ÜBER

WINDSCHIEFE DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,

C. M. K. AKAD.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 22. NOVEMBER 1888.

Das Elementensystem $a_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)$ heisst windschief, wenn für je zwei benachbarte Indices i_s, i_{s+1}, von denen bei ungeraden m keiner der festen Indexreihe angehört,

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_s, i_{s+1}, i_{s+2}, \ldots, i_m} = -a_{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, i_s, i_{s+2}, \ldots, i_m}$$

ist, und die Determinante desselben wird eine windschiefe Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges genannt.

Die Determinante eines windschiefen quadratischen Elementensystemes $n$ter Ordnung ist, wie Herr Cayley im 32. Bande des Crelle'schen Journales bewiesen hat, für ein gerades n das Quadrat einer ganzen ganzzahligen Function der Elemente, während dieselbe für ein ungerades n den Werth 0 hat.

Ich werde in den folgenden Zeilen eine Relation aus der Theorie der windschiefen Determinanten höheren Ranges ableiten, deren weitaus interessanteste Specialisirung das Analogon des Cayley'schen Theorems im Gebiete der allgemeinen Determinanten liefert.

Zu dem Behufe soll zunächst ein auch sonst recht brauchbarer neuer Summenausdruck für Determinanten $m$ten Ranges aufgestellt werden.

Die Determinante $n$ter Ordnung und $(2r+1)$ten Ranges $\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1} = 1, 2, \ldots, n)}$ der n^{2r+1} Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1}}$ ist, wenn die erste Indexreihe die Reihe der festen Indices vorstellt, durch die $2rn$-fache Summe

$$\sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = 1}^{i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = n} \prod_{1}^{n}{}_{\varkappa,\lambda} \frac{(i_\varkappa^{(1)} - i_\lambda^{(1)})(i_\varkappa^{(2)} - i_\lambda^{(2)}) \ldots (i_\varkappa^{(2r)} - i_\lambda^{(2r)})}{(\varkappa - \lambda)^{2r}} a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}} a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(2r)}} \quad (\varkappa > \lambda)$$

definirt.

Beachtet man, dass, falls $i_1, i_2, \ldots, i_n$ irgend welche Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind, die Relationen

$$\prod_{1}^{n} {}_{\varkappa,\lambda} (i_\varkappa - i_\lambda) = \left| i_\tau^{\sigma-1} \right|_{\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n)} \qquad (\varkappa > \lambda)$$

$$\left| i_\tau^{\sigma-1} \right| = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \left| \tau^{\sigma-1} \right|_{(\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n)}$$

bestehen, wo mit dem Symbole $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ diejenige Determinante bezeichnet wird, welche aus der Determinante $n$ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots & , 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots & , 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & , 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & , 0, & 1 \end{vmatrix}$$

dadurch entsteht, dass an die Stelle der ersten, zweiten, ..., $n$ten Verticalreihe, beziehungsweise die $i_1$te, $i_2$te, ..., $i_n$te tritt, so erhält man die Gleichung

$$1)\quad \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1} = 1, 2, \ldots, n)} =$$
$$= \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = 1}^{i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = n} \prod_{1}^{2r} {}_{\mu} \left(i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)} \right) a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}} \, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(2r)}}$$

Berücksichtigt man, dass, wie ich gezeigt habe,[1] eine Determinante $n$ter Ordnung und $(2r+1)$ten Ranges, in welcher alle festen Indices einander gleich sind, der mit $n!$ multiplicirten Determinante $n$ter Ordnung und $(2r)$ten Ranges der n^{2r} verschiedenen Elemente gleich ist, so erhält man aus dieser Gleichung die Relation

$$2)\quad \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2r} = 1, 2, \ldots, n)} =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = 1}^{i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = n} \prod_{1}^{2r} {}_{\mu} \left(i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)} \right) a_{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}} \, a_{i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \ldots a_{i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(2r)}}.$$

Für $r = 1$ entsteht aus dieser Gleichung die elegante Darstellung der quadratischen Determinanten, welche unlängst Herr F. Mertens[2] mitgetheilt hat.

Nach den aufgestellten Gleichungen liefert jede Darstellung des Productes von zwei quadratischen Determinanten durch eine Summe von Determinantenproducten einen Summenausdruck für Determinanten $m$ten

---

[1] „Über Determinanten höheren Ranges." Denkschriften der mathem.-naturwissenschaftlichen Classe der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. XLIII.

[2] „Über windschiefe Determinanten." Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Cl. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. XCVI, II. Abth., S. 1245—1255.

