ÜBER

DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 10. JULI 1884.

Die symmetrische Determinante zweiten Ranges:

$$\left| c_{\iota, \varkappa} \right| (\iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1),$$

in welcher:

$$c_{\iota, \varkappa} = a_{j_1 - \varkappa_1, j_2 - \varkappa_2, \ldots, j_r - \varkappa_r}$$

ist, wenn die Indices j_λ und k_λ nach dem Modul n_λ genommen und die Zahlen ι, $\varkappa$ aus den Congruenzen:

1)
$$\frac{\iota - j_1 - j_2 n_1 - j_3 n_1 n_2 - \ldots - j_{\lambda-1} n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-2}}{n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-1}} \equiv j_\lambda \pmod{n_\lambda}$$
$$\frac{\varkappa - \varkappa_1 - \varkappa_2 n_1 - \varkappa_3 n_1 n_2 - \ldots - \varkappa_{\lambda-1} n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-2}}{n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-1}} \equiv \varkappa_\lambda \pmod{n_\lambda}$$

bestimmt werden, lässt sich, wie von Herrn M. Nöther und mir gezeigt wurde, unter Adjunction von Einheitswurzeln als ein Product von homogenen linearen Functionen der Elemente darstellen. Die schon von Bessel bemerkte Determinante:

$$\left| a_{\iota - \varkappa} \right| (\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1),$$

in welcher sämmtliche Indices nach dem Modul n zu nehmen sind, und die von Herrn A. Puchta in seiner Arbeit: „Ein Determinantensatz und seine Umkehrung" (Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, XXXVIII. Bd., II. Abth., p. 215 ff.) betrachtete Determinante der Ordnung 2^n sind bekanntlich specielle Fälle der eben angeführten allgemeinen Determinante.

Es lässt sich nun, wie in den folgenden Zeilen gezeigt werden soll, ein dem erwähnten Satze analoges Theorem für Determinanten höheren Ranges aufstellen.

Die Elemente der Determinante $(p+2)$ten Ranges und $(n_1 n_2 \ldots n_r)$ter Ordnung:

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1)$$

mögen durch die Gleichungen:

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa} = b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_r - 1\,;\ 0 \leqq j_\lambda, \varkappa_\lambda < n_\lambda)$$

bestimmt sein, wo die Indices ι, $\varkappa$ mit den Indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ durch die Congruenzen 1) verbunden sind und

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} = a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \qquad (j \geqq \varkappa_1, j_2 \geqq \varkappa_2, \ldots, j_r \geqq \varkappa_r)$$

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} = \omega_{\lambda_1}^{\beta_{\lambda_1}} \omega_{\lambda_1}^{\beta_{\lambda_1}} \ldots \omega_{\lambda_\tau}^{\beta_{\lambda_\tau}} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r} \qquad (j_1 \geqq \varkappa_1, j_2 \geqq \varkappa_2,$$
$$\ldots, j_{\lambda_1-1} \geqq \varkappa_{\lambda_1-1}, j_{\lambda_1} < \varkappa_{\lambda_1}, j_{\lambda_1+1} \geqq \varkappa_{\lambda_1+1}, \ldots, j_{\lambda_2-1} \geqq \varkappa_{\lambda_2-1}, j_{\lambda_2} < \varkappa_{\lambda_2}, j_{\lambda_2+1} \geqq \varkappa_{\lambda_2+1},$$
$$\ldots, j_{\lambda_\tau-1} \geqq \varkappa_{\lambda_\tau-1}, j_{\lambda_\tau} < \varkappa_{\lambda_\tau}, j_{\lambda_\tau+1} \geqq \varkappa_{\lambda_\tau+1}, \ldots j_{\lambda_r} \geqq \varkappa_{\lambda_r})$$

sein soll.

