + \{\lambda'_2\lambda''_3 + \lambda'_3\lambda''_2 + \lambda'''_2[\lambda'_3 + \lambda''_3] + \lambda'''_3[\lambda'_2 + \lambda''_2]\}(111) + \{\lambda'''_2[\lambda''_2\lambda'_3 + \lambda''_3\lambda'_2] + \lambda'_2\lambda''_2\lambda'''_3\}(021) \\ + \{\lambda'_3\lambda''_3\lambda'''_2 + \lambda'''_3[\lambda'_3\lambda''_2 + \lambda'_2\lambda''_3]\}(012) + \lambda'_2\lambda''_2\lambda'''_2(030) + \lambda'_3\lambda''_3\lambda'''_3(003) = 0,\end{gathered}$$

in welchem die Grössen λ'_2, λ''_2, etc. Constante bedeuten, so empfiehlt es sich, zu Beginn der Rechnung alle Complexionen zu verzeichnen, welche während derselben in Verwendung kommen. In unserem Falle sind dies die Complexionen:

nullter Ordnung: (000)
erster „ : (100), (010), (001)
zweiter „ : (200), (110), (101), (020), (011), (012)
dritter „ : (300), (210), (201), (120), (111), (102), (030), (021), (012), (003).

Für die Wurzelwerthe λ_2 besteht die Gleichung:

$$0 = \lambda_2^3 - (\lambda'_2 + \lambda''_2 + \lambda'''_2)\lambda_2^2 + (\lambda'_2\lambda''_2 + \lambda''_2\lambda'''_2 + \lambda'''_2\lambda'_2)\lambda_2 - \lambda'_2\lambda''_2\lambda'''_2,$$

deren drei Wurzeln, respective mit λ'_2, λ''_2, λ'''_2 zusammenfallen. Die Gleichung für λ_3, das ist

$$0 = \lambda_3^3 - (\lambda'_3 + \lambda''_3 + \lambda'''_3)\lambda_3^2 + (\lambda'_3\lambda''_3 + \lambda''_3\lambda'''_3 + \lambda'''_3\lambda'_3)\lambda_3 - \lambda'_3\lambda''_3\lambda'''_3,$$

gibt für λ_3 die Werthe λ_3', λ_3'', λ_3''' und das Product

$$(\xi_1+\lambda_2'\xi_2+\lambda_3'\xi_3)(\xi_1+\lambda_2''\xi_2+\lambda_3''\xi_3)(\xi_1+\lambda_2'''\xi_2+\lambda_3'''\xi_3)$$

zeigt, dass die Gössen

$$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3], \quad \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 3$$

ausfallen; die gegebene Gleichung ist also Integrale in allen drei Systemen. Wenn wir nun die Wurzelwerthe λ_2' und λ_3' zum Aufbaue eines ersten Differentialsystems verwenden, folgt:

$$\begin{bmatrix}200\\ I\end{bmatrix}=1, \quad \begin{bmatrix}110\\ I\end{bmatrix}=\lambda_2''+\lambda_2''', \quad \begin{bmatrix}101\\ I\end{bmatrix}=\lambda_3''+\lambda_3''', \quad \begin{bmatrix}020\\ I\end{bmatrix}=\lambda_2''\lambda_2''', \quad \begin{bmatrix}011\\ I\end{bmatrix}=\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''', \quad \begin{bmatrix}002\\ I\end{bmatrix}=\lambda_3''\lambda_3'''$$

und das erste Differentialsystem lautet:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2', \quad \frac{dx_3}{dx_1}=\lambda_3',$$

