ZUR THEORIE

DER

AUS DEN VIERTEN EINHEITSWURZELN GEBILDETEN COMPLEXEN ZAHLEN.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,

CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 16. APRIL 1885.

In den folgenden Zeilen sollen einige asymptotische Gesetze aus der Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen abgeleitet werden.

Es sei (n) der Inbegriff aller im Gauss'schen Sinne primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ ausser der Null, deren Normen nicht grösser als n sind, $\mathfrak{A}(n)$ die Anzahl der Individuen des Complexes (n).

Beachtet man, dass $4\mathfrak{A}(m)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, m$ durch die binäre quadratische Form $(1, 0, 1)$ ist und dass die Anzahl der Darstellungen einer reellen ganzen Zahl x durch die erwähnte quadratische Form durch die Summe:

$$4\sum_{d''_x}(-1)^{\frac{d''_x-1}{2}}$$

angegeben wird, wo d''_x alle ungeraden Divisoren von x zu durchlaufen hat, so erhält man die Gleichung:

$$\mathfrak{A}(n)=\sum_{x=1}^{x=n}\left(\sum_{d''_x}(-1)^{\frac{d''_x-1}{2}}\right).$$

Da unter den Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$ nur die Zahlen:

$$1.(2x-1),\quad 2.(2x-1),\quad 3.(2x-1)\ldots,\quad \left[\frac{m}{2x-1}\right].(2x-1)$$

den ungeraden Divisor $2x-1$ besitzen, so verwandelt sich die letzte Gleichung in die folgende:

$$\mathfrak{A}(n)=\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]$$

und daher hat man auch, wie aus Entwicklungen, die ich früher angegeben habe („Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie." Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 50. Band, I. Abtheilung, p. 36 ff.) erhellt:

$$1)\qquad \mathfrak{A}(n) = \frac{\pi n}{4} + \varepsilon\sqrt{n}$$

wo:

$$|\varepsilon| < 1$$

ist.

Es ist offenbar auch:

$$2)\qquad \mathfrak{A}(n) = \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

wo die Summation über alle Individuen des Complexes (n) auszudehnen ist, $N(x)$ die Norm der ganzen complexen Zahl x vorstellt und $\varepsilon(\alpha)$ den Werth 0 oder 1 erhält, je nachdem $N(\alpha)$ kleiner als 1 ist oder nicht.

Man hat:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) = \sum_{x=(p)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) + \sum_{x=(n)-(p)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right).$$

Nun ist:

$$\sum_{x=(n)-(p)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) = \sum_{x=(n)-(p),\, y=(A)} \varepsilon\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{(bN(x^\sigma)+\beta)N(y^\tau)} - \frac{\rho}{N(y^\tau)}}\right)$$

wo:

$$A = \sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{b(p+1)^\sigma+\beta}-\rho}$$

ist.

Da jedesmal, wenn

$$\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{(bN(x^\sigma)+\beta)N(y^\tau)} - \frac{\rho}{N(y^\tau)}} \overset{\geq}{<} 1$$

ist, auch:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)\{N(y^\tau)+\rho\}} - \frac{\beta}{bN(x^\sigma)}} \overset{\geq}{<} 1$$

wird, so hat man auch:

$$\sum_{x=(n)-(p),\, y=(A)} \varepsilon\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{(bN(x^\sigma)+\beta)N(y^\tau)} - \frac{\rho}{N(y^\tau)}}\right) = \sum_{x=(n)-(p),\, y=(A)} \varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)\{N(y^\tau)+\rho\}} - \frac{\beta}{bN(x^\sigma)}}\right).$$

Lässt man auf der rechten Seite dieser Gleichung x alle Zahlen des Complexes (n) durchlaufen, so hat man zur Summe für jeden der $\mathfrak{A}(A)$ Werthe von y $\mathfrak{A}(p)$ Einheiten hinzugefügt und legt man alsdann dem y nur jene Werthe bei, welche dem Theilbereiche $(A)-(B)$ des Complexes (n) angehören, wo:

$$B = \sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bn^\sigma+\beta}-\rho}$$

ist, so hat man für jeden der $\mathfrak{A}(n)$ Werthe von x von der neuen Summe $\mathfrak{A}(B)$ Einheiten weggenommen und daher ist:

$$\sum_{x=(n)-(p),\, y=(A)} \varepsilon\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{(bN(x^\sigma)+\beta)N(y^\tau)} - \frac{\rho}{N(y^\tau)}}\right) =$$

$$= \sum_{x=(n),\, y=(A)-(B)} \varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)\{N(y^\tau)+\rho\}} - \frac{\beta}{bN(x^\sigma)}}\right) - \mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(A) + \mathfrak{A}(n)\mathfrak{A}(B),$$

oder:

$$\sum_{x=(n)-(p)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) = \sum_{x=(A)\ (B)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{N(x^\tau)+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}\right) - \mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(A)+\mathfrak{A}(n)\mathfrak{A}(B).$$

Man hat daher die Relation:

$$3)\qquad \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}}\right) =$$

$$= \sum_{x=(p)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) + \sum_{x=(A)-(B)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\{N(x^\tau)+\rho\}}-\frac{\beta}{b}}\right) - \mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(A)+\mathfrak{A}(n)\mathfrak{A}(B)$$

Sind die in dieser Gleichung auftretenden Grössen so beschaffen, dass

$$B = 0$$

ist, so hat man:

$$4)\qquad \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) = \sum_{x=(A)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(N(x^\tau)+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right) + \sum_{x=(p)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) - \mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(A).$$

Für $p = 0$ ergeben sich die speciellen Formeln:

$$5)\qquad \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) = \sum_{x=(A)-(B)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(N(x^\tau)+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right) + \mathfrak{A}(n)\mathfrak{A}(B)$$

$$6)\qquad \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bN(x^\sigma)+\beta}-\rho}\right) = \sum_{x=(A)} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(N(x^\tau)+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right).$$

Ist speciell:

$$\alpha = n;\quad p = \sqrt{n};\quad b = \tau = \sigma = 1;\quad \beta = \rho = 0,$$

so erhält man die folgende, zuerst von Herrn F. Mertens auf anderem Wege abgeleitete Formel:

$$7)\qquad \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) = 2\sum_{x=(\sqrt{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) - \{\mathfrak{A}(\sqrt{n})\}^2.$$

Es ist ferner:

$$\sum_{x=\left(\frac{\sqrt[r]{n}}{N(c)}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(cx)^r}\right) N(cx)^{rk} = \sum_{x=\left(\frac{\sqrt[r]{n}}{N(c)}\right),\ y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(c^r x^r y)}\right) N(cx)^{rk}$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d_r} N\left(\frac{x}{d_r}\right)^k\right)$$

wo die Summation bezüglich d_r über jene primären Divisoren der ganzen complexen Zahl x auszudehnen ist, deren complementärer Divisor eine durch c^r theilbare r^{te} Potenz ist.

Bezeichnet man mit $P_{k,r,c}(x)$ die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen derjenigen primären Divisoren der ganzen complexen Zahl x, welche durch c^r theilbare r^{te} Potenzen sind, so dass also $P_{0,r,c}(x)$ die Anzahl dieser Theiler ist, so erhält man die Relation:

$$8)\qquad \sum_{x=\left(\frac{\sqrt[r]{n}}{N(c)}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(cx)^r}\right) N(cx)^{rk} = \sum_{x=(n)} P_{k,r,c}(x) = \bar{P}_{k,r,c}(n).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Formel 1), so entsteht die Relation:

9) $$\sum_{x=(n)} P_{k,r,c}(x) = \frac{\pi n N(c)^{r(k-1)}}{4} \sum_{x=\left(\frac{\sqrt[r]{n}}{N(c)}\right)} N(x)^{r(k-1)} + \sqrt{n}\, N(c)^{r\left(k-\frac{1}{2}\right)} \sum_{x=\left(\frac{\sqrt[r]{n}}{N(c)}\right)} \varepsilon_x N(x)^{r\left(k-\frac{1}{2}\right)} \qquad (0 \leq |\varepsilon_x| < 1).$$

Nun ist:

$$\sum_{x=(m)} \frac{1}{N(x)^s} = \sum_{x=1}^{x=[m]} \frac{1}{x^s}\left(\sum_{d''_x} (-1)^{\frac{d''_x-1}{2}}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{x-1}}{(2x-1)^s}\left\{\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{\left[\frac{m}{2x-1}\right]^s}\right\}.$$

Ist $s > 1$, so hat man:

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{k^s} = \zeta(s) - \sum_{x=k+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^s}$$

$$= \zeta(s) - \frac{\varepsilon' \zeta(s)}{(k+1)^{s-1}}$$

wo:

$$|\varepsilon'| < 1$$

ist, und daher besteht die Gleichung:

$$\sum_{x=(m)} \frac{1}{N(x)^s} = \zeta(s) \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{x-1}}{(2x-1)^s} - \zeta(s) \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{x-1}\varepsilon'_x}{\left[\frac{m}{2x-1}+1\right]^{s-1}(2x-1)^s} \qquad (0 \leq |\varepsilon'_x| < 1)$$

$$= \zeta(s) L_s - \Delta_1,$$

wo:

$$L_s = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{x-1}}{(2x-1)^s}$$

$$\Delta_1 = \zeta(s) \sum_{x=\left[\frac{m+3}{2}\right]}^{x=\infty} \frac{(-1)^{x-1}}{(2x-1)^s} + \zeta(s) \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{x-1}\varepsilon'_x}{\left[\frac{m}{2x-1}+1\right]^{s-1}(2x-1)^s}$$

ist.

