ÜBER

DIE AUSGLEICHUNG VON WAHRSCHEINLICHKEITEN,

WELCHE

FUNCTIONEN EINER UNABHÄNGIG VARIABELEN SIND

VON

Dr. ERNST BLASCHKE.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 1. MÄRZ 1888.)

---

§. 1.

Naturerscheinungen, in welchen die Ursachen der Veränderung theilweise unbekannt sind oder nicht in Rechnung gezogen werden können, weil das Mass ihrer Einflussnahme nicht gegeben ist, unterliegen sowohl bei Bestimmung dieser Einflussnahme, als bei Berechnung des Eintreffens der Erscheinung in der Zukunft dem Wahrscheinlichkeitscalcüle. Die wahrscheinlichen Ereignisse zerfallen in solche, in welchen der ursprüngliche Zustand des Beobachteten in einen einzigen anderen und in solche, wo derselbe in mehrere qualitativ verschiedene Zustände übergehen kann. Wenn man eine Gruppe von Personen des Alters a durch die Zeit t beobachtet und als Grundqualität Lebende voraussetzt, dann ist die Abänderung in die Qualität Todte eine einfache Erscheinung, eine Erscheinung der ersteren Art; ist die Grundqualität „lebende Active", dann wird die Beobachtung sich auf Abänderung in mehrere Qualitäten auf „invalid gewordene" und „activ verstorbene" erstrecken müssen.

Jede derartig einfache oder zusammengesetzte Erscheinung kann (ausser von unendlich vielen unbekannten) von einer oder mehreren bekannten Ursachen abhängig gedacht werden; so ist die Zahl der aus einer Einheit von in gegebener Zeitstrecke Geborenen, zwischen zwei festen Altern Absterbenden bei constant gedachter Absterbeordnung nur von den zwischen den Altersgrenzen gelegenen Sterbenswahrscheinlichkeiten; die Anzahl der aus einer Einheit von in gegebener Zeitstrecke Geborenen zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten Versterbenden ist ebensowohl von dem Gesetze der Sterbenswahrscheinlichkeiten aller Alter, welche von den Geborenen innerhalb der Beobachtungszeit für das Absterben erreicht werden, als von der Geburtendichtigkeit innerhalb der Beobachtungszeit abhängig.

Das Problem der Ausgleichung der einfachen Erscheinungen, welche als unbekannte Function nur einer Variabelen betrachtet werden, ist von Lazarus in seiner Abhandlung „Die Bestimmung und Ausgleichung der aus Beobachtungen abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten", abgedruckt im Berichte der mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1878, in folgender Weise gelöst worden:

Es seien in n gleichweit und endlich von einander abstehenden reellen Werthen der unabhängig Veränderlichen $x: a,\ a+h,\ a+2h, \ldots a+\overline{n-1}h$ Beobachtungen angestellt und unter l_0 Fällen im Punkte a_0 t_0 Veränderungen; im Punkt $a+h$ unter l_1 Fällen t_1 Veränderungen, allgemein unter l_k Fällen im Punkte $a+kh$ t_k Veränderungen festgestellt worden. Bezeichnen y_0 $y_1 \ldots y_{n-1}$ irgend welche, zwischen Null und Eins gelegene Werthe, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss aller möglichen Abänderungen der Grundqualität im Punkte $a+kh$ während der Zeiteinheit zu der ursprünglichen Anzahl der Beobachtungen y_k sei, (die Wahrscheinlichkeit für die Abänderungswahrscheinlichkeit) bekanntlich:

$$\frac{y_k^{t_k}(1-y_k)^{l_k-t_k}dy_k}{\int_0^1 y_k^{t_k}(1-y_k)^{l_k-t_k}dy_k} = v_k dy_k.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach den angestellten Beobachtungen die Werthe $y_0, y_1 \ldots y_{n-1}$ als unabhängige Wahrscheinlichkeiten gleichzeitig die Verhältnisse zwischen der Zahl der Abänderungen und der Zahl der Beobachtungen aller möglichen Fälle während der Zeiteinheit in den Werthen $a,\ a+h,\ a+2h, \ldots a+\overline{n-1}h$ richtig darstellen, ist demnach:

$$W = v_0 dy_0 \,.\, v_1 dy_1 \ldots v_{n-1} dy_{n-1}. \tag{I}$$

Unter allen möglichen Hypothesen für y wird jene die grösste Wahrscheinlichkeit besitzen, für welche W ein Maximum bei Abänderung der y wird, also die Variation von W verschwindet, d. h. $\delta W = 0$ ist.

Man kann sonach als Ausgleichsfunction jede Lösung der $\delta W = 0$ definiren. Die Variation der obigen Gleichung ergibt nach Lazarus:

$$\sum_{k=0,\ldots k=n-1} \frac{l_k}{y_k(1-y_k)}\left(\frac{t_k}{l_k} - y_k\right)\delta y_k = 0. \tag{II}$$

und folgerichtig, wenn diese Gleichung wirklich denselben Umfang besitzt, als $\delta W = 0$, wegen der vollständigen Willkürlichkeit des δy_k ein System von n Gleichungen der Form $\frac{t_k}{l_k} = y_k$.

Lazarus gelangt demnach zu dem Schlusse, dass es ohne jede Voraussetzung über die Natur der auszugleichenden Function keine Ausgleichsmethode geben könne; seine weiteren Entwicklungen betreffen auch nur das Problem unter gewissen Annahmen über die Natur der resultirenden Function.

§. 2.

An die Darstellung des Problems der Ausgleichung von Lazarus möchte ich zwei Bemerkungen knüpfen, welche die Entwicklung der Theorie zu fördern geeignet sind. Das Analogon zum Probleme der Ausgleichung findet sich in der Bestimmung der wahrscheinlichsten, bis auf eine endliche Zahl von Constanten bekannten Function nach der Methode der kleinsten Quadrate. Hier wie dort strebt man die in einigen Punkten beobachteten Functionswerthe zur Correctur der Beobachtung in anderen Functionswerthen auszunützen. Bei der Methode der kleinsten Quadrate verwendet man hiezu die Überbestimmung des Problems, indem man bei n unbekannten Constanten entweder die in jedem der n verschiedenen Werthe der unabhängig Veränderlichen angestellte Beobachtung wiederholt, oder indem man die Function in mehr als n verschiedenen Werthen der unabhängig Veränderlichen je ein oder mehrere Male zu bestimmen sucht. Bei dem Probleme der Ausgleichung von Wahrscheinlichkeiten, welche unbekannte Functionen einer unabhängig Variabelen sind und welche man daher im Allgemeinen als Potenzreihen mit unendlich vielen unbekannten Constanten (innerhalb bestimmter Convergenzkreise) wird betrachten können, wurde bis jetzt angenommen, dass Beobachtungen in einer sehr beschränkten Zahl von Functionswerthen vorliegen. Auch dann, wenn wir genaue und nicht nur wahrscheinliche Werthe der Function durch die Beobachtung erhielten, wären wir im Allgemeinen nicht im Stande, die unbekannte Function aus einer endlichen Zahl von Werthen mit Sicherheit zu construiren. Für die Annahme, dass Beobachtungen in einer endlichen Zahl von Functionswerthen der Berechnung zu Grunde zu legen seien, existirt in vielen Fällen, auch in denen, auf welche Lazarus zunächst seine Theorie anwendete, keine unbedingte Nöthigung.

Bei der Construction der Absterbeordnung in einer geschlossenen Gesellschaft (bekanntlich einer Mischung der Mortalitätstabelle gleichzeitig Lebender und einer Generation) nach den älteren (der englischen, amerikanischen oder Gothaer) Methoden werden alle Lebenden zu Beginn des Beobachtungsjahres vom Alter $m \pm \mu$, wo $o < \mu < +\frac{1}{2}$ als $m$jährig angenommen und die daraus binnen Jahresfrist hervorgehenden Todten gezählt. Weil man jene m, in welchen Beobachtungen angestellt werden, immer um ganze Jahre unterschieden voraussetzt, erhält man so viele Beobachtungswerthe, als es ganze Alter unter den Beobachteten gibt. Es hindert aber offenbar nichts (z. B. bei der Anlage des Zählformulares nach der Gotha-Methode), die Beobachtungswerthe einander so nahe zu rücken, als man nur immer will: wenn jedes Mitglied einer geschlossenen Gesellschaft gehalten ist, sein Alter beim Beitritte nach Jahren, Monaten und Tagen genau anzugeben, so kann man zwischen zwei ganzzahlige Beobachtungsalter 365 Beobachtungspunkte einschieben. Es braucht wohl kaum erwiesen zu werden, dass hiebei keine überflüssige Beobachtung angestellt wird, trotzdem bei Einschiebung von n Punkten zwischen zwei um ein Jahr differirende Alter jeder Todte und jeder Lebende n-mal zur Zählung kommt.