Ranges. Eine bemerkenswerthe derartige Darstellung ergibt sich aus einem von Herrn Sylvester im Jahre 1851 in „The London, Edinburgh and Dublin philosophical magasine and journal of science" aufgestellten Satze, der, wie Herr J. F. v. Sperling[1] hervorgehoben hat, aus den zwei Identitäten

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n-m}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{1,n}, & b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n} \\
a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n-m}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{2,n}, & b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n-m}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{n,n}, & b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n} \\
0, 0, \ldots, 0, & a_{1,n-m+1}, & a_{1,n-m+2}, & \ldots, & a_{1,n-1}, & a_{1,n}, & b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n} \\
0, 0, \ldots, 0, & a_{2,n-m+1}, & a_{2,n-m+2}, & \ldots, & a_{2,n-1}, & a_{2,n}, & b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0, 0, \ldots, 0, & a_{n,n-m+1}, & a_{n,n-m+2}, & \ldots, & a_{n,n-1}, & a_{n,n}, & b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n}
\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu-1}, & a_{1,\nu}, & a_{1,\nu+1}, & \ldots, & a_{1,n}, & b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n} \\
a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu-1}, & a_{2,\nu}, & a_{2,\nu+1}, & \ldots, & a_{2,n}, & b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,\nu-1}, & a_{n,\nu}, & a_{n,\nu+1}, & \ldots, & a_{n,n}, & b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n} \\
0, 0, \ldots, 0, & a_{1,\nu}, & 0, & \ldots, & 0, & b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n} \\
0, 0, \ldots, 0, & a_{2,\nu}, & 0, & \ldots, & 0, & b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0, 0, \ldots, 0, & a_{n,\nu}, & 0, & \ldots, & 0, & b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n}
\end{vmatrix} = 0$$

folgt. Dieses Sylvester'sche Theorem lautet:

Bezeichnet $[|a_{i,\varkappa}|, |b_{i,\varkappa}|; \varkappa'_1, \varkappa'_2, \ldots, \varkappa'_\sigma; \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_\sigma]$ diejenige Determinante $n$ter Ordnung, welche aus $|a_{i,\varkappa}|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots,n)}$ entsteht, wenn die $\varkappa'_1$te, $\varkappa'_2$te, ..., $\varkappa'_\sigma$te Verticalreihe derselben, beziehungsweise durch die λ'_1te, λ'_2te, ..., λ'_σte Verticalreihe der Determinante $|b_{i\varkappa}|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots,n)}$ ersetzt wird, so ist

$$|a_{i,\varkappa}| \cdot |b_{i,\varkappa}|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \sum_{\lambda'_1,\ldots,\lambda'_\sigma=1}^{\lambda'_1,\ldots,\lambda'_\sigma=n} [|a_{i,\varkappa}|, |b_{i,\varkappa}|; \varkappa'_1, \varkappa'_2, \ldots, \varkappa'_\sigma; \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_\sigma] \cdot [|b_{i,\varkappa}|, |a_{i,\varkappa}|; \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_\sigma; \varkappa'_1, \varkappa'_2, \ldots \varkappa'_\sigma].$$

Unter Benützung dieses Satzes kann man die Gleichungen 1) und 2) in die folgenden verwandeln:

[1] „Note sur un théorème de M. Sylvester relatif à la transformation du produit de déterminants du même ordre." Liouville, Journal de mathématiques pures et appliquées. IIe série, tom. V, p. 121—126.

$$3)\quad \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}_{\sigma_m}, i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = 1}^{\lambda_1^{(1)}, \ldots \lambda^{(m)}_{\sigma_m}, i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = n} \prod_{\tau=1}^{m} \left[(i_1^{(\mu_\tau)}, i_2^{(\mu_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu_\tau)}), (i_1^{(\mu'_\tau)}, i_2^{(\mu'_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu'_\tau)}); \varkappa_1^{(\tau)}, \varkappa_2^{(\tau)}, \ldots, \varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)}; \lambda_1^{(\tau)}, \lambda_2^{(\tau)}, \ldots, \lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)} \right].$$

$$. \left[(i_1^{(\mu'_\tau)}, i_2^{(\mu'_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu'_\tau)}), (i_1^{(\mu_\tau)}, i_2^{(\mu_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu_\tau)}); (\lambda_1^{(\tau)}, \lambda_2^{(\tau)}, \ldots, \lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)}; \varkappa_1^{(\tau)}, \varkappa_2^{(\tau)}, \ldots, \varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)} \right].$$

$$. \prod_{\sigma=1}^{2r-2m} (i_1^{(\nu_\sigma)}, i_2^{(\nu_\sigma)}, \ldots, i_n^{(\nu_\sigma)})\, a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(2r)}},$$

