ZAHLENTHEORETISCHE SÄTZE

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,

C. M. K. AKAD.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 17. APRIL 1890.)

Ich werde im ersten Abschnitte der vorliegenden Mittheilung eine Reihe von Sätzen ermitteln, welche sich auf solche ganze Zahlen oder Divisoren einer ganzen Zahl beziehen, die zu einer gegebenen ganzen Zahl theilerfremd sind und überdies eine vorgeschriebene Eigenschaft besitzen, und eine neue Herleitung des asymptotischen Ausdruckes für die Anzahl der Lösungen der Congruenz zweiten Grades $x^2 \equiv D \pmod{4n}$ ($D \equiv 0, 1$ [mod. 4]), sowie für die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch das System der quadratischen Formen einer Fundamentaldiscriminante angeben, sodann im zweiten Abschnitte mehrere Relationen, asymptotische Gesetze und Theoreme aus der Theorie des grössten gemeinsamen Theilers im Allgemeinen und für das Gebiet der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen im Besonderen beweisen, endlich im dritten Abschnitte einen von Herrn A. Schönflies durch geometrische Betrachtungen gewonnenen zahlentheoretischen Satz über ein System von gewissen ganzen Zahlen auf rein arithmetischem Wege ableiten und vervollständigen und schliesslich auf Grund einer bekannten Formel aus der Theorie der binären quadratischen Formen aus der Definition eines bestimmten Integrales eine allgemeine Integralrelation nebst einigen besonders interessanten speciellen Fällen derselben herleiten.

1. Ist

$$m = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_\sigma^{\nu_\sigma}$$

und die über alle Theiler d_r der ganzen Zahl n, deren complementärer Divisor eine r^{te} Potenz ist, erstreckte Summe

$$\sum_{d_r} f_1(d_r)\left(\frac{m^2}{\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}}\right) f\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right) = F(n) \tag{1}$$

so besitzt in dem Ausdrucke

$$\sum_{x=1}^{x=n} F(x)$$

das Glied $\left(\frac{m^2}{y}\right) f(y)$ offenbar den Factor

$$\sum_{z=1}^{\left[\frac{n}{y^r}\right]} f_1(z) = F_1\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right)$$

und man hat daher die Gleichung

$$2)\qquad \sum_{x=1}^{x=n} F(x) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} F_1\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{y}\right) f(y).$$

Aus dieser Formel folgt eine Reihe von interessanten Theoremen, von denen nun mehrere aufgestellt werden sollen.

α) Es sei zunächst

$$f_1(x) = \left(\frac{m^2}{x}\right),$$

dann sind

$$\sum_{d_r} f_1(d_r)\left(\frac{m^2}{\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}}\right) f\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right) = \left(\frac{m^2}{n}\right)\sum_{d_r} f\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right) = \left(\frac{m^2}{n}\right) F_2(n)$$

und es ist $F_1\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right)$ gleich der Anzahl derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots\left[\frac{n}{y^r}\right]$, welche zu m theilerfremd sind. Nun ist aber bekanntlich die Anzahl dieser Zahlen gleich der über alle Theiler d der ganzen Zahl m ausgedehnten Summe

$$\sum_d \left[\frac{n}{y^r d}\right]\mu(d) = \frac{n}{y^r}\sum_d \frac{\mu(d)}{d} - \sum_d \varepsilon_d \mu(d)$$

$$= \frac{n}{y^r}\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right) - \sum_d \varepsilon_d \mu(d)$$

und demnach ist

$$3)\qquad \sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{m^2}{x}\right) F_2(x) = n\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\sum_{y=1}^{y=\infty}\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{f(y)}{y^r} + \Delta_1$$

wo

$$\Delta_1 = -\left\{ n\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty}\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{f(y)}{y^r} + \sum_d \varepsilon_d \mu(d)\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]}\left(\frac{m^2}{y}\right) f(y)\right\}$$

gesetzt wurde. Die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Summe

$$\sum_d \varepsilon_d \mu(d)$$

ist offenbar dem absoluten Betrage nach kleiner, als die Anzahl $\psi_0(m)$ derjenigen Theiler der ganzen Zahl m, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind.

Setzt man in der Gleichung 3) speciell

$$f(x) = \mu(x),$$

so wird

$$F_2(x) = \mu_r(x)$$

$$\sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{f(y)}{y^r} = \sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\mu(y)}{y^r}$$

$$= \frac{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^r}\right)}{\prod_{\lambda=1}^{\sigma} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^r}\right)} = \frac{1}{\zeta(r) \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^r}\right)}$$

wo das auf p bezügliche Product im Zähler über alle Primzahlen zu erstrecken ist, und daher hat man die Formel

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{m^2}{x}\right) \mu_r(x) = \frac{n}{\zeta(r)} \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^r}} + \Delta_2$$

$$\Delta_2 = -\left\{ n \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda}\right) \sum_{y=[\sqrt[r]{n}]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\mu(y)}{y^r} + \sum_d \varepsilon_d \mu(d) \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) \right\}.$$

Nun ist

$$\left| \sum_{y=[\sqrt[r]{n}]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\mu(y)}{y^r} \right| < \sum_{y=[\sqrt[r]{n}]+1}^{y=\infty} \frac{1}{y^r} < \frac{\zeta(r)}{n^{1-\frac{1}{r}}}$$

$$\left| \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) \right| < \frac{6\, n^{\frac{1}{r}}}{\pi^2}$$

und demnach wird

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{m^2}{x}\right) \mu_r(x) = \frac{n}{\zeta(r)} \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^r}} + A_1 n^{\frac{1}{r}}$$

wo A_1 eine für alle Werthe von n endliche Zahl bezeichnet.

Den speciellen Fall $r = 2$ dieser Formel hat Herr Alexander Berger in seiner interessanten Abhandlung „Om rötternas antal till kongruenser af andra graden“ [1] gefunden.

Aus dieser Formel ergeben sich die Theoreme:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ganze Zahl zu den Primzahlen $p_1, p_2, \cdots, p_\sigma$ theilerfremd und durch keine r-te Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{1}{\zeta(r)} \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^r}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ganze Zahl weder durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \cdots, p_\sigma$ noch durch eine $(2r)$te Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{2\Gamma(2r+1)}{(2\pi)^{2r} B_r} \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2r}}}$.

[1] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. 44. Årgången. Ar 1887. Stockholm. S. 127—151.

Die Anzahl derjenigen durch keine $r$te Potenz (ausser 1) theilbaren ganzen Zahlen, welche zu einer gegebenen Primzahl p theilerfremd sind, verhält sich zur Anzahl der übrigen, wie $p^{r-1}(p-1)$ zu $p^{r-1}-1$.

Beiläufig $\dfrac{6}{\pi^2 \prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1+\dfrac{1}{p_\lambda}\right)}$ von allen ganzen Zahlen sind weder durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$, noch durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar.

Ungefähr $\dfrac{90}{\pi^4 \prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1+\dfrac{1}{p_\lambda}+\dfrac{1}{p_\lambda^2}+\dfrac{1}{p_\lambda^3}\right)}$ von allen ganzen Zahlen sind weder durch eine der Primzahlen p_1, $p_2, \ldots, p_\sigma$ noch durch ein Biquadrat (ausser 1) theilbar.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig gezogene Zahl ungerade und durch keine $r$te Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\dfrac{2^{r-1}}{(2^r-1)\zeta(r)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig gezogene Zahl ungerade und ohne quadratischen Theiler ist, beträgt im Mittel $\dfrac{4}{\pi^2}$.

Es sei ferner

$$f(x) = \lambda_\rho(x),$$

dann hat $F_2(x)$ den Werth 1 oder 0, je nachdem sämmtliche Exponenten der die ganze Zahl x zusammensetzenden Primzahlpotenzen nach dem Modul $r\rho$ einer unterhalb r befindlichen ganzen Zahl congruent sind, oder nicht und es stellt daher

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{m^2}{x}\right) F_2(x)$$

in diesem Falle die Anzahl $A(n, m)$ derjenigen zu m theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots n$ dar, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen kein Exponent nach dem Modul $r\rho$ grösser als $r-1$ ist. Da ferner

$$\sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\lambda_\rho(y)}{y^r} = \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{r\rho}}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}} \prod_{p} \frac{1-\dfrac{1}{p^r}}{1-\dfrac{1}{p^{r\rho}}}$$

$$= \frac{\zeta(\rho r)}{\zeta(r)} \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{r\rho}}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}}$$

$$\left|\sum_{y=[\sqrt[r]{n}]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\lambda_\rho(y)}{y^r}\right| < \frac{\zeta(r)}{n^{1-\frac{1}{r}}}$$

$$\left|\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \left(\frac{m^2}{y}\right) \lambda_\rho(y)\right| < n^{\frac{1}{r}}$$

ist, so erhält man die Relation

$$A(n, m) = \frac{n\zeta(r\rho)}{\zeta(r)} \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \frac{\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda^{r\rho}}\right)}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}} + A_2 n^{\frac{1}{r}}$$

wo A_2 für keinen Werth von n eine bestimmte endliche Zahl übersteigen kann.

Diese Gleichung liefert die Theoreme:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ganze Zahl zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremd ist und dass bei ihrer Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, beträgt im Mittel $\dfrac{\zeta(r\rho)}{\zeta(r)} \prod_1^\sigma{}_\lambda \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda^{r\rho}}\right)}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ganze Zahl durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilbar ist, und dass bei ihrer Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $2r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, beträgt im Mittel

$$\frac{(2\pi)^{2r\rho} B_{r\rho}}{2\Gamma(2r\rho+1)\,\zeta(r)} \prod_1^\sigma{}_\lambda \frac{\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2r\rho}}\right)}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ganze Zahl durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilbar ist, und dass bei ihrer Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $2r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, beträgt im Mittel

$$\frac{(2\pi)^{2r(\rho-1)}\Gamma(2r+1) B_{r\rho}}{\Gamma(2r\rho+1) B_r} \prod_1^\sigma{}_\lambda \frac{\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2r\rho}}\right)}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2r}}}.$$

Die Anzahl der zu einer Primzahl p theilerfremden ganzen Zahlen, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$ einer Zahl unterhalb r congruent sind, verhält sich zur Anzahl der übrigen ganzen Zahlen derselben Beschaffenheit wie $p^{r\rho+1}-p^{r\rho}-p+1$ zu $p^{r\rho}+p-p^{r(\rho-1)+1}-1$.