Nach der neuern, der deutschen Zählmethode, wonach jeder Lebende an jedem Geburtstage in ein neues Beobachtungsalter eintritt und die Sterbenswahrscheinlichkeiten ohne Kürzung des Zählmateriales von jedem ganzzahligen Alter genau gegeben werden, braucht der Eintrittstag in das Beobachtungsalter nur statt von jedem Geburtstage von jedem nach Jahren, Monaten und Tagen genau unterschiedenen Alter gezählt zu werden, um zwischen zwei Beobachtungsdaten der bisherigen Zählweise 365 andere Beobachtungsdaten einzuschieben.

Übrigens kann man auch die bereits vorliegenden Resultate der älteren Zählungsmethoden als Beobachtungen in unendlich vielen Beobachtungspunkten auffassen. Wenn nämlich innerhalb der Altersunterschiede $m \pm \mu$, $\mu < \frac{1}{2}$ λ_1 Lebende mit der Sterbenswahrscheinlichkeit w_1, λ_2 Lebende mit der Sterbenswahrscheinlichkeit $w_2 \ldots$, endlich λ_n Lebende mit der Sterbenswahrscheinlichkeit w_n sich befinden, so ist die Durchschnittssterbenswahrscheinlichkeit

$$w = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \text{---} + \lambda_n} \left[w_1 \lambda_1 + w_2 \lambda_2 + \text{---} + w_n \, . \, \lambda_n \right]$$

die in der Beobachtung gesuchte. Sie kommt der Sterbenswahrscheinlichkeit eines oder mehrerer Zwischenalter zwischen $m \pm \mu$ gleich, und zwar eines Alters, wenn die gesuchte Curve innerhalb des Beobachtungsspatiums kein Maximum, zweier Alter, wenn sie ein Maximum oder ein Minimum im Allgemeinen von $m+1$ Altern, wenn sie in Summe m Maxima und Minima besitzt und continuirlich ist. Welches jedoch dieses Zwischenalter sei, lässt sich von Vornherein nicht angeben, da der Werth w von der Art der Zusammensetzung des λ aus $\lambda_1 \, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, sowie von dem Verlaufe der Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten zwischen w_1 und w_n abhängt. Bei der Unkenntniss, in welcher man sich über beide Verhältnisse befindet, wird man a priori den gefundenen Werth w jedem Zwischenalter zwischen $m + \frac{1}{2}$ und $m - \frac{1}{2}$ mit gleichem Rechte beilegen können und nicht nur dem Werthe m; man wird die eine Beobachtung als äquivalent unendlich vielen Beobachtungen zu betrachten haben.

Anmerkung. Diese Bemerkung ist geeignet, die bisherigen Methoden der rein graphischen Ausgleichung nicht unwesentlich zu modificiren. Bisher wurde in jedem ganzzahligen Alter ein einziger Punkt verzeichnet (die Wahrscheinlichkeiten als Ordinaten zu den Altern als Abscissen eines rechtwinkeligen ebenen Coordinatensystems nach einem irgendwie getheilten Massstab aufgetragen gedacht) entsprechend dem dem Alter m zugeschriebenen w Wert. Für diesen Punkt ist nun eine ganze Linie, parallel der Abscissenaxe, in der Ausdehnung $m + \frac{1}{2} - (m - \frac{1}{2}) = 1$ zu ziehen. Damit dürften besonders Maxima und Minima, welche der zu suchenden Curve eigenthümlich sind, deutlicher zum Vorschein kommen und weniger der Gefahr ausgesetzt sein, bei der Ausgleichung mit den Fehlern verwischt zu werden. Übrigens gelänge es auch auf diesem Wege, die Gewichte der Beobachtung graphisch zur Darstellung zu bringen, wenn man die Alter auf der Abscissenaxe nicht äquidistant sondern proportional der Quadratwurzel der bei ihnen beobachteten Todtenzahl — etwa in einer Zwischenfigur — auftrüge und dann immer die Erfahrungen einer gleichgrossen Anzahl von Todten zur selben Sterbenswahrscheinlichkeit vereinigte. Die in der Zwischenfigur ausgeglichene Curve ist selbstverständlich wieder auf ein Netz, in welchen gleichen Altersdifferenzen gleiche Abscissen entsprechen, zu übertragen.

Das für Absterbeordnungen Gesagte gilt auch für Invaliden-, Heirats- und Morbiditätsordnungen.

§. 3.

Durch die Annahme einer unendlichen Zahl von Beobachtungspunkten treten in die Bedingungsgleichung für die Ausgleichsfunction des §. 1 $\partial W = 0$ unendlich viele Factoren ein. Um statt des unendlichen Productes in der weiteren Berechnung mit einer unendlichen Summe operiren zu können, wird es sich empfehlen, für W die Identität $e^{\log W}$ zu benützen. Wegen der bekannten Eigenschaft der Exponentialfunction, nur dort ein Maximum zu besitzen, wo $\log W$ ein solches aufweist, kann man die obige Maximalaufgabe auch lösen, wenn man die Lösungen der Gleichung:

$$\partial \log W = \partial[\log v_0 + \log dy_0 + \log v_1 + \log dy_1 + \log v_2 + \log dy_2 \ldots + \log v_{n-1} + \log dy_{n-1}] = 0$$

sucht. Statt dessen kann man auch schreiben

$$0 = \partial \frac{1}{dx} \int_a^{a+\overline{n-1}h} [\log v + \log dy]\, dx = \frac{1}{dx} \quad \partial \int_a^{a+\overline{n-1}h} \left[\log y^t + \log(1-y)^{l-t} - \log \int_0^1 y^t (1-y)^{l-t} dy + \log dy\right] dx = 0$$

Die Ausführung der angedeuteten Operationen gibt:

$$\int_a^{a+\overline{n-1}h} \left| \frac{l}{y(1-y)} \left(\frac{t}{l} - y\right) \partial y + \partial \log dy \right| dx = 0$$

oder wenn man endlich für den wahrscheinlichsten Werth der Wahrscheinlichkeit in jedem Beobachtungspunkte $\frac{t}{l} = w$ setzt:

$$\int_a^{a+\overline{n-1}h} \left[\frac{l}{y(1-y)} (w-y) \partial y + \partial \log dy \right] dx = 0. \qquad \text{III)}$$

§. 4.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Bedeutung von dy. dy ist unendlich klein, jedoch nicht mit dem Incremente der abhängig Variabelen bei wachsendem x zu vertauschen. Es kommt vielmehr der Wahrscheinlichkeit gleich, welche ich jeder Hypothese für y a priori beizumessen in der Lage bin. Wenn bekannt ist, dass y_x das Verhältniss zwischen allen Abänderungen in der Qualität und der ursprünglichen Zahl der Beobachtungsfälle binnen der Zeiteinheit ausdrückt, dann gibt $\binom{l}{t} y_x{}^t (1-y_x)^{l-t}$ die Wahrscheinlichkeit, dass unter l Beobachtungen im gegebenen Falle t Abänderungen eintreten; wenn die Verhältnisszahl y_x nicht gegeben ist, sondern mit der Wahrscheinlichkeit α_x vorausgesetzt wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die genannte Hypothese stattfindet und das Ereigniss eintritt: $\alpha_x \binom{l}{t} y_x^t (1-y_x)^{l-t}$.

Sind andere Voraussetzungen für die mögliche Hypothese $y_1 y_2 \ldots y_{x-1} y_{x+1} \ldots y_n$ und die entsprechen den Wahrscheinlichkeiten $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{x-1}\ \alpha_{x+1} \ldots \alpha_n$, dann ist beim Eintritte des Ereignisses, nach welchem unter l Beobachtungen t Änderungen sich befinden, die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese y_x

$$\frac{\alpha_x y_x{}^t (1-y_x)^{l-t}}{\sum\limits_{\rho=1,2..n} \alpha_\rho y_\rho{}^t (1-y_\rho)^{l-t}}.$$ [1]

[1] Laplace (Théorie analytique des probabilités Livre II. Ch. I, §. 1.—) setzt allgemein für die Wahrscheinlichkeit einer Ursache $P = \frac{Hp}{SHp}$ wenn p die Wahrscheinlichkeit der Ursache a priori ist, welche man jedesmal betrachtet.

Bei unendlich grosser Zahl der Hypothesen wird $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ unendlich klein, und der Nenner übergeht, da die Summe aller $\alpha = 1$, welche Voraussetzung auch sonst über α gemacht wird, zur selben festen Grenze $\int_0^1 y^{\prime}(1-y)^{l-\prime} dy$.

