ÜBER DIE

INTEGRATION EINES SYSTEMS LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

MIT

EINER UNABHÄNGIG VERÄNDERLICHEN GRÖSSE

VON

DR. E. GRÜNFELD.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 3. FEBRUAR 1888.

1.

Das System linearer homogener Differentialgleichungen:

$$1)\qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \ldots + a_{in}(x)y_n \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

in welchen die Coëfficienten $a_{i1}(x)$, $a_{i2}(x)$, $\ldots a_{in}(x)$ Functionen von x bedeuten, die in der Umgebung des Punktes $x = 0$ eindeutig und endlich sind, lässt, wie Herr Sauvage gezeigt hat,[1] ein Fundamentalsystem von Lösungen zu, welche er zufolge der Art, wie sich dieselben in dieser Umgebung verhalten, nach einer von Thomé[2] herrührenden Bezeichnung reguläre Lösungen nennt.

Zur Herleitung dieses Resultates bedient sich Herr Sauvage eines Verfahrens, welches analog demjenigen ist, durch das zuerst Herr Fuchs die Existenz eines Fundamentalsystems von Integralen der nach ihm benannten linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung nachgewiesen hat, und das im Wesentlichen in Folgendem besteht.

Zuvörderst wird gezeigt, dass sich n unendliche Reihen:

$$2)\qquad \varphi_i(x) = c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

bestimmen lassen, die innerhalb eines bestimmten, um den singulären Punkt $x = 0$ beschriebenen Kreises convergiren und von denen mindestens eine zum Exponenten r_1 gehört,[3] derart, dass die n Ausdrücke:

$$3)\qquad y_{11} = x^{r_1}\varphi_1(x),\ y_{21} = x^{r_1}\varphi_2(x), \ldots,\ y_{n1} = x^{r_1}\varphi_n(x)$$

---

[1] Siehe die Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, III. Serie, t. III, année 1886, pag. 391—404.

[2] Siehe Crelle's Journal, Bd. 75, S. 266.

[3] Siehe zu dieser Bezeichnung: Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 66, S. 155.

dem Gleichungssystem 1) identisch genügen, wobei r_1 von den Wurzeln $r_1, r_2 \ldots, r_n$ einer gewissen algebraischen Gleichung $n$ten Grades — der auf den Punkt $x=0$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichung — diejenige ist, für welche keine der Differenzen:

$$r_2-r_1-1,\ r_3-r_1-1,\quad \ldots.\ r_n-r_1-1$$

Null oder einer ganzen positiven Zahl gleich wird.

Macht man alsdann in dem Gleichungssysteme (1) die Substitution:

$$y_1 = y_{11} q_1,\quad y_2 = y_{21} q_2,\quad \ldots,\ y_n = y_{n1} q_n \tag{4}$$

so ergibt sich das Gleichungssystem:

$$x\frac{dz_i}{dx} = b_{i2}(x) z_2 + b_{i3}(x) z_3 + \ldots + b_{in}(x) z_n \qquad i=2,\ 3, \ldots n \tag{1'}$$

dessen Coëfficienten von derselben Beschaffenheit wie die des Systems 1) sind, das aber eine Unbekannte weniger hat; dabei ist:

$$\left\{\begin{aligned} & z_i = q_i - q_1 \qquad\qquad i = 2, \ldots n \\ & x\frac{dq_1}{dx} = a_{12}(x)\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} z_2 + \ldots + a_{1n}(x)\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)} z_n \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Wie früher für 1), lässt sich daher jetzt auch für das Gleichungssystem 1') eine reguläre Lösung: $z_{21}, z_{31}, \ldots, z_{n1}$ bestimmen, mittelst welcher aus den Gleichungen 4) und 5) eine zweite reguläre Lösung: $y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}$ des Gleichuugssystems 1) gewonnen wird. Verfährt man nunmehr mit dem Gleichungssysteme 1') in derselben Weise, wie zuerst mit 1), so gelangt man zu einem Gleichungssysteme 1'') mit nur $n-2$ Unbekannten, damit zu einer zweiten regulären Lösung von 1') und zu einer dritten regulären Lösung von 1) selbst, u. s. w.

Die Frage, wann in den so erhaltenen Lösungen Logarithmen auftreten, wurde von Herrn Sauvage nicht in Erwägung gezogen. Indem ich selbst an die diesbezügliche Untersuchung heranschritt, fand ich, dass sich die Existenz eines Fundamentalsystems von regulären Lösungen des Gleichungssystems 1) auch ohne Zuhilfenahme der Gleichungssysteme 1'), 1'') u. s. w. in sehr einfacher Weise darthun lässt, wenn man, wie dies Herr Frobenius [1] bei der Integration der Fuchs'schen Differentialgleichung gethan hat, die Coëfficienten der Reihen 2) und damit auch die ersten Theile der auf Null reducirten Gleichungen 1) als von den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung abhängig darstellt.

Die letzteren theile ich in Gruppen von der Art ein, dass jede nur solche Wurzeln enthält, die sich um Null oder ganze Zahlen von einander unterscheiden; die Wurzeln einer Gruppe werden dabei in eine solche Reihenfolge gebracht, dass von zwei derselben die voranstehende nicht kleiner als die nachfolgende ist. Einer solchen Gruppe von Wurzeln entspricht eine Gruppe von untereinander linear unabhängigen Lösungen des Gleichungssystems 1), die so beschaffen sind, dass sich die Bedingungen für das Nichtvorhandensein von Logarithmen in denselben ohne Schwierigkeit ermitteln lassen.

2.

Es sei

$$\left\{\begin{aligned} & x\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x\frac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n \end{aligned}\right. \tag{1}$$

[1] Siehe Crelle's Journal, Bd. 76, S. 214—235.

das Gleichungssystem 1) der vorigen Nummer, wo $a_{ik} = a_{ik}(x)$ und werde zur Abkürzung

$$A_i(y) = -x\frac{dy_i}{dx} + a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{2}$$

gesetzt.