Unter den ganzen Zahlen von $1\ldots n$, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul 4 einer Zahl unterhalb 2 congruent sind, gibt es im Mittel $\dfrac{\pi^2}{24}\,n$ ungerade und $\dfrac{\pi^2}{40}\,n$ gerade Zahlen.

Unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots n$, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul 6 einer der Zahlen 1 oder 0 congruent sind, gibt es im Mittel $\dfrac{21\pi^4}{5040}\,n$ ungerade und $\dfrac{11\pi^4}{5040}\,n$ gerade.

Unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots n$, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul 8 einer der Zahlen 1 oder 0 congruent sind, gibt es im Mittel $\dfrac{17\pi^6}{40320}\,n$ ungerade und $\dfrac{43\pi^6}{201600}\,n$ gerade.

Unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots n$, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $12s$ oder $12s+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\dfrac{341\pi^8 n}{7983360}$ ungerade und $\dfrac{171\pi^8 n}{7983360}$ gerade.

Unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots n$, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $24s$ oder $24s+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\dfrac{188643\pi^{10} n}{43589145600}$ ungerade und $\dfrac{465043\pi^{10} n}{217945728000}$ gerade.

β) Es sei ferner

$$f_1(x) = 1,$$

dann wird

$$F_1\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) = \left[\frac{n}{y^r}\right]$$

und es stellt $F(n)$ die Summe $F_3(n)$ derjenigen Werthe vor, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument die $r$ten Wurzeln aus allen Theilern von n durchläuft, welche $r$te Potenzen und zu m theilerfremd sind. Man hat daher die Relation

$$\text{4)} \qquad \sum_{x=1}^{x=n} F_3(x) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{y^r}\right]\left(\frac{m^2}{y}\right) f(y)$$

$$= \sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{f(y)}{y^r} + \Delta_3,$$

wo

$$\Delta_3 = -\left\{ n \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{f(y)}{y^r} + \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) f(y)\right\} \qquad (0 \leqq \varepsilon_y < 1)$$

ist.

Setzt man zunächst speciell

$$f(x) = x^{-kr}, \quad \mu_\tau(x) x^{-kr}$$

so wird $F_3(n)$ beziehungsweise gleich: der Summe $P'_{-k,r}(n)$ der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen Theiler der ganzen Zahl n, welche $r$te Potenzen und durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilbar sind,
der Summe $\tau'_{-k,\tau,r}$ der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen Theiler der ganzen Zahl n, welche $r$te Potenzen und weder durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ noch durch eine (τr)te Potenz theilbar sind,

und man hat daher die Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{x=n} P'_{-k,r}(x) = n \sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{1}{y^{r(k+1)}} + \Delta'_3$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \tau'_{-k,\tau,r}(x) = n \sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\mu_\tau(y)}{y^{r(k+1)}} + \Delta''_3 \qquad (r+k>0)$$

$$\Delta'_3 = -\left\{ n \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{1}{y^{r(k+1)}} + \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{1}{y^{rk}}\right\}$$

$$\Delta''_3 = -\left\{ n \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{\mu_\tau(y)}{y^{r(k+1)}} + \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{\mu_\tau(y)}{y^{rk}}\right\}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{y=1}^{y=\infty}\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{1}{y^{r(k+1)}}=\frac{\prod\limits_{\lambda}{}_1^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{r(k+1)}}\right)}{\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p^{r(k+1)}}\right)}$$

$$=\zeta(r[k+1])\prod_{\lambda}{}_1^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{r(k+1)}}\right)$$

$$\sum_{y=1}^{y=\infty}\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{\mu_\tau(y)}{y^{r(k+1)}}=\prod_p\frac{1-\frac{1}{p^{\tau r(k+1)}}}{1-\frac{1}{p^{r(k+1)}}}\prod_{\lambda}{}_1^{\sigma}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{r(k+1)}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{\tau r(k+1)}}}$$

$$=\frac{\zeta(r[k+1])}{\zeta(\tau r[k+1])}\prod_{\lambda}{}_1^{\sigma}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{r(k+1)}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{\tau r(k+1)}}}$$

$$\left|\sum_{y=[\sqrt[r]{n}]+1}^{y=\infty}\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{\mu_\tau(y)}{y^{r(k+1)}}\right|<\sum_{y=[\sqrt[r]{n}]+1}^{y=\infty}\frac{1}{y^{r(k+1)}}<\frac{\zeta(r[k+1])}{n^{k+1-\frac{1}{r}}}$$

$$\left|\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]}\varepsilon_y\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{\mu_\tau(y)}{y^{r(k+1)}}\right|<\left|\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]}\varepsilon_y\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{1}{y^{r(k+1)}}\right|<\zeta(r[k+1])$$

und daher hat man die Relationen

$$\sum_{x=1}^{x=n}P'_{-k,r}(x)=n\,\zeta(r[k+1])\prod_{\lambda}{}_1^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{r(k+1)}}\right)+A_3n^{\frac{1}{r}-k}+B_4$$

$$\sum_{x=1}^{x=n}\tau'_{-k,\tau,r}(x)=\frac{n\,\zeta(r[k+1])}{\zeta(\tau r[k+1])}\prod_{\lambda}{}_1^{\sigma}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{r(k+1)}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{\tau r(k+1)}}}+A_4n^{\frac{1}{r}-k}+B_3\qquad(r+k>1)$$

wo die Zahlen A_3, A_4, B_3, B_4 für jeden Werth von n endlich bleiben.

Diese Formeln liefern die Theoreme:

Die Summe der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen sind, ist im Mittel gleich $\zeta(r[k+1])\prod\limits_{\lambda}{}_1^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{r(k+1)}}\right)$.

Die Summe der reciproken $(2k-1)$ten Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen sind, ist im Mittel gleich $\frac{(2\pi)^{2kr}B_{kr}}{2\Gamma(2kr+1)}\prod\limits_{\lambda}{}_1^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{2rk}}\right)$.

Die Summe der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $(2r)$te Potenzen sind, ist im Mittel gleich $\frac{(2\pi)^{2r(k+1)}B_{r(k+1)}}{2\Gamma(2r[k+1]+1)}\prod\limits_{\lambda}{}_1^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{2r(k+1)}}\right)$.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel $\zeta(r)\prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_{\lambda}^{r}}\right)$ Theiler, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen sind.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel $\frac{\pi^2}{8}$ ungerade und $\frac{\pi^2}{24}$ gerade quadratische Theiler.

Die Anzahl derjenigen, zu einer Primzahl p theilerfremden Theiler einer ganzen Zahl, welche $r$te Potenzen sind, verhält sich zur Anzahl der durch p theilbaren Divisoren derselben Beschaffenheit im Mittel wie p^r-1 zu 1.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel $\frac{\pi^4}{96}$ ungerade und $\frac{\pi^4}{1440}$ gerade biquadratische Theiler.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel $\frac{17\pi^8}{161280}$ ungerade und $\frac{\pi^8}{2419200}$ gerade Theiler, welche achte Potenzen sind.

Die Summe der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen und durch keine (τr)te Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich
$$\frac{\zeta(r[k+1])}{\zeta(\tau r[k+1])}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{r(k+1)}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{\tau r(k+1)}}}.$$

Die Summe der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen und durch keine $(2\tau r)$te Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich
$$\frac{2\Gamma(2\tau r[k+1]+1)\zeta(r[k+1])}{(2\pi)^{2\tau r(k+1)}B_{\tau r(k+1)}}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{r(k+1)}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2\tau r(k+1)}}}.$$

Die Summe der reciproken $(2k-1)$ten Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen und durch keine (τr)te Potenz (ausser 1) theilbar sind ist im Mittel gleich
$$\frac{\Gamma(2\tau rk+1)B_{rk}}{(2\pi)^{2rk(\tau-1)}\Gamma(2rk+1)B_{\tau rk}}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2rk}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2\tau rk}}}.$$

Die Summe der reciproken $k$ten Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_\sigma$ theilerfremde $(2r)$te Potenzen und durch keine $2\tau r)$te Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich
$$\frac{\Gamma(2\tau r[k+1]+1)B_{r(k+1)}}{(2\pi)^{2r(k+1)(\tau-1)}\Gamma(2r[k+1]+1)B_{\tau r(k+1)}}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2\tau(k+1)}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2\tau r(k+1)}}}.$$