Die erste Beobachtung in einem einzelnen Functionswerthe lässt über den Werth von α_x keine Voraussetzung zu; alle Hypothesen sind gleich möglich und α_x hat demnach bei n Hypothesen den Werth $\frac{1}{n}$. Wenn jedoch einer vorliegenden Beobachtung Beobachtungen desselben Functionswerthes vorausgegangen sind, oder wenn bei einer Beobachtungsreihe entweder aus theoretischen oder Erfahrungsgründen über die Natur der zu suchenden Function eine Meinung besteht, welche durch die neue Untersuchung näher zu bestimmen ist, dann werde ich den einzelnen y in irgend einem Beobachtungswerthe oder jeder beliebigen Reihe von Functionswerthen für y nicht den gleichen Werth a priori einräumen dürfen; α_x ist demnach nicht unabhängig von y oder dessen Ableitungen und seine Variation δdy oder $\delta \log dy$ nicht Null.

Nun liegt aber gerade in der Ausgleichung die Verwerthung vorangegangener Erfahrung auf eine neuerliche Beobachtung. Die Ausgleichung beruht, insoferne sie die Aufhebung der raschen Folge von Maxima und Minima in der Beobachtungsreihe bezweckt, auf der folgenden Überlegung:

1. Die beobachteten Wahrscheinlichkeiten sind den Beobachtungsfehlern unterworfen; wenn die zu suchenden Nachbarwerthe $y_1\, y_2 \ldots y_n$ auch eine stetige Reihe bilden, so können durch die Beobachtung Discontinuitäten entstehen, und die thatsächliche Beobachtung hat erwiesen, dass an Stelle der Maxima in einer Beobachtungsreihe, Minima in der anderen vorkommen und umgekehrt; dass je grösser die Beobachtungszahlen, resp. die aus ihnen in der Zeiteinheit hervorgehenden Veränderungen waren, desto geringer an Zahl der Wechsel zwischen Maxima und Minima auftrat. (Sprague: Die graphische Methode der Ausgleichung von Mortalitätstabellen aus dem Journal of Actuaries Nr. CXLII, Oct. 1886, pag. 90 und 93. — Wittstein: Ein Parallele unter den vier neuesten Sterblichkeitstafeln etc. aus dem Assecuranzjahrbuch, VII. Jahrgang, v. Ehrenzweig.)

Lazarus musste in seinem Rechnungsresultate zur Negation aller Ausgleichung gelangen, weil die Bedingungsgleichung $\delta \log dy = 0$ der Voraussetzung der vollständigen Unabhängigkeit von jeder vorangehenden Erfahrung gleichkommt. Es bleibt noch die Frage zu erörtern, wie man die Bedingung der Ausgleichung analytisch darzustellen hat.

§. 5.

Die analytische Darstellung von α wird von der Menge der gesammelten Erfahrung und der Form, in welcher dieselbe zum Ausdrucke kommt, abhängen.

Vor jeder Erfahrung ist, wie schon oben bemerkt, $\delta \log dy = 0$ anzunehmen; die Hauptgleichung der Variation wird $y = w$, d. h. man hat Punkt für Punkt den ausgeglichenen Werth dem unausgeglichenen gleichzusetzen. Der jähe Wechsel von Zu- und Abnahme kann einer Curve von Wahrscheinlichkeiten auch eigenthümlich sein. Wenn z. B. die Sterbenswahrscheinlichkeit im Kriege von 0·05 sich mit der Kriegswahrscheinlichkeit von $^1/_6$ zur Sterbenswahrscheinlichkeit durch Krieg, zu 0·00833 verbindet, so wird in der Curve der allgemeinen Sterbenswahrscheinlichkeiten während der kriegspflichtigen Alter eine sprunghafte Zunahme des Sterblichkeitssatzes um eben diese Grösse stattfinden müssen. In den Curven für Sterbenswahrscheinlichkeiten geschlossener wirthschaftlicher Vereinigungen können solche Sprünge durch die Selection in Verbindung mit dem Zudrange der Aufnahmswerber während gewisser Alter entstehen. Neben diesen durch die menschlichen Gesetze und Einrichtungen bedingten Stetigkeitsunterbrechungen können andere wieder durch organische Processe, wie durch die Geburt, Pubertät etc. ihre Erklärung finden.

Die durch wiederholte Beobachtung derselben Erscheinung gesammelte Erfahrung wird häufig, besonders solange das gewonnene Material zu tiefer gehenden Schlüssen keine Handhabe bietet, benützt, um charakteristische Merkmale ihres Functionalgesetzes abzuleiten.

Solche Versuche sind ganz vornehmlich bei der Absterbe- und Invalidenordnung unternommen worden und es sollen die wichtigsten unter ihnen hier ihre analytische Behandlung finden.

Wenn von dem zu suchenden Functionalgesetz nur bekannt ist, dass es (mit Ausnahme von wenigen Unstetigkeitsstellen) überall continuirlich sei, dann wird dy für $\frac{dy}{dx} = y' = \infty$ im Allgemeinen Null, für jeden anderen Fall von Null verschieden sein: es ist daher dy das Product einer Function von y' (nicht aber von x und y) und von dx. Die Bedingung für die Ausgleichung lautet dann

$$\int_a^{a+\overline{n-1}h} \left[\frac{l}{y(1-y)} (w-y)\, \partial y + \partial \log f(y') \right] dx = 0 \qquad \text{III}')$$

Daraus entspringt die Hauptgleichung der Variation:

$$y = w - \frac{y(1-y)}{l} \frac{d}{dx} \frac{\partial \log f(y')}{\partial y'}. \qquad \text{IV})$$

Der unausgeglichene Werth ist dem ausgeglichenen gleich, wenn $y = 0$, $y = 1$ oder $l = \infty$ wird. Dasselbe findet ganz allgemein statt, wenn alle Continuität als gleich wahrscheinlich angenommen wird, d. h. wenn $f(y')$ für jedes von $y' = \infty$ verschiedene y' denselben Werth annimmt. Dann ist $\frac{\partial \log f(y')}{\partial y'} = 0$ und nur für die Stetigkeitssprünge von w wird y unbestimmt. Solange $f(y')$ keine andere Einschränkung erfährt, als für $y' = \infty$ Null zu sein, bleibt die Ausgleichsfunction unbestimmt.

Nimmt man jedoch nach bekannten Schlüssen an, dass jedes unendlich grosse y' sich aus unendlich vielen unendlich kleinen (jedoch gleich grossen) Elementargrössen $\pm \frac{y'}{n}$ zusammensetze, deren jedes positiv oder negativ genommen gleich möglich sei, so wird:

$$dy = e^{-h^2 y'^2} dx = f(y') dx$$

$$y = w + 2h^2 \frac{y(1-y)}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \text{V})$$

Nach Gleichung V) wird y ausser im Punkte $y = 0$, $y = 1$ und für jedes $l = \infty$ auch dann w, wenn drei aufeinanderfolgende Punkte der beobachteten y Werthe auf einer Geraden liegen.

Wenn man nach Sprague von der ausgeglichenen Curve fordert, dass im Allgemeinen keine Wendepunkte (als Übergang vom Minimum zum Maximum in einer stetigen Curve) vorkommen, d. h. dass $dy = 0$ werde, so oft $y'' = 0$ oder ∞ vorausgesetzt ist, dann ist im Allgemeinen dy eine Function von y'', aber nicht von x, y, y', z. B. $dy = f(y'')dx$.

Die Hauptgleichung lautet:

$$y = w + \frac{y(1-y)}{l} \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \log f(y'')}{\partial y''} \qquad \text{VI.})$$

und wieder ist ersichtlich, dass, solange die Function $f(y'')$ keine weitere Einschränkung erfährt, als den Werth Null für $y'' = 0$ oder ∞ anzunehmen, die Ausgleichsfunction unbestimmt bleibt; ferner, dass im Allgemeinen $y = w$ wird, wenn jeder Werth für y'' ausser 0 oder ∞ gleich wahrscheinlich ist.