$$4)\quad \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2r} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}_{\sigma_m}, i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = 1}^{\lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}_{\sigma_m}, i_1^{(1)}, \ldots, i_n^{(2r)} = n} \prod_{\tau=1}^{m} \left[(i_1^{(\mu_\tau)}, i_2^{(\mu_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu_\tau)}), (i_1^{(\mu'_\tau)}, i_2^{(\mu'_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu'_\tau)}); \varkappa_1^{(\tau)}, \varkappa_2^{(\tau)}, \ldots, \varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)}; \lambda_1^{(\tau)}, \lambda_2^{(\tau)}, \ldots, \lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)} \right].$$

$$. \left[(i_1^{(\mu'_\tau)}, i_2^{(\mu'_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu'_\tau)}), (i_1^{(\mu_\tau)}, i_2^{(\mu_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu_\tau)}); \lambda_1^{(\tau)}, \lambda_2^{(\tau)}, \ldots, \lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)}; \varkappa_1^{(\tau)}, \varkappa_2^{(\tau)}, \ldots, \varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)} \right].$$

$$. \prod_{\sigma=1}^{2r-2m} (i_1^{(\nu_\sigma)}, i_2^{(\nu_\sigma)}, \ldots, i_n^{(\nu_\sigma)})\, a_{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}}\, a_{i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \ldots a_{i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots\, i_n^{(2r)}},$$

wo die Grössen $\varkappa_1^{(\tau)}, \varkappa_2^{(\tau)}, \ldots, \varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)}$ irgend eine Combination $\sigma_\tau$ter Classe der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, die Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_m, \nu_1, \nu_2, \nu_{2r-2m}$ aber eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, 2r$ sind.

Ertheilt man in der Determinante

$[(i_1^{(\mu_\tau)}, i_2^{(\mu_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu_\tau)}), (i_1^{(\mu'_\tau)}, i_2^{(\mu'_\tau)}, \ldots, i_n^{(\mu'_\tau)}); \varkappa_1^{(\tau)}, \varkappa_2^{(\tau)}, \ldots; \varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)}; \lambda_1^{(\tau)}, \lambda_2^{(\tau)}, \ldots, \lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)}]$ den σ_τ Zahlen $\lambda_1^{(\tau)}, \lambda_2^{(\tau)}, \ldots, \lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)}$

der Reihe nach alle ihnen zukommenden Werthe, so sind selbstverständlich alle auf diese Weise entstehenden Ausdrücke, in denen zwei der Grössen $\lambda^{(\tau)}$ denselben Werth haben, gleich Null und es treten für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \sigma_\tau$ $\binom{n-\sigma_\tau}{\alpha}\binom{\sigma_\tau}{\alpha}$ beziehungsweise $n-\sigma_\tau$ auf, in denen genau α unter den Zahlen $\lambda^{(\tau)}$ von den Zahlen $\varkappa^{(\tau)}$ verschieden sind, da es $\binom{\sigma_\tau}{\alpha}$ Combinationen $(\sigma_\tau-\alpha)$ ter Classe der Zahlen $\varkappa^{(\tau)}$ und $\binom{n-\sigma_\tau}{\alpha}$ Combinationen αter Classe der von den Zahlen $\varkappa^{(\tau)}$ verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ gibt und jede Verbindung von zwei solchen Combinationen, ein System von Zahlen $\lambda^{(\tau)}$ liefert, in welchen genau α Zahlen $\lambda^{(\tau)}$ von den Zahlen $\varkappa^{(\tau)}$ verschieden sind. Da nun offenbar durch Vertauschung aller Indices $i^{(\sigma)}$ mit gewissen unteren Indices mit ebenso vielen anderen, deren untere Indices andere Werthe besitzen, in Verbindung mit einer geraden Anzahl von Vertauschungen der Verticalreihen in dem das Zeichen darstellenden Determinantenproducte jeder einem bestimmten α entsprechende Ausdruck in jeden anderen von ihnen übergeführt werden kann, so kann man die Gleichungen 3) und 4) auch in folgender Weise schreiben:

5) $$\left|a_{i_1,i_2,\ldots,i_{2r+1}}\right| (i_1,i_2,\ldots,i_{2r+1}=1,2\ldots,n) =$$

$$= \sum_{\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{\sigma_m}^{(m)},\,i_1^{(1)},\ldots,i_n^{(2r)}=1;\;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}^{\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{\sigma_m}^{(m)},\,i_1^{(1)},\ldots,i_n^{(2r)}=n} \prod_{\tau=1}^{m} \binom{n-\sigma_\tau}{\alpha_\tau}\binom{\sigma_\tau}{\alpha_\tau} [(i_1^{(\mu_\tau)},i_2^{(\mu_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu_\tau)}),(i_1^{(\mu'_\tau)},i_2^{(\mu'_\tau)},\ldots$$