Setzt man nun:

$$2)\quad \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p;\, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r;\, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} = \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}$$

so erhält man:

$$\pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p;\, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r;\, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}\, \rho_1^{-\varkappa_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{-\varkappa_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{-\varkappa_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} =$$

$$= \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2, \ldots, j_r-\varkappa_r}\, \rho_1^{(j_1-\varkappa_1)(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{(j_2-\varkappa_2)(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{(j_r-\varkappa_r)(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}$$

$$= \sum_{j_1=-\varkappa_1, j_2=-\varkappa_2, \ldots, j_r=-\varkappa_r}^{j_1=n_1-\varkappa_1-1, j_2=n_2-\varkappa_2-1, \ldots, j_r=n_r-\varkappa_r-1} b_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}.$$

Berücksichtigt man, dass die Indices j_λ nach dem Modul n_λ zu nehmen sind, so erhält man:

$$3)\quad \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_p;\, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r;\, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}\, \rho_1^{-\varkappa_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{-\varkappa_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{-\varkappa_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)} =$$

$$= \sum_{j_1=0, j_2=0, \ldots, j_r=0}^{j_1=n_1-1, j_2=n_2-1, \ldots, j_r=n_r-1} b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)} \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)},$$

wo:

$$b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} = a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} \qquad (j_1 < n_1-\varkappa_1, j_2 < n_2-\varkappa_2, \ldots, j_r < n_r-\varkappa_r)$$

$$b'_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r} = \omega_{\lambda_1}^{\beta_{\lambda_1}} \omega_{\lambda_2}^{\beta_{\lambda_2}} \ldots \omega_{\lambda_\tau}^{\beta_{\lambda_\tau}}\, \rho_{\lambda_1}^{-n_{\lambda_1}(\alpha_{\lambda_1}\mu_{\lambda_1}+\beta_{\lambda_1})} \rho_{\lambda_2}^{-n_{\lambda_2}(\alpha_{\lambda_2}\mu_{\lambda_2}+\beta_{\lambda_2})} \ldots \rho_{\lambda_\tau}^{-n_{\lambda_\tau}(\alpha_{\lambda_\tau}\mu_{\lambda_\tau}+\beta_{\lambda_\tau})} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}$$
$$(j_1 < n_1-\varkappa_1, j_2 < n_2-\varkappa_2, \ldots, j_{\lambda_1-1} < n_{\lambda_1-1}-\varkappa_{\lambda_1-1}, j_{\lambda_1} \geqq n_{\lambda_1}-\varkappa_{\lambda_1}, j_{\lambda_1+1} < n_{\lambda_1+1}-\varkappa_{\lambda_1+1}, \ldots$$
$$j_{\lambda_2-1} < n_{\lambda_2-1}-\varkappa_{\lambda_2-1}, j_{\lambda_2} \geqq n_{\lambda_2}-\varkappa_{\lambda_2}, j_{\lambda_2+1} < n_{\lambda_2+1}-\varkappa_{\lambda_2+1}, \ldots, j_{\lambda_\tau-1} < n_{\lambda_\tau-1}-\varkappa_{\lambda_\tau-1},$$
$$j_{\lambda_\tau} \geqq n_{\lambda_\tau}-\varkappa_{\lambda_\tau}, j_{\lambda_\tau+1} < n_{\lambda_\tau+1}-\varkappa_{\lambda_\tau+1}, \ldots, j_{\lambda_r} < n_{\lambda_r}-\varkappa_{\lambda_r}$$

ist.

Aus der Gleichung 3) folgt die Relation:

4)
$$\left|\pi_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p;\; \varkappa_1,\, \varkappa_2,\ldots,\, \varkappa_r;\; \mu_1,\, \mu_2,\ldots,\, \mu_r}\right|$$
$$= \left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} b'_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p, j_1,\, j_2,\ldots, j_r}\, \rho_1^{(j_1+\varkappa_1)(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\, \rho_2^{(j_2+\varkappa_2)(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{(j_r+\varkappa_r)(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$
$$(i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota',\, \varkappa = 0,\, 1,\, 2,\ldots,\, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

wo die Indices ι', $\varkappa$ sich aus den Congruenzen 1) ergeben, wenn in denselben j_λ durch μ_λ ersetzt wird und das durch den Index ι' angegebene Indexsystem das System der festen Indices sein soll.