Im Allgemeinen wird man sagen können, dass die Ausgleichung die Einflussnahme der vorangegangenen Erfahrung auf den absoluten Werth der zu suchenden Wahrscheinlichkeit, sowie auf die relative Lage irgend eines Functionswerthes unter seinen Nachbarwerthen sei. Nachdem der absolute Werth der Wahrscheinlichkeit durch y, die relative Lage unter n Nachbarwerthen durch die n ersten Differenzialquotienten bestimmt ist, so wird sich dy zunächst als irgend eine Function von y, y' $y''\ldots y^n$ darstellen lassen. Die Hauptgleichung der Variation wird unter dieser Annahme, wenn man zur Abkürzung für $\log f(x, y, y', y''\ldots y^n) = z$ setzt:

$$y = w + \frac{y(1-y)}{l}\left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z}{\partial y''} - \ldots + \overline{-1}^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial z}{\partial y^n}\right]. \qquad \text{VII)}$$

Diese Gleichung ist als allgemeine Ausgleichsbedingung anzusehen. Man erkennt daraus, dass unbekümmert um die sonstigen näheren Bestimmungen für z $y = w$ wird, wenn $y = 0$, $y = 1$ oder $l = \infty$ wird; d. h. bei unendlich grosser Beobachtungszahl gibt es keine Ausgleichung.

Die Ausgleichsfunction wird erst bestimmt, wenn über die Natur der Abhängigkeit eines Punktes von seinen Nachbarwerthen bestimmte Annahmen bestehen.

§. 6.

Die nähere Bestimmung der Ausgleichsaufgabe als einer Maximumaufgabe der Variationsrechnung kann in mehrfacher Art erfolgen.

Bei der Construction der Absterbe- und Invalidenordnung wird zumeist gefordert, dass die aus der wirklichen Zahl Beobachteter nach den beobachteten und ausgeglichenen Wahrscheinlichkeiten hervorgehende Zahl von Todten, respective Invaliden, innerhalb gewisser endlicher grösserer Strecken gleich sei. (Karup, Die Mortalitätsverhältnisse des ärztlichen Standes und andere Veröffentlichungen desselben Schriftstellers, z. B. in Masius' Rundschau der Versicherungen. Band 1884. — Sprague, Journal of the Institute of Actuaries CXLII, pag. 84; Lazarus, Zur deutschen Lebensversicherungs-Sterblichkeitstafel. Assecuranzjahrbuch v. Ehrenzweig. VI. Jahrgang.)

Der analytische Ausdruck für diese Bedingung lautet:

$$\int_a^{a+\overline{n-1}h} wl dx = \int_a^{a+\overline{n-1}h} ly dx = \text{constant}.$$

Wie sich leicht ergibt, bildet diese Bedingung keine Einschränkung für die Wahl der Function z. In der That übergeht mit Hilfe der Bedingungsgleichung die Maximumaufgabe in:

$$y = w - \mu y(1-y) + \frac{y(1-y)}{l}\left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z}{\partial y''} + \ldots + \overline{-1}^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial z}{\partial y^n}\right] \qquad \text{VIII)}$$

wobei μ constant und so zu bestimmen ist, dass das aus VIII) berechnete y, in $\int_a^{a+\overline{n-1}h} ly dx = \int_a^{a+\overline{n-1}h} wl dx$ eingesetzt, dieser Gleichung genügt.

Übrigens wird nach meiner Ansicht diesem Kriterium als „einer Probe für die Übereinstimmung von Theorie und Wirklichkeit" ein zu grosser Werth beigemessen. Die Erklärung Wittstein's (§. 23 der Math. Statistik), dass vorausgesetzt wird, die Sterbefälle, welche in ein gewisses Alter hätten fallen sollen, seien durch das Spiel des Zufalles theilweise bis zwei Jahre zu früh oder zu spät gefallen, hat nur Berechtigung bei der Ausgleichung von Mortalitätstabellen einer Generation, in welchen die Beobachtungen der einzelnen Beobachtungsjahre stets aus denselben Personen nach Abschlag der vorgekommenen Todesfälle bestehen. Bei der Construction einer Mortalitätstabelle gleichzeitig Lebender mit Hilfe einer aus der Gesammtheit willkürlich herausgegriffenen Anzahl l_a von $a$jährigen, l_{a+1} von $a+1$jährigen ... l_{a+k} von $\overline{a+k}$jährigen Personen ist der Beobachtungsfehler ganz anderer Natur und in den aufeinanderfolgenden Punkten vollständig unabhängig.

Es steht nur zu erwarten, dass Beobachtungsfehler der Nachbarpunkte bei Zusammenziehung der Wahrscheinlichkeiten zu einer einzigen Beobachtung sich wechselweise verkleinern, weil im Allgemeinen nach der Natur aller Beobachtungsfehler grössere Fehler seltener eintreffen als kleinere. Es existiren aber heute noch keine reinen Mortalitätstabellen einer Generation.

In Fällen, in welchen die Erfahrung ziemlich weit vorgeschritten ist, construirt man Wahrscheinlichkeitsgesetze. Am bekanntesten sind die zahlreichen Versuche zur Auffindung von Absterbefunctionen, als deren treffendster Ausdruck die Gompertz-Makeham'sche Formel $y = 1 - ab^{q^x(q-1)}$ und die Wittstein'sche

$y = a^{-(M-x)^n}$, worin a, b, q, a M und n Constante bedeuten, betrachtet wird. Derartige Formeln geben das Gesetz der Wahrscheinlichkeiten bis auf eine gewisse Zahl von Constanten wieder; so nimmt man an, dass jede beliebige, zu irgend einer Zeit und in irgend einem Lande herrschende Absterbeordnung von Personen desselben Geschlechtes und derselben socialen Lage, z. B. durch eine Gompertz-Makeham'sche Formel, deren Constanten von Fall zu Fall zu bestimmen sind, sich ausdrücken lasse. Nun kann je nach der Bedeutung, welche man einem solchen Gesetze zuerkennt, das obige Problem der Ausgleichung eine engere oder weitere Bestimmung erfahren; es ist möglich, die aufgestellten Gesetze als gewisse (bis auf eine bestimmte Zahl von Constanten) gegebene oder nur als wahrscheinlichste Gesetze aufzufassen.

Zur Behandlung des ersteren Falles wurde das Wahrscheinlichkeitsgesetz durch die bis auf die unbekannten Constanten $a_1\ a_2 \ldots a_p$ vollständig definirte Function $y = f(x, a_1\ a_2 \ldots a_p)$ gegeben angesehen. Die Variation ∂y, welche das bestimmte Integral III) zu einem Maximum machen soll, ist beschränkt durch die Beziehungsgleichung:

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial a_p}\partial a_p,$$

aus welcher für die Variationen der Ableitungen folgt:

$$\partial y' = \frac{\partial y'}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial y'}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial a_p}\partial a_p;$$

allgemein IX)

$$\partial y^k = \frac{\partial y^k}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial y^k}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots + \frac{\partial y^k}{\partial a_p}\partial a_p.$$

Die Substitution dieser Beziehungen in Gleichung III) ergibt:

$$\int_a^{a+\overline{n-1}h}\Bigg[\frac{l(w-y)}{y(1-y)}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial a_p}\partial a_p\right) +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial a_p}\partial a_p\right) +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial y'}\left(\frac{\partial y'}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial y'}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial a_p}\partial a_p\right) + \ldots$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial y^n}\left(\frac{\partial y^n}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial y^n}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots + \frac{\partial y^n}{\partial a_p}\partial a_p\right)\Bigg]dx = 0.$$

Wenn die Variationen unter den Constanten vollständig willkürlich und wechselweise unabhängig sind, leitet sich für $\frac{l(w-y)}{y(1-y)} = \varphi$ das folgende System von p Gleichung ab:

$$\left(\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial a_1} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a_1} + \frac{\partial z}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial a_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial a_1} = 0.$$

$$\left(\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial a_2} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a_2} + \frac{\partial z}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial a_2} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial y^n}{\partial a_2} = 0. \qquad \text{X)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial a_p} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a_p} + \frac{\partial z}{\partial y''}\cdot\frac{\partial y''}{\partial a_p} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial y^n}{\partial a_p} = 0.$$