$$\frac{d(000)}{dx_1}=(100)+\lambda_2'(010)+\lambda_3'(001),$$

$$\frac{d(100)}{dx_1}=(200)+\lambda_2'(110)+\lambda_3'(101),$$

$$\frac{d(010)}{dx_1}=(110)+\lambda_2'(020)+\lambda_3'(011),$$

$$\frac{d(001)}{dx_1}=(101)+\lambda_2'(011)+\lambda_3'(002);$$

$$\frac{d}{dx_1}(200)=(300)+\lambda_2'(210)+\lambda_3'(201),$$

$$\frac{d}{dx_1}(110)=(210)+\lambda_2'(120)+\lambda_3'(111),$$

$$\frac{d}{dx_1}(101)=(201)+\lambda_2'(111)+\lambda_3'(102),$$

$$\frac{d}{dx_1}(020)=(120)+\lambda_2'(030)+\lambda_3'(021),$$

$$\frac{d}{dx_1}(011)=(111)+\lambda_2'(021)+\lambda_3'(012),$$

$$\frac{d}{dx_1}(002)=(102)+\lambda_2'(012)+\lambda_3'(003);$$

$$\frac{d}{dx_1}(300)+(\lambda_2''+\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(210)+(\lambda_3''+\lambda_3''')\frac{d}{dx_1}(201)+\lambda_2''\lambda_2'''\frac{d}{dx_1}(120)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(111)+\lambda_3''\lambda_3'''\frac{d}{dx_1}(102)=0$$

$$\frac{d}{dx_1}(210)+(\lambda_2''+\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(120)+(\lambda_3''+\lambda_3''')\frac{d}{dx_1}(111)+\lambda_2''\lambda_2'''\frac{d}{dx_1}(030)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(021)+\lambda_3''\lambda_3'''\frac{d}{dx_1}(012)=0$$

$$\frac{d}{dx_1}(201)+(\lambda_3''+\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(111)+(\lambda_3''+\lambda_3''')\frac{d}{dx_1}(102)+\lambda_2''\lambda_2'''\frac{d}{dx_1}(021)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')\frac{d}{dx_1}(012)+\lambda_3''\lambda_3'''\frac{d}{dx_1}(003)=0.$$

Die letzten drei Gleichungen geben die Integrale:

$$(300)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(210)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(201)+\lambda_2''\lambda_2'''(120)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(111)+\lambda_3''\lambda_3'''(102)=W_1,$$

$$(210)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(120)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(111)+\lambda_2''\lambda_2'''(030)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(021)+\lambda_3''\lambda_3'''(012)=W_2,$$

$$(201)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(111)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(102)+\lambda_2''\lambda_2'''(021)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(012)+\lambda_3''\lambda_3'''(003)=W_3.$$

welche wegen der gegebenen Gleichung der Bedingung:

$$W_1+\lambda_2' W_2+\lambda_3' W_3=0$$

unterworfen sind.

Anderseits folgt aus den beiden ersten Gleichungen des Systems:

$$x_2-\lambda_2' x_1=w_2', \quad x_3-\lambda_3' x_1=w_3'.$$

Wir setzen also:

$$(300)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(210)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(201)+\lambda_2''\lambda_2'''(120)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(111)+\lambda_3''\lambda_3'''(102)-\Phi_1(x_2-\lambda_2' x_1, x_3-\lambda_3' x_1)=0,$$

$$(210)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(120)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(111)+\lambda_2''\lambda_2'''(030)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(021)+\lambda_3''\lambda_3'''(012)-\Phi_2(x_2-\lambda_2' x_1, x_3-\lambda_3' x_1)=0,$$

$$(201)+(\lambda_2''+\lambda_2''')(111)+(\lambda_3''+\lambda_3''')(102)+\lambda_2''\lambda_2'''(021)+(\lambda_2''\lambda_3'''+\lambda_3''\lambda_2''')(012)+\lambda_3''\lambda_3'''(003)-\Phi_3(x_2-\lambda_2' x_1, x_3-\lambda_3' x_1)=0$$

und zerlegen diese Gleichungen in ihre wesentlichen Integrale nach dem Systeme (II), welches wir durch die Gleichungen:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2'', \quad \frac{dx_3}{dx_1}=\lambda_3''$$

charakterisiren. Indem man jede der drei vorigen Gleichungen partiell nach x_1, x_2, x_3 differentiirt, findet man:

$$\begin{aligned}
&D_{II}(300)+\lambda_2''' D_{II}(210)+\lambda_3''' D_{II}(201)+\lambda_2' \frac{\partial\Phi_1}{\partial w_2'}+\lambda_3' \frac{\partial\Phi_1}{\partial w_3'}=0,\\
&D_{II}(210)+\lambda_2''' D_{II}(120)+\lambda_3''' D_{II}(111)-\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_2'}=0,\\
&D_{II}(201)+\lambda_2''' D_{II}(111)+\lambda_3''' D_{II}(102)-\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_3'}=0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_{II}(210)+\lambda_2''' D_{II}(120)+\lambda_3''' D_{II}(111)+\lambda_2' \frac{\partial\Phi_2}{\partial w_2'}+\lambda_3' \frac{\partial\Phi_2}{\partial w_3'}=0,\\
&D_{II}(120)+\lambda_2''' D_{II}(030)+\lambda_3''' D_{II}(021)-\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_2'}=0,\\
&D_{II}(111)+\lambda_2''' D_{II}(021)+\lambda_3''' D_{II}(012)-\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_3'}=0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_{II}(201)+\lambda_2''' D_{II}(111)+\lambda_3''' D_{II}(102)+\lambda_2' \frac{\partial\Phi_3}{\partial w_2'}+\lambda_3' \frac{\partial\Phi_3}{\partial w_3'}=0,\\
&D_{II}(111)+\lambda_2''' D_{II}(021)+\lambda_3''' D_{II}(012)-\frac{\partial\Phi_3}{\partial w_2'}=0,\\
&D_{II}(102)+\lambda_2''' D_{II}(012)+\lambda_3''' D_{II}(002)-\frac{\partial\Phi_3}{\partial w_3'}=0;
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Bedingungen:

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_3'}=\frac{\partial\Phi_3}{\partial w_2'}, \quad \lambda_2' \frac{\partial\Phi_2}{\partial w_3'}+\lambda_3' \frac{\partial\Phi_2}{\partial w_3'}=-\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_2'}, \quad \lambda_2' \frac{\partial\Phi_3}{\partial w_2'}+\lambda_3' \frac{\partial\Phi_3}{\partial w_3'}=-\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_3'},$$

welche durch die Suppositionen:

$$\Phi_1=-\lambda_2' \frac{\partial U}{\partial w_2'}-\lambda_3' \frac{\partial U}{\partial w_3'}, \quad \Phi_2=\frac{\partial U}{\partial w_2'}, \quad \Phi_3=\frac{\partial U}{\partial w_3'}$$

befriedigt werden. Dadurch wird übrigens auch

$$\Phi_1+\lambda_2\Phi_2+\lambda_3\Phi_3=0,$$

wie weiter oben gefordert wurde.

Aus den obigen neun Differentialgleichungen entstehen demnach folgende sechs:

$$
\begin{aligned}
D_{II}(300)+\lambda_2'''D_{II}(210)+\lambda_3'''D_{II}(201) &= (\lambda_2')^2\frac{\partial^2 U}{(\partial w_2')^2}+2\lambda_2'\lambda_3'\frac{\partial^2 U}{\partial w_2'\partial w_3'}+(\lambda_3')^2\frac{\partial^2 U}{(\partial w_3')^2}\\
D_{II}(210)+\lambda_2'''D_{II}(120)+\lambda_3'''D_{II}(111) &= -\lambda_2'\frac{\partial^2 U}{(\partial w_2')^2}-\lambda_3'\frac{\partial^2 U}{\partial w_2'\partial w_3'}\\
D_{II}(201)+\lambda_2'''D_{II}(111)+\lambda_3'''D_{II}(102) &= -\lambda_2'\frac{\partial^2 U}{\partial w_2'\partial w_3'}-\lambda_3'\frac{\partial^2 U}{(\partial w_3')^2}\\
D_{II}(120)+\lambda_2'''D_{II}(030)+\lambda_3'''D_{II}(021) &= \frac{\partial^2 U}{(\partial w_2')^2}\\
D_{II}(111)+\lambda_2'''D_{II}(021)+\lambda_3'''D_{II}(012) &= \frac{\partial^2 U}{\partial w_2'\partial w_3'}\\
D_{II}(102)+\lambda_2'''D_{II}(012)+\lambda_3'''D_{II}(003) &= \frac{\partial^2 U}{(\partial w_3')^2}.
\end{aligned}
$$

Die Integration dieses Systems ist ohneweiters möglich, wenn man noch die Gleichungen:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_2'',\quad \frac{dx_3}{dx_1}=\lambda_3''$$

hinzunimmt. Ist eine Function der Argumente w_2', w_3', gegeben

$$\vartheta(w_2', w_3') = \vartheta(x_2-\lambda_2'x_1, x_3-\lambda_3'x_1),$$

so ist:

$$D_{II}\vartheta = (\lambda_2''-\lambda_2')\frac{\partial\vartheta}{\partial w_2'}+(\lambda_3''-\lambda_3')\frac{\partial\vartheta}{\partial w_3'},$$

setzen wir also:

$$U = (\lambda_2''-\lambda_2')\frac{\partial\vartheta}{\partial w_2'}+(\lambda_3''-\lambda_3')\frac{\partial\vartheta}{\partial w_3'},$$