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{\zeta(r)}{\zeta(\tau r)}\prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{r}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{\tau r}}}$ $(r>1)$ Theiler, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen und durch keine (τr)te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{2\Gamma(2\tau r+1)\zeta(r)}{(2\pi)^{2\tau r}B_{\tau r}}\prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{r}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2\tau r}}}$ $(r>1)$ Theiler, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $r$te Potenzen und durch keine $(2\tau r)$te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\dfrac{\Gamma(2\tau r+1)B_r}{(2\pi)^{2r(\tau-1)}\Gamma(2r+1)B_{\tau r}}\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\dfrac{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2r}}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2\tau r}}}$ Theiler, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $(2r)$te Potenzen und durch keine $(2\tau r)$te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Die Anzahl der durch eine Primzahl p nicht theilbaren Divisoren einer ganzen Zahl, welche $r$te Potenzen und durch keine (τr)te Potenz (ausser 1) theilbar sind, verhält sich zur Anzahl der durch p theilbaren Divisoren derselben Beschaffenheit, im Mittel wie $p^{(\tau-1)r}(p-1)$ zu $p^{(\tau-1)r}-1$.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\dfrac{12}{\pi^2}$ ungerade und $\dfrac{3}{\pi^2}$ gerade quadratische Theiler, welche durch keine vierte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\dfrac{120}{\pi^4}$ ungerade und $\dfrac{75}{2\pi^4}$ gerade quadratische Divisoren, welche durch keine sechste Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\dfrac{19264}{17\pi^6}$ ungerade und $\dfrac{6321}{17\pi^6}$ gerade quadratische Divisoren, welche durch keine achte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\dfrac{1995840}{341\pi^8}$ ungerade und $\dfrac{2650725}{682\pi^8}$ gerade quadratische Divisoren, welche durch keine zehnte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\dfrac{1680}{17\pi^4}$ ungerade und $\dfrac{105}{17\pi^4}$ gerade biquadratische Theiler, welche durch keine achte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\dfrac{1816214400}{188643\pi^8}$ ungerade und $\dfrac{241215975}{377286\pi^8}$ gerade biquadratische Divisoren, welche durch keine zwölfte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Schreibt man in der Gleichung

$$\mathfrak{Q}'_{\tau r}(n)=\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{m^2}{x}\right)\mu_{\tau r}(x)=\sum_{y=1,\,d}^{y=\left[\sqrt[\tau r]{\frac{n}{d}}\right]}\left[\frac{n}{y^{\tau r}d}\right]\mu(d)\left(\frac{m^2}{y}\right)\mu(y)$$

für n: $\left[\dfrac{n}{x^r}\right]$ multiplicirt sodann mit $\left(\dfrac{m^2}{x}\right)$ und summirt bezüglich x von 1 bis $[\sqrt[r]{n}]$, so erhält man

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]}\mathfrak{Q}'_{\tau r}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)=\sum_{d}\mu(d)\left(\sum_{x,\,y=1}^{x=\left[\sqrt[r]{\frac{n}{d}}\right],\;y=\left[\sqrt[\tau r]{\frac{n}{d}}\right]}\left[\frac{n}{(xy^\tau)^r d}\right]\left(\frac{m^2}{xy}\right)\mu(y)\right.$$

$$=\sum_{z=1,\,d}^{z=[\sqrt[r]{n}]}\left[\frac{n}{z^r d}\right]\mu(d)\left(\sum_{d_\tau}\left(\frac{m^2}{d_\tau}\right)\left(\frac{m^2}{\sqrt[\tau]{\frac{z}{d_\tau}}}\right)\mu\left(\sqrt[\tau]{\frac{z}{d_\tau}}\right)\right)$$

$$=\sum_{z=1,\,d}^{z=[\sqrt[r]{n}]}\left[\frac{n}{z^r d}\right]\mu(d)\,\mu_\tau(z)\left(\frac{m^2}{z}\right)$$

und daher schliesslich

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]}\mathfrak{Q}'_{\tau r}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)=\sum_{d}\mu(d)\,T'_{0,\tau,r}\left(\left[\frac{n}{d}\right]\right)\qquad\left(T'_{-k,\tau,r}(m_1)=\sum_{x=1}^{=m_1}\tau'_{-k,\tau,r}(x)\right)$$

Wird ferner in der Gleichung

$$\overline{P}'_{-k,r}(n) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{y^r}\right]\left(\frac{m^2}{y}\right)\frac{1}{y^{rk}}$$

n durch $\left[\frac{n}{x^{\tau r}}\right]$ ersetzt, sodann mit $\left(\frac{m^2}{x}\right)\frac{\mu(x)}{x^{\tau k r}}$ multiplicirt und von $x=1$ bis $x=\left[\sqrt[\tau r]{n}\right]$ summirt, so entsteht die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\tau r]{n}\right]} \overline{P}'_{-k,r}\left(\left[\frac{n}{x^{\tau r}}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)\frac{\mu(x)}{x^{\tau k r}} = \sum_{x,\,y=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right],\,y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{(x^\tau y)^r}\right]\left(\frac{m^2}{xy}\right)\frac{\mu(x)}{(yx^\tau)^{rk}}$$

$$= \sum_{z=1}^{z=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{z^r}\right]\frac{1}{z^{rk}}\left(\sum_{d_\tau}\left(\frac{m^2}{d_\tau}\right)\left(\frac{m^2}{\sqrt[r]{\frac{z}{d_\tau}}}\right)\mu\left(\sqrt[\tau]{\frac{z}{d_\tau}}\right)\right)$$

und daher nach der oben aufgestellten Gleichung endlich

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\tau r]{n}\right]} \overline{P}'_{-k,r}\left(\left[\frac{n}{x^{\tau r}}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)\frac{\mu(x)}{x^{\tau k r}} = T'_{-k,\tau,r}(n).$$

Aus dieser Gleichung könnte man ebenfalls den eben abgeleiteten asymptotischen Ausdruck für die Function $T'_{-k,\tau,r}(n)$ ermitteln.

Man hat ferner

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)x^k = \sum_d \mu(d)\left(\sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=\left[\sqrt[r]{\frac{n}{d}}\right]} \left[\frac{n}{(xy)^r d}\right]\left(\frac{m^2}{xy}\right)x^k\mu(y)\right)$$

$$= \sum_{z=1}^{z=\left[\sqrt[r]{\frac{n}{d}}\right]} \left[\frac{n}{z^r d}\right]\mu(d)\left(\sum_{d'}\left(\frac{m^2}{d'}\right)\left(\frac{m^2}{\frac{n}{d'}}\right)d'^k\mu\left(\frac{n}{d'}\right)\right)$$

wo sich die Summation bezüglich d' über alle Theiler von z zu erstrecken hat, und daher schliesslich

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)x^k = \sum_d \mu(d)\left(\sum_{z=1}^{z=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{z^r d}\right]\left(\frac{m^2}{z}\right)\varphi_k(z)\right)$$

und speciel für $k=0$

5) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right) = \sum_d \left[\frac{n}{d}\right]\mu(d) = \overline{\varphi}(m,n).$$

Schreibt man nun in der letzten Gleichung für n: $\left[\frac{n}{y^r}\right]$, multiplicirt mit $y^{rk}\left(\frac{m^2}{y}\right)\mu_\tau(y)$ und summirt bezüglich y von 1 bis $\left[\sqrt[r]{n}\right]$, so entsteht die Formel

$$\sum_{x,y=1}^{x,y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}'_r\left[\left(\frac{n}{(xy)^r}\right)\right] y^{kr}\left(\frac{m^2}{xy}\right)\mu_\tau(y) = \sum_d \mu(d)\left(\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{\frac{n}{d}}\right]} \left[\frac{n}{y^r d}\right] y^{rk}\mu_\tau(y)\left(\frac{m^2}{y}\right)\right)$$

$$= \sum_d \mu(d)\, T'_{k,\tau,r}\left(\left[\frac{n}{d}\right]\right).$$

Nun ist aber die Summe auf der rechten Seite gleich

$$\sum_{z=1}^{z=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left(\frac{m^2}{z}\right)\mathfrak{Q}'_k\left(\left[\frac{n}{z^r}\right]\right)\left(\sum_{d'} d'^{rk}\mu_\tau(d')\right) = \sum_{z=1}^{z=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{z^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{z}\right)\tau_{rk,1,\tau}(z)$$

und daher hat man die Relation

$$\sum_{z=1}^{z=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{z^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{z}\right)\tau'_{rk,1,\tau}(z) = \sum_d \mu(d)\, T'_{k,\tau,r}\left(\left[\frac{n}{d}\right]\right).$$

Ersetzt man endlich in 5) n durch $\left[\frac{n}{y}\right]$, multiplicirt mit $\mu(y)$ und summirt von $y=1$ bis $y=n$ so ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{x,y=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right],\, y=n} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{x^r y}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)\mu(y) = \sum_d \mu(d)\left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{d}\right]} \left[\frac{n}{yd}\right]\mu(y)\right)$$

oder, da

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{d}\right]} \left[\frac{n}{yd}\right]\mu(y) = 1, \qquad \sum_d \mu(d) = \begin{cases} 0 & (m>1) \\ 1 & (m=1) \end{cases}$$

$$\sum_{x,y=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right],\, y=n} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{x^r y}\right]\right)\left(\frac{m^2}{x}\right)\mu(y) = \sum_{z=1}^{z=n} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{z}\right]\right)\left(\sum_{d_r}\left(\frac{m^2}{\sqrt[r]{\frac{z}{d_r}}}\right)\mu(d_r)\right)$$

und $\sum_{d_r}\left(\frac{m^2}{\sqrt[r]{\frac{z}{d_r}}}\right)\mu(d_r)$ gleich der Differenz $\alpha'_r(z)$ aus der Anzahl derjenigen Theiler von z ist, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ theilerfremde $r$te Potenzen sind und deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von nur verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt ist, und der Anzahl der übrigen Theiler derselben Beschaffenheit, deren complementärer Divisor keinen quadratischen Factor enthält,

$$\sum_{z=1}^{z=n} \mathfrak{Q}'_r\left(\left[\frac{n}{z}\right]\right)\alpha'_r(z) = \begin{cases} 1 & (m=1) \\ 0 & (m>1) \end{cases}.$$

Setzt man in 4) ferner

$$f(y) = \lambda_\rho(y)$$

so wird $F_3(n)$ gleich der Differenz $B(n,r,\rho)$ aus der Anzahl derjenigen Theiler der ganzen Zahl n, welche $r$te Potenzen von solchen zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ theilerfremden ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung durch Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $k\rho$ und $k\rho+1$ auftreten, und zwar die letzteren in gerader Anzahl, über die Anzahl der übrigen Theiler derselben Beschaffenheit, bei denen die Anzahl der Exponenten von der Form $k\rho+1$ ungerade ist, und es entsteht daher die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=n} B(x,r,\rho) = n \sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\lambda_\rho(y)}{y^r} + \Delta_4$$

wo

$$\Delta_4 = -\left\{ n \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\lambda_\rho(y)}{y^r} + \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) \lambda_\rho(y) \right\}$$

ist. Da nun

$$\left| \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) \lambda_\rho(y) \right| < n^{\frac{1}{r}}$$

ist, so hat man auch

$$\sum_{x=1}^{x=n} B(x,r,\rho) = \frac{n\zeta(r\rho)}{\zeta(r)} \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{r\rho}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{r}}} + A_6 n^{\frac{1}{r}}$$

wo A_6 für alle Werthe von n unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze bleibt.