$$\ldots,i_n^{(\mu'_\tau)});\varkappa_1^{(\tau)},\varkappa_2^{(\tau)},\ldots,\varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\lambda_1^{(\tau)},\lambda_2^{(\tau)},\ldots,\lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\alpha_\tau]\cdot[(i_1^{(\mu'_\tau)},i_2^{(\mu'_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu'_\tau)}),(i_1^{(\mu_\tau)},i_2^{(\mu_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu_\tau)});\lambda_1^{(\tau)},\lambda_2^{(\tau)},\ldots$$

$$\ldots,\lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\varkappa_1^{(\tau)},\varkappa_2^{(\tau)},\ldots,\varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\alpha_\tau] \prod_{\sigma=1}^{2r-2m} (i_1^{(\nu_\sigma)},i_2^{(\nu_\sigma)},\ldots,i_n^{(\nu_\sigma)})\, a_{1,i_1^{(1)},i_1^{(2)},\ldots,i_1^{(2r)}}\, a_{2,i_2^{(1)},i_2^{(2)},\ldots,i_2^{(2r)}}\ldots a_{n,i_n^{(1)},i_n^{(2)},\ldots,i_n^{(2r)}}$$

6) $$\left|a_{i_1,i_2,\ldots,i_{2r}}\right| i_1,i_2,\ldots,i_{2r}=1,2,\ldots,n =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{\sigma_m}^{(m)},\,i_1^{(1)},\ldots,i_n^{(2r)}=1;\;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}^{\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{\sigma_m}^{(m)},\,i_1^{(1)},\ldots,i_n^{(2r)}=n} \prod_{\tau=1}^{m} \binom{n-\sigma_\tau}{\alpha_\tau}\binom{\sigma_\tau}{\alpha_\tau} [(i_1^{(\mu_\tau)},i_2^{(\mu_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu_\tau)}),(i_1^{(\mu'_\tau)},i_2^{(\mu'_\tau)},\ldots$$

$$\ldots,i_n^{(\mu'_\tau)});\varkappa_1^{(\tau)},\varkappa_2^{(\tau)},\ldots,\varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\lambda_1^{(\tau)},\lambda_2^{(\tau)},\ldots,\lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\alpha_\tau]\cdot[(i_1^{(\mu'_\tau)},i_2^{(\mu'_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu'_\tau)}),(i_1^{(\mu_\tau)},i_2^{(\mu_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu_\tau)});\lambda_1^{(\tau)},\lambda_2^{(\tau)},\ldots$$

$$\ldots,\lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\varkappa_1^{(\tau)},\varkappa_2^{(\tau)},\ldots,\varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\alpha_\tau] \prod_{\sigma=1}^{2r-2m} (i_1^{(\nu_\sigma)},i_2^{(\nu_\sigma)},\ldots,i_n^{(\nu_\sigma)})\, a_{i_1^{(1)},i_1^{(2)},\ldots,i_1^{(2r)}}\, a_{i_2^{(1)},i_2^{(2)},\ldots,i_2^{(2r)}}\ldots a_{i_n^{(1)},i_n^{(2)},\ldots,i_n^{(2r)}}$$

wo

$$[(i_1^{(\mu_\tau)},i_2^{(\mu_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu_\tau)}),(i_1^{(\mu'_\tau)},i_2^{(\mu'_\tau)},\ldots,i_n^{(\mu'_\tau)});\varkappa_1^{(\tau)},\varkappa_2^{(\tau)},\ldots,\varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\lambda_1^{(\tau)},\lambda_2^{(\tau)},\ldots,\lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)};\alpha_\tau]$$

eine von den Determinanten $n$ter Ordnung ist, welche aus $(i_1^{(\mu_\tau)}, i_2^{(\mu_\tau)},\ldots, i_n^{(\mu_\tau)})$ dadurch entstehen, dass die $\varkappa_1^{(\tau)}$te, $\varkappa_2^{(\tau)}$te, $\ldots$, $\varkappa_{\sigma_\tau}^{(\tau)}$te Verticalreihe derselben, beziehungsweise durch die $\lambda_1^{(\tau)}$te, $\lambda_2^{(\tau)}$te, $\ldots$, $\lambda_{\sigma_\tau}^{(\tau)}$te Verticalreihe der Determinante $(i_1^{(\mu'_\tau)}, i_2^{(\mu'_\tau)},\ldots, i_n^{(\mu'_\tau)})$ ersetzt wird, wo genau α_τ unter den Grössen $\lambda^{(\tau)}$ von den Zahlen $\varkappa^{(\tau)}$ verschieden sind und bezüglich α_τ von 0 bis zur kleineren von den zwei Zahlen α_τ, $n-\alpha_\tau$ summirt wird.

Aus dieser Formel lässt sich nun die erwähnte allgemeine Relation mit grosser Leichtigkeit ableiten.