Gemäss der über die Coëfficienten a_{ik} gemachten Voraussetzung lassen sich dieselben durch convergente, nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen darstellen: Es sei:

$$a_{ik}(x) = a^0_{ik} + a^1_{ik}x + a^2_{ik}x^2 + a^3_{ik}x^3 + \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots n; \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{3}$$

Es seien ferner:

$$u_i = c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + c_{i3}x^3 + \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{4}$$

n unendliche, nur ganz positive Potenzen von x enthaltende Reihen mit den vorderhand noch unbestimmten Coëfficienten c_{ik}.

Substituirt man in den Ausdrücken 2) für $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Producte:

$$y_1 = x^r u_1, \quad y_2 = x^r u_2, \quad \ldots \quad y_n = x^r u_n \tag{5}$$

wo r eine von x unabhängige Grösse ist, so nehmen dieselben die Gestalt an:

$$A_i(x^r u) = x^r(b_{i0} + b_{i1}x + b_{i2}x^2 + \ldots) \qquad i = 1, \ldots n \tag{6}$$

woselbst für jedes positive ganzzahlige k und $i = 1, 2, \ldots n$

$$\left\{\begin{array}{l} b_{ik} = a^0_{i1}c_{1k} + \ldots + a^0_{i,i-1}c_{i-1,k} + (a^0_{ii} - r - k)c_{ik} + a^0_{i,i+1}c_{i+1,k} + \ldots + a^0_{ik}c_{nk} \\ \quad + a^1_{i1}c_{1,k-1} + \ldots + a^1_{i,i-1}c_{i-1,k-1} + a^1_{ii}c_{i,k-1} + a^1_{i,i+1}c_{i+1,k-1} + \ldots + a^1_{ik}c_{n,k-1} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + a^k_{i1}c_{10} + \ldots + a^k_{i,i-1}c_{i-1,0} + a^k_{ii}c_{i0} + a^k_{i,i+1}c_{i+1,0} + \ldots + a^k_{ik}c_{n0} \end{array}\right. \tag{7}$$

ist.

Wird verlangt, dass die Functionen 5) dem Gleichungssysteme 1) identisch genügen sollen, so muss für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_{ik} = 0 \qquad i = 1, \ldots n \tag{8}$$

sein.

Für $k = 0$ finden demnach die folgenden n Gleichungen statt:

$$\left\{\begin{array}{l} (a^0_{11} - r)c_{10} + a^0_{12}c_{20} + \ldots + a^0_{1n}c_{n0} = 0 \\ a^0_{21}c_{10} + (a^0_{22} - r)c_{20} + \ldots + a^0_{2n}c_{n0} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^0_{n1}c_{10} + a^0_{n2}c_{20} + \ldots + (a^0_{nn} - r)c_{n0} = 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

aus welchen hervorgeht, dass wofern die Coëfficienten $c_{10}, \ldots c_{0n}$ nicht sämmtlich gleich Null sein sollen, die Determinante

$$\begin{vmatrix} a^0_{11} - r \ldots a^0_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a^0_{n1} \ldots a^0_{nn} - r \end{vmatrix} = K(r) \tag{10}$$

identisch verschwinden muss.

Die Gleichung

$$K(r) = 0, \tag{11}$$

welche in Bezug auf den Parameter r vom $n$ten Grade ist, ist die auf den Punkt $x=0$ bezügliche determinirende Fundamentalgleichung.

Den Gleichungen 9) zufolge ist von den n Coëfficienten $c_{10}, c_{20}, \ldots c_{n0}$ wenigstens einer willkürlich. Ist c_{10} dieser letztere, so ergeben sich aus 9) für $c_{20}, \ldots c_{n0}$ die Werthe:

$$c_{20} = \frac{K_2^{(\lambda)}}{K_1^{(\lambda)}} c_{10}, \quad c_{30} = \frac{K_3^{(\lambda)}}{K_1^{(\lambda)}}, \ldots, \quad c_{n0} = \frac{K_n^{(\lambda)}}{K_1^{(\lambda)}} \tag{12}$$

wo $K_i^{(\lambda)} (i=1, 2, \ldots n)$ eine Determinante $(n-1)$ter Ordnung bezeichnet, die aus $K(r)$ hervorgeht, wenn man daselbst die $i$te Vertical- und die λte Horizontalreihe unterdrückt, und $\lambda = 1, 2, \ldots$ oder n zu nehmen ist, je nachdem in dem System der Gleichungen 9) die 1te, 2te... oder $n$te derselben als eine Folge der übrigen angesehen wird.

Mit Berücksichtigung der Formel 7) ergibt sich ferner aus 8), wenn daselbst $i = 1, 2, \ldots n$ gemacht wird, für ein beliebiges k das System von nk Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l}
(a^0_{11}-r-k)c_{1k}+\ldots+a^0_{1n}c_{nk}+a^1_{11}c_{1k-1}+ \\
\quad \ldots+a^1_{1n}c_{n,k-1}+\ldots+a^{k-1}_{11}c_{11}+\ldots+a^{k-1}_{1n}c_{n1} = -(a^k_{11}c_{10}+\ldots+a^k_{1n}c_{n0}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^0_{n1}c_{1k}+\ldots+(a^0_{nn}-r-k)c_{nk}+a^1_{n1}c_{1k-1}+ \\
\quad \ldots+a^1_{nn}c_{n,k-1}+\ldots+a^{k-1}_{n1}c_{11}+\ldots+a^{k-1}_{nn}c_{n1} = -(a^k_{n1}c_{10}+\ldots+a^k_{nn}c_{n0}) \\
\qquad (a^0_{11}-r-k-1)c_{1k-1}+ \\
\quad \ldots+a^0_{1n}c_{n,k-1}+\ldots+a^{k-2}_{11}c_{11}+\ldots+a^{k-2}_{1n}c_{n1} = -(a^{k-1}_{11}c_{10}+\ldots+a^{k-1}_{1n}c_{n0}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad a^0_{n1}c_{1k-1}+ \\
\quad \ldots+(a^0_{nn}-r-k-1)c_{n,k-1}+\ldots+a^{k-2}_{n1}c_{11}+\ldots+a^{k-2}_{nn}c_{n1} = -(a^{k-1}_{11}c_{10}+\ldots+a^{k-1}_{nn}c_{n0}) \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad (a^0_{11}-r-1)c_{11}+\ldots+a^0_{1n}c_{n1} = -(a^1_{11}c_{10}+\ldots+a^1_{1n}c_{n0}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad a^0_{n1}c_{11}+\ldots+(a^0_{nn}-r-1)c_{n1} = -(a^1_{1}c_{10}+\ldots+a^1_{nn}c_{n0})
\end{array}\right. \tag{13}$$