Diese Gleichung liefert die Theoreme:

Unter denjenigen Theilern einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen von solchen, zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremden ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $k\rho$ und $k\rho+1$ auftreten, gibt es im Mittel um $\frac{\zeta(r\rho)}{\zeta(r)} \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{r\rho}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{r}}}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der letzteren Exponenten gerade ist, als solche, bei denen diese Anzahl ungerade ist.

Unter denjenigen Theilern einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen von solchen, zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremden ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $2k\rho$ und $2k\rho+1$ auftreten, gibt es im Mittel um $\prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{2r\rho}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{r}}} \frac{(2\pi)^{2r\rho} B_{r\rho}}{2\Gamma(2r\rho+1)\zeta(r)}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Form gerade ist, als solche, bei denen diese Anzahl ungerade ist.

Unter denjenigen Theilern einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen von solchen zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremden ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $k\rho$ und $k\rho+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{2r\rho}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{2r}}} \frac{(2\pi)^{2r(\rho-1)}\Gamma(2r+1) B_{r\rho}}{\Gamma(2r\rho+1) B_r}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten von der Form $k\rho+1$ gerade ist, als solche, bei denen diese Anzahl ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl, welche Quadrate von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $3k$ und $3k+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{\pi^4}{120}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der zuletzt genannten Exponenten gerade ist, also solche, bei denen diese Anzahl ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl, welche Quadrate von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $4k$ und $4k+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{17\pi^6}{20160}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der zweiten Exponenten gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl, welche Quadrate von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $5k$ und $5k+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{341\pi^8}{3991680}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Art gerade, als solche, bei denen diese Anzahl ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl, welche zweite Potenzen von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung durch Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $6k$ und $6k+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{188643\pi^{10}}{21794572800}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Form gerade, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

γ) Es sei ferner

$$f_1(x) = \mu_\tau(x)$$

dann ist

$$F_1\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{y^r}\right]} \mu_\tau(x) = M_\tau\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right)$$

und es stellt $F(n)$ die Summe $F_4(n)$ derjenigen Werthe der Function $f(x)$ dar, welche dieselbe annimmt, wenn ihr Argument die r^{ten} Wurzeln aus allen jenen Theilern der ganzen Zahl n durchläuft, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ theilerfremde r^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, der durch keine τ^{te} Potenz theilbar ist. Man hat daher die Relation

5) $$\sum_{x=1}^{x=n} F_4(x) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} M_\tau\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right)\left(\frac{m^2}{y}\right) f(y)$$

oder, da wie ich gezeigt habe[1])

$$M_\tau(\nu) = \frac{\nu}{\zeta(\tau)} + \frac{5\varepsilon_\nu}{2}\nu^{\frac{1}{\tau}} \qquad (|\varepsilon_\nu| < 1)$$

ist

$$\sum_{x=1}^{x=n} F_4(x) = \frac{1}{\zeta(\tau)} \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{y^r}\right]\left(\frac{m^2}{y}\right) f(y) + \frac{5}{2} \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) f(y) \left[\frac{n}{y^r}\right]^{\frac{1}{r}} \qquad (|\varepsilon_y| < 1).$$

---

[1]) „Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie". Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 49. Band.

Man hat daher die Relation

$$7)\qquad \sum_{x=1}^{x=n} F_4(x) = \frac{n}{\zeta(\tau)} \sum_{y=1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{f(y)}{y^r} + \Delta_5$$

wo

$$\Delta_5 = \left\{ -\frac{n}{\zeta(\tau)} \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{f(y)}{y^r} + \frac{5}{2} \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) f(y) \left[\frac{n}{y^r}\right]^{\frac{1}{r}} \right\}$$

ist.

Setzt man in dieser Gleichung speciell

$$r = \tau\rho,\ f(y) = 1;\quad \tau = r\rho,\ f(y) = \mu(y)$$

so wird $F_4(n)$ bezw. gleich: der Anzahl $\alpha'_{\rho,\tau}(n)$ derjenigen Theiler der ganzen Zahl n, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $(\tau\rho)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine τ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist,

der Differenz $\chi'_{\rho,r}(n)$ aus der Anzahl derjenigen unter den Theilern der ganzen Zahl n mit durch keine $(\rho r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisoren, welche r^{te} Potenzen von Producten einer geraden Anzahl untereinander und von $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ verschiedener Primzahlen sind, über die Anzahl der übrigen zu $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremden Theiler mit complementärem Divisor von derselben Beschaffenheit, welche r^{te} Potenzen von ganzen Zahlen ohne quadratischen Factor sind,

und man hat daher die Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{x=n} \alpha'_{\rho,\tau}(x) = \frac{n\,\zeta(\tau\rho)}{\zeta(\tau)} \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{\rho\tau}}\right) + \Delta'_5$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \chi'_{\rho,r}(x) = \frac{n}{\zeta(r\rho)\,\zeta(r) \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{r}}\right)} + \Delta''_5$$

$$\Delta'_5 = \left\{ -\frac{n}{\zeta(\tau)} \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{1}{y^r} + \frac{5}{2} \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) \left[\frac{n}{y^r}\right]^{\frac{1}{r}} \right\}$$

$$\Delta''_5 = \left\{ -\frac{n}{\zeta(r\rho)} \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\mu(y)}{y^r} + \frac{5}{2} \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) \left[\frac{n}{y^r}\right]^{\frac{1}{r}} \right\}$$

Nun ist aber

$$\left| \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) \left[\frac{n}{y^r}\right]^{\frac{1}{r}} \right| \quad \text{und} \quad \left| \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \varepsilon_y \left(\frac{m^2}{y}\right) \left[\frac{n}{y^r}\right]^{\frac{1}{r}} \right|$$

kleiner als

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{y^r}\right]^{\frac{1}{r}} < n^{\frac{1}{r}} \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \frac{1}{y} < n^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\log n}{r} + C + \frac{1}{\sqrt[r]{n}}\right)$$

und daher lassen sich diese zwei Gleichungen auch in folgender Form schreiben

$$\sum_{x=1}^{x=n} \alpha'_{\rho,\tau}(x) = \frac{n\,\zeta(\tau\rho)}{\zeta(\tau)} \prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{\rho\tau}}\right) + A_6\, n^{\frac{1}{r}} \log n + B_6\, n^{\frac{1}{r}} + C_6$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \chi'_{\rho,\tau}(x) = \frac{n}{\zeta(r)\,\zeta(r\rho)\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{r}}\right)} + A_7\, n^{\frac{1}{r}} \log n + B_7\, n^{\frac{1}{r}} + C_7$$

wo A_6, A_7, B_6, B_7, C_6, C_7 für alle Werthe von n unterhalb einer angebbaren endlichen Zahl bleiben.

Diese Formeln liefern die Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $(\rho\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, der durch keine τ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, ist im Mittel gleich $\frac{\zeta(\rho\tau)}{\zeta(\tau)}\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{\rho\tau}}\right)$.

Die Anzahl derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $(2\rho\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, welcher durch keine τ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, ist im Mittel gleich $\frac{(2\pi)^{2\rho\tau} B_{\rho\tau}}{2\,\Gamma(2\rho\tau+1)\,\zeta(\tau)}\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{2\rho\tau}}\right)$.

Die Anzahl derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde $(2\rho\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, der durch keine $(2\tau)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist, ist im Mittel gleich $\frac{(2\pi)^{2\tau(\rho-1)}\,\Gamma(2\tau+1)\,B_{\rho\tau}}{\Gamma(2\rho\tau+1)\,B_\rho}\prod_{\lambda=1}^{\sigma}\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{2\rho\tau}}\right)$.

Die Anzahl derjenigen zu einer Primzahl p theilerfremden Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(\rho\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, welcher durch keine τ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, verhält sich zur Anzahl der übrigen Theiler derselben Beschaffenheit, wie $p^{\rho\tau}-1$ zu 1.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel $\frac{\pi^2}{16}$ ungerade und $\frac{\pi^2}{240}$ gerade Theiler, welche vierte Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel $\frac{\pi^4}{160}$ ungerade und $\frac{\pi^4}{10080}$ gerade Theiler, welche sechste Potenzen sind und einen durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{17\pi^6}{26880}$ ungerade und $\frac{\pi^6}{403200}$ gerade Theiler, welche achte Potenzen sind und einen durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel $\frac{341\pi^8}{5322240}$ ungerade und $\frac{\pi^8}{15966720}$ gerade Theiler, welche zehnte Potenzen sind und einen durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{62881\pi^{10}}{9686476800}$ ungerade und $\frac{691\pi^{10}}{435891456000}$ gerade Theiler, welche zwölfte Potenzen sind und einen durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel um $\dfrac{1}{\zeta(r)\zeta(r\rho)\prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1-\dfrac{1}{p_{\lambda}^{r}}\right)}$ solche Theiler mit durch keine $(r\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbarem complementärem Divisor, welche r^{te} Potenzen eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander und von den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ verschiedenen Primzahlen sind, mehr, als solche, welche r^{te} Potenzen eines Productes einer ungeraden Anzahl von unter einander und von $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ verschiedenen Primzahlen sind.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel um $\dfrac{2\Gamma(2r\rho+1)}{(2\pi)^{2r\rho} B_{r\rho}\,\zeta(r)\prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1-\dfrac{1}{p_{\lambda}^{r}}\right)}$ solche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde Divisoren mit durch keine $(2r\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbarem complementärem Divisor, welche r^{te} Potenzen eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander verschiedenen Primzahlen sind, mehr, als solche, welche r^{te} Potenzen eines Produktes einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen sind.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel um $\dfrac{4\Gamma(2r\rho+1)\Gamma(2r+1)}{(2\pi)^{2r(\rho+1)} B_r B_{r\rho}\prod\limits_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1-\dfrac{1}{p_{\lambda}^{2r}}\right)}$ solche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde Divisoren mit durch keine $(2r\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbarem complementärem Divisor, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander verschiedenen Primzahlen sind, mehr, als solche, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen eines Productes einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen sind.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel um $\dfrac{48}{\pi^4}$ solche ungerade Divisoren mit durch kein Quadrat (ausser 1) theilbarem complementärem Divisor, welche Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander verschiedenen Primzahlen sind, mehr, als solche, welche Quadrate eines Productes einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen sind.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel um $\dfrac{720}{\pi^6}$ solche ungerade Divisoren mit durch kein Biquadrat (ausser 1) theilbarem complementärem Divisor, welche Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander verschiedenen Primzahlen sind, mehr, als solche, welche Quadrate eines Productes einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen sind.