Ist nämlich das Elementensystem $a_{i_1,i_2,\ldots,i_{2r+1}}$ $(i_1, i_2,\ldots, i_{2r+1}=1,2,\ldots,n)$ windschief, so sind je zwei Ausdrücke

$$[(i_1^{(\mu)},i_2^{(\mu)},\ldots,i_n^{(\mu)}),(i_1^{(\mu')},i_2^{(\mu')},\ldots,i_n^{(\mu')});\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\sigma;\lambda_1,\lambda_2\ldots,\lambda_\sigma;\alpha]\cdot[(i_1^{(\mu')},i_2^{(\mu')},\ldots,i_n^{(\mu')}),(i_1^{(\mu)},i_2^{(\mu)},\ldots$$

$$\ldots,i_n^{(\mu)});\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma;\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\sigma;\alpha]\, a_{1,i_1^{(1)},i_1^{(2)},\ldots,i_1^{(\mu)},\ldots,i_1^{(\mu')},\ldots,i_1^{(2r)}}\, a_{2,i_2^{(1)},i_2^{(2)},\ldots,i_2^{(\mu)},\ldots,i_2^{(\mu')},\ldots,i_2^{(2r)}}\ldots$$

$$\ldots a_{n,i_n^{(1)},i_n^{(2)},\ldots,i_n^{(\mu)},\ldots,i_n^{(\mu')},\ldots,i_n^{(2r)}}$$

$$[(i_1^{(\mu)},i_2^{(\mu)},\ldots,i_n^{(\mu)}),(i_1^{(\mu')},i_2^{(\mu')},\ldots,i_n^{(\mu')});\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\tau;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\tau;\alpha]\cdot[(i_1^{(\mu')},i_2^{(\mu')},\ldots,i_n^{(\mu')}),(i_1^{(\mu)},i_2^{(\mu)},\ldots$$

$$\ldots,i_n^{(\mu)});\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\tau;\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\tau;\alpha]\, a_{1,i_1^{(1)},i_1^{(2)},\ldots,i_1^{(\mu)},\ldots,i_1^{(\mu')},\ldots,i_1^{(2r)}}\, a_{2,i_2^{(1)},i_2^{(2)},\ldots,i_2^{(\mu)},\ldots,i_2^{(\mu')},\ldots,i_2^{(2r)}}\ldots$$

$$\ldots a_{n,i_n^{(1)},i_n^{(2)},\ldots,i_n^{(\mu)},\ldots,i_n^{(\mu')},\ldots,i_n^{(2r)}}$$

in denen α denselben Werth hat, dem absoluten Betrage nach gleich, dem Zeichen nach aber gleich oder verschieden, je nachdem $|\sigma-\tau|$ gerade oder ungerade ist, weil sie durch blosse Vertauschung von $|\sigma-\tau|$ Indices

$i^{(\mu)}$ mit den correspondirenden Indices $i^{(\mu')}$ in Verbindung mit einer geraden Anzahl von Transpositonen der Verticalreihe in dem das Vorzeichen angebende Determinantenproducte in einander übergeführt werden können Aus dieser Bemerkung ersieht man sofort, dass derjenige Theil der in den Gleichungen 5) und 6) auftretenden Summen, in denen eine der Grössen den Werth 0 hat, während die übrigen Grössen $\alpha_\varkappa$ alle ihnen zukommenden Werthe durchlaufen, den Werth $\pm\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1}}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2r+1} = 1, 2, \ldots, n)}$ beziehungsweise $\pm\frac{1}{n!}\cdot$ $\cdot\left|a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2r}}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2r} = 1, 2, \ldots, n)}$ besitzt.

Bezeichnet man nun den Theil der auf der rechten Seite der Gleichung 5) stehenden Summe, in welchem α_1 den Werth a_1, α_2 den Werth $a_2, \ldots \alpha_s$ den Werth α_s besitzt, während die übrigen Grössen $\alpha_\varkappa$ alle ihnen zustehenden ganzen Zahlen durchlaufen mit $\{a_1, a_2, \ldots, a_s;\ \alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots, \alpha_m\}$ und setzt der Reihe nach $\sigma_1 = 1, 2, 3, 4, \ldots$, so ergeben sich für die Determinante Δ eines windschiefen Elementensystems ungeraden Ranges die Relationen:

$$2\Delta = (n-1)\ \{1;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\}$$

$$0 = -\binom{2}{1}\binom{n-2}{1}\{1;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} + \binom{2}{2}\binom{n-2}{2}\{2;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} -$$

$$2\Delta = \binom{3}{1}\binom{n-3}{1}\{1;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} - \binom{3}{2}\binom{n-3}{2}\{2;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} - $$
$$-\binom{3}{3}\binom{n-3}{3}\{3;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\}$$

$$0 = -\binom{4}{1}\binom{n-4}{1}\{1;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} + \binom{4}{2}\binom{n-4}{2}\{2;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} -$$
$$-\binom{4}{3}\binom{n-4}{3}\{3;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} + \binom{4}{4}\binom{n-4}{4}\{4;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\}$$

. . . .