Es ist aber:

$$\left|\sum_{x=\left[\frac{m+3}{2}\right]}^{x=\left[\frac{m+3}{2}\right]+g} \frac{(-1)^{x-1}}{(2x-1)^s}\right| < \sum_{x=\left[\frac{m+3}{2}\right]}^{x=\left[\frac{m+3}{2}\right]+g} \frac{1}{(2x-1)^s} < \frac{\zeta(s)}{m^{s-1}}$$

$$\left|\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{x-1}\varepsilon'_x}{\left[\frac{m}{2x-1}+1\right]^{s-1}(2x-1)^s}\right| < \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \frac{1}{\left[\frac{m}{2x-1}+1\right]^{s-1}(2x-1)^s} < \frac{1}{m^{s-1}}\left\{\log m + C + \frac{1}{m-1}\right\}$$

und daher hat man:

10) $$|\Delta_1| < \frac{\zeta(s)}{m^{s-1}}\left\{\zeta(s) + \log m + C + \frac{1}{m-1}\right\}.$$

Es ist also für $s > 1$:

$$11)\qquad \sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^s} = \zeta(s)\, L_s$$

und daher hat man auch:

$$12)\qquad \sum_{x=(n)} P_{-k,r,c}(x) = \frac{\pi\,\zeta(r(k+1))\, L_{r(k+1)}}{4\,N(c^{r(k+1)})}\, n - \Delta_2$$

wo:

$$|\Delta_2| < \frac{\pi\,\zeta(r(k+1))\, N(c)}{4 n^{k-\frac{1}{r}}} \left\{ \zeta(r(k+1)) + \frac{1}{r}\log n - \log N(c) + C + \frac{N(c)}{\sqrt[r]{n} - N(c)} \right\} + \frac{\zeta\left(r\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) L_{r\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{N\left(c^{r\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right)} \sqrt{n} \qquad \left(r\left(k+\frac{1}{2}\right) > 1\right)$$

$$|\Delta_2| < \frac{\pi\,\zeta(r(k+1))\, N(c)}{4 n^{k-\frac{1}{r}}} \left\{ \zeta(r(k+1)) + \frac{1}{r}\log n - \log N(c) + C + \frac{N(c)}{\sqrt[r]{n} - N(c)} \right\} +$$
$$+ \frac{\sqrt{n}}{N(c)} \left\{ \frac{\pi\left(\frac{1}{r}\log n - \log N(c)\right) + C}{4} + \mathfrak{M}_1 + \frac{(4+\log 2)\, N(c)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt[2r]{n}} + \frac{N(c)}{4\sqrt[r]{n}} \right\} \qquad \left(r\left(k+\frac{1}{2}\right) = 1\right)$$

ist.

Aus der Gleichung 12) folgt:

$$13)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} P_{-k,r,c}(x)}{n} = \frac{\pi\,\zeta(r(k+1))\, L_{r(k+1)}}{4N(c^{r(k+1)})} \qquad (r(k+1) > 1)$$

$$14)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} P_{-k,2r,c}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2r(k+1)+1}\, B_{r(k+1)}\, L_{2r(k+1)}}{8\Gamma(2r(k+1)+1)\, N(c^{2r(k+1)})}$$

$$15)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} P_{-2k,2r+1,c}(x)}{n} = \frac{\pi^{(2r+1)(2k+1)+1}\,\zeta((2r+1)(2k+1))\,\tau_{(2r+1)(2k+1)-1}}{2^{(2r+1)(2k+1)+3}\,\Gamma((2r+1)(2k+1))\, N(c^{(2r+1)(2k+1)})}$$

wo $\tau_{2\sigma}$ der σte Secantencoëfficient ist.

Ist in der Formel 8) $k = 0$ und $r = 1$, so kann man dieselbe mit Hilfe der Relation 7) zunächst in die folgende verwandeln:

$$\sum_{x=(n)} P_{0,1,c}(x) = 2 \sum_{x=\left(\sqrt{\frac{n}{N(c)}}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) - \left\{\mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(c)}}\right)\right\}^2.$$

Berücksichtigt man die von Herrn F. Mertens aufgestellte Relation:

$$\sum_{x=(m)} \frac{1}{N(x)} = \frac{\pi(\log m + C)}{4} + \mathfrak{M}_1 + \varepsilon''\left(\frac{4+\log 2}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m}\right)$$

wo:

$$|\varepsilon''| < \frac{1}{4}$$

und:

$$\mathfrak{M}_r = \sum_{x=2}^{x=\infty} \frac{(-1)^x \log(2x-1)}{(2x-1)^r}$$

ist, so erhält man:

16) $$\sum_{x=(n)} P_{0,1,c}(x) = \frac{\pi^2 n}{16 N(c)}\left(\log n + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - \log N(c)\right) + \Delta_3$$

wo:

$$|\Delta_3| < 2\left(\frac{n}{N(c)}\right)^{\frac{3}{4}} + 3\left(\frac{n}{N(c)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist.

Die Formel 16) hat auf dem eben eingeschlagenen Wege für den speciellen Fall $N(c) = 1$ schon Herr F. Mertens abgeleitet.

Aus der Gleichung 16) ergeben sich die Relationen:

17) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} P_{0,1,c}(x)}{n} = \frac{\pi^2}{16 N(c)}\left(\log n + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - \log N(c)\right)$$

18) $$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n+\eta)} P_{0,1,c}(x) - \sum\limits_{x=(n-\eta)} P_{0,1,c}(x)}{2\eta} = \frac{\pi^2}{16 N(c)}\left(\log n + 2C + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - \log N(c)\right)$$

$$\left(\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0;\ \lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta} = 0\right)$$

19) $$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n+\eta)} P_{0,1,c}(x) - \sum\limits_{x=(n-\eta)} P_{0,1,c}(x)}{2\eta} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(ne)} P_{0,1,c}(x)}{[ne]}$$

20) $$\lim_{s=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(10^s)} P_{0,1,c}(x) - \sum\limits_{x=(10^{s-1})} P_{0,1,c}(x)}{10^s - 10^{s-1}} = \left(s \log 10 + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - \log N(c) + \frac{\log 10}{9}\right).$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Summe der reciproken $k$ten Potenzen der Normen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche durch c^r theilbare $r$te Potenzen sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\zeta(r(k+1))\, L_{r(k+1)}}{N(c)^{r(k+1)}}.$$

Die Summe der Normen der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche durch c^{2r} theilbare $(2r)$te Potenzen sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{(2\pi)^{2r(k+1)} B_{r(k+1)} L_{2r(k+1)}}{2\Gamma(2r(k+1)+1)\, N(c)^{2r(k+1)}}.$$

Die Summe der Normen der reciproken $(2k)$ten Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche durch c^{2r+1} theilbare $(2r+1)$te Potenzen sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\pi^{(2r+1)(2k+1)}\, \zeta((2r+1)(2k+1))\, \tau_{(2r+1)(2k+1)-1}}{2^{(2r+1)(2k+1)+1}\, \Gamma((2r+1)(2k+1))\, N(c)^{(2r+1)(2k+1)}}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche durch c^r theilbare $r$te Potenzen sind, ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{\zeta(r) L_r}{N(c)^r}.$$

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta} = 0$$

so hat jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ liegt, im Mittel:

$$\frac{\pi}{4N(c)}\left\{\log n + 2C + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - \log N(c)\right\}$$

primäre durch c theilbare Divisoren.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta} = 0$$

so hat jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ liegt, im Mittel eben so viele primäre durch c theilbare Divisoren, als jede ganze complexe Zahl des Complexes (nc).

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ mit s-zifferiger Norm hat im Mittel:

$$\frac{\pi}{4N(c)}\left\{s\log 10 + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - \log N(c) + \frac{\log 10}{9}\right\}$$

durch c theilbare primäre Divisoren.

Die Summe der Normen der reciproken k^{ten} Potenzen der ungeraden primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{(2^{k+1}-1)L_{k+1}\zeta(k+1)}{2^{k+1}},$$

während die entsprechende Summe für die halbgeraden Divisoren:

$$\frac{2^{k+1}-1}{4^{k+1}}L_{k+1}\zeta(k+1)$$

und für die geraden:

$$\frac{L_{k+1}\zeta(k+1)}{4^{k+1}}$$

beträgt.

Die Summe der Normen der reciproken $(2k-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der ungeraden primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{(2^{2k}-1)(2\pi)^{2k}B_k L_{2k}}{2^{2k+1}\Gamma(2k+1)},$$

während die entsprechende Summe für die halbgeraden Divisoren:

$$\frac{2(2^{2k}-1)(2\pi)^{2k}B_k L_{2k}}{4^{2k+1}\Gamma(2k+1)}$$

und für die geraden:

$$\frac{(2\pi)^{2k}B_k L_{2k}}{2^{4k+1}\Gamma(2k+1)}$$

beträgt.

Die Summe der Normen der reciproken $(2k)^{\text{ten}}$ Potenzen der ungeraden primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel gleich dem Ausdrucke:

$$\frac{(2^{2k+1}-1)\pi^{2k+1}\zeta(2k+1)\tau_{2k}}{2^{4k+3}\Gamma(2k+1)},$$

während die entsprechende Summe für die halbgeraden Divisoren:

$$\frac{(2^{2k+1}-1)\pi^{2k+1}\zeta(2k+1)\tau_{2k}}{2^{6k+4}\Gamma(2k+1)}$$

und für die geraden:

$$\frac{\pi^{2k+1}\zeta(2k+1)\tau_{2k}}{4^{3k+2}\Gamma(2k+1)}$$

beträgt.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0,$$

so hat jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ liegt im Mittel:

$$\frac{\pi}{8}\left(\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\log 2\right)$$

ungerade,

$$\frac{\pi}{16}\left(\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right)$$

halbgerade und:

$$\frac{\pi}{16}\left(\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}-2\log 2\right)$$

gerade primäre Divisoren.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ mit s-zifferiger Norm hat im Mittel:

$$\frac{\pi}{8}\left(s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\log 2+\frac{\log 10}{9}\right)$$

ungerade,

$$\frac{\pi}{16}\left(s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}\right)$$

halbgerade und:

$$\frac{\pi}{16}\left(s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}-2\log 2+\frac{\log 10}{9}\right)$$

gerade primäre Divisoren.

Es sei ferner die zahlentheoretische Function:

$$\mu(x)=+1$$

wenn x eine complexe Einheit oder aus einer geraden Anzahl von verschiedenen complexen Primfactoren zusammengesetzt ist;

$$\mu(x)=-1$$

wenn x aus einer ungeraden Anzahl von verschiedenen complexen Primzahlen zusammengesetzt ist, und

$$\mu(x)=0$$

wenn x mindestens durch das Quadrat einer complexen Primzahl theilbar ist.