Die Determinante der Grössen, welche in dem vorstehenden Systeme die Coëfficienten von $c_{1k}, \ldots c_{nk}$; $c_{1k-1}, \ldots c_{nk-1}, \ldots c_{11}, \ldots c_{n1}$ bilden, ist, wie leicht zu finden,[1] gleich dem Producte

$$K(r+1)\,K(r+2)\ldots K(r+k).$$

Ersetzt man in dieser Determinante die Elemente der $i$ten Colonne durch beziehungsweise die Ausdrücke

$$-(a^k_{11}c_{10}+\ldots+a^k_{1n}c_{n0}); \ldots, -(a^1_{n1}c_{10}+\ldots+a^1_{nn}c_{n0}),$$

welche in den Gleichungen 13) auf der rechten Seite stehen, und bezeichnet in der neuen Determinante die Adjuncten[2] der letzteren mit

$$D^i_{1k}\;; \ldots; \;D^i_{nk},$$

so erhält man aus diesen Gleichungen:

---

[1] Siehe Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. Aufl., S. 32.

[2] Siehe Baltzer a. a. O., S. 10.

$$K(r+1)\,K(r+2)\ldots K(r+k)\,c_{ik} = (a^k_{11}c_{10}+\ldots+a^k_{1n}c_{n0})\,D^i_{1k}+\ldots+(a^k_{n1}c_{10}+\ldots+a^k_{nn}c_{n0})\,D^i_{nk}$$
$$i=1,\,2,\ldots n;\quad k=1,\,2,\,3,\ldots$$

woraus mit Rücksicht auf die Formeln 12) folgt:

14) $$c_{ik} = \frac{(a^k_{11}K^{(\lambda)}_1+a^k_{12}K^{(\lambda)}_2+\ldots+a^k_{1n}K^{(\lambda)}_n)\,D^i_{1k}+\ldots+(a^k_{n1}K^{(\lambda)}_1+a^k_{n2}K^{(\lambda)}_2+\ldots+a^k_{nn}K^{(\lambda)}_n)\,D^i_{nk}}{K(r+1)\,K(r+2)\ldots K(r+k).\,K^{(\lambda)}_1}\cdot c_{10}.$$

Durch die Gleichung 14) erscheinen die Grössen c_{ik} als lineare Functionen von c_{10} mit Coëfficienten, die von r abhängen, ausgedrückt. Um zu verhindern, dass dieselben für eine Wurzel der Gleichung 11) unendlich gross werden, theile man die Wurzeln der letzteren in Gruppen von der früher angegebenen Art ein. Für jede solche Gruppe gibt es eine Zahl δ, welche das Maximum der Differenz zwischen zwei Wurzeln derselben angibt. Ist Δ die grösste dieser Zahlen δ, so bestimme man die bisher willkürlich gebliebene Grösse c_{10} durch die Annahme

15) $$c_{10} = K(r+1)\,K(r+2)\ldots K(r+g)\,F(r),$$

wo die ganze Zahl $g \geqq \Delta$ ist und $F(r)$ eine willkürliche Function von r bedeutet. Es erlangen alsdann die c_{ik} für alle Wurzeln der Gleichung 11) endliche Werthe.[1]

Nachdem so durch die Formeln 14) und 15) die Coëfficienten der Reihen 4) gegeben sind, erübrigt noch, die Convergenz der letzteren zu erweisen, damit die Functionen 5) als eine Lösung des Gleichungssystems 1) betrachtet werden dürfen.

Was diese Convergenz betrifft, so ist dieselbe von Herrn Sauvage[2] unter der Voraussetzung bewiesen worden, dass das in den Ausdrücken 5) vorkommende r die grösste von den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung sei, somit $K(r+k)$ für keinen Werth des positiven ganzzahligen k verschwindet. Derselbe Beweis ist jedoch auch hier zulässig, wo eine solche Annahme über r nicht gemacht wird, wofern nur k nicht kleiner als Δ genommen wird, was offenbar keine Beschränkung des Convergenzbeweises ist, indem Δ eine endliche angebbare Zahl nicht überschreitet.

3.

Aus den Entwickelungen der vorigen Nummer geht hervor, dass, welches auch die Werthe von $c_{10}, c_{20},\ldots c_{n0}$ sein mögen, wofern nur die Coëfficienten c_{ik} $(k=1,2,\ldots)$ durch die Gleichungen 13) daselbst bestimmt werden, die folgenden identischen Gleichungen stattfinden:

1) $$\begin{cases} A_1(x^r u) = \{(a^0_{11}-r)c_{10}+a^0_{12}c_{20}+\ldots+ \qquad a^0_{1n}c_{n0}\}\,x^r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n(x^r u) = \{ \qquad a^0_{n1}c_{10}+a^0_{n2}c_{20}+\ldots+(a^0_{nn}-r)\,c_{n0}\}\,x^r \end{cases}$$

Werden die Grössen $c_{10}, c_{20},\ldots c_{n0}$ durch die Gleichungen 12) der Nummer 2 berechnet, und substituirt man diesen gemäss in die 1te, 2te,...$n$te der vorstehenden Gleichungen 1) für c_{i0} $(i=2,\,3,\ldots n)$, beziehungsweise die einerlei Werth besitzenden Quotienten:

$$\frac{K^{(1)}_i}{K^{(1)}_1},\ \frac{K^{(2)}_i}{K^{(2)}_1},\ \ldots\ \frac{K^{(n)}_i}{K^{(n)}_1} \qquad i=2,\,3,\ldots n$$

so ergeben sich die Gleichungen:

---

[1] Vergleiche: Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 76, S. 217.