Aus dem System X erhellt, dass das Problem der Ausgleichung bei gegebener Wahrscheinlichkeitsfunction nur dann vollständig gelöst ist, wenn die Zahl der willkürlichen Constanten gleich oder grösser ist, als die Zahl der Nachbarpunkte, welche das Gewicht einer Hypothese über die relative Lage einer Wahrscheinlichkeit beeinflussen sollen. Im Falle $n = p$ ergibt sich für $\frac{\partial z}{\partial y^k}$

$$\frac{\partial z}{\partial y^k} = -\left(\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y'}{\partial a_1} & \frac{\partial y''}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial y^{k-1}}{\partial a_1} & \frac{\partial y}{\partial a_1} & \frac{\partial y^{k+1}}{\partial a_1} & & \frac{\partial y^n}{\partial a_1} \\ \frac{\partial y'}{\partial a_2} & \frac{\partial y''}{\partial a_2} & & \frac{\partial y^{k-1}}{\partial a_2} & \frac{\partial y}{\partial a_2} & \frac{\partial y^{k+1}}{\partial a_2} & & \frac{\partial y^n}{\partial a_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y'}{\partial a_n} & \frac{\partial y''}{\partial a_n} & & \frac{\partial y^{k-1}}{\partial a_n} & \frac{\partial y}{\partial a_n} & \frac{\partial y^{k+1}}{\partial a_n} & & \frac{\partial y^n}{\partial a_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y'}{\partial a_1} & \frac{\partial y''}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial a_1} \\ \frac{\partial y'}{\partial a_2} & \frac{\partial y''}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial a_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y'}{\partial a_n} & \frac{\partial y''}{\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial a_n} \end{vmatrix}} \qquad \mathrm{X'})$$

Bezeichnet $f(y, y'\, y'' \ldots y^n) = 0$ in diesem Falle die Beziehung, welche zwischen $y, y'\, y'' \ldots y^n$ nach Elimination von n Constanten besteht — die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung — so leitet sich aus dem Systeme der daraus folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_k} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial a_k} + \frac{\partial f}{\partial y''} \cdot \frac{\partial y''}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial y^n}{\partial a_k} = 0 \text{ für } \varkappa = 1, 2, 3 \ldots n$$

für den negativ genommenen Werth des Quotienten der beiden Determinanten in X'

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} : \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ also für } \frac{\partial z}{\partial y^k} = + \left[\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\right] \frac{\partial f}{\partial y_k} : \frac{\partial f}{\partial y} \text{ ab.}$$

Die Voraussetzung, dass die Ausgleichung bloss die Correctur jedes Wahrscheinlichkeitswerthes nach der relativen Lage eines beobachteten Werthes unter den übrigen zum Gegenstande habe, dass also $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ sei, gibt für die Ausgleichung nach Gleichung VII) die folgende Bestimmungsgleichung:

$$\varphi = \frac{d}{dx}\left[\varphi \frac{\partial f}{\partial y'} : \frac{\partial f}{\partial y}\right] - \frac{d^2}{dx^2}\left[\varphi \frac{\partial f}{\partial y''} : \frac{\partial f}{\partial y}\right] + \ldots + -1^n \frac{d^n}{dx^n}\left[\varphi \frac{\partial f}{\partial y^n} : \frac{\partial f}{\partial y}\right] \qquad \mathrm{X})$$

Eine Ausnahme erleidet diese Regel, wenn zwischen $\partial y, \partial y' \ldots \partial y^n$ eine Beziehung besteht und daher die Functionaldeterminante des Systems IX), welche mit dem Nenner des Systems X') identisch ist, verschwindet. In diesem Falle muss entweder $\varphi = 0$, d. i. $y = w$ sein, oder es muss auch die Determinante des Zählers verschwinden; im ersteren Falle ist der unausgeglichene Werth dem ausgeglichenen gleich, im letzteren erhält man eine Bedingung für die Wahl der Constanten.

Ist $p > n$, also $p = n+k$, dann müssen k Gleichungen des Systemes durch die übrigen identisch befriedigt werden; man erhält daher ebenso viele Bestimmungsgleichungen für die Constanten des Systems, welche als ebensoviele Bedingungsgleichungen der Ausgleichung anzusehen sind.

Z. B. Es sei eine Parabel n^{ter} Ordnung als Wahrscheinlichkeitsfunction gegeben: $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{n+1} x^n$; die Lage jedes Wahrscheinlichkeitswerthes werde durch $m = n+1$ Nachbarwerthe corrigirt. Nachdem $\frac{\partial y'}{\partial a_1} = \frac{\partial y''}{\partial a_1} = \quad = \frac{\partial y^n}{\partial a_1} = 0$ und der Nenner von X) daher identisch verschwindet, ist entweder $\varphi = 0$, d. i. $y = w$ oder $\frac{\partial y}{\partial a_1} = 0$.

Im letzeren Falle folgt zur Bestimmung von φ:

$$\varphi + \frac{d}{dx} \frac{\varphi x}{1} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\varphi x^2}{1.2} + \frac{d^3}{dx^3} \frac{\varphi x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^n}{dx^n} \frac{\varphi x^n}{n!} = 0.$$

Wenn bei beliebiger Wahl der Function f die Ausgleichsfunction nur eine Beziehung zwischen y und $\frac{dy}{dx}$ darstellt, dann besteht für $A_1\, A_2\, A_3 \ldots A_n$ als willkürliche Constante die Beziehung:

$$A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} = A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} = A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} = \quad = A_n \frac{\partial y}{\partial a_n}.$$

Wenn umgekehrt die Curve in Form einer Differenzialgleichung n^{ter} Ordnung, welche bekanntlich einer Function mit n willkürlichen Constanten äquivalent ist, gegeben vorliegt $f(x, y, y' \ldots y^n) = 0$, so besteht zwischen den n Variationen der n ersten Differentialquotienten die folgende Beziehung:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\partial y + \frac{\partial f}{\partial y'}\partial y' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^n}\partial y^n = 0;$$

damit erhält die Bedingungsgleichung für das Maximum der Wahrscheinlichkeit

$$\int\left(\varphi\partial y + \frac{\partial z}{\partial y'}\partial y' + \frac{\partial z}{\partial y''}\partial y'' + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y^m}\partial y^m\right)dx = 0.$$

die folgende Form:

$$\int\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y'} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\partial y' + \left(\frac{\partial z}{\partial y''} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\partial y'' + \ldots + \left(\frac{\partial z}{\partial y^m} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y^m}\right)\partial y^m - \lambda\frac{\partial f}{\partial y^{m+1}}\partial y^{m+1}\ldots - \lambda\frac{\partial f}{\partial y_n}\partial y^n\right]dx = 0$$

worin λ die Abkürzung für $\varphi : \dfrac{\partial f}{\partial y}$ bezeichnet.

Der Vergleich von

$$\varphi - \frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z}{\partial y''} - \ldots + -1^m\frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial z}{\partial y^m} = 0$$

mit

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial z}{\partial y'} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y'}\right] + \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\partial z}{\partial y''} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y''}\right] + \ldots + -1^m\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{\partial z}{\partial y^m} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y^m}\right] + -1^{m+1}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(-\lambda\frac{\partial f}{\partial y^{m+1}}\right)$$
$$+ \ldots + -1^n\frac{d^n}{dx^n}\left(-\lambda\frac{\partial f}{\partial y^n}\right)$$

gibt für φ, wie oben:

$$\varphi = \frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial y''}\right) + \ldots + -1^n\frac{d^n}{dx_n}\left(+\lambda\frac{\partial f}{\partial y^n}\right). \qquad \text{XI.)}$$

So ergibt die Differentialgleichung der Gompertz-Makeham'schen Formel:

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\frac{d}{dx}\log(y-1) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = -\frac{\varphi}{\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{y-1}}$$

und als Differentialgleichung für die Ausgleichung

$$y = w - \frac{y(1-y)}{l}\left[\frac{d}{dx}\lambda\left(\frac{2y''}{y'^3} - \frac{y'''}{y'^2} + \frac{2y'}{(y-1)^2}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\lambda\left(\frac{2y''}{y'^2} + \frac{1}{y-1}\right) + \frac{d^3}{dx^3}\frac{\lambda}{y'}\right].$$

Die Differenzialgleichung der Parabel n^{ter} Ordnung $\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = y^{n+1} = 0$ gibt als allgemeine Bedingung für die Variation $\partial y^{n+1} = 0$. Das Integral für die Maximumgleichung

$$\int\left[\varphi\partial y + \frac{\partial z}{\partial y'}\partial y' + \frac{\partial z}{\partial y''}\partial y'' + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y^m}\partial y^m\right]dx = 0$$

enthält, da $m < n$, keine Variation $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung. Die allgemeine Lösung der Ausgleichsaufgabe ist $\varphi = 0$. Für $\partial a_1 = 0$ kann die Differenzialgleichung zwischen n Differenzialquotienten in Form der Determinante geschrieben werden

$$0 = \begin{vmatrix} y & x & x^2 & \ldots x^3 \ldots & x^n \\ y' & 1 & 2\,x & 3\,x^2 & nx^{n-1} \\ y'' & 0 & 2 & 2\,.\,3x & n(n-1)x^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^n & 0 & 0 & 0 & n(n-1)\ldots 1 \end{vmatrix}$$

welche nach ihrer Entwicklung mit Hilfe der Formel XI wieder zum obigen Resultate führt.