Hat nun $\mu_r(x)$ den Werth 1, wenn x eine complexe Einheit oder durch keine r^{te} Potenz theilbar ist, während $\mu_r(x)$ gleich Null ist, wenn x mindestens durch die r^{te} Potenz einer complexen Primzahl theilbar ist, so hat man:

21) $$\sum_{d'_r} \mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right) = \mu_r(x) \qquad (d'_r y^r = x)$$

denn ist x durch keine r^{te} Potenz theilbar, so ist der einzige Werth, welchen d'_r annehmen kann. x, ist aber die grösste in x aufgehende r^{te} Potenz aus τ verschiedenen complexen Primzahlen zusammengesetzt, so ist:

$$\sum_{d'_r} \mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right) = 1 - \binom{\tau}{1} + \binom{\tau}{2} - \binom{\tau}{3} + \binom{\tau}{4} - \ldots + (-1)^{\tau}$$
$$= 0$$

Ist $r = 1$, so hat man offenbar:

22) $$\sum_{d} \mu(d) = 0$$

wo die Summation über alle primären Divisoren von x zu erstrecken ist, wenn x keine complexe Einheit ist, und:

23) $$\sum_{d} \mu(d) = 1$$

wenn x eine complexe Einheit ist.

Aus den eben abgeleiteten Formeln ergeben sich die Gleichungen:

24) $$\sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^{rs}} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu_r(x)}{N(x)^s}$$

25) $$\sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} = 1$$

und daher ist:

26) $$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} = \frac{1}{\zeta(s)L_s}$$

27) $$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu_r(x)}{N(x)^s} = \frac{\zeta(s)L_s}{\zeta(rs)L_{rs}}.$$

Man hat nun:

$$\sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\mu(x) = \sum_{x=(\sqrt[r]{n}),\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x^r y)}\right)\mu(x) \qquad (r>1)$$
$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d'_r} \mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right)\right)$$
$$= \sum_{x=(n)} \mu_r(x)$$

oder:

28) $$\sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\mu(x) = \mathfrak{Q}'_r(n) \qquad (r>1)$$

wo $\mathfrak{Q}'_r(n)$ die Anzahl derjenigen Individuen des Complexes (n) bezeichnet, welche durch keine r^{te} Potenz theilbar sind.

Man hat daher den Satz:

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller dem Complexe (n) angehörigen r^{ten} Potenzen von Zahlen, die nur aus verschiedenen complexen Primfactoren zusammengesetzt sind, und versieht die Anzahl der Individuen des irgend einem der erhaltenen Quotienten entsprechenden Theilbereiches von (n) mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die r^{te} Wurzel des Divisors aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist die Summe der so entstehenden Zahlen gleich der Anzahl jener Zahlen des Complexes (n), welche durch keine r^{te} Potenz theilbar sind.

Verbindet man die Gleichung 28) mit der Formel 1), so erhält man:

$$\mathfrak{Q}'_r(n) = \frac{\pi n}{4} \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \frac{\mu(x)}{N(x)^r} + \sqrt{n} \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \frac{\varepsilon_x \mu(x)}{N(x)^{\frac{r}{2}}} \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

$$= \frac{\pi n}{4\zeta(r) L_r} - \Delta_4$$

wo:

$$\Delta_4 = \frac{\pi n}{4} \sum_{x=(\infty)-(\sqrt[r]{n})} \frac{\mu x}{N(x)^r} + \sqrt{n} \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \frac{\varepsilon_x \mu(x)}{N(x)^{\frac{r}{2}}}$$

ist, aus welcher Gleichung sich sofort folgende Relationen ergeben:

$$|\Delta_4 < \frac{\pi \zeta(r) n^{\frac{1}{r}}}{4} \left\{ \zeta(r) + \frac{1}{r} \log n + C + \frac{1}{\sqrt[r]{n}-1} \right\} + \sqrt{n}\, \zeta\left(\frac{r}{2}\right) L_{\frac{r}{2}} \qquad (r>2)$$

$$|\Delta_4 < \sqrt{n} \left\{ \frac{\pi^5}{144} + \frac{\pi}{8} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} \right\} \log n + \frac{\pi^3}{24(\sqrt{n}-1)} + \frac{C\pi}{4} + \mathfrak{M}_1 \right\} + \frac{5 n^{\frac{1}{4}}}{4} + \frac{1}{4} \qquad (r=2)$$

Es ist also:

$$29) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \mu_r(x)}{n} = \frac{\pi}{4\zeta(r) L_r}$$

$$30) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \mu_{2r}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2r+1)}{4(2\pi)^{2r-1} B_r L_{2r}}$$

$$31) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \mu_{2r+1}(x)}{n} = \frac{2^{2r}\Gamma(2r+1)}{\pi^{2r} \tau_{2r} \zeta(2r+1)}.$$

Aus diesen Formeln fliessen die arithmetischen Theoreme:

Unter den Zahlen des Complexes (n) gibt es im Mittel:

$$\frac{\pi n}{4\zeta(r) L_r}$$

solche, welche durch keine r^{te} Potenz theilbar sind.

Unter den Zahlen des Complexes (n) gibt es im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2r+1) n}{4(2\pi)^{2r-1} B_r L_{2r}}$$

solche, welche durch keine $(2r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind.

Unter den Zahlen des Complexes (n) gibt es im Mittel:

$$\frac{2^{2r}\Gamma(2r+1)n}{\pi^{2r}\tau_{2r}\zeta(2r+1)}$$

solche, welche durch keine $(2r+1)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind.

Unter den Zahlen des Complexes (n) gibt es im Mittel:

$$\frac{\pi n}{4}\left(1-\frac{1}{\zeta(r)L_r}\right)$$

solche, welche mindestens einen Primfactor in der r^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Unter den Zahlen des Complexes (n) gibt es im Mittel:

$$\frac{\pi n}{4}\left(1-\frac{2\Gamma(2r+1)}{(2\pi)^{2r}B_r L_{2r}}\right)$$

solche, welche mindestens einen complexen Primfactor in der $(2r)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Unter den Zahlen des Complexes (n) gibt es im Mittel:

$$\frac{\pi n}{4}\left(1-\frac{2^{2r+2}\Gamma(2r+1)}{\pi^{2r+1}\tau_{2r}\zeta(2r+1)}\right)$$

solche, welche mindestens einen complexen Primfactor in der $(2r+1)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Man hat ferner:

$$\sum_{x=(n)}\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x)=\sum_{x,\,y=(n)}\varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\mu(x)$$

$$=\sum_{x=(n)}\varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d}\mu(d)\right)$$

und daher nach 22) und 23):

32) $$\sum_{x=(n)}\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x)=1.$$

Aus dieser Formel leitet man leicht einen Ausdruck für die Anzahl aller Primzahlen des Complexes (n) ab, wenn sämmtliche Primzahlen des Complexes $(\sqrt{n})$ gegeben sind.

Sind nämlich $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ gegebene Primzahlen des Complexes (n) und bezeichnet:

$$\left(\sum_{x=(n)}f(x)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots\,p_r}$$

den Ausdruck, welchen man erhält, wenn man für x alle jene Zahlen des Complexes (n) setzt, welche nur aus den Primfactoren $p_1, p_2, \ldots, p_r$ zusammengesetzt sind, so erhält man aus der eben abgeleiteten Formel sofort die neue:

33) $$\left(\sum_{x=(n)}\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots\,p_r}=1+L_0(P),$$

wo P irgend eine Zahl des Complexes (n) vorstellt, welche keinen der eben genannten Primfactoren besitzt, und $L_0(P)$ die Anzahl der Zahlen P ist.

Sind nun die Zahlen $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots, p'_r$ sämmtliche Primzahlen des Complexes $(\sqrt{n})$, so ist jede der Zahlen P eine dem Complexe (n) angehörige Primzahl mit einer Norm, welche die $\sqrt{n}$ übersteigt und daher ist in diesem Falle $L_0(P)$ die Anzahl aller dem Complexe (n) angehörigen Primzahlen mit $\sqrt{n}$ übersteigender Norm.

Die Anzahl aller Primzahlen des Complexes (n) ist also durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\left(\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x)\right)_{p'_1,\, p'_2,\, p'_3,\, \ldots,\, p'_r} + r - 1$$

wo die Grössen $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots, p'_r$ alle Primzahlen mit $\sqrt{n}$ nicht übersteigender Norm sind.

Setzt man in der Gleichung 8) $c=1$, schreibt sodann für n: $\frac{n}{N(y^{\sigma r})}$, multiplicirt mit $N(y^{\sigma rk})\mu(y)$ und summirt über alle Individuen des Complexes $(\sqrt[\sigma r]{n})$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\sum_{y=(\sqrt[r\sigma]{n})} \bar{P}_{k,\,r,\,1}\left(\frac{n}{N(y^{\sigma r})}\right) N(y)^{\sigma rk}\mu(y) &= \sum_{x=(\sqrt[r]{n}),\; y=(\sqrt[\sigma r]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy^{\sigma})^{r}}\right) N(xy^{\sigma})^{rk}\mu(y) \\
&= \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^{r}}\right) N(x)^{rk}\left(\sum_{d'_\sigma} \mu \sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right) \\
&= \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^{r})}\right) N(x)^{rk}\mu_\sigma(x) \\
&= \sum_{x=(\sqrt[r]{n}),\; y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x^{r}y)}\right) N(x)^{rk}\mu_\sigma(x) \\
&= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d'_r} \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right) N\left(\frac{x}{d'_r}\right)^{k}\right)
\end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Definition von $\mu_\sigma(x)$:

$$\sum_{d'_r} \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right) N\left(\frac{x}{d'_r}\right)^{k} = \tau'_{r,\,k,\,\sigma}(x) \tag{34}$$

wo $\tau'_{r,\,k,\,\sigma}(x)$ die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen derjenigen primären Divisoren von x ist, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind.