[2] Siehe die Annales de l'École normale, année 1886, p. 391—397.

$$K_1^{(1)} A_1(x^r u) = \{(a_{11}^0 - r) K_1^{(1)} + a_{12}^0 K_2^{(1)} + \ldots + a_{1n}^0 K_n^{(1)}\} x^r c_{10}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_1^{(n)} A_n(x^r u) = \{a_{n1}^0 K_1^{(n)} + a_{n2}^0 K_2^{(n)} + \ldots + (a_{nn}^0 - r) K_n^{(n)}\} x^r c_{10}$$

welche, weil

$$a_{\lambda 1}^0 K_1^{(\lambda)} + \ldots + a_{\lambda\lambda-1}^0 K_{\lambda-1}^{(\lambda)} + (a_{\lambda\lambda}^0 - r) K_\lambda^{(\lambda)} + a_{\lambda\lambda+1}^0 K_{\lambda+1}^{(\lambda)} + \ldots + a_{\lambda n}^0 K_n^{(\lambda)} = (-1)^{\lambda-1} K(r) \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

ist, mit Berücksichtigung der Gleichung 15) in Nummer 2 sich in die folgenden verwandeln:

$$2)\quad \begin{cases} A_1(x^r u) = x^r K(r) K(r+1) K(r+2) \ldots K(r+g) \dfrac{F(r)}{K_1^{(1)}} \\ A_2(x^r u) = x^r K(r) K(r+1) K(r+2) \ldots K(r+g) \dfrac{F(r)}{K_1^{(2)}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n(x^r u) = x^r K(r) K(r+1) K(r+2) \ldots K(r+g) \dfrac{F(r)}{K_1^{(n)}} \end{cases}$$

Es werde nunmehr eine nach Angabe der Nummer 1 gebildete Gruppe[1] von Wurzeln:

$$3)\qquad r_1, r_2, \ldots, r_s$$

der Gleichung $K(r) = 0$ betrachtet, wo demnach, wenn α und β irgendwelche zwei von den Zahlen $1, 2, \ldots s$ bezeichnen und $\beta > \alpha$, $r_\alpha - r_\beta$ eine ganze positive Zahl oder Null ist. Sind diese Wurzeln sämmtlich von einander verschieden, so verschwindet, wie eine einfache Überlegung zeigt, für $r = r_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots s)$ der Ausdruck 15) von Nummer 2:

$$c_{10} = K(r+1) K(r+2) \ldots K(r+g) F(r)$$

von der $(\mathfrak{a}-1)$ten und daher $c_{10} K(r)$ von der $\mathfrak{a}$ten Ordnung.

Sind hingegen die Wurzeln der Gruppe 3) nicht alle von einander verschieden und etwa $r_1, r_{a+1}, r_{b+1}, r_{c+1}, \ldots$ die von einander verschiedenen, so verschwindet c_{10} für $r = r_1 = r_2 = \ldots = r_a$ von der 0ten, für $r = r_{a+1} = r_{a+2} = \ldots = r_b$ von der $a$ten, für $r = r_{b+1} = r_{b+2} = \ldots = r_c$ von der $b$ten Ordnung u. s. w., daher $c_{10} K(r)$ für $r = r_1 = \ldots = r_a$ von der $a$ten, für $r = r_{a+1} = \ldots = r_b$ von der $b$ten, für $r = r_{b+1} = \ldots = r_c$ von der $c$ten Ordnung u. s. w.

Fasst man beide Fälle zusammen, so folgt, dass für eine Wurzel $r_\mathfrak{a}$ der obigen Gruppe die Grösse c_{10} höchstens von der $(\mathfrak{a}-1)$ten und $c_{10} K(r)$ wenigstens von der $\mathfrak{a}$ten Ordnung Null wird.

Den Gleichungen 2) zufolge müssen daher für $r = r_\mathfrak{a}$ die Ausdrücke $A_1(x^r u), A_2(x^r u), \ldots A_n(x^r u)$ gleichzeitig mindestens von der $\mathfrak{a}$ten Ordnung verschwinden; es müssen somit die $(\mathfrak{a}-1)$ten Ableitungen dieser letzteren nach r genommen für $r = r_\mathfrak{a}$ Null werden, also die n simultanen Gleichungen stattfinden:

$$4)\ \left[\frac{d^{\mathfrak{a}-1} A_1(x^r u)}{d r^{\mathfrak{a}-1}}\right]_{r=r_\mathfrak{a}} = 0, \quad \left[\frac{d^{\mathfrak{a}-1} A_2(x^r u)}{d r^{\mathfrak{a}-1}}\right]_{r=r_\mathfrak{a}} = 0, \quad \ldots, \quad \left[\frac{d^{\mathfrak{a}-1} A_n(x^r u)}{d r^{\mathfrak{a}-1}}\right]_{r=r_\mathfrak{a}} = 0 \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots s.$$

Nun ist:

$$\frac{d^{\mathfrak{a}-1} A_i(y)}{d r^{\mathfrak{a}-1}} = -x \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\mathfrak{a}-1} y_i}{d r^{\mathfrak{a}-1}}\right) + a_{i1} \frac{d^{\mathfrak{a}-1} y_1}{d r^{\mathfrak{a}-1}} + \ldots + a_{in} \frac{d^{\mathfrak{a}-1} y_n}{d r^{\mathfrak{a}-1}}$$

d. h. es ist:

$$\frac{d^{\mathfrak{a}-1} A_i(y)}{d r^{\mathfrak{a}-1}} = A_i\left(\frac{d^{\mathfrak{a}-1} y}{d r^{\mathfrak{a}-1}}\right)$$

[1] Vergl. Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 68, S. 364 und Frobenius, Bd. 76, S. 221.

wesshalb das Gleichungssystem 4) in der Form geschrieben werden kann:

$$A_i\left(\left[\frac{d^{\mathfrak{a}-1}(x^r u)}{d r^{\mathfrak{a}-1}}\right]_{r=r_\mathfrak{a}}\right)=0 \qquad i=1,\ 2,\dots n$$

welche erkennen lässt, dass die n Functionen:

$$\frac{d^{\mathfrak{a}-1}(x^r u_1)}{d r^{\mathfrak{a}-1}},\quad \frac{d^{\mathfrak{a}-1}(x^r u_2)}{d r^{\mathfrak{a}-1}},\quad \dots, \frac{d^{\mathfrak{a}-1}(x^r u_n)}{d r^{\mathfrak{a}-1}}$$

für $r=r_\mathfrak{a}$ eine Lösung des Gleichungssystems 1) der Nummer 1:

5) $$A_1(y)=0,\quad A_2(y)=0,\quad \dots A_n(y)=0$$

bilden.