Verschieden von diesem, auf bestimmte Lösungen führenden Problem wird die Aufgabe der Ausgleichung, wenn eine vorliegende Function $\varphi(x, y) = 0$ nur die wahrscheinlichste unter unendlich vielen möglichen Ausgleichsfunctionen ist. In diesem Falle wird verlangt, dass dy für alle y, welche der Gleichung der gegebenen Curve genügen, ein Maximum sei, dass also δdy für derartige y-Werthe verschwindet, ferner dass dy Null wird für alle y, welche grösser als 1 sind; die erste Bedingung besagt, dass wir jeder Beobachtung, welche mit einem Curvenpunkt zusammenfällt, ein grösstes Gewicht beilegen; die zweite, dass jeder Werth $y>1$ unmöglich sei. Man kann diesen Bedingungen auf unendlich viele Arten entsprechen. Bezeichnet $J = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u \cos yu\, du}{u}$ den Dirichlett'schen Discontinuitätsfactor, $\psi(x, y) = 0$ irgend eine Function, in welcher innerhalb der Beobachtungsreihe der jedem x entsprechende Werth von $y>1$ oder complex ist, endlich $\chi(x)$ irgend eine reine Function von x, dann wird man

$$dy = f(x, y)dx = J[\int \varphi(x, y)\,.\,\psi(x, y)dy + \chi(x)]$$

setzen können. Da $\delta dy = J\varphi(x, y)\,.\,\chi(x, y)\delta y$, gibt die Gleichung III):

$$y = w - \frac{y(1-y)}{l}\,\frac{\varphi(x, y)\,.\,\psi(x, y)}{\int \varphi(x, y)\,.\,\psi(x, y)dy + \chi(x)} \tag{XII}$$

Es sei z. B. angenommen, dass der aus $\varphi(\xi, \eta) = 0$ explicite gerechnete η Werth durch $\eta = F(\xi)$ dargestellt werde, dass ferner jede Abweichung der zu suchenden Ausgleichsfunction von dem entsprechenden Curvenwerthe η: $y - \eta$ aus unendlich vielen unendlich kleinen Elementarabweichungen dy bestehe, welche an sich gleichmöglich sind.

Dann ist:

$$f(x, y)\,dx = e^{-k^2[y-F(x)]^2}\,dx$$

und

$$y = w - 2k^2\,\frac{y(1-y)}{l}\,[y - F(x)]. \tag{XIII.}$$

Einer analogen Behandlung unterliegt offenbar der Fall, in welchem die wahrscheinlichste Curve als Differenzialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\varphi(x, y, y', y'' \;.\;.\;.\; y^n) = 0$$

gegeben ist. Sind $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0 \;.\;.\; \psi_n = 0$ willkürliche Functionen von x, y, die in jedem x des Ausgleichsbereiches nur für Werthe von y Null werden, welche >1 oder complex sind, dann wird die Function $f(x, y)dx$ die folgende Form annehmen können:

$$f(x, y) = J\int \varphi\,.\,\psi_1 dy\,.\int \varphi\,.\,\psi_2 dy'\,.\int \varphi\,.\,\psi_3 dy'' \ldots \int \varphi\psi_n dy^n + \chi(x).$$

Denn es ist:

$$\delta dy = J\int \varphi\psi_1 dy\,.\int \varphi\psi_2 dy' \ldots \int \varphi\psi_n dy^n \left[\frac{\psi_1 \delta y}{\int \varphi\psi_1 dy} + \frac{\psi_2 \delta y'}{\int \varphi\psi_2 dy} + \ldots + \frac{\psi_n \delta y^n}{\int \varphi\psi_n dy_n}\right].$$

§. 7.

Die sämmtlichen Ausgleichsgleichungen haben die Form:

$$y = w - \frac{y(1-y)}{l}\,F$$

wobei F irgend eine Function von $x, y, y', y'' \ldots y^n$ bedeutet. Unter der Annahme, dass die an der Grösse w anzubringende Correction immer sehr klein ist gegenüber dem w-Werthe selbst, dass also, wenn $y = w + h$, höhere Potenzen der Quotienten des Incrementes h in die Grösse y oder w vernachlässigt werden dürfen, kann man mit dieser Gleichung die folgende Transformation vornehmen:

$$y = w - \frac{w(1-w)}{l}\,F - \frac{(1-2w)h^2}{y(1-y)} + \frac{h^3}{y(1-y)} = w - \frac{w(1-w)}{l}\,F. \tag{XIV}$$

d. h., die an irgend einer Beobachtung anzubringende Correction ist stets dem Quadrate des Gewichtes der Beobachtung proportional.

Unter eben derselben Annahme (dass h sehr klein ist in Bezug auf w) ist man im Stande, einige der oberen Gleichungen weiter zu entwickeln. Gleichung XII, welche kurzweg geschrieben sein mag

$$y = w + pf(x, y)$$

wird, wenn man in $f(x, y)$ für $y = w+h$ einsetzt und die Entwicklungsglieder der Taylor'schen Reihe

$$\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x, w)}{\partial w^2}, \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x, w)}{\partial w^3}, \ldots$$

vernachlässigt,

$$y = w+pf(x, w)+ph\frac{\partial f(x, w)}{\partial w}.$$

Daraus findet sich:

$$y = w + \frac{w(1-w)}{l}\frac{f(x, w)}{1-\frac{w(1-w)}{l}\frac{\partial f(x, w)}{\partial w}} \qquad \text{XII}')$$

In derselben Art gibt Formel XIII.)

$$y = \frac{w+\frac{2k^2w(1-w)}{l}F}{1+\frac{2k^2w(1-w)}{l}} = w + \frac{2k^2w(1-w)}{l}(F-w) \qquad \text{XIII}')$$

Aus Gleichung V) wird für $2h^2\frac{w(1-w)}{l} = p$

$$y = w + p\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad \text{V}')$$

Wenn man diese Gleichung zweimal nach x differenzirt, erhält man:

$$p\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{d^2w}{dx^2} + p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Die Substitution von $p\frac{d^2y}{dx^2}$ in V') gibt:

$$y = w + p\frac{d^2w}{dx^2} + p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2y}{dx^2}$$

Durch n-malige Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man:

$$y = w + p\frac{d^2w}{dx^2} + p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2w}{dx^2} + p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots + p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2}{dx^2}\cdots p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad \text{V}'')$$

Wenn angenommen werden darf, dass der Ausdruck

$$p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2}{dx^2}\cdots p\frac{dy^2}{dx^2}$$

je weiter man in der Operation fortschreitet, der Null zugeht und die Reihe rechts in der letzten Gleichung convergirt, dann ist

$$y = w + p\frac{d^2w}{dx^2} + p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots \qquad \text{V}'')$$

Der Vergleich von V'') mit V') zeigt, dass y ein Integral der vorgelegten Differenzialgleichung sei; es lässt sich noch nachweisen, dass es sich aus dem allgemeinen Integral ergibt, wenn die beiden willkürlichen

Constanten desselben Null gesetzt werden. Man findet nämlich mit Hilfe der particulären Lösungen der reducirten Differenzialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{p}$ y_1 und y_2, zwischen welchen die Beziehung $y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = k$ besteht,

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \frac{1}{k}\left[y_1\int y_2 \frac{w}{p}\,dx + y_2\int y_1 \frac{w}{p}\,dx\right].$$

Wenn unter dem Integrale für $\frac{y_2}{p} = \frac{d^2y_2}{dx^2}$ und für $\frac{y_1}{p} = \frac{d^2y_1}{dx^2}$ gesetzt und von der Identität $\int u\,dv = vu - \int v\,du$ Gebrauch gemacht wird, findet man zunächst:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + w + \frac{1}{k}\left[y_1\int y_2 \frac{d^2w}{dx^2}\,dx - y_2\int y_1 \frac{d^2w}{dx^2}\,dx\right].$$

und wenn man auf die Werthe unter dem Integrale fortgesetzt dieselben Beziehungen anwendet, endlich

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + w + p\frac{d^2w}{dx^2} + p\frac{d^2}{dx^2}\,p\frac{d^2w}{dx^2} + \dots$$

§. 8.

In allen vorausgehenden Formeln für die Lösung des Ausgleichsproblems ist w als bekannte Function von x gedacht; ausser w kommen in ihnen noch die höheren Differenzialquotienten $\frac{dw}{dx}\,\frac{d^2w}{dx^2}\cdots\frac{d^nw}{dx_n}$ vor. Es scheint daher nothwendig, w_x in unendlich vielen Punkten als beobachtet vorauszusetzen; hat man w nur in einer endlichen Zahl von äquidistanten Punkten beobachtet, z. B. in den Werthen $x = a,\ a+h,\ a+2h \dots a+\overline{n-1}h$ dann wird man die Function, wie ihre Differenzialquotienten aus den beobachteten Werthen $w_0,\ w_1,\ w_2 \dots w_{n-1}$ und deren Differenzreihen ermitteln müssen.