Man hat daher:

$$T_{r,\,k,\,\sigma}(n) = \sum_{x=(n)} \tau'_{r,\,k,\,\sigma}(x) = \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^{r}}\right) N(x)^{rk}\mu_\sigma(x) \tag{35}$$

$$\sum_{x=(n)} \tau'_{r,\,k,\,\sigma}(x) = \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \bar{P}_{k,\,r,\,1}\left(\frac{n}{N(x)^{\sigma r}}\right) N(x)^{\sigma rk}\mu(x). \tag{36}$$

Verbindet man die letzte Gleichung mit der Formel 12), so erhält man:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=(n)} \tau'_{r,\,-k,\,\sigma}(x) &= \frac{\pi\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}}{4}\, n \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\mu(x)}{N(x)^{\sigma r(k+1)}} + \\
&+ \frac{\pi\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}}} \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{N(x)^{\sigma}}\left(\frac{1}{r}\log n + \zeta(r(k+1)) + C - \sigma\log N(x)\right) + \frac{\pi\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}}} \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{n^{\frac{1}{r}} - N(x)^{\sigma}} + \\
&+ \zeta\left(r\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) L_{r\left(k+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{n} \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{N(x)^{\frac{\sigma r}{2}(1+2k)}}
\end{aligned}$$

$$(0 \leqq |\varepsilon_x| < 1) \quad \left(r\left(k+\frac{1}{2}\right) > 1\right)$$

$$\sum_{x=(n)} \tau'_{r,-k,\sigma}(x) = \frac{\pi\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}}{4}\, n \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\mu(x)}{N(x)^{\sigma r(k+1)}} +$$

$$+ \frac{\pi\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}}} \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{N(x)^{\sigma}}\left(\frac{1}{r}\log n + \zeta(r(k+1)) + C - \sigma\log N(x)\right) + \frac{\pi\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}}} \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{n^{\frac{1}{r}} - N(x)^{\sigma}} +$$

$$+ \sqrt{n} \sum_{x=(\sqrt[\sigma r]{n})} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{N(x)^{\frac{\sigma r}{2}(1+2k)}} \left\{\frac{\pi\log n + rC}{4r} + \mathfrak{M}_1 + \frac{(4+\log 2)N(x)^{\frac{\sigma}{2}}}{4\sqrt[2r]{n}} + \frac{N(x)^{\sigma}}{\sqrt[r]{n}}\right\}$$

$$\left(r\left(k+\frac{1}{2}\right) = 1\right)$$

Es ist daher:

$$\sum_{x=(n)} \tau'_{r,-k,\sigma}(x) = \frac{\pi\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}}{4\zeta(\sigma r(k+1))L_{\sigma r(k+1)}} + \Delta_5 \qquad (r(k+1)>1)$$

wo:

$$|\Delta_5| < \frac{\pi\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}\zeta(\sigma r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{\sigma r}}}\left\{\zeta(\sigma r(k+1)) + \frac{1}{\sigma r}\log n + C + \frac{1}{\sqrt[\sigma r]{n}-1}\right\} +$$

$$+ \frac{\pi\zeta(\sigma)L_\sigma\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}}}\left(\frac{\log n}{r} + C + \zeta(r(k+1))\right) + \frac{\pi\sigma\mathfrak{F}_\sigma\zeta(\sigma)\zeta(r(k+1))}{2n^{k-\frac{1}{r}}} + \frac{\pi^2\zeta(r(k+1))}{16n^{k-\frac{1}{r}-\frac{1}{\sigma r}}} +$$

$$+ \frac{\pi\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}-\frac{1}{2\sigma r}}} + \zeta\left(r\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)L_{r(k+\frac{1}{2})}\,\zeta\left(\frac{\sigma r}{2}(1+2k)\right)L_{\frac{\sigma r}{2}(1+2k)}\sqrt{n}.$$

$$\left(r\left(k+\frac{1}{2}\right) > 1\right)$$

$$|\Delta_5| < \frac{\pi\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}\zeta(\sigma r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{\sigma r}}}\left\{\zeta(\sigma r(k+1)) + \frac{1}{\sigma r}\log n + C + \frac{1}{\sqrt[\sigma r]{n}-1}\right\} +$$

$$+ \frac{\pi\zeta(\sigma)L_\sigma\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}}}\left(\frac{\log n}{r} + C + \zeta(r(k+1))\right) + \frac{\pi\sigma\mathfrak{F}_\sigma\zeta(\sigma)\zeta(r(k+1))}{2n^{k-\frac{1}{r}}} + \frac{\pi^2\zeta(r(k+1))}{16n^{k-\frac{1}{r}-\frac{1}{\sigma r}}} +$$

$$+ \frac{\pi\zeta(r(k+1))}{4n^{k-\frac{1}{r}-\frac{1}{2\sigma r}}} + \zeta(\sigma)L_\sigma\sqrt{n}\left\{\frac{\pi\log n + rC}{4r} + \mathfrak{M}_1\right\} + 2(4+\log 2)n^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2r}}.$$

$$\left(r\left(k+\frac{1}{2}\right) = 1\right)$$

$$\mathfrak{F}_r = \sum_{x=2}^{x=\infty} \frac{\log x}{x^r}$$

ist.

Man hat daher die Gleichungen:

37) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \tau'_{r,-k,\sigma}(x)}{n} = \frac{\pi\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}}{4\zeta(\sigma r(k+1))L_{\sigma r(k+1)}} \qquad (r(k+1)>1,\ \sigma>1)$$

38) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \tau'_{2r,-k,\sigma}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)B_{r(k+1)}L_{2r(k+1)}}{8(2\pi)^{2r(k+1)(\sigma-1)-1}B_{\sigma r(k+1)}\Gamma(2r(k+1)+1)L_{2\sigma r(k+1)}}$$

39) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \tau'_{2r+1,-2k,\sigma}(x)}{n} = \frac{\pi^{(2r+1)(2k+1)+1}\zeta((2r+1)(2k+1))\,\tau_{(2r+1)(2k+1)-1}}{2^{(2r+1)(2k+1)+3}\zeta(\sigma(2r+1)(2k+1))\Gamma((2r+1)(2k+1))L_{\sigma(2r+1)(2k+1)}}$$

$$40)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \tau'_{r,\,-k,\,2\sigma}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}}{8(2\pi)^{2\sigma r(k+1)-1}B_{\sigma r(k+1)}\,L_{2\sigma r(k+1)}}$$

Setzt man in der Gleichung 36) $k=0$ und $r=1$, so erhält man:

$$\sum_{x=(n)} \tau'_{1,\,0,\,\sigma}(x) = \sum_{x=\left(\sqrt[\sigma]{n}\right)} \bar{P}_{0,\,1,\,1}\left(\frac{n}{N(x)^\sigma}\right)\mu(x)$$

oder nach der Relation 16):

$$\sum_{x=(n)} \tau'_{1,0,\sigma}(x) = \frac{\pi^2 n}{16}\left\{\left(\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right)\sum_{x=\left(\sqrt[\sigma]{n}\right)}\frac{\mu(x)}{N(x)^\sigma} - \sigma\sum_{x=\left(\sqrt[\sigma]{n}\right)}\frac{\mu(x)\log N(x)}{N(x)^\sigma}\right\} +$$

$$+\,2n^{\frac{3}{4}}\sum_{x=\left(\sqrt[\sigma]{n}\right)}\frac{\varepsilon_x\mu(x)}{N(x)^{\frac{3\sigma}{4}}} + 3\sqrt{n}\sum_{x=\left(\sqrt[\sigma]{n}\right)}\frac{\varepsilon'_x\mu(x)}{N(x)^{\frac{\sigma}{2}}}$$

$$(0 \leqq |\varepsilon_x|,\ |\varepsilon'_x| < 1).$$

Nun ist aber:

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)\log N(x)}{N(x)^\sigma} = \frac{1}{\zeta(\sigma)L_\sigma}\left(\frac{\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma} - \frac{\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right)$$

und daher hat man:

$$\sum_{x=(n)} \tau'_{1,0,\sigma}(x) = \frac{\pi^2 n}{16\zeta(\sigma)L_\sigma}\left\{\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right\} - \Delta_6$$

wo:

$$|\Delta_6| < \frac{\pi^2 n^{\frac{1}{\sigma}}}{16}\left\{\zeta(\sigma)\left(\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right)\left(\zeta(\sigma)+\frac{1}{\sigma}\log n+C+\frac{1}{\sqrt[\sigma]{n}-1}\right)+(2^{\sigma-1}+1)\mathfrak{F}_{\sigma-1}\mathfrak{F}_\sigma\log\left(\sqrt[\sigma]{n}+1\right)\right\} +$$

$$+\,2n^{\frac{3}{4}}\left(12+\zeta\left(\frac{3\sigma}{4}\right)L_{\frac{3\sigma}{4}}\right) \qquad (\sigma > 2)$$

ist. Für $\sigma = 2$ ist, wie schon Herr F. Mertens hervorgehoben hat, Δ_6 von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$.

Man hat daher die Gleichungen:

$$41)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\tau'_{1,0,\sigma}(x)}{n} = \frac{\pi^2}{16\zeta(\sigma)L_\sigma}\left\{\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right\}$$

$$42)\qquad \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n+\eta)}\tau'_{1,0,\sigma}(x)-\sum\limits_{x=(n-\eta)}\tau'_{1,0,\sigma}(x)}{2\eta} = \frac{\pi^2}{16\zeta(\sigma)L_\sigma}\left\{\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right\}$$

$$\left(\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0;\quad \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0\right)$$

$$43)\qquad \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n+\eta)}\tau'_{1,0,\sigma}(x)-\sum\limits_{x=(n-\eta)}\tau'_{1,0,\sigma}(x)}{2\eta} = \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(ne)}\tau'_{1,0,\sigma}(x)}{[ne]}$$

$$\left(\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0;\quad \lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0\right)$$

$$44)\quad \lim_{s=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(10^s)}\tau'_{1,0,\sigma}(x)-\sum\limits_{x=(10^{s-1})}\tau'_{1,0,\sigma}(x)}{10^s-10^{s-1}}=\frac{\pi^2}{16\zeta(\sigma)L_\sigma}\left\{s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right\}$$

$$45)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\tau'_{1,0,2\sigma}(x)}{n}=\frac{\Gamma(2\sigma+1)}{32(2\pi)^{2\sigma-2}B_\sigma L_{2\sigma}}\left\{\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}-\frac{2\sigma\mathfrak{M}_{2\sigma}}{L_{2\sigma}}\right\}$$

$$46)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\tau_{1,0,2\sigma+1}(x)}{n}=\frac{2^{2\sigma-2}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma-1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\left\{\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma+1}}{\zeta(2\sigma+1)}-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+2)\mathfrak{M}_{2\sigma+1}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}}\right\}$$

$$47)\quad \lim_{\eta,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n+\eta)}\tau'_{1,0,2\sigma}(x)-\sum\limits_{x=(n-\eta)}\tau'_{1,0,2\sigma}(x)}{2\eta}=\frac{\Gamma(2\sigma+1)}{32(2\pi)^{2\sigma-2}B_\sigma L_{2\sigma}}\left\{\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}-\frac{2\sigma\mathfrak{M}_{2\sigma}}{L_{2\sigma}}\right\}$$

$$\left(\lim_{\eta,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0;\quad \lim_{\eta,n=\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0\right)$$

$$48)\quad \lim_{\eta,n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n+\eta)}\tau'_{1,0,2\sigma+1}(x)-\sum\limits_{x=(n-\eta)}\tau'_{1,0,2\sigma+1}(x)}{2\eta}=$$

$$=\frac{2^{2\sigma-2}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma-1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\left\{\log n+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma+1}}{\zeta(2\sigma+1)}-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+2)\mathfrak{M}_{2\sigma+1}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}}\right\}$$

$$\left(\lim_{\eta,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0;\quad \lim_{\eta,n=\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0\right)$$

$$49)\quad \lim_{s=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(10^s)}\tau'_{1,0,2\sigma}(x)-\sum\limits_{x=(n-\eta)}\tau'_{1,0,2\sigma}(x)}{10^s-10^{s-1}}=$$

$$=\frac{\Gamma(2\sigma+1)}{32(2\pi)^{2\sigma-2}B_\sigma L_{2\sigma}}\left\{\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}-\frac{2\sigma\mathfrak{M}_{2\sigma}}{L_{2\sigma}}\right\}$$

$$50)\quad \lim_{s=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(10^s)}\tau'_{1,0,2\sigma+1}(x)-\sum\limits_{x=(10^{s-1})}\tau'_{1,0,2\sigma+1}(x)}{10^s-10^{s-1}}=$$

$$=\frac{2^{2\sigma-2}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma-1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\left\{s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}+\frac{(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma+1}}{\zeta(2\sigma+1)}-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+2)\mathfrak{M}_{2\sigma+1}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}}\right\}$$