Jede ganze Zahl besitzt im Mittel um $\dfrac{20160}{\pi^{12}}$ solche ungerade Divisoren mit durch keine achte Potenz (ausser 1) theilbarem complementärem Divisor, welche Biquadrate eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander verschiedenen Primzahlen sind. mehr, als solche, welche Biquadrate eines Productes einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen sind.

δ) Es soll nun zunächst die Anzahl $\varphi_m(n)$ jener ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots n$ ermittelt werden, welche sowohl zu n als auch zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremd sind. Die Primfactoren von n mögen $q_1, q_2, \ldots, q_r$ sein, von denen selbstverständlich einige oder alle unter den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ enthalten sein können. Von den ganzen Zahlen des genannten Intervalles besitzen die folgenden den Primtheiler q_1:

$$1.q_1,\; 2.q_1,\; 3.q_1, \ldots, \frac{n}{q_1}.q_1.$$

Unter diesen ist, wenn q_1 zu den Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ gehört, selbstverständlich keine zu m theilerfremde Zahl enthalten, ist aber q_1 von sämmtlichen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ verschieden, so ist die Anzahl der zu m theilerfremden Vielfachen von q_1 des Intervalles $1\ldots n$ gleich der Anzahl der zu m theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots\dfrac{n}{q_1}$, also ist diese Anzahl allgemein gleich

$$\left(\frac{m^2}{q_1}\right)\sum_{d}\left[\frac{n}{q_1 d}\right]\mu(d),$$

und daher die Anzahl der zu q_1 und m theilerfremden ganzen Zahlen des betrachteten Intervalles gleich

$$\sum_{d} \left\{\left[\frac{n}{d}\right] - \left(\frac{m^2}{q_1}\right)\left[\frac{n}{q_1 d}\right]\right\} \mu(d).$$

Von diesen Zahlen sind durch die Primzahl q_2

$$\left(\frac{m^2}{q_2}\right) \sum_{d} \left\{\left[\frac{n}{q_2 d}\right] - \left(\frac{m^2}{q_1}\right)\left[\frac{n}{q_1 q_2 d}\right]\right\} \mu(d)$$

theilbar und daher ist die Anzahl der zu $mq_1 q_2$ theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ gleich

$$\sum_{d} \left\{\left[\frac{n}{d}\right] - \left(\frac{m^2}{q_1}\right)\left[\frac{n}{q_1 d}\right] - \left(\frac{m^2}{q_2}\right)\left[\frac{n}{q_2 d}\right] + \left(\frac{m^2}{q_1 q_2}\right)\left[\frac{n}{q_1 q_2 d}\right]\right\} \mu(d).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schliesslich die Gleichung

$$\bar{\varphi}_m(n) = \sum_{d,\delta} \left[\frac{n}{d\delta}\right] \mu(d)\, \mu(\delta) \left(\frac{m^2}{\delta}\right),$$

wo die Summation bezüglich d über alle Divisoren von m, bezüglich δ aber über alle Divisoren von n zu erstrecken ist.

Setzt man nun in den Gleichungen 1) und 2)

$$f_1(x) = \bar{\varphi}(x, m)$$

$$f(x) = \mu(x)$$

so erhält man die Relation

$$8) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \bar{\varphi}_m(x) = \sum_{y=1}^{y=n} \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) \left(\sum_{z=1}^{z=\left[\frac{n}{y}\right]} \bar{\varphi}(z, m)\right)$$

oder, weil bekanntlich

$$\sum_{z=1}^{z=\nu} \bar{\varphi}(z, m) = \frac{6\nu^2}{\pi^2} + A_\nu \nu \log \nu + B_\nu \nu$$

ist,

$$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\varphi}_m(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{y=1}^{y=n} \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) \left[\frac{n}{y}\right]^2 + \sum_{y=1}^{y=n} \left\{A_y \left[\frac{n}{y}\right] \log\left[\frac{n}{y}\right] + B_y \left[\frac{n}{y}\right]\right\} \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y).$$

wo $|A_y|$ und $|B_y|$ für alle Werthe von y unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze A bleiben.

Berücksichtigt man, dass

$$\left|\sum_{y=1}^{y=n} \left\{A_y \left[\frac{n}{y}\right] \log\left[\frac{n}{y}\right] + B_y \left[\frac{n}{y}\right]\right\} \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y)\right| < An \left\{\sum_{y=1}^{y=n} \frac{\log n + \log y + 1}{y}\right\} < An \left\{(\log n + 1)\left(\log n + C + \frac{1}{n}\right) + 2\sqrt{n}\right\}$$

$$\left|\sum_{y=n+1}^{y=\infty} \left(\frac{m^2}{y}\right) \frac{\mu(y)}{y^2}\right| < \frac{\pi^2}{6n}$$

ist, so erhält man die Formel

$$\sum_{x=1}^{x=n} \overline{\varphi}_m(x) = \frac{36n^2}{\pi^4 \prod_1^\sigma{}_\lambda \left(1-\frac{1}{p_\lambda^2}\right)} + A_8 n^{\frac{3}{2}} + A_9 n (\log n)^2 + A_{10} n \log n + A_{11} n$$

wo A_8, A_9, A_{10}, A_{11} für alle Werthe von n endlich bleiben.

Aus dieser Gleichung folgt das Theorem:

Ist:

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

so gibt es für jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta \ldots n+\eta$ im Mittel $\frac{72}{\pi^4 \prod_1^\sigma{}_\lambda \left(1-\frac{1}{p_\lambda^2}\right)} n$ zu ihr und zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ theilerfremde, sie nicht übertreffende ganze Zahlen.

Die Gleichung 8) lässt sich auch noch in folgender Weise ableiten.

Die Function $\overline{\varphi}_m(n)$ genügt, wie man sofort sieht, der Relation

$$\sum_\delta \left(\frac{m^2}{\delta}\right) \overline{\varphi}_m\left(\frac{n}{\delta}\right) = \overline{\varphi}(n, m)$$

welche eine Verallgemeinerung der bekannten Gaussischen Gleichung für die Anzahl derjenigen n nicht übertreffenden Zahlen ist, welche zu dieser Zahl theilerfremd sind. Aus dieser Relation folgt

$$\sum_{x=1}^{x=n} \overline{\varphi}\left(\left[\frac{n}{x}\right], m\right) \overline{\varphi}_m(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \overline{\varphi}(x, m) = \Phi(n, m).$$

Schreibt man in dieser Formel für n: $\left[\frac{n}{y}\right]$, multiplicirt sodann mit $\left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y)$ und summirt bezüglich y von 1 bis n, so erhält man

$$9) \qquad \sum_{y=1}^{y=n} \overline{\Phi}\left(\left[\frac{n}{y}\right], m\right) \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) = \sum_{x, y=1}^{x, y=n} \overline{\varphi}\left(\left[\frac{n}{xy}\right], m\right) \overline{\varphi}_m(x) \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y).$$

Nun ist

$$\sum_{y=1}^{y=r} \overline{\varphi}\left(\left[\frac{r}{y}\right], m\right) \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) = \sum_d \mu(d) \left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{r}{d}\right]} \left[\frac{r}{yd}\right] \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) \right)$$

und

$$\sum_{y=1}^{y=s} \left[\frac{s}{y}\right] \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) = \sum_{y, z=1}^{y, z=s} \varepsilon\left(\frac{s}{zy}\right) \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y)$$

$$= \sum_{z=1}^{z=s} \varepsilon\left(\frac{s}{z}\right) \left(\sum_\delta \left(\frac{m^2}{\delta}\right) \mu(\delta) \right)$$

oder, da, wie man sofort sieht,

$$\sum_{\delta} \left(\frac{m^2}{\delta}\right) \mu(\delta)$$

den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem sämmtliche Primfactoren von z zu den Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ gehören oder nicht

$$\sum_{y=1}^{y=s} \left[\frac{s}{y}\right] \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) = \mathfrak{A}_1(s)$$

wo $\mathfrak{A}_1(s)$ die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots s$ bedeutet, welche nur aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ zusammengesetzt sind, und daher hat man die Gleichung

$$\sum_{y=1}^{y=r} \overline{\varphi}\left(\left[\frac{r}{y}\right], m\right) \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) = \sum_{d} \mathfrak{A}_1\left(\left[\frac{r}{d}\right]\right) \mu(d).$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe stellt offenbar die Anzahl aller Zahlen des Intervalles $1\ldots r$ dar, welche durch keine Primzahl theilbar sind, ist also gleich 1 und demnach ist

$$\sum_{y=1}^{y=r} \overline{\varphi}\left(\left[\frac{r}{y}\right], m\right) \left(\frac{m^2}{y}\right) \mu(y) = 1$$

welche Relation eine Verallgemeinerung der bekannten Gleichung

$$\sum_{y=1}^{y=r} \left[\frac{r}{y}\right] \mu(y) = 1$$

angibt. Mit Hilfe der eben abgeleiteten Relation kann man nun sofort die Gleichung 9) in 8) überführen.