Der Vollständigkeit halber seien unter den möglichen Beziehungen zwischen Function, Differentialquotienten und Differenzreihen der beobachteten Werthe die folgenden angeführt. Für jene Werthe der Function, welche in der Nähe der den kleinsten Werthen der unabhängig Variabelen entsprechenden beobachteten Werthen, also im Beginne der Beobachtungsreihe liegen, wird man von der Formel

$$w_x = (1+\Delta w_0)^x = w_0 + x_1\Delta w_0 + x_2\Delta^2 w_0 + \dots \qquad \text{XV}$$

in welcher $x_1\ x_2 \dots$ Binomialcoefficienten, $\Delta w_0,\ \Delta^2 w_0 \dots$ die ersten, zweiten etc. Differenzen bedeuten, Gebrauch machen.

Die Differenzialquotienten in diesen Punkten bestimmen sich nach der Formel

$$\frac{d^kw}{dx^k} = [\log(1+\Delta w_0)]^k = \overset{k}{C_0}\Delta^k w_0 - \frac{\overset{k+1}{C_1}}{k+1}\Delta^{k+1}w + \frac{\overset{k+2}{C_2}}{(k+1)(k+2)}\Delta^{k+2}w \dots \qquad \text{XVI)}$$

hier sind $\overset{k}{C_0},\ \overset{k+1}{C_1},\ \overset{k+2}{C_2} \dots \overset{k+n}{C_n}$ die unter dem Namen der Facultätencoëfficienten bekannten Constanten der 0^{ten}, ersten, zweiten ... n^{ten} Ordnung aus der Zahlenreihe

$$1,\ 2 \dots k-1;\quad 1.2 \dots k;\quad 1.2 \dots k+1 \dots \text{ etc.}$$

Zur Bestimmung von Werthen der Function, welche in der Nähe der beobachteten Werthe zu Ende der Beobachtungsreihe liegen, ist die folgende Beziehung geeignet:

$$w_{n-x} = w_n + x_1\Delta w_{n-1} + (x+1)_2\Delta^2 w_{n-2} + (x+2)_3\Delta^3 w_{n-3} \dots \qquad \text{XVII)}$$

Die Differenzialquotienten in diesen Punkten sind ausgedrückt durch:

$$\frac{d^k w}{dx^k} = \overset{k}{C}_0 \Delta^k w_{x-k} + \left(k_1 \overset{k}{C}_0 - k_0 \frac{\overset{k+1}{C}_1}{k+1}\right) \Delta^{k+1} w_{x-k-1} + \Big[(k+1)_2 \overset{k}{C}_0 - (k+1)_1 \frac{\overset{k+1}{C}_1}{k+1} +$$

$$+ (k+1)_0 \frac{\overset{k+2}{C}_2}{(k+1)(k+2)}\Big] \Delta^{k+2} w_{x-k-2} + \ldots \qquad \text{XVIII)}$$

$$= \Delta^k w_{x-k} + k_1 \Delta^{k+1} w_{x-k-1} - \left(\frac{3k}{4} + \frac{7}{24}\right) \Delta^{k+2} w_{x-k-2} + \ldots$$

Für Werthe der Function w_x, welche inmitten einer Reihe von beobachteten Werthen liegen, kann man eine der beiden folgenden Formeln benützen:

$$w_{x+\delta} = w_x + \frac{\delta^2}{2!} \Delta^2 w_{x-1} + \frac{\delta^2(\delta^2-1)}{4!} \Delta^4 w_{x-2} + \frac{\delta^2(\delta^2-1)(\delta^2-2^2)}{6!} \Delta^6 w_{x-3} +$$

$$+ \frac{\delta}{2}(\Delta w_x + \Delta w_{x-1}) + \frac{\delta(\delta^2-1^2)}{2.3!}(\Delta^3 w_{x-1} + \Delta^3 w_{x-2}) \qquad \text{XIX)}$$

oder

$$w_{x+\delta} = {}^1/_2(w_x + w_{x-1}) + \frac{(\delta + {}^1/_2)^2 - {}^1/_2{}^2}{2!}(\Delta^2 w_{x-1} + \Delta^2 w_{x-2}) + \frac{[(\delta+{}^1/_2)^2 - {}^1/_2{}^2][(\delta+{}^1/_2)^2 - {}^3/_2{}^2]}{4!} \times$$

$$\times {}^1/_2(\Delta^4 w_{x-2} + \Delta^4 w_{x-3}) + \ldots$$

$$+ (\delta + {}^1/_2) \Delta w_{x-1} + \frac{(\delta + {}^1/_2)^2 - {}^1/_2{}^2}{3!} \Delta^3 w_{x-2} \qquad \text{XIX')}$$

In der ersten Formel wird eine ungerade Zahl von beobachteten Werthen verwendet und w_x ist der mittlere Werth von ihnen; in der zweiten Formel eine gerade Zahl und w_x und w_{x-1} sind die beiden mittleren Werthe.

Die entsprechende Entwicklung für die Differenzialquotienten ist in der folgenden Formel gegeben:

$$\frac{d^{2k} w_k}{dx^{2k}} = \Delta^{2k} w_{x-k} - \frac{k}{12} \Delta^{2.+2} w_{x-k-1} + \frac{k(5k+11)}{1440} \Delta^{2k+1} w_{x-k-2} +$$

$$+ 2k \sum_{\rho=k+3\ldots n} \Delta^{2\rho} w_{x-\rho} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=2\rho-2k+1} \frac{-1^\sigma (\rho+1)_{2\rho-2k-\sigma+1} \overset{2k+1}{C}_\sigma}{2k(2k+1)\ldots(2k+\sigma)} \qquad \text{XX)}$$

für den wichtigsten Fall $k = 1$ erhält man:

$$\frac{d^2 w_x}{dx^2} = \Delta^2 w_{x-1} - {}^1/_{12} \Delta^4 w_{x-2} + {}^1/_{90} \Delta^6 w_{x-3} + \ldots$$

Darnach würden sich beispielsweise die der Gleichung V'' für $p =$ constant entsprechenden Ausgleichsformeln hinschreiben lassen. Die Berücksichtigung der sechs ersten Differenzialquotienten ergibt für die Punkte in der Mitte der Beobachtungsreihe:

$$y = w_x + p\Delta^2 w_{x-1} + \left(p^2 - \frac{p}{12}\right) \Delta^4 w_{x-2} + \left(p^3 - \frac{p^2}{6} + \frac{p}{90}\right) \Delta^6 w_{x-3}$$

und ähnlich für den Beginn der Beobachtungsreihe

$$y = w + p(\Delta^2 w_x - \Delta^3 w_x) + \Delta^4 w_x({}^{11}/_{12} p + p^2) + \Delta^5 w_x({}^5/_6 p - 2p^2) + \ldots$$

§. 9.

Die bisherigen Betrachtungen lassen sich in einfachster Art auf die Gesetze solcher wahrscheinlicher Erscheinungen übertragen, in welcher die Grundqualität gleichzeitig in mehrere Qualitäten abgeändert wird.