Wird daher in

$$\frac{d^{\mathfrak{a}-1}(x^r u_i)}{d r^{\mathfrak{a}-1}}=x^r\left\{\frac{d^{\mathfrak{a}-1}u_i}{d r^{\mathfrak{a}-1}}+(\mathfrak{a}-1)\frac{d^{\mathfrak{a}-2}u_i}{d r^{\mathfrak{a}-2}}\cdot\log x+\frac{1}{2}(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{a}-2)\frac{d^{\mathfrak{a}-3}u_i}{d r^{\mathfrak{a}-3}}\cdot(\log x)^2+\dots+u_i(\log x)^{\mathfrak{a}-1}\right\}$$

gemäss Gleichung 4) der Nummer 2

$$u_i=\sum_0^\infty{}_k\, c_{ik}x^k$$

substituirt, so ergibt sich, dass der Wurzel $r_\mathfrak{a}$ der Gruppe 3) die folgende Lösung des Gleichungssystems 5) entspricht:

6) $$\begin{cases} y_{1\mathfrak{a}}=x^{r_\mathfrak{a}}\sum_0^\infty{}_k\left\{c_{1k}^{(\mathfrak{a}-1)}+(\mathfrak{a}-1)c_{1k}^{(\mathfrak{a}-2)}\log x+\frac{1}{2}(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{a}-2)c_{1k}^{(\mathfrak{a}-3)}(\log x)^2+\dots+c_{1k}(\log x)^{\mathfrak{a}-1}\right\}\\ y_{2\mathfrak{a}}=x^{r_\mathfrak{a}}\sum_0^\infty{}_k\left\{c_{2k}^{(\mathfrak{a}-1)}+(\mathfrak{a}-1)c_{2k}^{(\mathfrak{a}-2)}\log x+\frac{1}{2}(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{a}-2)c_{2k}^{(\mathfrak{a}-3)}(\log x)^2+\dots+c_{2k}(\log x)^{\mathfrak{a}-1}\right\}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_{n\mathfrak{a}}=x^{r_\mathfrak{a}}\sum_0^\infty{}_k\left\{c_{nk}^{(\mathfrak{a}-1)}+(\mathfrak{a}-1)c_{nk}^{(\mathfrak{a}-2)}\log x+\frac{1}{2}(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{a}-2)c_{nk}^{(\mathfrak{a}-3)}(\log x)^2+\dots+c_{nk}(\log x)^{\mathfrak{a}-1}\right\}\end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$c_{ik}^{(\mathfrak{a}-p)}=\left[\frac{d^{\mathfrak{a}-p}c_{ik}(r)}{d r^{\mathfrak{a}-p}}\right]_{r=r_\mathfrak{a}} \qquad p=1,\dots\mathfrak{a}$$

gesetzt ist.

Enthält die Gruppe 3) keine mehrfachen Wurzeln, so verschwindet c_{10} für $r=r_\mathfrak{a}$ von der $(\mathfrak{a}-1)$ten Ordnung, es ist daher in dem Elemente $y_{1\mathfrak{a}}$ der Lösung 6) der Coëfficient von $x^{r_\mathfrak{a}}$ gleich $c_{10}^{(\mathfrak{a}-1)}$ und von Null verschieden. Kommen jedoch mehrfache Wurzeln in 3) vor, so verschwindet c_{10} für die αfache Wurzel $r_1=\dots=r_\alpha$ von der 0ten Ordnung, desshalb ist der erwähnte Coëfficient jetzt gleich dem von Null verschiedenen Ausdrucke:

$$c_{10}^{(\mathfrak{a}-1)}+(\mathfrak{a}-1)c_{10}^{(\mathfrak{a}-2)}\log x+\frac{1}{2}(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{a}-2)c_{10}^{(\mathfrak{a}-3)}(\log x)^2+\dots+c_{10}(\log x)^{\mathfrak{a}-1}$$

in welchem, da dieser Wurzel die α Lösungen $y_{i1}, y_{i2},\dots y_{i\alpha}$ $(i=1,\dots n)$ entsprechen, $\mathfrak{a}=1, 2,\dots\alpha$ zu setzen ist. Indem man so weiter schliesst, erkennt man, dass auch für jede andere mehrfache Wurzel $r_\mathfrak{a}$ der Gruppe 3) der Coëfficient von $x^{r_\mathfrak{a}}$ in $y_{1\mathfrak{a}}$ von Null verschieden ist, woraus folgt, dass $y_{1\mathfrak{a}}$ in allen Fällen zum

n*

Exponenten r_α gehört. Was jedoch die übrigen Elemente $y_{2\alpha}, \ldots y_{n\alpha}$ der Lösung 6) betrifft, so können dieselben wohl zu höheren Exponenten $r_\alpha+\gamma_2, \ldots r_\alpha+\gamma_n$, wo $\gamma_2, \ldots \gamma_n$ ganze positive Zahlen bezeichnen, gehören, indem nicht ausgeschlossen ist, dass, wie aus den Gleichungen 12) in Nummer 2 hervorgeht, die Coëfficienten $c_{20}, \ldots c_{n0}$ für $r = r_\alpha$ von einer höheren Ordnung als c_{10} verschwinden.

Zwischen den s Lösungen $y_{1\alpha}, y_{2\alpha}, \ldots y_{n\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots s)$, welche den s Wurzeln der Gruppe 3) entsprechen, kann keine Beziehung der Form:

$$c_1 y_{i1} + c_2 y_{i2} + \ldots + c_s y_{is} = 0 \qquad i = 1, \ldots n$$

wo $c_1, \ldots c_s$ willkürliche Constanten sind, bestehen, wie sich aus dem Satze des Herrn Fuchs ergibt,[1] dass eine Gleichung von der Form:

$$P_0 + P_1 \log x + P_2 (\log x)^2 + \ldots + P_n (\log x)^n = 0$$

wo $P_0, P_1, \ldots P_n$ in der Umgebung des Nullpunktes eindeutige Functionen von x sind, unmöglich ist, ohne dass diese letzteren sämmtlich gleich Null wären. Nach einem allgemeineren Satze, welcher von Herrn Thomé herrührt,[2] kann aber auch, wenn r_α eine Wurzel von 3), $r_{\alpha'}$ eine Wurzel einer anderen Gruppe und $y_{i\alpha}$, beziehungsweise $y_{i\alpha'}$ die diesen Wurzeln entsprechenden Lösungen bezeichnen, zwischen den letzteren keine lineare homogene Relation mit constanten Coëfficienten stattfinden, woraus folgt, dass die den sämmtlichen Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung entsprechenden Lösungen von der Form 6) ein Fundamentalsystem constituiren.