Nun habe ich folgenden Satz bewiesen: („Über Determinanten höheren Ranges". Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, XLIII. B.d, II. Abth., p. 17 ff.).

Sind in einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges

$$\left|e_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m}\right| \quad (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m = 1,2,\ldots,n)$$

die einzelnen Elemente Producte von r Grössen $(r < m)$ in der Weise, dass:

$$e_{\lambda_1,\, \lambda_2,\ldots,\, \lambda_m} = e^{(1)}_{\lambda_1,\, \lambda_{\rho_{1,1}},\, \lambda_{\rho_{1,2}},\, \lambda_{\rho_1,\sigma_1}} \cdot e^{(2)}_{\lambda_1,\, \lambda_{\rho_{2,1}},\, \lambda_{\rho_{2,2}},\ldots,\, \lambda_{\rho_2,\sigma_2}} \ldots e^{(r)}_{\lambda_1,\, \lambda_{\rho_{r,1}},\, \lambda_{\rho_{r,2}},\ldots,\, \lambda_{\rho_r,\sigma_r}}$$

ist, wo die Zahlen

$$\rho_{1,1},\, \rho_{1,2},\ldots,\, \rho_{r,\sigma_r},$$

deren Anzahl gleich $m-1$ ist, verschiedene Zahlen aus der Reihe $2, 3,\ldots, m$ und so beschaffen sind, dass

$$\rho_{\varkappa,\alpha} \lesseqgtr \rho_{\mu,\alpha}$$

für $\varkappa \lesseqgtr \mu$ ist, so zerfällt die erwähnte Determinante in ein Product von r Determinanten derselben Ordnung, deren Rangzahlen durch die Anzahlen der Indices der verschiedenen Grössen $e^{(\sigma)}$ angegeben werden, so dass also:

$$\left|e_{\lambda_1,\, \lambda_2,\ldots,\, \lambda_m}\right| = \left|e^{(1)}_{\lambda_1,\, \lambda_{\rho_{1,1}},\, \lambda_{1,2},\ldots,\, \lambda_{\rho_1,\sigma_1}}\right| \cdot \left|e^{(2)}_{\lambda_1,\, \lambda_{\rho_{2,1}},\, \lambda_{\rho_{2,2}},\ldots,\, \lambda_{\rho_2,\sigma_2}}\right| \ldots \left|e^{(r)}_{\lambda_1,\, \lambda_{\rho_{r,1}},\, \lambda_{\rho_{r,2}},\ldots,\, \lambda_{\rho_r,\sigma_r}}\right|$$
$$(\lambda_1,\, \lambda_2,\ldots,\, \lambda_m = 1,\, 2,\ldots,\, n).$$

ist.

Die Gleichung 4) verwandelt sich daher in die folgende:

5)
$$\left|\pi_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p;\; \varkappa_1,\, \varkappa_2,\ldots,\, \varkappa_r;\; \mu_1,\, \mu_2,\ldots,\, \mu_r}\right| = \left|\rho_1^{\varkappa_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\, \rho_2^{\varkappa_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{\varkappa_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$
$$\left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} b'_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\, \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$
$$(i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota',\, \varkappa = 0,\, 1,\, 2,\ldots,\, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

Für die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Determinante ergibt sich aber aus der Gleichung 2) auch folgender Werth:

$$\left|\pi_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p;\; \varkappa_1,\, \varkappa_2,\ldots,\, \varkappa_r;\; \mu_1,\, \mu_2,\ldots,\, \mu_r}\right| = \left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} b_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1-\varkappa_1,\, j_2-\varkappa_2,\ldots,\, j_r-\varkappa_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\, \rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)} \ldots \rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$
$$(i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota',\, \varkappa = 0,\, 1,\, 2,\ldots,\, n_1 n_2 \ldots n_r - 1).$$