ε) Für die durch die Gleichung

$$\psi_{k,\mu}^{(r)}(D, n) = n^k \sum_{\delta} \left(\frac{D}{\delta}\right) \delta^{\mu-k} \mu_r\left(\frac{n}{\delta}\right)$$

definirte Function bestehen die Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi_{k,\mu}^{(r)}(D, x)}{x^k} = \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D}{x}\right) x^{\mu-k} \left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} \mu_r(y) \right)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D^2}{x}\right) \frac{\psi_{k,\mu}^{(r)}(D, x)}{x^k} = \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D}{x}\right) x^{\mu-k} \left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} \left(\frac{D^2}{y}\right) \mu_r(y) \right)$$

oder nach den oben angegebenen Relationen

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi_{k,\mu}^{(r)}(D, x)}{x^k} = \frac{1}{\zeta(r)} \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D}{x}\right) x^{\mu-k} \left[\frac{n}{x}\right] + \frac{5}{2} \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon_x \left(\frac{D}{x}\right) x^{\mu-k} \left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}} = \frac{n}{\zeta(r)} \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D}{x}\right) x^{\mu-k-1} + \Delta_6 \qquad (|\varepsilon_x| < 1)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,\mu}(D,x)}{x^k}\left(\frac{D}{x}\right) = \frac{1}{\zeta(r)}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^r}}\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-k}\left[\frac{n}{x}\right]+\sum_{x=1}^{x=n}A_x\left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-k}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \frac{n}{\zeta(r)}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^r}}\sum_{n=1}^{x=n}\left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-k-1}+\Delta_7$$

wo

$$\Delta_6 = -\frac{1}{\zeta(r)}\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon'_x\left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-k}+\frac{5}{2}\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon_x\left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-k}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}} \qquad (0\leqq\varepsilon'_x<1)$$

$$\Delta_7 = -\frac{1}{\zeta(r)}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^r}}\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon'_r\left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-k}+\sum_{x=1}^{x=n}A_x\left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-k}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}}$$

ist.

Es sei nun D kein vollständiges Quadrat und congruent 0 oder 1 nach dem Modul 4 und

$$\mu-k<0,$$

alsdann ergeben sich, da bekanntlich nach einem allgemeinen Dirichlet'schen Satze

$$\left|\sum_{x=n+1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{k-\mu+1}}\right| < \frac{12\,D}{n^{k-\mu+1}}$$

und wie man sofort sieht

$$\left.\begin{aligned}\left|\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon_x\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{k-\mu}}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}}\right| &< n^{\frac{1}{r}}\sum_{x=1}^{x=n}\frac{1}{x^{k-\mu+\frac{1}{r}}} < \frac{n^{\mu-k+1}}{1-k+\mu-\frac{1}{r}}\\ \left|\sum_{x=1}^{x=n}A_x\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{k-\mu}}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}}\right| &< An^{\frac{1}{r}}\sum_{x=1}^{x=n}\frac{1}{x^{k-\mu+\frac{1}{r}}} < \frac{An^{\mu-k+1}}{1-k+\mu-\frac{1}{r}}\end{aligned}\right\} \qquad \left(k-\mu+\frac{1}{r}<1\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\left|\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon_x\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{k-\mu}}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}}\right| &< n^{\frac{1}{r}}\left(\log n+C+\frac{1}{n}\right)\\ \left|\sum_{x=1}^{x=n}A_x\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{k-\mu}}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}}\right| &< An^{\frac{1}{r}}\left(\log n+C+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \left(k-\mu+\frac{1}{r}=1\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\left|\sum_{x=1}^{x=n}\varepsilon_x\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{k-\mu}}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}}\right| &< \zeta\left(k-\mu+\frac{1}{r}\right)n^{\frac{1}{r}}\\ \left|\sum_{x=1}^{x=n}A_x\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{k-\mu}}\left[\frac{n}{x}\right]^{\frac{1}{r}}\right| &< A\zeta\left(k-\mu+\frac{1}{r}\right)n^{\frac{1}{r}}\end{aligned}\right\} \qquad \left(k-\mu+\frac{1}{r}>1\right)$$

ist, aus diesen Gleichungen die Relationen

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,\mu}(D,x)}{x^k} = \frac{n}{\zeta(r)} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{D}{x}\right) \frac{1}{x^{k-\mu+1}} + \Delta'_6$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D^2}{x}\right) \frac{\psi^{(r)}_{k,\mu}(D,x)}{x^k} = \frac{n}{\zeta(r)} \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{D}{x}\right) \frac{1}{x^{k-\mu+1}} + \Delta'_7$$

wo, den drei angeführten Fällen entsprechend Δ'_6 und Δ'_7 die Werthe $\alpha_1\, n^{\mu-k+1}$, $\alpha_2\, n^{\frac{1}{r}} \left(\log n + C + \frac{1}{n}\right)$, $\alpha_3\, n^{\frac{1}{r}}$ bez. $\beta_1\, n^{\mu-k+1}$, $\beta_2\, n^{\frac{1}{r}} \left(\log n + C + \frac{1}{n}\right)$, $\beta_3 n^{\frac{1}{r}}$ besitzen und die Grössen α und β für alle Werthe von n endlich bleiben.

Ist nun

$$D = \Delta\, Q^2$$

wo Δ eine Fundamentaldiscriminante ist und sind $q_1, q_2, \ldots, q_\tau$ die sämmtlichen Primfactoren von Q, bezeichnet man ferner die Bernoullische Function m^{ter} Ordnung mit $\varphi(z, m)$, so ergeben sich aus diesen Gleichungen nach Theoremen, die man Herrn A. Berger[1]) verdankt, die folgenden Relationen:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,k-2s}(D,x)}{x^k} = \frac{(-1)^{s+1}\,(2\pi)^{2s+1}\, n}{2\Pi(2s+1)\,|\sqrt{-\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{1}^{\tau}{}_{\lambda} \left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q_\lambda^{2s+1}}\right) \sum_{h=1}^{h=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2s+1\right) + \Delta'_6 \qquad (\Delta<0)$$

$$= \frac{(-1)^{s+1}\,(2\pi)^{2s+1}}{\Pi(2s+1)\,|\sqrt{-\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{1}^{\tau}{}_{\lambda} \left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q_\lambda^{2s+1}}\right) \sum_{h=1}^{h=\left[\frac{-\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2s+1\right) + \Delta'_6$$

$$\sum_{n=1}^{x=n} \left(\frac{D^2}{x}\right) \frac{\psi^{(r)}_{k,k-2s}(D,x)}{x^k} =$$

$$= \frac{(-1)^{s+1}\,(2\pi)^{2s+1}\, n}{2\Pi(2s+1)\,|\sqrt{-\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{1}^{\tau}{}_{\mu} \left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\mu}\right)\frac{1}{q_\mu^{2s+1}}\right) \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}} \sum_{h=1}^{h=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2s+1\right) + \Delta'_7 \qquad (\Delta<0)$$

$$= \frac{(-1)^{s+1}\,(2\pi)^{2s+1}\, n}{\Pi(2s+1)\,|\sqrt{-\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{1}^{\tau}{}_{\mu} \left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\mu}\right)\frac{1}{q_\mu^{2s+1}}\right) \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^r}} \sum_{h=1}^{h=\left[\frac{-\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2s+1\right) + \Delta'_7$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,k-2s-1}(D,x)}{x^k} = \frac{(-1)^{s}\,(2\pi)^{2s+2}\, n}{2\Pi(2s+2)\,|\sqrt{\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{1}^{\tau}{}_{\mu} \left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\mu}\right)\frac{1}{q_\mu^{2s+2}}\right) \sum_{h=1}^{h=\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2s+2\right) + \Delta''_6 \qquad (\Delta>0)$$

$$= \frac{(-1)^{s}\,(2\pi)^{2s+2}\, n}{\Pi(2s+2)\,|\sqrt{\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{1}^{\tau}{}_{\mu} \left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\mu}\right)\frac{1}{q_\mu^{2s+2}}\right) \sum_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2s+2\right) + \Delta'_6$$

[1]) „Sur une sommation de quelques séries." Nova Acta regiae societatis scientiarum Upsalensis. Seriei tertiae. Vol. XII. Fasc. I. 1884

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D^2}{x}\right) \frac{\psi^{(r)}_{k,k-2s-1}(D,x)}{x^k} =$$

$$= \frac{(-1)^s (2\pi)^{2s+2}\, n}{2\Pi(2s+2)\,|\sqrt{\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{\mu=1}^{\tau}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\mu}\right)\frac{1}{q_\mu^{2s+2}}\right) \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^r}} \sum_{h=1}^{h=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2s+2\right)+\Delta'_6 \qquad (\Delta > 0)$$

$$= \frac{(-1)^s (2\pi)^{2s+2}\, n}{\Pi(2s+2)\,|\sqrt{\Delta}|\,\zeta(r)} \prod_{\mu=1}^{\tau}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\mu}\right)\frac{1}{q_\mu^{2s+2}}\right) \prod_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^r}} \sum_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2s+2\right)+\Delta'_7$$