4.

Sei wieder:

$$1) \qquad r_1, r_2, \quad \ldots \quad r_s$$

die früher betrachtete Gruppe von Wurzeln der Gleichung $K(r) = 0$. Es werde untersucht, wann die zu $r_\alpha (\alpha = 1, \ldots s)$ gehörige Lösung 6) der Nummer 3 von Logarithmen frei ist.

Da, wenn r_α eine $k$fache Wurzel ist, von den derselben entsprechenden Lösungen nach der vorigen Nummer mindestens $k-1$ Logarithmen aufweisen, so ist, damit die erwähnte Lösung keine Logarithmen enthalte, jedenfalls nothwendig, dass sich in der Gruppe 1) keine mehrfache Wurzel vorfinde.[3] Die nothwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür ist jedoch offenbar durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$c_{ik} = 0, \quad c_{ik}^{(1)} = 0, \quad \ldots \quad c_{ik}^{(\alpha-3)} = 0, \quad c_{ik}^{(\alpha-2)} = 0 \qquad i = 1, \ldots n$$

zufolge welcher also c_{ik} für $r = r_\alpha$ von der $(\alpha-1)$ten Ordnung verschwinden muss.

Nach Gleichung 14) in Nummer 2 ist:

$$2) \qquad c_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{K(r+1)\,K(r+2) \ldots K(r+k)\,K_1^{(\lambda)}} c_{10}$$

wenn gesetzt wird:

$$3) \qquad \Delta_{ik} = (a_{11}^k K_1^{(\lambda)} + \ldots + a_{1n}^k K_n^{(\lambda)}) D_{1k}^i + \ldots + (a_{n1}^k K_1^{(\lambda)} + \ldots + a_{nn}^k K_n^{(\lambda)}) D_{nk}^i.$$

---

1 Siehe Crelle's Journal, Bd. 68, S. 356—357.

2 Siehe Crelle's Journal, Bd. 74, S. 195.

3 Vergl. Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 76, S. 224—226 und Fuchs, Bd. 66, S. 157 und Bd. 68, S. 373—378.

Da, wie früher gezeigt wurde, c_{10} für die einfache Wurzel r_α gerade von der $(\alpha-1)$ten Ordnung verschwindet, so findet ein Gleiches mit c_{ik} statt, wofern nur der Quotient

$$\text{4)} \qquad \frac{\Delta_{ik}}{K(r+1)\,K(r+2)\ldots K(r+k)} = \mathfrak{d}_{ik}$$

für $r = r_\alpha$ nicht unendlich gross wird.

Zufolge 2) und 4) ist:

$$\text{5)} \qquad c_{ik} = \mathfrak{d}_{ik}\,\frac{c_{10}}{K_1^{(\lambda)}}.$$

Wird dieser Werth für c_{ik} in die n ersten Gleichungen 13) der Nummer 2 gesetzt, so verwandeln sich dieselben in die folgenden:

$$\text{6)} \quad \left\{\begin{array}{l} (a_{11}^0-r-k)\,\mathfrak{d}_{1k}+a_{12}^0\,\mathfrak{d}_{2k}+\ldots+a_{1k}^0\,\mathfrak{d}_{nk}+a_{11}^1\,\mathfrak{d}_{1,k-1}+a_{12}^1\,\mathfrak{d}_{2,k-1}+\ldots+a_{1n}^1\,\mathfrak{d}_{n,k-1}+\ldots+a_{11}^k\,\mathfrak{d}_{10}+ \\ \qquad\qquad +a_{12}^k\,\mathfrak{d}_{20}+\ldots+a_{1n}^k\,\mathfrak{d}_{n0}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^0\,\mathfrak{d}_{1k}+a_{n2}^0\,\mathfrak{d}_{2k}+\ldots+(a_{nn}^0-r-k)\,\mathfrak{d}_{nk}+a_{n1}^1\,\mathfrak{d}_{1,k-1}+a_{n2}^1\,\mathfrak{d}_{2,k-1}+\ldots+a_{nn}^1\,\mathfrak{d}_{n,k-1}+\ldots+a_{n1}^k\,\mathfrak{d}_{10}+ \\ \qquad\qquad +a_{n2}^k\,\mathfrak{d}_{20}+\ldots+a_{nn}^k\,\mathfrak{d}_{n0}=0 \end{array}\right.$$

aus denen hervorgeht, dass wenn $\mathfrak{d}_{i,k-1}$, $\mathfrak{d}_{i,k-2},\ldots\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{d}_{10}$ $(i=1,2,\ldots n)$ endlich sind, auch die Ausdrücke:

$$\text{7)} \quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}_{1k} = (a_{11}^0-r-k)\,\mathfrak{d}_{1k}+a_{12}^0\,\mathfrak{d}_{2k}+\ldots+a_{1n}^0\,\mathfrak{d}_{nk} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{D}_{nk} = a_{n1}^0\,\mathfrak{d}_{1k}+a_{n2}^0\,\mathfrak{d}_{2k}+\ldots+(a_{nn}^0-r-k)\,\mathfrak{d}_{nk} \end{array}\right.$$

und somit auch die Producte:

$$K(r+k)\,.\,\mathfrak{d}_{ik} \qquad\qquad i=1,\ldots n$$

endliche Werthe haben.