Wenn die Quotienten aller Individuen der Grundqualität a zu allen in der Zeiteinheit hervorgehenden Veränderungen $a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}$ die Werthe $y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}$ besitzen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus l_x willkürlich gewählten Individuen der Qualität a: $l_x^1\, l_x^2 \ldots l_x^{n-1}$ Veränderungen in die Qualitäten $a_1\, a_2\, a_{n-1}$ sich ergeben werden:

$$W = \frac{\Gamma(l_x+1)}{\Gamma(l_x^1+1)\,\Gamma(l_x^2+1)\ldots\Gamma(l_x^{n-1}+1)\,\Gamma(l_x^n+1)} \cdot y_1^{l_x^1} \cdot y_2^{l_x^2} \cdots y_{n-1}^{l_x^{n-1}} \cdot y_n^{l_x^n},$$

wobei der Kürze halber $l_x^n = l_x - l_x^1 - l_x^2 \ldots - l_x^{n-1}$ und $y_n = 1 - y_1 - y_2 \ldots - y_{n-1}$ bedeuten, also die Zahl der Individuen, deren Qualität in der Zeiteinheit nicht abgeändert wird, respective die Wahrscheinlichkeit, die Grundqualität beizubehalten. Umgekehrt: wenn bei der Beobachtung von irgend l_x Individuen der Qualität a in der Zeiteinheit $l_x^1\, l_x^2 \ldots l_x^{n-1}$ Abänderungen in die Qualitäten $a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}$ vorkommen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend welche, zwischen Null und Eins gelegene Werthe $y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}$ das Verhältniss der sämmtlichen Individuen der Grundqualität a zu den in der Zeiteinheit hervorgehenden Abänderungen in die Qualitäten $a_1\, a_2 \ldots a_n$ gleichzeitig darstellen,

$$\frac{y_1^{l_x^1} \cdot y_2^{l_x^2} \cdots y_n^{l_x^n}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{{}_n\!\int_0^1 y_1^{l_x^1} \cdot y_1^{l_x^2} \cdots y_n^{l_x^n}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}} = r_x\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1};$$

Darin sind die $dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$ proportional den Wahrscheinlichkeiten a priori, welche ich jeder Einzelnhypothese nach meiner Erfahrung beizulegen berechtigt bin. Das n-fache Integral des Nenners unterliegt der Bedingung, dass

$$0 \leq y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \leq 1.$$

Die Wiederholung der Schlüsse von §§. 3 und 4 auf das vorstehende Problem führt zur folgenden Bedingungsgleichung für die Ausgleichsfunction:

$$\delta \int_a^{a+\overline{n-1}h} [l_x^1 \log y_1 + l_x^2 \log y_2 + \ldots + l_x^{n-1} \log y_{n-1} + l_x^n \log y_n + \log dy_1 + \log dy_2 + \ldots + \log dy_{n-1}]\, dx = 0.$$

oder mit Berücksichtigung, dass $\delta y_n = -\delta y_1 - \delta y_2 \ldots - \delta y_{n-1}$ zum Integral:

$$\int_a^{a+\overline{n-1}h} \left[\left(\frac{l_x^1}{y_1} - \frac{l_x^n}{y_n}\right)\delta y_1 + \left(\frac{l_x^2}{y_2} - \frac{l_x^n}{y_n}\right)\delta y_2 + \ldots + \left(\frac{l_x^{n-1}}{y_{n-1}} - \frac{l_x^n}{y_n}\right)\delta y_{n-1} + \delta \log dy_1 + \delta \log dy_2 + \ldots + \delta \log dy_{n-1}\right] dx = 0.$$

Wenn nun das Gewicht der Hypothese y_x über die Abänderung der Grundqualität in die Qualität a_x a priori nur nach der relativen Lage beurtheilt wird, welche sie unter den beobachteten Werthen der Nachbarpunkte für dieselbe Abänderungsart einnimmt, ist leicht einzusehen, dass dy_1 nur von $y_1'\, y_1'' \ldots y_1^{n_1}$; ebenso dy_2 nur von $y_2'\, y_2'' \ldots y_2^{n_2}$, allgemein dy_x nur von $y_x'\, y_x'' \ldots y_x^{n_x}$ abhängt und die obige Bedingungsgleichung für die Ausgleichsfunction ist äquivalent den folgenden $n-1$ Differenzialgleichungen (für $\log dy_1 = z_1 + \log dx$; $\log dy_2 = z_2 + \log dx \ldots$ gesetzt)

$$\begin{aligned}
\frac{l_x^1}{y_1} - \frac{l_x^n}{y_n} &= \frac{d}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial y_1'} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z_1}{\partial y_1''} + \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial z_1}{\partial y_1'''} - \ldots \\
\frac{l_x^2}{y_2} - \frac{l_x^n}{y_n} &= \frac{d}{dx}\frac{\partial z_2}{\partial y_2'} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z_2}{\partial y_2''} + \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial z_2}{\partial y_2'''} \ldots \qquad \text{XXI)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{l_x^{n-1}}{y_{n-1}} - \frac{l_x^n}{y_n} &= \frac{d}{dx}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y_{n-1}'} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z_{n-2}}{\partial y_{n-1}''} + \cdots
\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun der Reihe nach die vorstehenden Gleichungen mit $y_1 y_2 \ldots y_n$ und addirt, so erhält man:

$$l_x - l_x^n - \frac{l_x^n}{y_n}(1-y_n) = y_1 \frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y_1'} + y_2 \frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y_2'} + \ldots + y_{n-1}\frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y_{n-1}'} - \left[y_1 \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z_1}{\partial y_1''} + \ldots \right]$$

oder wenn man für $1 - \frac{l_x^n}{l_x} = \gamma_n$ für $1 - y_n = \zeta_n$ schreibt

$$\gamma_n - \zeta_n = \frac{y_n}{l_x^n}\left[y_1 \frac{d}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial y_1'} + y_2 \frac{d}{dx}\frac{\partial z_2}{\partial y_2'} + \ldots + y_{n-1}\frac{d}{dx}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y_{n-1}'} \right] - \frac{y_n}{l_x^n}\left[y_1 \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z_1}{\partial y_1''} + \ldots \right]$$

Aus dem Gleichungssystem XXI) ist ersichtlich, dass alle y gegeben sind, wenn y_n bekannt ist.

Jede Erscheinung, in welcher eine Grundqualität in mehrere andere übergeht, kann in dem Sinne als einfache Erscheinung aufgefasst werden, dass man jede Qualitätsänderung irgend einer Art als Qualitätsänderung schlechtweg und daher als Abänderung von derselben Art der Grundqualität gegenüberstellt. So construirt man bei der Beobachtung von lebenden Activen die Tafel der in der Zeiteinheit durch Tod und die Tafel der in der Zeiteinheit durch Invalidität ausscheidenden; man kann jedoch auch eine Tafel berechnen, in welcher die activ am Leben bleibenden sich von Alter zu Alter durch das Ausscheiden schlechtweg, „d. i. durch Tod im activen Zustande und durch Invalidität“ vermindern.

Zwischen den auszugleichenden Werthen einer derartigen Ausscheideordnung ζ_n und ihren beobachteten Werthen γ_n besteht nun die Beziehung VII)

$$\gamma_n - \zeta_n = \frac{\zeta_n(1-\zeta_n)}{l_x^n}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial \zeta_n'} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z}{\partial \zeta_n''} + \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial z}{\partial \zeta_n'''} + \ldots \right] \qquad \text{XXII)}$$

aus deren Vergleich mit Formel 8) sich ergibt:

$$\zeta_n \left[\frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial \zeta_n'} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z}{\partial \zeta_n''} + \ldots \right] = \left[y_1 \frac{d}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial y_1'} + \ldots \right] - \left[y_1 \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial z_1}{\partial y_1''} + \ldots \right]$$

als die zwischen $z, z_1, z_2 \ldots$ zu erfüllende Bedingungsgleichung.

Die Verbindung der Gleichung XXII) mit dem Gleichungssysteme XXI) führt die Lösung des Ausgleichsproblems für zusammengesetzte Erscheinungen auf die einfacher Erscheinungen zurück.

Z. B. Die Ausgleichsgleichung für einfache Erscheinungen werde durch Formel V) bestimmt; dann ist

$$\zeta_n = \gamma_n + \mu_n \frac{d^2\gamma_n}{dx^2} + \mu_n \frac{d^2}{dx^2}\mu_n \frac{d^2\gamma_n}{dx^2} + \ldots$$

und ebenso irgend eine Gleichung des Systemes XXI)

$$\frac{l_x^\varkappa}{y_\varkappa} - \frac{l_x^n}{y_n} = -2h_\varkappa^2 \frac{d^2 y_\varkappa}{dx^2}.$$

Bezeichnet $l_x^n = l_x . w_x^n$, dann erhält man:

$$y_\varkappa = w_x^\varkappa \frac{y_n}{w_x^n} + \frac{2h_\varkappa^2 y_\varkappa}{l_x}\frac{y_n}{w_x^n}\frac{d^2 y_\varkappa}{dx^2}$$

und wenn man in erster Näherung für

$$\frac{2h_\varkappa^2 y_\varkappa}{l_x}\frac{y_n}{w_x^n} = \frac{2h^2 w_\varkappa}{l_x} = \mu_k$$

setzt, so erhält man nach dem in §. 7 eingeschlagenen Verfahren

$$y_\varkappa = w_x^\varkappa \frac{y_n}{w_x^n} + \mu_\varkappa \frac{d^2}{dx^2}\left(w_x^k \frac{y_n}{w_x^n} \right) + \ldots \qquad \text{XXIII).}$$

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1888

Band/Volume: 54_2

Autor(en)/Author(s): Blaschke Ernst

Artikel/Article: Über die Ausgleichung von Wahrscheilichkeiten, welche Functionen einer unabhängig Variabeln sind. 105-120