7) $$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\beta} (-1)^\lambda \binom{2s}{\lambda}\binom{n-2s}{\lambda}\{\lambda;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\}$$

8) $$2\Delta = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\beta} (-1)^{\lambda+1} \binom{2s+1}{\lambda}\binom{n-2s-1}{\lambda}\{\lambda;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\},$$

wo β die kleinere der zwei Zahlen $2s$, $n-2s$, beziehungsweise $2s+1$, $n-2s-1$ ist.

Ist n eine ungerade Zahl, so verwandelt sich die Relation 7) für $s = \frac{n-1}{2}$ in

$$0 = (n-1)\ \{1;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\}$$

und daher erhält man unter Berücksichtigung des oben erwähnten Zusammenhanges zwischen Determinanten $(2r+1)$ten und $(2r)$ten Ranges das Theorem:

Eine windschiefe Determinante $m$ten Ranges von ungerader Ordnung ist gleich Null.

Ist die Ordnungszahl n gerade, so ergibt sich aus den Gleichungen 7) und 8), wie man leicht zeigen kann, die Formel:

9) $$2^{\rho_1}\rho!\,\Delta = (n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2\rho_1+1)\ \{\rho_1;\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m\} \quad \left(\rho_1 \leqq \frac{n}{2}\right).$$

Besteht dieselbe nämlich bis $2s$, beziehungsweise $2s-1$, so hat man die Relationen

$$0=\Delta \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2s-1} (-2)^{\lambda} \frac{2s\,(2s-1)\ldots(2s-\lambda+1)\,(n-2s)\,(n-2s-1)\ldots(n-2s-\lambda+1)}{\lambda!\,(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2\lambda+1)} + \\ + \binom{n-2s}{2s}\{2s;\,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m\}$$

$$2\Delta=-\Delta \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2s} (-2)^{\lambda} \frac{(2s+1)\,2s\ldots(2s-\lambda+2)\,(n-2s-1)\,(n-2s-2)\ldots(n-2s-\lambda)}{\lambda!\,(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2\lambda+1)} + \\ + \binom{n-2s-1}{2s+1}\{2s+1;\,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m\}$$

oder

$$0=\left(F\left(-2s,-n+2s,-\frac{n-1}{2},1\right)-1-\binom{n-2s}{2s}\frac{2^{2s}\,(2s)!}{(n-1)\,(n-3)\ldots(n-4s+1)}\right)\Delta + \\ + \binom{n-2s}{2s}\{2s;\,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m\}$$

$$2\Delta=-\left(F\left(-2s-1,-n+2s+1,-\frac{n-1}{2},1\right)-1+\binom{n-2s-1}{2s+1}\frac{2^{2s+1}(2s+1)!}{(n-1)\,(n-3)\ldots(n-4s-1)}\right)\Delta + \\ + \binom{n-2s-1}{2s+1}\{2s+1;\,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m\},$$

wo $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ die hypergeometrische Reihe ist. Bekanntlich ist

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

und daher

$$F\left(-2s,-n+2s,-\frac{n-1}{2},1\right)=1$$

$$F\left(-2s-1,-n+2s+1,-\frac{n-1}{2},1\right)=-1.$$

Die zwei letzten Gleichungen verwandeln sich daher in

$$2^{2s}(2s)!\,\Delta=(n-1)\,(n-3)\ldots(n-4s+1)\,\{2s;\,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m\}$$

$$2^{2s+1}(2s+1)!\,\Delta=(n-1)\,(n-3)\ldots(n-4s-1)\,\{2s+1;\,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m\},$$

und demnach besteht die Relation 9) allgemein, da sie für $\rho=1, 2$, besteht.

Auf dem eben auseinandergesetzten Wege ergeben sich ferner, wie man sofort sieht, die folgenden Relationen:

$$2^{\rho_2}\rho_2!\,\{\rho_1;\,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m\}=(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2\rho_2+1)\,\{\rho_1,\rho_2;\,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_m\}$$

$$2^{\rho_3}\rho_3!\,\{\rho_1,\rho_2;\,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_m\}=(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2\rho_3+1)\,\{\rho_1,\rho_2,\rho_3;\,\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_m\}$$

. . . .

$$2^{\rho_\varkappa}\rho_\varkappa!\{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\varkappa-1};\alpha_\varkappa,\alpha_{\varkappa+1},\ldots,\alpha_m\}=(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2\rho_\varkappa+1)\,\{\rho_1,\rho_2,\ldots\rho_{\varkappa-1},\rho_\varkappa;\,\alpha_{\varkappa+1},\alpha_{\varkappa+2},\ldots,\alpha_m\}.$$