Nun sind $\mathfrak{d}_{10}=K_1^{(\lambda)}$, $\mathfrak{d}_{20}=\frac{c_{20}}{c_{10}}K_1^{(\lambda)},\ldots\ldots\mathfrak{d}_{n0}=\frac{c_{n0}}{c_{10}}K_1^{(\lambda)}$ endlich für $r=r_\alpha$. Zufolge 6) sind daher zunächst $\mathfrak{D}_{11},\ldots\mathfrak{D}_{n1}$ und damit auch $K(r+1)\,\mathfrak{d}_{i1}$ $(i=1,\ldots n)$ für $r=r_\alpha$ endlich, und es folgt aus 7), dass alsdann auch $\mathfrak{d}_{11}$, $\mathfrak{d}_{21},\ldots\mathfrak{d}_{n1}$ endlich sind, wofern $K(r+1)$ für $r=r_\alpha$ nicht verschwindet. Sind aber $\mathfrak{d}_{11},\ldots\mathfrak{d}_{n1}$ endlich, so sind dann nach 6) wieder $\mathfrak{D}_{12},\ldots\mathfrak{D}_{n2}$ und $K(r+2)\,\mathfrak{d}_{i2}$ endlich und weiter wären dies auch $\mathfrak{d}_{12},\ldots\mathfrak{d}_{n2}$, wenn $K(r+2)$ für $r=r_\alpha$ nicht verschwände, u. s. w. Es sind daher allgemein $\mathfrak{d}_{1k}$, $\mathfrak{d}_{2k},\ldots\mathfrak{d}_{nk}$ für $r=r_\alpha$ endlich, wenn $K(r+k)$ für $r=r_\alpha$ nicht Null, d. h. k keine der Zahlen:

$$\text{8)} \qquad g_{\alpha-1}=r_{\alpha-1}-r_\alpha,\; g_{\alpha-2}=r_{\alpha-2}-r_\alpha,\;\ldots\; g_1=r_1-r_\alpha$$

ist.

Demgemäss sind $\mathfrak{d}_{1k},\ldots\mathfrak{d}_{nk}$ endlich für $k=1,2\ldots g_{\alpha-1}-1$. Damit dasselbe auch noch für $k=g_{\alpha-1}$ stattfinde, muss für $r=r_\alpha$

$$\Delta_{ig_{\alpha-1}}=0$$

sein.

Sind aber $\mathfrak{d}_{1k},\ldots\mathfrak{d}_{nk}$ für $k=g_{\alpha-1}$ endlich, so sind sie es auch noch, wie sich durch Fortsetzung der obigen Schlussweise ergibt, für $k=g_{\alpha-1}+1$, $g_{\alpha-1}+2,\ldots g_{\alpha-2}-2$, $g_{\alpha-2}-1$, wesshalb dann wieder zufolge 6) und 7) auch $K(r+k)\,\mathfrak{d}_{ik}$ für $k=g_{\alpha-2}$ endlich ist.

Da aber:

$$K(r_\alpha+k)\,\mathfrak{d}_{ik}=\frac{\Delta_{ik}}{K(r_\alpha+1)\,K(r_\alpha+2)\ldots K(r_\alpha+k-1)}$$

und von den Zahlen $g_{\alpha-2}-1, g_{\alpha-2}-2, \ldots, 2, 1$ eine gleich $g_{\alpha-1}$, somit einer der Factoren im Nenner des vorstehenden Bruches gleich Null ist, so kann $K(r_\alpha+k)\mathfrak{d}_{ik}$ für $k=g_{\alpha-2}$ nur dann endlich sein, wenn für $r=r_\alpha$

$$\Delta_{ig_{\alpha-2}}=0 \tag{9}$$

wird. Damit auch $\mathfrak{d}_{ik}$ für $k=g_{\alpha-2}$ einen endlichen Werth habe, muss nebst der Gleichung 9) noch die folgende stattfinden:

$$\left[\frac{d\,\Delta_{ig_{\alpha-2}}}{dr}\right]_{r=r_\alpha}=0.$$

In dieser Weise fortschliessend, gelangt man zu dem Ergebnisse, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Lösung 6) der Nummer 3 keine Logarithmen enthalte, durch die Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\left[\Delta_{ig_{\alpha-1}}\right]_{r=r_\alpha}=0,\quad \left[\frac{d\,\Delta_{ig_{\alpha-2}}}{dr}\right]_{r=r_\alpha}=0,\quad \left[\frac{d^2\Delta_{ig_{\alpha-3}}}{dr^2}\right]_{r=r_\alpha}=0,\ldots,\left[\frac{d^{\alpha-2}\Delta_{ig_1}}{dr^{\alpha-2}}\right]_{r=r_\alpha}=0 \qquad (i=1,\,2,\ldots n)$$

wo die Δ_{ik} durch die Gleichung 3) und $g_{\alpha-1}, g_{\alpha-2}, \ldots g_1$ durch 8) bestimmt sind.

5.

Sind die Coëfficienten a_{ik} des Gleichungssystems:

$$x\frac{dy_i}{dx}=a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n \qquad i=1,\ldots n \tag{1}$$

sämmtlich constante Grössen, so lassen sich die Lösungen desselben in geschlossener Form darstellen.

In diesem Falle ist nämlich:

$$a_{ik}=a_{ik}^0 \qquad i=1,\ldots n;\ k=1,\ldots n$$

und die Gleichungen 13) in Nummer 2 verwandeln sich in die folgenden:

$$\left\{\begin{array}{llll}(a_{11}^0-r-k)c_{1k}+ & a_{12}^0c_{2k}+\ldots+ & & a_{1n}^0c_{nk}=0\\ a_{21}^0c_{1k}+(a_{22}^0-r-k)c_{2k}+\ldots+ & & & a_{2n}^0c_{nk}=0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\\ a_{n1}^0c_{1k}+ & a_{n2}^0c_{2k}+\ldots+(a_{nn}^0-r-k)c_{nk}=0 & & \end{array}\right. \tag{2}$$

aus denen zunächst wieder sich die Gleichung ergibt:

$$K(r)=0. \tag{3}$$

Ist aber:

$$r_1, r_2, \ldots r_s \tag{4}$$

die mehrfach betrachtete Gruppe von Wurzeln der letzteren, und man setzt, wie in Nummer 4:

$$r_{\alpha-1}-r_\alpha=g_{\alpha-1},\ r_{\alpha-2}-r_\alpha=g_{\alpha-2},\ldots,r_1-r_\alpha=g_1 \qquad \alpha=1,\ldots s \tag{5}$$

so verschwindet die Determinante $K(r+k)$ des Gleichungssystems 2) für $r=r_\alpha$ nur dann, wenn k eine der ganzen Zahlen 5) oder Null gleich ist, und die Verhältnisse der Coëfficienten c_{ik} sind alsdann durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{c_{ik}}{c_{1k}}=\frac{K_i^{(\lambda)}(r+k)}{K_1^{(\lambda)}(r+k)}=H_i(r+k) \qquad i=2,\ldots n \tag{6}$$

wo die Determinanten $K_i^{(\lambda)}(r+k)$ aus den $K_i^{(\lambda)}$ in den Gleichungen 12) der Nummer 2 hervorgehen, wenn daselbst $r+k$ für r gesetzt wird.