so wird die rechte Seite der ersten Gleichung im vorigen System:

$$D_{II}\left\{(\lambda_2')^2\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_2')^2}+2\lambda_2'\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}+(\lambda_3')^2\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}\right\},$$

während sich der Reihe nach für die übrigen Gleichungen die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$-D_{II}\left\{(\lambda_2')^2\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_2')^2}+\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}\right\},\quad -D_{II}\left\{\lambda_2'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}+\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}\right\},\quad D_{II}\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_2')^2},\quad D_{II}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'},\quad D_{II}\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}.$$

Also sind die Integrale des obigen Systems gegeben durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(300)+\lambda_2'''(210)+\lambda_3'''(201) &= (\lambda_2')^2\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_1')^2}+2\lambda_2'\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}+(\lambda_3')^2\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}+f_1(w_2'', w_3''),\\
(210)+\lambda_2'''(120)+\lambda_3'''(111) &= -\lambda_2'\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_2')^2}-\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}+f_2(w_2'', w_3''),\\
(201)+\lambda_2'''(111)+\lambda_3'''(102) &= -\lambda_2'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}-\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}+f_3(w_2'', w_3''),\\
(120)+\lambda_2'''(030)+\lambda_3'''(021) &= \frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_2')^2}+f_4(w_2'', w_3''),\\
(111)+\lambda_2'''(021)+\lambda_3'''(012) &= \frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}+f_5(w_2'', w_3''),\\
(102)+\lambda_2'''(012)+\lambda_3'''(003) &= \frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}+f_6(w_2'', w_3'').
\end{aligned}
$$

Zwischen den Functionen f werden durch die Forderung, dass sich aus den gegenwärtigen Integralen die früheren zusammensetzen lassen sollen, drei Bedingungsgleichungen eingeführt, deren Erfüllung anderseits bewirkt, dass bei der nächsten Zerlegung abermals ein eindeutiges System entsteht. Man findet diese Bedingungsgleichungen unter beiden Voraussetzungen; da aber das Resultat hinsichtlich der beiden Integralsysteme symmetrisch sein muss, können wir die Integralgleichungen sofort in der Form aufschreiben:

$$(300)+\lambda_2'''(210)+\lambda_3'''(201)=(\lambda_2')^2\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_2')^2}+2\lambda_2'\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}+(\lambda_3')^2\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}+(\lambda_2'')^2\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_2'')^2}+2\lambda_2''\lambda_3''\frac{\partial^2\eta}{\partial w_2''\partial w_2''}+(\lambda_3'')^2\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_2'')^2}$$

$$(210)+\lambda_2'''(120)+\lambda_3'''(111)=-\lambda_2'\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_2')^2}-\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}-\lambda_2''\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_2'')^2}-\lambda_3''\frac{\partial^2\eta}{\partial w_2''\partial w_3''}$$

$$(201)+\lambda_2'''(111)+\lambda_3'''(102)=-\lambda_2'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial w_2'\partial w_3'}-\lambda_3'\frac{\partial^2\vartheta}{(\partial w_3')^2}-\lambda_2''\frac{\partial^2\eta}{\partial w_2''\partial w_3''}-\lambda_3''\frac{\partial^2\eta}{(\partial w_3'')^2}$$

etc.

Der weitere Rechnungsgang ist nun schon durchsichtig, ich begnüge mich also, das Resultat anzugeben. Wie vorauszusehen war, ist:

$$z=\Phi(x_2-\lambda_2'x_1, x_3-\lambda_3'x_1)+X(x_2-\lambda_2''x_1, x_3-\lambda_3''x_1)+\Psi(x_2-\lambda_2'''x_1, x_3-\lambda_3'''x_1),$$

wobei Φ, X, Ψ ganz willkürlich sind.