Von den speciellen Fällen derselben mögen die folgenden angeführt werden:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,k-2}(-7,x)}{x^k} = \frac{32\pi^3 n}{343\sqrt{7}\,\zeta(r)} + \Delta'_6$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{49}{x}\right)\frac{\psi^{(r)}_{k,k-2}(-7,x)}{x^k} = \frac{192\pi^3}{(7^r-1)\,\zeta(r)}\, 7^{r-\frac{9}{2}}\, n + \Delta'_7$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,k-2}(-11,x)}{x^k} = \frac{12\pi^3 n}{121\sqrt{11}\,\zeta(r)} + \Delta'_6$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{121}{x}\right)\frac{\psi^{(r)}(-11,x)}{x^k} = \frac{120\pi^3}{(11^r-1)\,\zeta(r)}\, 11^{r-\frac{7}{2}}\, n + \Delta'_7$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,k-3}(5,x)}{x^k} = \frac{8\pi^4 n}{375\sqrt{5}\,\zeta(r)} + \Delta_6$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{25}{x}\right)\frac{\psi^{(r)}_{k,k-3}(5,x)}{x^k} = \frac{32\pi^4}{3(5^r-1)\,\zeta(r)}\, 5^{r-\frac{9}{2}}\, n + \Delta'_7$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{\psi^{(r)}_{k,k-4}(-3,x)}{x^k} = \frac{4\pi^5 n}{729\sqrt{3}\,\zeta(r)} + \Delta'_6$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{9}{x}\right)\frac{\psi^{(r)}_{k,k-4}(-3,x)}{x^k} = \frac{8\pi^5}{(3^r-1)\,\zeta(r)}\, 3^{r-\frac{15}{2}}\, n + \Delta'_7 .$$

Um den Fall $k = \mu$ zu erledigen, beachte man, dass aus der Definitionsgleichung der Functionen $\psi^{(r)}_{k,\mu}(D,x)$ folgt:

10) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi^{(r)}_{k,\mu}(D,n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(\frac{D}{n}\right)}{n^{s-\mu}} \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(rs-rk)}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n^{r(s-k)}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi_{\mu,k}(D,n)}{n^s}$$

wo

$$\varphi_{\mu,k}(D,n)=n^k\sum_{d}\left(\frac{D}{d}\right)d^{\mu-k}$$

ist, und dass demnach

$$\psi^{(r)}_{k,\mu}(D,n)=\sum_{d_r}\varphi_{\mu,k}(D,d_r)\,\mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right)\left(\frac{n}{d_r}\right)^k$$

ist.

Da nun $\dfrac{\psi^{(r)}_{\mu,\mu}(D,x)}{x^{\mu}}=\psi^{(r)}_{0,0}(D,x)$ ist, so folgen aus der eben aufgestellten Relation die Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi^{(r)}_{0,0}(D,x)=\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]}\mu(x)\left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x^r}\right]}\varphi_{0,0}(D,y)\right)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi^{(r)}_{0,0}(D,x)\left(\frac{D^2}{x}\right)=\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]}\mu(x)\left(\frac{D^2}{x}\right)\left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x^r}\right]}\left(\frac{D^2}{y}\right)\varphi_{0,0}(D,y)\right).$$

Nun ist aber, wie ich gezeigt habe[1])

$$\sum_{y=1}^{y=s}\varphi_{0,0}(D,y)=s\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x}+A_s\sqrt{s}$$

und

$$\sum_{y=1}^{y=s}\left(\frac{D^2}{y}\right)\varphi_{0,0}(D,y)=\sum_{d}\mu(d)\left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{s}{d}\right]}\left[\frac{s}{yd}\right]\left(\frac{D}{y}\right)\right)$$

$$=\sum_{x=1}^{y=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x}\sum_{d}\left[\frac{s}{d}\right]\mu(d)+A'_s\sum_{d}\mu(d)\sqrt{\left[\frac{s}{d}\right]}$$

$$=s\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x}+B_s\sqrt{s}$$

und daher lassen sich diese Formeln auch in folgender Form schreiben

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi^{(r)}_{0,0}(D,x)=\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x}\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]}\mu(y)\left[\frac{n}{y^r}\right]+\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]}A_y\,\mu(y)\sqrt{\left[\frac{n}{y^r}\right]}$$

$$\sum_{x=1}^{x=n}\psi^{(r)}_{0,0}(D,x)\left(\frac{D^2}{x}\right)=\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x}\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]}\mu(y)\left(\frac{D^2}{y}\right)\left[\frac{n}{y^r}\right]+\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]}B_y\,\mu(y)\sqrt{\left[\frac{n}{y^r}\right]}$$

---

[1]) „Über die binären quadratischen Formen." Sitzungsberichte der k. Akad. der Wissenschaften, mathematisch-naturw. Classe, 96. Band, II. Abth., S. 476—488.

oder

$$\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{0,0}^{(r)}(D,x) = \frac{n}{\zeta(r)} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x} + \Delta_9$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{D^2}{x}\right)\psi_{0,0}^{(r)}(D,x) = \frac{n}{\zeta(r)} \prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^r}} \sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x} + \Delta_{10}$$

wo

$$\Delta_9 = -\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x}\left[\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mu(y)\,\varepsilon'_y + n \sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty} \frac{\mu(y)}{y^r}\right] + \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} A_y\,\mu(y)\sqrt{\left[\frac{n}{y^r}\right]} \qquad (0 \leqq \varepsilon'_y < 1)$$

$$\Delta_{10} = -\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x}\left[\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \mu(y)\,\varepsilon'_y\left(\frac{D^2}{y}\right) + n\sum_{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]+1}^{y=\infty}\frac{\mu(y)}{y^r}\left(\frac{D^2}{y}\right)\right] + \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[r]{n}\right]} B_y\,\mu(y)\sqrt{\left[\frac{n}{y^r}\right]}$$

und daher nach den früheren Erörterungen

$$|\Delta_9| < \gamma\, n^{\frac{1}{r}} \quad (r>2) \quad \text{und} \quad |\Delta_9| < \gamma_1\sqrt{n}\left(\frac{\log n}{2} + C + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (r=2)$$

$$|\Delta_{10}| < \delta\, n^{\frac{1}{r}} \quad (r>2) \quad \text{und} \quad |\Delta_{10}| < \delta_1\sqrt{n}\left(\frac{\log n}{2} + C + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (r=2)$$

ist. Für ein gerades r hat man

$$\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{0,0}^{(2r)}(D,x) = \frac{2\,\Gamma(2r+1)\,n}{(2\pi)^{2r}B_r} \sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x} + \Delta'_9$$

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{D^2}{x}\right)\psi_{0,0}^{(2r)}(D,x) = \frac{2\,\Gamma(2r+1)\,n}{(2\pi)^{2r}B_r}\prod_{1}^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{2r}}}\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x} + \Delta'_{10}.$$

Beachtet man den bekannten Zusammenhang zwischen $\psi_{0,0}^{(2)}(D,n)$ und der Anzahl der Lösungen der Congruenz zweiten Grades

$$x^2 \equiv D \pmod{4n}$$

wo, falls D keine Fundamentaldiscriminante ist, D und n als theilerfremd vorausgesetzt werden, so liefern diese Gleichungen für $r=1$ die von Herrn A. Berger am zuerst angeführten Orte auf anderem Wege abgeleiteten Gleichungen für diese zahlentheoretische Function. Die hier mitgetheilte Form der Herleitung habe ich im Jahre 1883 in meinen Vorlesungen über Zahlentheorie an der Innsbrucker Universität angewendet, um den Zusammenhang, der zwischen der Anzahl der Lösungen der erwähnten Congruenz und der Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch das System der quadratischen Formen der Determinante D besteht auch bei dieser Ermittlung hervortreten zu lassen.

Man kann auch umgekehrt aus dem asymptotischen Ausdrucke der zahlentheoretischen Function $\psi_{k,\mu}^{(r)}(D,x)$ den asymptotischen Werth von $\varphi_{k,\mu}(D,x)$ ableiten.

Aus der Gleichung 10) folgt nämlich

$$\sum_{d_r} \psi^{(r)}_{k,\mu}(D, d_r) = \varphi_{\mu,k}(D, n)$$

und demnach ist

$$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi_{\mu,k}(D, x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \bar{\psi}^{(r)}_{k,\mu}\left(D, \left[\frac{n}{x^r}\right]\right) \qquad \left(\bar{\psi}^{(r)}_{k,\mu}(D, m) = \sum_{x=1}^{x=m} \psi^{(r)}_{k,\mu}(D, x)\right)$$

Nimmt man nun speciell $r=2$, $k=\mu=0$, was zulässig ist, da für diesen Fall eine von der obigen verschiedene Herleitung des asymptotischen Werthes der zahlentheoretischen Function $\psi^{(r)}_{k,\mu}(\Delta, x)$ von Herrn Berger angegeben wurde, so erhält man

$$\frac{1}{\tau}\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\Delta, x) = \sum_{x=1}^{x=n} \varphi_{0,0}(\Delta, x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x} \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x^2}\right] + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} A_x \left[\frac{n}{x^2}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= n \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x} + \Delta_{11}$$

wo

$$\Delta_{11} = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x} \left\{ \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \varepsilon'_x + n \sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2} \right\} + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} A_x \left[\frac{n}{x^2}\right]^{\frac{2}{3}}$$

und demnach

$$|\Delta_{11}| < \delta\sqrt{n}$$

ist.

Für die Function $\varphi(\Delta, x)$ kann man aus Formeln, welche ich früher mitgetheilt habe [1]), leicht eine grosse Reihe von Relationen ableiten, von denen hier die folgenden angeführt werden mögen:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\Delta, x)\, \Phi_k\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right) \varphi_k(x) = \tau \sum_{x=1}^{x=n} S_k\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\left(\frac{\Delta}{x}\right) = \tau \sum_{x=1}^{x=n} x^k \left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} \left(\frac{\Delta}{y}\right)\right)$$

$$\left(\Phi(\Delta, m) = \sum_{x=1}^{x=m} \varphi(\Delta, x)\right)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\Delta, x)\, \Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right) \omega(x) = \tau \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{\Delta}{x}\right) \overline{\Psi}\left(\left[\frac{n}{x}\right]^2\right) = \tau \sum_{x=1}^{x=n} \psi(x^2) \left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} \left(\frac{\Delta}{y}\right)\right)$$

$$\left(\overline{\Psi}(m) = \sum_{x=1}^{x=m} \psi(x^2)\right)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\Delta, x)\, M_2\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu_2(x)\, \Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right) = \tau \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{\Delta}{x}\right) \Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) = \tau \sum_{x=1}^{x=n} \omega(x) \left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} \left(\frac{\Delta}{y}\right)\right)$$

[1]) „Zahlentheoretische Studien." Sitzungsberichte der k. Akad. der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe. 90. Band. II. Abth. S. 395—459.