Es ergibt sich demnach für eine windschiefe Determinante Δ ungeraden Ranges von gerader Ordnung n die Relation

$$\text{10)} \qquad \Delta = \binom{\frac{n-1}{2}}{\rho_1}\binom{\frac{n-1}{2}}{\rho_2}\cdots\binom{\frac{n-1}{2}}{\rho_\varkappa}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\varkappa-1}, \rho_\varkappa; \alpha_{\varkappa+1}, \alpha_{\varkappa+2}, \ldots, \alpha_m\}$$

aus welcher nach den früheren Bemerkungen sofort für eine windschiefe Determinante Δ_1 geraden Ranges von gerader Ordnung n die Gleichung

$$\text{11)} \qquad n!\,\Delta_1 = \binom{\frac{n-1}{2}}{\rho_1}\binom{\frac{n-1}{2}}{\rho_2}\cdots\binom{\frac{n-1}{2}}{\rho_\varkappa}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\varkappa-1}, \rho_\varkappa; \alpha_{\varkappa+1}, \alpha_{\varkappa+2}, \ldots, \alpha_m\}'$$

folgt, wenn $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\varkappa-1}, \rho_\varkappa; \alpha_{\varkappa+1}, \alpha_{\varkappa+2}, \ldots, \alpha_m\}'$ denjenigen Ausdruck bezeichnet, welcher aus $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\varkappa-1}, \rho_\varkappa; \alpha_{\varkappa+1}, \alpha_{\varkappa+2}, \ldots, \alpha_m\}$ entsteht, falls alle festen Indices der Elemente gleich gemacht werden.

Aus den allgemeinen Relationen 10) und 11), deren Ableitung der Zweck dieser Mittheilung war, ergibt sich nun leicht durch geeignete Specialisirung die Verallgemeinerung des Cayley'schen Theorems.

Setzt man

$$\varkappa = m = r; \; \rho_\lambda = \frac{n}{2} = \nu \; (\lambda = 1, 2, \ldots, m); \; \mu_\tau = 2\tau - 1, \; \mu'_\tau = 2\tau$$

und bedenkt, dass

$$\left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right\} =$$

$$= \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = 1}^{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = n} \prod_{\tau=1}^{r} \left(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau)}\right) a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}} \cdot$$

$$\cdot a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \cdots a_{\nu\, i_\nu^{(1)}, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2r)}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = 1}^{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = n} \prod_{\tau=1}^{r} \left(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau)}\right) a_{\nu+1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}} \cdot$$

$$\cdot a_{\nu+2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \cdots a_{n, i_\nu^{(1)}, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2r)}}$$

$$\left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right\}' =$$

$$= \left(\sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = 1}^{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = n} \prod_{\tau=1}^{r} \left(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau)}\right) a_{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot a_{i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \cdots a_{i_\nu^{(1)}, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2r)}} \right)^2$$

ist, so erhält man aus 10) und 11) die speciellen Formeln

$$\Delta = \left(\frac{\Pi(n)}{2^n\left[\Pi\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}\right)^r \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = 1}^{i_1^{(1)}, \ldots, i_\nu^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}, \ldots, i_\nu^{(2r)} = n} \prod_{\tau=1}^{r} \left(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)}, \ldots, i_\nu^{(2\tau)}\right) \cdot$$

$$\cdot a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(2r)}} a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(2r)}} \cdots a_{\nu, i_\nu^{(1)}, i_\nu^{(2)}, \ldots, i_\nu^{(2r)}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},\dots,i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=1}^{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=n} \prod_{\tau=1}^{r}(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)},\dots,i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)},\dots,i_\nu^{(2\tau)})\, a_{\nu+1,i_1^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_1^{(2r)}}\,\cdot$$

$$a_{\nu+2,i_2^{(1)},i_2^{(2)},\dots,i_2^{(2r)}}\dots a_{n,i_\nu^{(1)},i_\nu^{(2)},\dots,i_\nu^{(2r)}}.$$

$$n!\,\Delta_1 = \left(\frac{\Pi(n)}{2^n\left[\Pi\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}\right)^r \left(\sum_{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=1}^{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=n} \prod_{\tau=1}^{r}(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)},\dots,i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)},\dots\right.$$

$$\left.\dots,i_\nu^{(2\tau)})\, a_{i_1^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_1^{(2r)}}\, a_{i_2^{(1)},i_2^{(2)},\dots,i_2^{(2r)}}\dots a_{i_\nu^{(1)},i_\nu^{(2)},\dots,i_\nu^{(2r)}}\right)^2 \left(\nu=\frac{n}{2}\right).$$