Die Gleichung:

$$(300)+2(210)-2(201)-5(120)-19(111)-5(102)-6(030)-9(021)+10(012)+6(003)=0.$$

besitzt die Wurzelsysteme:

$$\lambda_2 = \quad 1,\quad 3,\quad -2$$
$$\lambda_3 = -1,\quad 2,\quad -3.$$

und es ist:

$$(\xi_1+\xi_2-\xi_3)(\xi_1+3\xi_2+2\xi_3)(\xi_1-2\xi_2-3\xi_2)=$$
$$=\xi_1^3+2\xi_1^2\xi_2-2\xi_1^2\xi_3-5\xi_1\xi_2^2-15\xi_1\xi_2\xi_3-5\xi_1\xi_3^2-6\xi_2^3-7\xi_2^2\xi_3+7\xi_2\xi_3^2+6\xi_3^3.$$

Es fallen also für die Complexionen: (111), (021), (012) — und dies sind alle, welche nicht zur Bildung der Gleichungen (12) beizuziehen sind — die Werthe { } verschieden von den [ ]-Werthen aus. Legen wir nun die aus dem Producte fliessenden Coëfficienten der Rechnung zu Grunde, so erhalten wir augenscheinlich

$$(000)=\Phi(x_2-x_1, x_3+x_1)+X(x_2-3x_1, x_3-2x_1)+\Psi(x_2+2x_1, x_3+3x_1).$$

und es entstehen durch Einführung dieses Werthes in die gegebene Gleichung die Bedingungen:

$$2\frac{\partial^3\Phi}{(\partial w_2')^2\partial w_3'}-\frac{\partial^3\Phi}{\partial w_2'(\partial w_3')^2}=0,\quad 10\frac{\partial^2 X}{(\partial w_2'')^2\partial w_3''}+11\frac{\partial^3 X}{\partial w_2''.(\partial w_3'')^2}=0$$

$$10\frac{\partial^3\Psi}{(\partial w_2''')^2\partial w_3'''}+9\frac{\partial^3\Psi}{\partial w_2'''.(\partial w_3''')^2}=0,$$

Hiebei sind

$$w_2'=x_2-x_1,\quad w_2''=x_2-3x_1,\quad w_3'''=x_2+2x_1,$$
$$w_3'=x_3+x_1,\quad w_3''=x_3-2x_1,\quad w_3'''=x_3+3x_1$$

zu verstehen. Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung ist also:

$$z=\Phi_1(x_2-x_1)+\Phi_2(x_3+x_1)+\Phi_3(x_1+x_2+2x_3)+X_1(x_3-2x_1)+X_2(x_3-2x_1)+X_3(13x_1-11x_2+10x_3)$$
$$+\Psi_1(x_2+2x_1)+\Psi_2(x_3+3x_1)+\Psi_3(12x_1-9x_2+10x_3).$$

Es sei noch das Beispiel:

$$(200)-\{(020)+2(011)+(002)\}-\frac{2(100)}{x_1}=0$$

gegeben. Wir finden

$$\lambda_2=1,\quad -1;\quad \lambda_3=1,\quad -1,$$

und setzen insbesondere

$$\lambda_2'=1,\quad \lambda_2''=-1,$$
$$\lambda_3'=1,\quad \lambda_3''=-1,$$

denn es wird dann:

$$(\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_1-\xi_2-\xi_3) = \xi_1^2-(\xi_2^2+2\xi_2\xi_3+\xi_3^2),$$

was mit der gegebenen Gleichung übereinstimmt.

Die Integralgleichungen des ersten Systems sind dann:

$$(200)-(110)-(101)-2\int d_I x_1 \frac{[(110)+(101)]}{x_1} = f_1+\xi_1 f_2$$

$$(110)-(020)-(011)-2\int \frac{d_I x_1}{x_1}(110) = g,$$

$$(101)-(011)-(002)-2\int \frac{d_I x_1}{x_1}(101) = h,$$

wobei wir die zwischen den Constanten herrschenden Relationen vorläufig ignoriren, da sich diejenigen, deren wir benöthigen, im Laufe der Rechnung von selbst ergeben. Wir beschränken uns übrigens darauf, durch Zerlegung der zweiten dieser Gleichungen in wesentliche Integrale den Werth von (011) zu bestimmen, da sich wegen der Einfachheit des Exempels hieraus der Werth von (000) bereits erschliessen lässt. Da nun g sowohl als auch h als Functionen der Integrale

$$w^I_2 = x_2-x_1, \quad w^I_3 = x_3-x_1$$

anzusehen ist, so folgt, indem man die zweite Gleichung nach x_3 partiell differentiirt und bemerkt, dass wegen der constanten λ die Operationen des Integrirens und Differertiirens beliebig angeordnet werden können:

$$D_{II}(011)-2\int \frac{d_I x_1}{x_1}(111) = \frac{\partial g}{\partial w^I_3}$$