Nach dem von mir a. a. O. mitgetheilten Multiplicationstheoreme der Determinanten höheren Ranges ist aber die auf der rechten Seite der letzten Relation stehende Determinante $(p+2)$ten Ranges das Product einer Determinante zweiten und einer Determinante $(p+2)$ten Ranges, so dass man hat:

$$6)\quad \left|\pi_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p;\, \varkappa_1,\, \varkappa_2,\ldots,\, \varkappa_r;\, \mu_1,\, \mu_2,\ldots,\, \mu_r}\right| = \left|\rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\ldots\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|\cdot\left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right|$$

$$(i_1, i_2,\ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2,\ldots, n_1 n_2\ldots n_r-1).$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) folgt:

$$7)\quad \left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right| = \left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} b_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\ldots\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$

$$(i_1, i_2,\ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2,\ldots, n_1 n_2\ldots n_r-1).$$

Die Gleichung 7) zeigt zunächst, dass die Determinante $(p+2)$ten Ranges:

$$\left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right|_{(i_1,\, i_2\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa = 0, 1, 2,\ldots,\, n_1 n_2\ldots n_r-1)},$$

in welcher die Elemente den früher angegebenen Bedingungen genügen, unter Adjunction der r Grössen $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_r$ sich auf eine Determinante derselben Ordnung vom Range $p+1$ reduciren lässt, deren Elemente lineare homogene Functionen der Elemente der ursprünglichen Determinante sind.

Man sieht ferner sofort, dass die Determinante $(p+1)$ten Ranges:

$$\left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} b_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\ldots\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$

$$(i_1, i_2,\ldots, i_p, \iota', \varkappa = 0, 1, 2,\ldots, n_1 n_2\ldots n_r-1)$$

von den Grössen $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_r$ unabhängig ist.

Ist speciell:

$$\rho_\lambda^{n_\lambda} = \omega_\lambda$$

$$\omega_\lambda^{\alpha_\lambda} = 1,$$

so verwandelt sich die Relation 7) in:

$$8)\quad \left|c_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, \iota,\, \varkappa}\right| = \left|\sum_{j_1=0,\, j_2=0,\ldots,\, j_r=0}^{j_1=n_1-1,\, j_2=n_2-1,\ldots,\, j_r=n_r-1} a_{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_p,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_r}\, \rho_1^{j_1(\alpha_1\mu_1+\beta_1)}\rho_2^{j_2(\alpha_2\mu_2+\beta_2)}\rho_r^{j_r(\alpha_r\mu_r+\beta_r)}\right|$$

$$(i_1, i_2,\ldots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2,\ldots, n_1 n_2\ldots n_r-1).$$

Von den speciellen Fällen dieser Formel mögen die folgenden zwei Relationen besonders hervorgehoben werden.

Es sei:

$$\alpha_\lambda = 1,\ \beta_\lambda = 0,\ \omega_\lambda = 1,$$

alsdann ist ρ_λ eine primitive $n_\lambda$te Einheitswurzel und man hat daher die Relation:

$$9)\qquad \left| a_{i_1, i_2,\dots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2,\dots, j_r-\varkappa_r} \right| = \left| \sum_{j'_1=0,\, j'_2=0,\dots,\, j'_r=0}^{j'_1=n_1-1,\, j'_2=n_2-1,\dots,\, j'_r=n_r-1} a_{i_1, i_2,\dots, i_p, j_1, j_2,\dots, j_r}\; \rho_1^{j_1'\mu_1}\, \rho_2^{j_2'\mu_2} \dots \rho_r^{j_r'\mu_r} \right|$$

$$(i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2,\dots, n_1 n_2 \dots n_r - 1).$$

Man hat also den Satz:

Die Determinante $(p+2)$ten Ranges und $(n_1 n_2 \dots n_r)$ter Ordnung:

$$\left| c_{i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \varkappa} \right|_{(i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2,\dots, n_1 n_2 \dots n_r - 1)}$$

in welcher:

$$c_{i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \varkappa} = a_{i_1, i_2,\dots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2,\dots, j_r-\varkappa_r}$$

ist, wenn die Indices ι, $\varkappa$ durch die Congruenzen 1) bestimmt und die Grössen j_λ und $\varkappa_\lambda$ nach dem Modul n_λ genommen werden, lässt sich unter Adjunction der Gattung der $(n_1 n_2 \dots n_r)$ten Einheitswurzeln auf eine Determinante vom Range $p+1$ und der Ordnung $n_1 n_2 \dots n_r$ reduciren, deren Elemente lineare homogene Functionen der Elemente der ursprünglichen Determinante sind.

Beachtet man, dass eine Determinante ersten Ranges von n Elementen das Product dieser Elemente ist, so erhält man aus der Gleichung 9) für $p = 0$ sofort den im Anfange erwähnten Satz über symmetrische Determinanten zweiten Ranges.

Ist ferner:

$$\alpha_\lambda = 2,\ \beta_\lambda = 1,\ \omega_\lambda = -1,$$

also:

$$\rho_\lambda^{n_\lambda} + 1 = 0,$$

so verwandelt sich die Relation 8) in:

$$10)\qquad \left| a'_{i_1, i_2,\dots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2,\dots, j_r-\varkappa_r} \right| = \left| \sum_{j'_1=0\, j'_2=0,\dots,\, j'_r=0}^{j'_1=n_1-1,\, j'_2=n_2-1,\dots,\, j'_r=n_r-1} a_{i_1, i_2,\dots, i_p, j_1, j_2,\dots, j_r}\; \rho_1^{j_1'(2\mu_1+1)}\, \rho_2^{j_2'(2\mu_2+1)} \dots \rho_r^{j_r'(2\mu_r+1)} \right|$$

$$(i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \iota', \varkappa = 0, 1, 2,\dots, n_1 n_2 \dots n_r - 1).$$

wo die Marke an den Elementen der Determinante auf der linken Seite der Gleichung anzeigt, dass das betreffende Element mit dem Vorzeichen $(-1)^\tau$ zu versehen ist, wenn τ der Grössen $j_1, j_2,\dots, j_r$ kleiner als die entsprechenden Zahlen $\varkappa$ sind.

Man hat also das Theorem:

Die Determinante $(p+2)$ten Ranges:

$$\left| c'_{i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \varkappa} \right| \quad (i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \varkappa = 0, 1, 2,\dots, n_1 n_2 \dots n_r - 1),$$

in welcher:

$$c'_{i_1, i_2,\dots, i_p, \iota, \varkappa} = (-1)^\tau a_{i_1, i_2,\dots, i_p, j_1-\varkappa_1, j_2-\varkappa_2,\dots, j_r-\varkappa_r}$$

ist, wenn die Indices j_λ und $\varkappa_\lambda$ nach dem Modul n_λ genommen, die Zahlen ι, $\varkappa$ aus den Congruenzen 1) bestimmt werden, und die Grösse τ angibt, wie viele der Indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$ kleiner als die zugehörigen Zahlen $\varkappa$ sind, lässt sich unter Adjunction der Wurzeln der Gleichungen:

$$\rho_\lambda^{n_\lambda} + 1 = 0$$

als eine Determinante vom Range $p+1$ und der Ordnung $n_1 n_2 \ldots . n_r$ darstellen, deren Elemente lineare, homogene Functionen der Grössen

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_r}$$

sind.

Den speciellen Fall $p = 0$, $r = 1$ dieses Satzes hat unlängst Herr Scott mitgetheilt.

Die Relationen 9) und 10) zeigen, dass die auf der linken Seite der Gleichung 9) stehende Determinante, wenn eine der Zahlen n_λ gerade ist, sich in ein Product von zwei Determinanten zerlegen lässt. Für quadratische Determinanten hat auf diesen Umstand zuerst Herr Glaisher aufmerksam gemacht.