Vertauscht man in irgend einem Gliede der auf den rechten Seiten der letzten Gleichungen stehenden Summen zwei der Grössen $i^{(2\tau-1)}$, $i^{(2\tau)}$ mit demselben unteren Index mit einander, so ändert sich dasselbe nicht. Es haben also alle Glieder, welche durch eine Reihe von solchen Transpositionen in einander übergeführt werden können, denselben Werth, und demnach ist jede solche Summe gleich dem Producte aus $2^{\frac{rn}{2}}$ und demjenigen Ausdrucke, welcher aus ihr entsteht, wenn jedes Indexpaar $i_\lambda^{(2\tau-1)}$, $i_\lambda^{(2\tau)}$ durch die Ungleichung $i_\lambda^{(2\tau-1)} < i_\lambda^{(2\tau)}$ beschränkt wird. Vertauscht man ferner in einer der eben erwähnten Summen alle correspondirenden Grössen $i^{(2\tau-1)}$ mit zwei verschiedenen unteren Indices mit einander, so bleibt dieselbe ungeändert und daher ist jede von ihnen gleich dem Producte aus $\Pi\left(\frac{n}{2}\right)$ und demjenigen Ausdrucke, welcher aus ihr hervorgeht, wenn die Indices $i^{(2\tau-1)}$ der beschränkenden Relation $i_\lambda^{(2\tau-1)} < i_\mu^{(2\tau-1)} (\lambda < \mu)$ unterworfen werden.

Man hat daher schliesslich die Gleichungen

$$\Delta = [\Pi(n)]^r \sum_{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=1}^{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=n} \prod_{\tau=1}^{r}(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)},\dots,i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)},\dots,i_\nu^{(2\tau)})\,\cdot$$

$$\cdot\, a_{1,i_1^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_1^{(2r)}}\, a_{2,i_2^{(1)},i_2^{(2)},\dots,i_2^{(2r)}}\dots a_{\nu,i_\nu^{(1)},i_\nu^{(2)},\dots,i_\nu^{(2r)}}\,\cdot$$

$$\cdot \sum_{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=1}^{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=n} \prod_{\tau=1}^{r}(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)},\dots,i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)},\dots,i_\nu^{(2\tau)})\,\cdot$$

$$\cdot\, a_{\nu+1,i_1^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_1^{(2r)}}\, a_{\nu+2,i_2^{(1)},i_2^{(2)},\dots,i_2^{(2r)}}\dots a_{n,i_\nu^{(1)},i_\nu^{(2)},\dots,i_\nu^{(2r)}}$$

$$\Delta_1 = [\Pi(n)]^{r-1}\left(\sum_{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}=1}^{i_1^{(1)},\dots,i_\nu^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_\nu^{(2)},\dots,i_1^{(2r)},\dots,i_\nu^{(2r)}} \prod_{\tau=1}^{r}(i_1^{(2\tau-1)}, i_2^{(2\tau-1)},\dots,i_\nu^{(2\tau-1)}, i_1^{(2\tau)}, i_2^{(2\tau)},\dots\right.$$

$$\left.\dots,i_\nu^{(2\tau)})\, a_{i_1^{(1)},i_1^{(2)},\dots,i_1^{(2r)}}\, a_{i_2^{(1)},i_2^{(2)},\dots,i_2^{(2r)}}\dots a_{i_\nu^{(1)},i_\nu^{(2)},\dots,i_\nu^{(2r)}}\right)^2 \left(\nu=\frac{n}{2};\, i_\lambda^{(2\tau-1)} < i_\lambda^{(2\tau)};\, i_\lambda^{(2\varkappa-1)} < i_\mu^{(2\varkappa-1)} (\lambda<\mu)\right).$$

Für $r=1$ liefert die letzte Gleichung die von Herrn F. Mertens a. a. O. abgeleitete Formel für windschiefe quadratische Determinanten.

Diese Gleichungen liefern die folgenden Theoreme:

Eine windschiefe Determinante ungeraden Ranges von gerader Ordnung ist das Product von zwei ganzen ganzzahligen Functionen der Elemente.

Eine windschiefe Determinante gerader Ordnung, deren Rang einfach gerade ist, ist das Quadrat einer ganzen ganzzahligen Function der Elemente, ist aber der Rang derselben mehrfach gerade, so ist sie das $n!$-fache eines solchen Quadrates.

Eine windschiefe Determinante von gerader Ordnung n und vom Range m ist durch $\{n!\}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ theilbar.

Will man nur die letzten zwei Relationen ableiten, so gelangt man bedeutend rascher zum Ziele, wenn man sich eines anderen Summenausdruckes für Determinanten $m$ten Ranges von gerader Ordnung bedient, welcher aus der von Herrn F. Mertens a. a. O. aufgestellten Formel für das Product von zwei quadratischen Determinanten leicht erschlossen werden kann.