Differentiirt man anderseits die dritte Gleichung nach x_2, so folgt:

$$D_{II}(011)-2\int \frac{d_I x_1}{x_1}(111) = \frac{\partial h}{\partial w^I_2},$$

wir setzen also

$$g = \frac{\partial \Omega}{\partial w^I_2}, \quad h = \frac{\partial \Omega}{\partial w^I_3}$$

und erhalten damit

$$D_{II}(011)-2\int \frac{d_I x_1}{x_1}(111) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial w^I_2 \partial w^I_3}.$$

Da nun

$$D_I(011) = (111)+\{(021)+(012)\}$$

$$D_{II}(011) = (111)-\{(021)+(012)\},$$

so wird

$$2(111) = D_I(011)+D_{II}(011)$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in die folgende:

$$\left\{D_{II}(011)-\frac{(011)}{x_1}\right\}-\int d_I x_1 \left\{\frac{D_{II}(011)}{x_1}+\frac{(011)}{x_1^2}\right\} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial w^I_2 \partial w^I_3}.$$

Differentiirt man nun noch einmal mit dem Zeichen D_{II} und berücksichtigt, dass dadurch in der rechten Seite wieder ein Integrale des ersten Systems entsteht, was wir kurz durch I andeuten wollen, so erhält man:

$$\left\{D_{II}^2(011)-\frac{D_{II}(011)}{x_1}+\frac{(011)}{x_1^2}\right\}-\int d_I x_1 \left\{\frac{D_{II}^2(011)}{x_1}-\frac{2(011)}{x_1^3}\right\} = I.$$

Es folgt nun, wie man leicht findet, aus der obigen Gleichung die andere:

$$\left\{\frac{D_{II}(011)}{x_1}-\frac{(011)}{x_1^2}\right\}-2\int d_I x_1 \frac{(011)}{x_1^3} = I_1,$$

worin I_1 wieder ein Integrale des ersten Systems bedeutet, die Addition der beiden letzten Gleichungen gibt:

$$D_{II}^2(011) - \int \frac{d_I x_1}{x_1} D_{II}^2(011) = I_2$$

und hieraus folgt

$$D_{II}^2(011) = I_3 x_1.$$

Da nun die Anwendung der Operation D_{II} auf ein Integrale des ersten Systems wieder ein Integrale desselben Systems hervorbringt, können wir:

$$I_3 = -\frac{1}{2} D_{II}^3 \Phi(w_2^I, w_3^I)$$

substituiren, und damit folgt endlich

$$(011) = x\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial w_2^I} + \frac{\partial\Phi}{\partial w_3^I}\right\} + \Phi + x\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial w_2^{II}} + \frac{\partial\Psi}{\partial w_3^{II}}\right\} - \Psi$$

worin Ψ ein Integral des zweiten Systems bedeutet und

$$w_2^{II} = x_2 + x_1, \quad w_3^{II} = x_3 + x_1$$

zu verstehen sind. Wie ersichtlich, ist z von derselben Form; in der That ist

$$z = \Omega(x_2 - x_1, x_3 - x_1) + x_1\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial w_2^I} + \frac{\partial\Omega}{\partial w_3^I}\right\} + \Pi(x_2 + x_1, x_3 + x_1) - x_1\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial w_2^{II}} + \frac{\partial\Pi}{\partial w_3^{II}}\right\}.$$

Druckfehler:

Seite 9, Gl. (10) lies: $\lambda^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$

„ 10, Gl. 12) „ : $D^1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \text{etc.} \ldots$

„ 11, Zeile 3 v. o. lies: $\frac{\partial y}{\partial f}$ statt $\frac{\partial x}{\partial f}$.

„ 35: in beiden Gl. (5) ist dy unmittelbar vor $\{$ zu setzen.

„ 36, Zeile 10 v. o. lies: $[p-i \quad 1, i] + \lambda_1[p-i, i-1] = \ldots.$

„ 43, „ 8 „ „ ist am Schlusse $\}$ anzubringen und $[$ nach dem 2. Gliede zu streichen.

„ 46, „ 4 v. u. lies im 2. Gliede: $\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(o,p)}} \frac{\partial F}{\partial(o,p)}\right\}.$

„ 47, „ 9 v. o. fehlt der Bruchstrich unter ε.

„ 54, „ 6 „ „ fehlt in der 2. Gl. $(p-\rho, \rho)'$.