Aus den entwickelten Gleichungen ergeben sich folgende arithmetische Theoreme:

Die Summe der Normen der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $r$te Potenzen und durch keine (σr)te Potenz theilbarsind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}}{\zeta(\sigma r(k+1))L_{\sigma r(k+1)}}.$$

Die Summe der Normen der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche (2σ)te Potenzen und durch keine $(2\sigma r)$te Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)B_{r(k+1)}L_{2r(k+1)}}{(4\pi^2)^{r(k+1)(\sigma-1)}\Gamma(2r(k+1)+1)B_{\sigma r(k+1)}L_{2\sigma r(k+1)}}.$$

Die Summe der Normen der reciproken $(2k)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $(2r+1)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(\sigma(2r+1))^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\pi^{(2r+1)(2k+1)}\zeta((2r+1)(2k+1))\tau_{(2r+1)(2k+1)-1}}{2^{(2r+1)(2k+1)+1}\zeta(\sigma(2r+1)(2k+1))\Gamma((2r+1)(2k+1))L_{\sigma(2r+1)(2k+1)}}.$$

Die Summe der Normen der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}L_{2\sigma r(k+1)}}.$$

Die Summe der Normen der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}\left\{1-\frac{1}{\zeta(\sigma r(k+1))L_{\sigma r(k+1)}}\right\}.$$

Die Summe der Normen der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2r(k+1)}B_{r(k+1)}L_{2r(k+1)}}{2\Gamma(2r(k+1)+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2r\sigma(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}L_{2\sigma r(k+1)}}\right\}.$$

Die Summe der Normen der reciproken $(2k)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $(2r+1)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma(2r+1))^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\pi^{(2r+1)(2k+1)}\zeta((2r+1)(2k+1))\tau_{(2r+1)(2k+1)-1}}{2^{(2r+1)(2k+1)+1}\Gamma((2r+1)(2k+1))}\left\{1-\frac{1}{\zeta(\sigma(2r+1)(2k+1))L_{\sigma(2r+1)(2k+1)}}\right\},$$

Die Summe der Normen der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r(k+1))L_{r(k+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}L_{2\sigma r(k+1)}}\right\}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\zeta(r)L_r}{\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma r+1)B_r L_{2r}}{(2\pi)^{2r(\sigma-1)}\Gamma(2r+1)B_{\sigma r}L_{2\sigma r}}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $(2r+1)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(\sigma(2r+1))^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\pi^{2r+1}\zeta(2r+1)\tau_{2r}}{2^{2r+2}\zeta(\sigma(2r+1))\Gamma(2r+1)L_{\sigma(2r+1)}}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma r+1)\zeta(r)L_r}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}L_{2\sigma r}}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r)L_r\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}}\right).$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2r}B_r L_{2r}}{2\Gamma(2r+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}L_{2\sigma r}}\right\}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche $(2r+1)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma(2r+1))^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\pi^{2r+1}\zeta(2r+1)\tau_{2r}}{2^{2r+2}\Gamma(2r+1)}\left\{1-\frac{1}{\zeta(\sigma(2r+1))L_{\sigma(2r+1)}}\right\}.$$

Die Anzahl derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r)L_r\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}L_{2\sigma r}}\right\}.$$

Ist:

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0$$

so besitzt jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ liegt, im Mittel:

$$\frac{\pi}{4\zeta(\sigma)L_\sigma}\left\{\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right\}$$

primäre Divisoren, welche durch keine σ^{te} Potenz theilbar sind, und

$$\frac{\pi}{4}\left(\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right)\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)L_\sigma}\right)-\frac{\sigma\pi}{4\zeta(\sigma)L_\sigma}\left\{\frac{\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right\}$$

primäre Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Ist:

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0$$

so besitzt jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ liegt, im Mittel ebenso viele primäre Divisoren, welche durch keine (mindestens durch eine) σ^{te} Potenz theilbar sind, als jede der Zahlen des Complexes (ne).

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta} = 0$$

so besitzt jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ liegt, im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma+1)}{4(2\pi)^{2\sigma-1}B_\sigma L_{2\sigma}}\left\{\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}-\frac{2\sigma\mathfrak{M}_{2\sigma}}{L_{2\sigma}}\right\}$$

primäre Divisoren, welche durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, und:

$$\frac{\pi}{4}\left(\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right)\left(1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma L_{2\sigma}}\right)-\frac{\sigma\Gamma(2\sigma+1)}{2(2\pi)^{2\sigma-1}B_\sigma L_{2\sigma}}\left\{\frac{2\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}-\frac{\mathfrak{M}_{2\sigma}}{L_{2\sigma}}\right\}$$

primäre Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta} = 0$$

so besitzt jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ liegt, im Mittel:

$$\frac{2^{2\sigma}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\left(\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma+1}}{\zeta(2\sigma+1)}-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+2)\mathfrak{M}_{2\sigma+1}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}}\right)$$

primäre Divisoren, welche durch keine $(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, und:

$$\frac{\pi}{4}\left(\log n+2C+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right)\left(1-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\right)-\frac{2^{2\sigma}\Gamma(2\sigma+2)}{\pi^{2\sigma}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\left(\frac{\mathfrak{F}_{2\sigma+1}}{\zeta(2\sigma+1)}-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{M}_{2\sigma+1}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}}\right)$$

primäre Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma+1)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ mit s-zifferiger Norm hat im Mittel:

$$\frac{\pi}{4\zeta(\sigma)L_\sigma}\left\{s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right\}$$

primäre Divisoren, welche durch keine σ^{te} Potenz theilbar sind, und:

$$\frac{\pi}{4}\left\{s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}\right\}\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)L_\sigma}\right)-\frac{\sigma\pi}{4\zeta(\sigma)L_\sigma}\left(\frac{\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}-\frac{\mathfrak{M}_\sigma}{L_\sigma}\right)$$

primäre Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ mit s-zifferiger Norm hat im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma+1)}{4(2\pi)^{2\sigma-1}B_\sigma L_{2\sigma}}\left\{s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}-\frac{2\sigma\mathfrak{M}_{2\sigma}}{L_{2\sigma}}\right\}$$

primäre Divisoren, welche durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, und:

$$\frac{\pi}{4}\left\{s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}\right\}\left(1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma L_{2\sigma}}\right)-\frac{\sigma\Gamma(2\sigma+1)}{2(2\pi)^{2\sigma-1}B_\sigma L_{2\sigma}}\left\{\frac{2\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}-\frac{\mathfrak{M}_{2\sigma}}{L_{2\sigma}}\right\}$$

primäre Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ mit s-zifferiger Norm hat im Mittel:

$$\frac{2^{2\sigma}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\left(s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}+\frac{(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma+1}}{\zeta(2\sigma+1)}-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+2)\mathfrak{M}_{2\sigma+1}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}}\right)$$

primäre Divisoren, welche durch keine $(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, und:

$$\frac{\pi}{4}\left(s\log 10+2C-1+\frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}+\frac{\log 10}{9}\right)\left(1-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\right)-$$
$$-\frac{2^{2\sigma}\Gamma(2\sigma+2)}{\pi^{2\sigma}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\left(\frac{\mathfrak{F}_{2\sigma+1}}{\zeta(2\sigma+1)}-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{M}_{2\sigma+1}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}}\right)$$

primäre Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma+1)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Es sei ferner:

51) $$\varphi_k(x)=\sum_d \mu(d)N\left(\frac{x}{d}\right)^k$$

so dass $\varphi_1(x)$ die Anzahl derjenigen Zahlen eines vollständigen Restsystems für den Modul x ist, welche mit x keinen gemeinschaftlichen Theiler haben („Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes.“ Par G. Lejeune-Dirichlet. Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, Band 24).