Die Gleichungen 5) gelten also für $k=0,\ g_{\mathfrak{a}-1}, \ldots g_2,\ g_1$; für jeden anderen Werth von k aber ist:

$$c_{1k}=0, \quad c_{2k}=0, \quad \ldots \quad c_{nk}=0.$$

Nimmt man in den Gleichungen 2) c_{1k} als diejenige Unbekannte an, welche unbestimmt bleibt, und substituirt in den Ausdrücken 5) der Nummer 2 für die von Null verschiedenen Coëfficienten c_{ik}:

$$c_{ik}=c_{1k}\,H_i(r+k)$$

so nehmen dieselben die Gestalt an:

7) $$y_i=x^r\{c_{10}H_i(r)+c_{1g_{\mathfrak{a}-1}}H_i(r+g_{\mathfrak{a}-1})x^{g_{\mathfrak{a}-1}}+c_{1g_{\mathfrak{a}-2}}H_i(r+g_{\mathfrak{a}-2})x^{g_{\mathfrak{a}-2}}+\ldots+c_{1g_1}H_i(r+g_1)x^{g_1}\}$$
$$i=1,\ 2,\ldots n.$$

In dem vorstehenden Ausdrucke für y_i kommen die unbestimmten Constanten $c_{10},\ c_{1g_{\mathfrak{a}-1}}, \ldots c_{1g_1}$ vor; von diesen ist c_{10} in Nummer 2 derart gewählt worden, dass die Coëfficienten c_{ik} für $k=1,\ 2,\ 3,\ldots\infty$ für keine Wurzel der Gleichung 3) unendlich gross werden. Da jedoch in dem vorliegenden Falle diejenigen der Coëfficienten c_{ik}, welche durch die Gleichung 14) in Nummer 2 bestimmt sind, wie oben gezeigt wurde, identisch Null sind, so kann man von einer solchen Wahl für die Grösse c_{10} hier absehen und dieselbe als eine beliebige Function von r betrachten. Gleiches gilt auch von $c_{1g_{\mathfrak{a}-1}},\ c_{1g_{\mathfrak{a}-2}}, \ldots c_{1g_1}$. Es sei daher:

$$c_{10}=F(r), \quad c_{1g_{\mathfrak{a}-1}}=F_{g_{\mathfrak{a}-1}}(r), \quad \ldots, \quad c_{1g_1}=F_{g_1}(r),$$

wo $F,\ F_{g_{\mathfrak{a}-1}}, \ldots F_{g_1}$ willkürliche Functionen bezeichnen.

Die Gleichungen 3) in Nummer 3 lauten demnach jetzt:

$$A_i(x^r u)=x^r K(r)\frac{F(r)}{K_1^{(1)}} \qquad i=1,\ 2,\ldots n$$

und es verschwindet somit $A_i(x^r u)$ für eine $p$fache Wurzel r der Gleichung 3) von der $p$ten Ordnung. Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichung 6) Folgendes:

Sind:

$$r_a,\ r_b,\ r_c, \ldots, r_j,\ r_k, \ldots$$

die von einander verschiedenen Wurzeln der Gruppe 4), so gehört zu der Wurzel r_k, wenn dieselbe eine einfache, also $k-j=1$ ist, eine Lösung der folgenden Gestalt:

8) $$y_i=x^{r_k}\{F(r)H_i(r_k)+(j-i)F_{g_j}(r)H_i(r_j)x^{g_j}+\ldots+(c-b)F_{g_c}(r)H_i(r_c)x^{g_c}+(b-a)F_{g_b}(r)H_i(r_b)x^{g_b}+$$
$$+aF_{g_a}(r)\ H_i(r_a)x^{g_a}\}$$

wo $g_a=r_a-r_k,\ g_b=r_b-r_k, \ldots$ ist.

Ist jedoch $k-j=\varkappa$, so entspricht der $\varkappa$fachen Wurzel r_k die Lösung:

9) $$y_i=x^{r_k}\left\{G^{(\varkappa-1)}+(\varkappa-1)\,G^{(\varkappa-2)}\log x+\frac{1}{2}(\varkappa-1)(\varkappa-2)\,G^{(\varkappa-3)}(\log x)^2+\ \ldots+G(\log x)^{\varkappa-1}\right\}$$

wo

$$G^{(\mathfrak{a})}=\frac{d^{\mathfrak{a}}}{dr^{\mathfrak{a}}}\{(k-j)F(r)H_i(r_k)+(j-i)F_{g_j}(r)H_i(r_j)x^{g_j}+\ldots+(b-a)F_{g_b}(r)H_i(r_b)x^{g_b}+aF_{g_a}(r)H_i(r_a)x^{g_a}$$

$\mathfrak{a}=0,\ 1,\ 2,\ldots(\varkappa-1)$ ist.

Das Gleichungssystem:

10) $$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}\,y_1 + a_{i2}\,y_2 + \ldots + a_{in}\,y_n \qquad i = 1, \ldots n$$

wo die Coëfficienten a_{ik} constant sind, gehört zwar nicht zur Classe der hier behandelten Systeme, wird jedoch durch die Substitution:

11) $$x = \log z$$

in das Gleichungssystem:

$$z\frac{dy_i}{dz} = a_{i1}\,y_1 + a_{i2}\,y_2 + \ldots + a_{in}\,y_n \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

verwandelt, welches von der Form des in dieser Nummer betrachteten ist und daher durch die Ausdrücke 8) oder 9) integrirt wird, wenn in denselben x durch z ersetzt wird. Indem man dann für z gemäss 11) e^x substituirt, ergeben sich die Lösungen des Gleichungssystems 10) in der bekannten Form.