Aus der Gleichung 51) folgt die Relation:

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^s}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{1}{N(x)^{s-k}}=\sum_{n=(\infty)}\frac{\varphi_k(x)}{N(x)^s}$$

und daher ist:

52) $$\sum_{x=(\infty)}\frac{\varphi_k(x)}{N(x)^s}=\frac{\zeta(s-k)L_{s-k}}{\zeta(s)L_s}$$

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\varphi_k(x)}{N(x)^s}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{1}{N(x)^s}=\sum_{x=(\infty)}\frac{1}{N(x)^{s-k}}$$

aus welcher Relation folgt:

53) $$\sum_d \varphi_k(d)=N(x)^k.$$

Man hat nun:

54) $$\sum_{x=(n)}\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varphi_k(x)=\sum_{x,\,y=(n)}\varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\varphi_k(x)$$
$$=\sum_{x=(n)}\varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_d \varphi_k(d)\right)$$
$$=\sum_{x=(n)}N(x)^k$$
$$=S'_k(n).$$

Schreibt man in dieser Gleichung für $n=\frac{n}{N(y)}$, multiplicirt mit $\mu(y)$ und summirt bezüglich y über alle Individuen des Complexes (n), so erhält man:

$$\sum_{y=(n)} S'_k\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y) = \sum_{x,\,y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\varphi_k(x)\mu(y)$$
$$= \sum_{x=(n)} \varphi_k(x)\left(\sum_{y=\left(\frac{n}{N(x)}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\mu(y)\right)$$

oder nach 32):

55) $$\sum_{y=(n)} \varphi_k(y) = \sum_{y=(n)} S'_k\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y).$$

Es ist aber:

$$S'_k(m) = \sum_{x=(m)} N(x)^k$$
$$= \sum_{x=1}^{x=[m]} x^k\left(\sum_{d''_x} (-1)^{\frac{d''_x-1}{2}}\right)$$
$$= \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}(2x-1)^k\left\{1^k+2^k+3^k+\ldots+\left[\frac{m}{2x-1}\right]^k\right\}$$

oder wegen der Formel:

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+r^k = \frac{r^{k+1}}{k+1}+\frac{r^k}{2}+\binom{k}{2}\frac{B_1 r^{k-1}}{k-1}-\binom{k}{4}\frac{B_2 r^{k-3}}{k-3}+\binom{k}{6}\frac{B_3 r^{k-5}}{k-5}-\ldots$$

$$S'_k(m) = \frac{m^{k+1}}{k+1}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{x-1}}{2x-1}+\Delta_7$$

wo:

$$\Delta_7 = -\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}(2x-1)^k\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^k-\binom{k}{2}\frac{B_1}{k-1}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-1}+\binom{k}{4}\frac{B_2}{k-3}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-3}-\ldots\right\}$$

ist, und daher hat man:

56) $$S'_k(m) = \frac{\pi m^{k+1}}{4(k+1)}+\Delta_8$$

und:

$$|\Delta_8| < \varepsilon m^k$$

wo ε eine angebbare endliche Grösse ε_0 nicht überschreitet.

Die Formel 55) verwandelt sich daher in:

$$\sum_{x=(n)} \varphi_k(x) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)}\sum_{x=(n)} \frac{\mu(x)}{N(x)^{k+1}}+n^k\sum_{x=(n)} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{N(x)^k} \qquad (0 \leqq |\varepsilon_x| \leqq \varepsilon_0)$$

oder auch:

57) $$\sum_{x=(n)} \varphi_k(x) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)\zeta(k+1)L_{k+1}}+\Delta_9$$

wo:

$$\Delta_9 = -\frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)}\sum_{x=(\infty)-(n)} \frac{\mu(x)}{N(x)^{k+1}}+n^k\sum_{x=(n)} \frac{\varepsilon_x\mu(x)}{N(x)^k}$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

$$|\Delta_9| < \frac{\pi n \zeta(k+1)}{4(k+1)} \left\{ \zeta(k+1) + \log n + C + \frac{1}{n-1} \right\} + \varepsilon_0 n \zeta(k) \left\{ \zeta(k) + \log n + C + \frac{1}{n-1} \right\} \qquad (k > 1)$$

$$|\Delta_9| < \varepsilon_0 \zeta\left(\frac{3}{2}\right) L_{\frac{3}{2}}\, n^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi(1+L_1)}{2}\, n + \frac{\pi L_1}{2}. \qquad (k = 1).$$

Den speciellen Fall $k = 1$ der Formel 57) hat schon Herr Mertens mitgetheilt.

Aus der Formel 57) folgt:

$$58) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \varphi_k(x)}{n^{k+1}} = \frac{\pi}{4(k+1)\zeta(k+1) L_{k+1}}$$

$$59) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \varphi_{2k-1}(x)}{n^{2k}} = \frac{\Gamma(2k+1)}{8k(2\pi)^{2k-1} B_k L_{2k}}$$

$$60) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \varphi_{2k}(x)}{n^{2k+1}} = \frac{2^{2k}\Gamma(2k+1)}{(2k+1)\zeta(2k+1)\pi^{2k}\tau_{2k}}.$$

Mat hat daher das Theorem:

Unter den Gliedern eines vollständigen Restsystems für den Modul n gibt es $\frac{6}{\pi^2 L_2} N(n)$ Zahlen, welche mit n keinen gemeinsamen Theiler haben.

Setzt man:

$$61) \qquad \sum_{d'_r} \mu(d'_r) = \lambda_r(x)$$

so ist offenbar:

$$\lambda_r(x) = \mu(Q)$$

wenn:

$$x = Q \cdot R$$

und R die grösste in x aufgehende r^{te} Potenz ist.

Es ist also:

$$\lambda_r(x) = 0$$

wenn x einen Primfactor in einer Potenz enthält, deren Exponent nach dem Modul r einer der Zahlen 2, 3, 4, ..., $r-1$ congruent ist, während in den übrigen Fällen:

$$\lambda_r(x) = (-1)^\sigma$$

ist, wo σ die Anzahl jener Primzahlen ist, welche in x in der Potenz $kr+1$ enthalten sind.

Ist speciell $r = 2$, so hat $\lambda_r(x)$ den Werth $+1$ oder -1, je nachdem x aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von (verschiedenen oder gleichen) Primzahlen zusammengesetzt ist.

Aus der Definitionsgleichung 61) folgt sofort:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^{rs}} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda_r(x)}{N(x)^s}$$

und daher ist:

62) $$\sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda_r(x)}{N(x)^s} = \frac{\zeta(rs)L_{rs}}{\zeta(s)L_s}$$

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda_r(x)}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^s} = \sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^{rs}}$$

aus welcher Gleichung folgt:

63) $$\sum_d \lambda_r(d) = 0,$$

wenn x keine r^{te} Potenz ist, und:

64) $$\sum_d \lambda_r(d) = 1,$$

wenn x eine r^{te} Potenz ist.

Man hat daher:

65) $$\sum_{x=(\infty)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \lambda_r(x) = \sum_{x,\,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right) \lambda_r(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_d \lambda_r(d)\right)$$

$$= Q_r(n)$$

wo $Q_r(n)$ die Anzahl der Zahlen des Complexes (n) ist, welche r^{te} Potenzen sind.

Schreibt man in dieser Gleichung für $n : \frac{n}{N(y)}$, multiplicirt mit $\mu(y)$ und summirt bezüglich y über alle Zahlen des Complexes (n), so erhält man:

66) $$\sum_{x=(n)} Q_r\left(\frac{n}{N(y)}\right) \mu(y) = \sum_{x,\,y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy)}\right) \lambda_r(x)\mu(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \lambda_r(x) \left(\sum_{y=\left(\frac{n}{N(x)}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy)}\right) \mu(y)\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \lambda_r(x).$$

Schreibt man in der Gleichung 62) für $s : \sigma s$ und multiplicirt sodann mit:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^s},$$

so entsteht die Relation:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda_r(x)}{N(x)^{\sigma s}} \sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^s} = \zeta(\sigma r s) L_{\sigma r s} \cdot \frac{\zeta(s)L_s}{\zeta(\sigma s)L_{\sigma s}}$$

$$= \sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^{\sigma r s}} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu_\sigma(x)}{N(x)^s}$$

und daher ist:

67) $$\sum_{d'_\sigma} \lambda_r\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right) = \sum_{d'_{\sigma r}} \mu_\sigma(d'_{\sigma r})$$

$$= \alpha_{\sigma,r}(x)$$

wo $\alpha_{\sigma,r}(x)$ die Anzahl derjenigen Divisoren von x ist, welche $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine σ^{te} Potenz theilbar ist.

Es ist nun:

68) $$\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^\sigma}\right)\lambda_r(x) = \sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n}),\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x^\sigma y)}\right)\lambda_r(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d'_\sigma} \lambda_r\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right)\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \alpha_{\sigma,r}(x)$$

Man hat also:

$$\sum_{x=(n)} \alpha_{\sigma,r}(x) = \frac{\pi n}{4} \sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \frac{\lambda_r(x)}{N(x)^\sigma} + \sqrt{n} \sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \frac{\varepsilon_x \lambda_r(x)}{N(x)^{\frac{\sigma}{2}}} \qquad (0 \leqq |\varepsilon_x| < 1)$$

$$= \frac{\pi\zeta(r\sigma)L_{r\sigma}}{4\zeta(\sigma)L_\sigma}\, n - \Delta_{10}$$

wo:

$$\Delta_{10} = \frac{\pi n}{4} \sum_{x=(\infty)-(\sqrt[\sigma]{n})} \frac{\lambda_r(x)}{N(x)^\sigma} - \sqrt{n} \sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \frac{\varepsilon_x \lambda_r(x)}{N(x)^{\frac{\sigma}{2}}}$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

$$|\Delta_{10}| < \frac{\pi n^{\frac{1}{\sigma}}\zeta(\sigma)}{4}\left\{\frac{\log n}{\sigma} + \zeta(\sigma) + C + \frac{1}{\sqrt[\sigma]{n}-1}\right\} + \zeta\left(\frac{\sigma}{2}\right) L_{\frac{\sigma}{2}} \sqrt{n} \qquad (\sigma > 2)$$

$$|\Delta_{10}| < \left(\frac{\pi^3}{24}\left\{\frac{\pi^2}{6} + \frac{\log n}{2} + C + \frac{1}{\sqrt{n}-1}\right\} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\log n}{2} + C\right) + \mathfrak{M}_1\right)\sqrt{n} + (4 + \log 2)n^{\frac{1}{4}} + 1$$
$$(\sigma = 2).$$

Aus den eben entwickelten Formeln ergeben sich die Gleichungen:

69) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \alpha_{r,\sigma}(x)}{n} = \frac{\pi\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}}{4\zeta(\sigma)L_\sigma}$$

70) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \alpha_{2r,\sigma}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2r\sigma+1} B_{r\sigma} L_{2r\sigma}}{16\Gamma(2r\sigma+1)\zeta(\sigma)L_\sigma}$$

71) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \alpha_{r,2\sigma}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2\sigma(r-1)+1}\Gamma(2\sigma+1)B_{\sigma r}L_{2r\sigma}}{8\Gamma(2r\sigma+1)B_\sigma L_{2\sigma}}$$

72) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \alpha_{r,2\sigma+1}(x)}{n} = \frac{2^{2\sigma}\Gamma(2\sigma+1)\,\zeta(r(2\sigma+1))\,L_{r(2\sigma+1)}}{\pi^{2\sigma}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}$$

73) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \alpha_{2r+1,2\sigma+1}(x)}{n} = \frac{\pi^{2r(2\sigma+1)+1}\Gamma(2\sigma+1)\tau_{(2r+1)(2\sigma+1)-1}\zeta((2r+1)(2\sigma+1))}{2^{2r(2\sigma+1)+2}\Gamma((2r+1)(2\sigma+1))\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}.$$

Man hat daher die arithmetischen Theoreme:

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ hat im Mittel:

$$\frac{\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}}{\zeta(\sigma)L_{\sigma}}$$

primäre Divisoren, welche $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine σ^{te} Potenz theilbar ist, und:

$$\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)L_{\sigma}}\right)$$

primäre Divisoren, welche $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor mindestens durch eine σ^{te} Potenz theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ hat im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2r\sigma}B_{r\sigma}L_{2r\sigma}}{2\Gamma(2r\sigma+1)\zeta(\sigma)L_{\sigma}}$$

primäre Divisoren, welche $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine σ^{te} Potenz theilbar ist, und:

$$\frac{(2\pi)^{2r\sigma}B_{r\sigma}L_{2r\sigma}}{2\Gamma(2r\sigma+1)}\left\{1-\frac{1}{\zeta(\sigma)L_{\sigma}}\right\}$$

primäre Divisoren, welche $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind, und deren complementärer Divisor mindestens durch eine σ^{te} Potenz theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ hat im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2\sigma(r-1)}\Gamma(2\sigma+1)B_{\sigma r}L_{2r\sigma}}{\Gamma(2r\sigma+1)B_{\sigma}L_{2\sigma}}$$

primäre Divisoren, welche $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist, und:

$$\frac{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}L_{2\sigma r}}{2\Gamma(2\sigma r+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_{\sigma}L_{2\sigma}}\right\}$$

primäre Divisoren, welche $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch mindestens eine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel:

$$\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+1)\zeta(r(2\sigma+1))L_{r(2\sigma+1)}}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}$$

primäre Divisoren, welche $(r(2\sigma+1))^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine $(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist, und:

$$\zeta(r(2\sigma+1))L_{r(2\sigma+1)}\left\{1-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\right\}$$

primäre Divisoren, welche $(r(2\sigma+1))^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor mindestens durch eine $(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel:

$$\frac{\pi^{2r(2\sigma+1)}\Gamma(2\sigma+1)\tau_{(2r+1)(2\sigma+1)-1}\zeta((2r+1)(2\sigma+1))}{2^{2r(2\sigma+1)}\Gamma((2r+1)(2\sigma+1))\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}$$

primäre Divisoren, welche $(2r+1)(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine $(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist und:

$$\frac{\pi^{(2r+1)(2\sigma+1)}\tau_{(2r+1)(2\sigma+1)-1}\zeta((2r+1)(2\sigma+1))}{2^{(2r+1)(2\sigma+1)+1}\Gamma((2r+1)(2\sigma+1))}\left\{1-\frac{2^{2\sigma+2}\Gamma(2\sigma+1)}{\pi^{2\sigma+1}\tau_{2\sigma}\zeta(2\sigma+1)}\right\}$$

primäre Divisoren, welche $(2r+1)(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor mindestens durch eine $(2\sigma+1)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel:

$$\frac{\pi^3 L_4}{60 L_2}$$

primäre Divisoren, welche vierte Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel:

$$\frac{\pi^5 L_6}{630 L_2}$$

primäre Divisoren, welche sechste Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel:

$$\frac{\pi^7 L_8}{6300\, L_2}$$

primäre Divisoren, welche achte Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel:

$$\frac{\pi^9 L_{10}}{62370\, L_2}$$

primäre Divisoren, welche zehnte Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel:

$$\frac{691\,\pi^{11} L_{12}}{425675250\, L_2}$$

primäre Divisoren, welche zwölfte Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist.

Setzt man ferner:

74) $$\sum_{d'_r}\mu(d'_r)\mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right)=\sigma_r(x)$$

so ist offenbar:

$$\sigma_r(x)=\mu(Q)\mu(R)$$

wenn:

$$x=Q\,.\,R^r$$

und R^r die grösste in x aufgehende r^{te} Potenz ist.

Es ist also:

$$\sigma_r(x) = 0$$

wenn x durch eine andere, als eine erste, r^{te} oder $(r+1)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl theilbar ist, und:

$$\sigma_r(x) = (-1)^\tau$$

in allen anderen Fällen, wenn τ die Anzahl jener Primzahlen ist, welche in x in der ersten oder r^{ten} Potenz auftreten.

Aus der Relation 74) folgt:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^{rs}} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\sigma_r(x)}{N(x)^s}$$

und daher ist:

75) $$\sum_{x=(\infty)} \frac{\sigma_r(x)}{N(x)^s} = \frac{1}{\zeta(s)\,\zeta(rs)\,L_s L_{rs}}$$

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^{rs}} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\sigma_r(x)}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^s}$$

aus welcher Formel sich folgende Relationen ergeben:

76) $$\sum_{d} \sigma_r(d) = 0$$

wenn x keine r^{te} Potenz ist, und:

77) $$\sum_{d} \sigma_r(d) = \mu(\sqrt[r]{x})$$

wenn x eine r^{te} Potenz ist.

Man hat daher:

$$\sum_{x=(\infty)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \sigma_r(x) = \sum_{x,\,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right) \sigma_r(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right) \left(\sum_{d} \sigma_r(d)\right)$$

also nach 75) und 76):

78) $$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \sigma_r(x) = \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mu(x).$$

Es ist ferner:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\sigma_r(x)}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{1}{N(x)^{rs}}$$

und daher:

79) $$\sum_{d'_r} \sigma_r(d'_r) = \mu(x).$$

Es ist auch:

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\lambda_r(x)}{N(x)^s}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{\sigma_\tau(x)}{N(x)^{rs}}=\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^s}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^{\tau rs}}$$

$$=\sum_{x=(\infty)}\frac{\sigma^{\mu}_{\tau r}(x)}{N(x)^s}$$

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\lambda_r(x)}{N(x)^s}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{\sigma_r(x)}{N(x)^s}=\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^s}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^s}$$

$$=\sum_{x=(\infty)}\frac{\sigma_1(x)}{N(x)^s}$$

und demnach:

80) $$\sum_{d'_r}\lambda_r(d'_r)\sigma_\tau\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right)=\sigma_{\tau r}(x)$$

81) $$\sum_{d}\lambda_r(d)\sigma_r\left(\frac{x}{d}\right)=\sigma_1(x).$$

Man hat weiters:

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^{\sigma s}}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^{\sigma rs}}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{1}{N(x)^s}=\sum_{x=(\infty)}\frac{\sigma_r(x)}{N(x)^{\sigma s}}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{1}{N(x)^s}$$

oder:

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu_\sigma(x)}{N(x)^s}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^{\sigma rs}}=\sum_{x=(\infty)}\frac{\sigma_r(x)}{N(x)^{\sigma s}}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{1}{N(x)^s}$$

$$\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu(x)}{N(x)^{\sigma s}}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{\mu_{\sigma r}(x)}{N(x)^s}=\sum_{x=(\infty)}\frac{\sigma_r(x)}{N(x)^{\sigma s}}\cdot\sum_{x=(\infty)}\frac{1}{N(x)^s}$$

und daher:

82) $$\sum_{d'_r}\sigma_r\left(\sqrt{\frac{x}{d'_\sigma}}\right)=\sum_{d'_{\sigma r}}\mu\left(\sqrt{\frac{x}{d'_{\sigma r}}}\right)\mu_\sigma(d'_{\sigma r})$$

83) $$\sum_{d'_\sigma}\sigma_r\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right)=\sum_{d'_\sigma}\mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right)\mu_{\sigma r}(d'_\sigma)$$

$$=\chi_{\sigma,r}(x)$$

wo:

$$\chi_{\sigma,r}(x)=\mu_\sigma(Q)\mu(R)$$

ist, wenn:

$$x=Q\,.\,R^{\sigma r}$$

und $R^{\sigma r}$ die grösste $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz ist, welche in x ohne Rest enthalten ist.

Es ist daher:

$$\chi_{\sigma,r}(x)=0$$

wenn x durch eine Potenz einer Primzahl theilbar ist, deren Exponent nach dem Modul σr einer von den Zahlen $0, 1, 2\ldots, \sigma-1$ verschiedenen Zahl congruent oder grösser als $2\sigma r-1$ ist, und:

$$\chi_{\sigma,r}(x)=(-1)^{\tau_1}$$

in den übrigen Fällen, wenn τ_1 die Anzahl jener Primzahlen ist, welche in x in der $(\sigma r)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommen.

Es ist nun:

$$\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^{\sigma}}\right)\sigma_r(x) = \sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n}),\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x^{\sigma}y)}\right)\sigma_r(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{N}{N(x)}\right)\left(\sum_{d'_\sigma}\sigma_r\left(\sqrt{\frac{x}{d'_\sigma}}\right)\right)$$

oder nach 83):

84) $$\sum_{x=(n)} \chi_{\sigma,r}(x) = \sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^{\sigma})}\right)\sigma_r(x).$$

Aus dieser Relation folgt:

$$\sum_{x=(n)} \chi_{\sigma,r}(x) = \frac{\pi n}{4}\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})}\frac{\sigma_r(x)}{N(x)^{\sigma}} + \sqrt{n}\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})}\frac{\varepsilon_x\,\sigma_r(x)}{N(x)^{\frac{\sigma}{2}}} \qquad (0 \leqq |\varepsilon_x| < 1)$$

oder:

$$\sum_{x=(n)} \chi_{\sigma,r}(x) = \frac{\pi n}{4\zeta(\sigma)\zeta(r\sigma)L_\sigma L_{r\sigma}} + \Delta_{11}$$

wo:

$$\Delta_{11} = -\frac{\pi n}{4}\sum_{x=(\infty)-(\sqrt[\sigma]{n})}\frac{\sigma_r(x)}{N(x)^{\sigma}} + \sqrt{n}\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})}\frac{\varepsilon_x\sigma_r(x)}{N(x)^{\frac{\sigma}{2}}}$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

$$|\Delta_{11}| < \frac{\pi\zeta(\sigma)n^{\frac{1}{\sigma}}}{4}\left(\zeta(\sigma) + \frac{\log n}{\sigma} + C + \frac{1}{\sqrt[\sigma]{n}-1}\right) + \zeta\left(\frac{\sigma}{2}\right)L_{\frac{\sigma}{2}}\sqrt{n} \qquad (\sigma > 2)$$

$$|\Delta_{11}| < \left\{\frac{\pi^3}{24}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\log n}{2} + C + \frac{1}{\sqrt{n}-1}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\log n}{2} + C\right) + \mathfrak{M}_1\right\}\sqrt{n} + \left(1 + \frac{\log 2}{4}\right)n^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \qquad (\sigma = 2).$$

Es ist also:

85) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\chi_{\sigma,r}(x)}{n} = \frac{\pi}{4\zeta(\sigma)\zeta(r\sigma)L_\sigma L_{r\sigma}}$$

86) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\chi_{2\sigma,r}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2\sigma+1)\Gamma(2r\sigma+1)}{2(2\pi)^{2\sigma(r+1)-1}B_\sigma B_{r\sigma}L_{2\sigma}L_{2r\sigma}}$$

87) $$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\chi_{\sigma,2r}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2r\sigma+1)}{4(2\pi)^{2r\sigma-1}B_{r\sigma}\zeta(\sigma)L_\sigma L_{2r\sigma}}$$

88) $$\lim_{n=(\infty)}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\chi_{2\sigma+1,2r+1}(x)}{n} = \frac{4^{(r+1)(2\sigma+1)}}{\pi^{2(2\sigma+1)(r+1)-1}\tau_{2\sigma}\tau_{(2\sigma+1)(2r+1)-1}\zeta(2\sigma+1)\zeta((2r+1)(2\sigma+1))}.$$

Schreibt man in der Gleichung 28) für n: $\frac{n}{N(y)^{\sigma r}}$ und summirt sodann bezüglich y über alle Zahlen des Complexes $(\sqrt[\sigma r]{n})$, so erhält man:

$$\sum_{y=\left(\sqrt[\sigma r]{n}\right)} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(y)^{\sigma r}}\right) = \sum_{x=\left(\sqrt[r]{n}\right),\, y=\left(\sqrt[\sigma r]{n}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy^{\sigma})^r}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=\left(\sqrt[r]{n}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\left(\sum_{d'_\sigma} \mu(d'_\sigma)\right)$$

oder nach 61):

89)
$$\sum_{y=\left(\sqrt[\sigma r]{n}\right)} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(y)^{\sigma r}}\right) = \sum_{x=\left(\sqrt[r]{n}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\lambda_\sigma(x)$$

$$= \sum_{x=\left(\sqrt[r]{n}\right),\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x^r y)}\right)\lambda_\sigma(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d'_r}\lambda_\sigma\left(\sqrt{\frac{x}{d'_r}}\right)\right)$$

welche Gleichung wegen der Relation 67) auch in folgender Form geschrieben werden kann:

90)
$$\sum_{y=\left(\sqrt[\sigma r]{n}\right)} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(y)^{\sigma r}}\right) = \sum_{x=(n)} \alpha_{\sigma,r}(x).$$

Schreibt man aber in der Gleichung 28) für r: σr und für n: $\dfrac{n}{N(y)^r}$, summirt sodann bezüglich y über alle Individuen des Complexes $(\sqrt[r]{n})$, so ergibt sich die Formel:

$$\sum_{y=\left(\sqrt[r]{n}\right)} \mathfrak{Q}'_{\sigma r}\left(\frac{n}{N(y)^r}\right) = \sum_{x=\left(\sqrt[\sigma r]{n}\right)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\sigma y)^r}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\left(\sum_{d'_\sigma} \mu\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\mu_\sigma(x)$$

welche Relation nach den obigen Entwicklungen in die folgende übergeht:

91)
$$\sum_{y=\left(\sqrt[r]{n}\right)} \mathfrak{Q}'_{\sigma r}\left(\frac{n}{N(y)^r}\right) = \sum_{x=(n)} \tau'_{r,0\,\sigma}(x).$$

Für $\sigma = 1$ verwandeln sich die Gleichungen 90) und 91) in:

92)
$$\sum_{x=\left(\sqrt[r]{n}\right)} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(x)^r}\right) = \mathfrak{A}(n).$$

Diese Gleichung liefert folgendes Theorem:

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller dem Complexe (n) angehörigen r^{ten} Potenzen und bestimmt für jeden Theilbereich des Complexes (n), der irgend einem der so erhaltenen Quotienten entspricht, die Anzahl der durch keine r^{te} Potenz theilbaren Zahlen, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der Anzahl der Individuen des Complexes (n).

Aus der Gleichung 92) folgt die Relation:

$$\sum_{x,y=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(xy)^r}\right) N(y)^{rk}\mu_\sigma(y) = \sum_{y=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)^r}\right) N(y)^{rk}\mu_\sigma(y)$$

oder:

$$\sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\left(\sum_{d} N(d)^{rk}\mu_\sigma(d)\right) = \sum_{x=(n)} \tau'_{r,k,\sigma}(x)$$

welche Gleichung sofort in die folgende übergeht:

93) $$\sum_{x=(n)} \tau'_{r,k,\sigma}(x) = \sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(x)^r}\right) \tau'_{1,rk,\sigma}(x).$$

Es ist ferner:

$$\sum_{x=(\sqrt[r]{n}),\, y=(n)} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(x^r y)}\right) \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu(x$$

oder:

$$\sum_{x=(\sqrt[r]{n})} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d_r} \mu(d_r)\right) = 1$$

oder schliesslich:

94) $$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}'_r\left(\frac{n}{N(x)}\right) \lambda_r(x) = 1.$$

Diese Gleichung liefert die Theoreme:

Dividirt man die Zahl n durch die Normen jener Zahlen des Complexes (n), welche nur aus $(kr)^{\text{ten}}$ und $(kr+1)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt sind, und bestimmt für jeden Theilbereich des Complexes (n), welcher irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl der durch keine r^{te} Potenz theilbaren Zahlen, so ist die Summe derjenigen Anzahlen, welche einem aus einer geraden Anzahl von $(kr+1)^{\text{ten}}$ und einer beliebigen Anzahl von $(kr)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzten Divisor entsprechen, um 1 grösser als die Summe der übrigen Anzahlen.

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller dem Complexe (n) angehörigen Zahlen und bestimmt für jeden Theilbereich des Complexes (n), der einem auf diese Weise entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl der durch kein Quadrat theilbaren Zahlen, so ist die Summe derjenigen Anzahlen, welche einem aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzten Divisor entsprechen, um 1 grösser als die Summe der übrigen.

Schreibt man in der Gleichung 65) für $r : \sigma r$ und für $n : \dfrac{n}{N(y)^\sigma}$, multiplicirt sodann mit $\mu_r(y)$ und summirt bezüglich y über den ganzen Complex $(\sqrt[\sigma]{n})$, so entsteht die Relation:

$$\sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})} Q_{r\sigma}\left(\frac{n}{N(y)^\sigma}\right)\mu_r(y) = \sum_{x=(n),\, y=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy^\sigma)}\right)\lambda_{r\sigma}(x)\mu_\sigma(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d'_\sigma} \lambda_{r\sigma}(d'_\sigma)\mu_r\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right)\right),$$

Nun ist aber:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda_{r\sigma}(x)}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu_r(x)}{N(x)^{\sigma s}} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=\infty} \frac{1}{N(x)^{\sigma s}}$$

$$= \sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda_\sigma(x)}{N(x)^s}$$

und daher:

95) $$\sum_{d'_\sigma} \lambda_{r\sigma}(d'_\sigma)\,\mu_r\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d'_\sigma}}\right) = \lambda_\sigma(x).$$

Es ist also:

96) $$\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} Q_{r\sigma}\left(\frac{n}{N(x)^\sigma}\right)\mu_r(x) = Q_\sigma(n)$$

Für $\sigma = 1$ verwandelt sich diese Formel in:

97) $$\sum_{x=(n)} Q_r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu_r(x) = \mathfrak{A}(n).$$

Man hat daher den arithmetischen Satz:

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller durch keine r^{te} Potenz theilbaren Zahlen des Complexes (n) und bestimmt für jeden Theilbereich von (n), der irgend einem der so erhaltenen Quotienten entspricht, die Anzahl der in demselben befindlichen r^{ten} Potenzen, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der Anzahl der Individuen des Complexes (n).

Man hat ferner:

$$\sum_{x=(\sqrt[r]{n})} Q_r\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\mu(x) = \sum_{x=(\sqrt[r]{n}),\, y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^r y)}\right)\lambda_r(y)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d'_r} \lambda_r(d'_r)\,\mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right)\right).$$

Es ist aber:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda_r(x)}{N(x)^s} \cdot \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^{rs}} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s}$$

und daher:

98) $$\sum_{d'_r} \lambda_r(d'_r)\,\mu\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d'_r}}\right) = \mu(x).$$

Die letzte Gleichung verwandelt sich daher in die folgende:

$$\sum_{x=(\sqrt[r]{n})} Q_r\left(\frac{n}{N(x)^r}\right)\mu(x) = 1.$$

Diese Gleichung liefert den Satz:

Dividirt man die Zahl n durch die Normen jener dem Complexe (n) angehörigen r^{ten} Potenzen, welche durch keine $(2r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind, und bestimmt für jeden Theilbereich von (n), welcher irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl der in demselben befindlichen r^{ten} Potenzen, so übertrifft die Summe derjenigen Anzahlen, welche einem Nenner entsprechen, dessen Basis aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, die Summe der übrigen um 1.

Ich will bei dieser Gelegenheit mittheilen, dass die neun Gedächtnissverse des Codex von Chartres, welche sich auf die von Radulph von Laon erwähnten, auf dem Abacus zwischen dem ersten und zweiten Buche der Geometrie des Boëthius, bei Gerlandus von Besançon u. A. vorkommenden räthselhaften zehn Wörter „Igin“, „Andras“, „Ormis“ u. s. f. beziehen, (Chasles, Aperçu historique, p. 473; Cantor, Geschichte der Mathematik, p. 765) auch in dem mit der Signatur Vat. Univ. 5327 versehenen Pergamentcodex der vaticanischen Bibliothek mit geringen Modificationen enthalten sind — so findet sich z. B. daselbst das im Codex von Chartres fehlende dritte Wort des ersten Verses „sibi“. Im zuletzt erwähnten Codex kommt aber überdies noch der im Codex von Chartres fehlende zehnte auf das Wort „Celentis“ bezügliche Vers vor; derselbe lautet:

„Terque notat trinum celentis nomine rithmum.“

An die zehn Gedächtnissverse schliesst sich der schon von Treutlein im zehnten Bande des Bulletino Boncompagni veröffentlichte Abacus des Gerlandus Vesontinus („Nonnullis arbitrantibus etc.“) an; der genannte Codex enthält also ein in dem vom Fürsten Boncampagni publicirten Verzeichnisse der Handschriften dieses Abacus nicht angeführtes Exemplar.