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]^k \varphi(\Delta, x) = \sum_{x=1}^{x=n} x^k\,\Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right) = \tau\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\Psi_k\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) = \tau\sum_{x=1}^{x=n}\psi_k(x)\left(\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]}\left(\frac{\Delta}{y}\right)\right)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n}\mu(x)\,\Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n}\varphi(\Delta, x)\,\mathrm{M}(x) = \tau\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)$$

und daher

$$\left|\sum_{x=1}^{x=n}\mu(x)\,\Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right)\right| \leqq \frac{|\tau\Delta|}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{x=|k\Delta|}\mu(x)\,\Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right) = 0$$

$$\sum_{x=1}^{x=n}\lambda(x)\,\Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n}\varphi(\Delta, x)\,\Lambda\left[\frac{n}{x}\right] = \tau\sum_{x,\,y=1}^{x=[\sqrt{n}],\ y=\left[\frac{n}{x^2}\right]}\left(\frac{\Delta}{y}\right)$$

und demnach

$$\left|\sum_{x=1}^{x=n}\lambda(x)\,\Phi\left(\Delta, \left[\frac{n}{x}\right]\right)\right| \leqq \frac{\tau\,|\Delta|\sqrt{n}}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]}\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]^k\varphi(\Delta, x) = \tau\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\bar{\rho}_{k,\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right).$$

2. Ich habe unlängst[1]) gezeigt, dass sich Summen von der Form

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)}\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)f(x)$$

bez. für das Gebiet der reellen Zahlen

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\rho]{n}\right]}\left[\frac{n}{x^\rho}\right]f(x)$$

auf andere zurückführen lassen, in denen die zahlentheoretische Function $g_\tau(x)$ auftritt, welche durch die Gleichung

$$g_\tau(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_\sigma^{\alpha_\sigma}) = p_1^{\left[\frac{\alpha_1}{\tau}\right]}p_2^{\left[\frac{\alpha_2}{\tau}\right]}\ldots p_\sigma^{\left[\frac{\alpha_\sigma}{\tau}\right]}$$

definirt ist. Die a. a. O. aufgestellte allgemeine Relation, von welcher vorher meines Wissens nur sieben specielle Fälle für das reelle Gebiet von Bugajef, Cesaro und mir und eine specielle Relation für das Gebiet der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen von mir ermittelt worden ist, ist in einer anderen enthalten, welche sich nicht auf eine Zahl, sondern auf den grössten gemeinsamen Divisor von r

[1]) „Einige arithmetische Sätze". Monatshefte für Mathematik und Physik von G. v. Escherich und E. Weyr. 1. Jahrgang. 1890. S. 39—48.

(gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen des betreffenden Gebietes bezieht. Diese erweiterte Formel, welche selbstverständlich für $r=1$ in die eben erwähnte specielle Relation übergeht, will ich nun ableiten und aus ihr sodann mehrere specielle Fälle nebst einigen aus ihnen sich ergebenden Theoremen und asymptotischen Gesetzen erschliessen.

Es ist

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f(x) = \sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right);\, y_1,y_2,\dots,y_r=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(y_1x^\rho)}\right)\varepsilon\left(\frac{n}{N(y_2x^\rho)}\right)\cdots\varepsilon\left(\frac{n}{N(y_rx^\rho)}\right) f(x)$$

$$= \sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right);\, z_1,z_2,\dots,z_r=(n)}' \varepsilon\left(\frac{n}{N(z_1)}\right)\varepsilon\left(\frac{n}{N(z_2)}\right)\cdots\varepsilon\left(\frac{n}{N(z_r)}\right) f(x)$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass jedem Werthsysteme $z_1, z_2, \dots, z_r$ nur jene Zahlen x des Complexes $\left(\sqrt[\rho]{n}\right)$ zuzuordnen sind, für welche

$$N(x^\rho y_\lambda) = N(z_\lambda)$$

ist. Nach dieser Bestimmung gehören offenbar zu einem bestimmten Werthsysteme $z_1, z_2, \dots, z_r$ alle und nur jene Werthe von x, deren ρ^{te} Potenzen Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers $[z_1, z_2, \dots, z_r]$ desselben sind, und demnach ist

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f(x) = \sum_{z_1,z_2,\dots,z_r=(n)} \left(\sum_{d_\rho} f\sqrt[\rho]{\frac{[z_1,z_2,\dots,z_r]}{d_\rho}}\right)$$

wo die Summation bezüglich d_ρ über alle jene Theiler der ganzen complexen Zahl $[z_1, z_2, \dots, z_r]$ zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine ρ^{te} Potenz ist.

Existirt nun eine Function $\chi(x)$ von der Beschaffenheit, dass die über alle der Gleichung

$$N(x^\sigma y^\tau) = N(n) \qquad (\tau \geqq \sigma)$$

genügenden ganzzahligen Werthepaare x, y ausgedehnte Summe

$$\sum_{x,y} \mu(x)\chi(y)$$

den Werth $f(n)$ oder 0 hat, je nachdem n eine ρ^{te} Potenz ist oder nicht, so ist, wie ich a. a. O. bewiesen habe,

$$\sum_{d_\rho} f\left(\sqrt[\rho]{\frac{[z_1,z_2,\dots,z_r]}{d_\rho}}\right) = \begin{cases} \chi(g_\tau([z_1,z_2,\dots,z_r])) \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem sämmtliche Exponenten der die ganze Zahl $[z_1, z_2, \dots, z_r]$ zusammensetzenden Primzahlpotenzen nach dem Modul τ einer ganzen Zahl unterhalb σ congruent sind oder nicht, und daher verwandelt sich die letzte Relation in

$$\text{1)} \qquad \sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f(x) = \sum_{z_1,z_2,\dots,z_r=(n)}' \chi(g_\tau([z_1, z_2, \dots, z_r]))$$

bez. für das reelle Gebiet

$$\text{2)} \qquad \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\rho]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^r f(x) = \sum_{z_1,z_2,\dots,z_r=1}^{z_1,z_2,\dots,z_r=n}{}' \chi(g_\tau([z_1, z_2, \dots, z_r]))$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthsysteme $z_1, z_2, \ldots, z_r$ zu nehmen sind, deren grösster gemeinsamer Divisor nur solche Primzahlpotenzen enthält, deren Exponent nach dem Modul τ einer ganzen Zahl unterhalb σ congruent ist.

Wird speciell $\sigma = \tau = \rho$, dann verwandeln sich diese Relationen in

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \chi(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])) \tag{3}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\rho]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^r f(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} \chi(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])) \tag{4}$$

wo

$$\sum_d f(d) = \chi(n)$$

ist.

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden angeführt werden:

$$\sum_{n=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \varphi_k(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} N(g_\rho^k([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f_{\beta-1}(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} f_\beta(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \frac{(-1)^{(k+1)\bar{\omega}(x)} \pi^k(x) \varphi_k(x)}{N(x)^k} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \mu(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])) N(g_\rho^k([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^{\alpha\rho})}\right) \frac{(-1)^{(k+1)\bar{\omega}(x)} \pi^k(x) \varphi_k(x)}{N(x)^{2\alpha}} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \frac{\tau_\alpha(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))}{N(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))}$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \sigma_{r_1}(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \mu(g_{r_1\rho}([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \nu(x) = \log N\left(\prod_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])\right)$$

$$\tau \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\rho]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^r \left(\frac{\Delta}{x}\right) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} \varphi(\Delta, g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) p(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}{}' f(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\rho]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^r \frac{\psi_{k,\mu}(\Delta, x) \lambda(x)}{x^k} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} \lambda(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])) \left(\frac{\Delta}{g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])}\right) g_\rho^{\mu-k}([z_1, z_2, \ldots, z_r])$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \frac{(-1)^{k\bar{\omega}(x)} \lambda(x)\, \pi^k(x)\, \omega_k(x)}{N(x)^k} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \frac{\lambda(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))}{N(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\rho]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^r \frac{\chi_{k,\mu}(\Delta, x)}{x^k} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} g_\rho^{\mu-k}([z_1, z_2, \ldots, z_r]) \left(\frac{\Delta}{g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])}\right)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\rho]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^r \left(\frac{\Delta}{x}\right) \mu(x)\, x^{k-\mu} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} \left(\frac{\Delta}{g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])}\right) \frac{\chi_{k,\mu}(\Delta, g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))}{g_\rho^\mu([z_1, z_2, \ldots, z_r])}$$

(Δ theilerfremd zu allen ganze Zahlen $[z_1, z_2, \ldots, z_r]$)

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \frac{f_{\beta-2}(x)\, \psi(x^2 \pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(x)}} =$$

$$= \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \frac{f_{\beta-1}(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])\, \psi(g_\rho^2([z_1, z_2, \ldots, z_r])\, \pi^{\beta-2}(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])))}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))}}$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \psi(x^2) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \psi^2(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \omega(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \psi(g_\rho^2([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \mu_2(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \omega(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \frac{\lambda(x) f_{\beta-1}(x)\, \psi(x^2 \pi^{\beta-2}(x))}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(x)}} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \lambda(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))\, f_\beta(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r]))$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \lambda(x)\, \psi(x^2) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \lambda(g_\rho[z_1, z_2, \ldots, z_r])\, \psi(g_\rho[z_1, z_2, \ldots, z_r])$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \varphi^{(k)}(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \frac{S_k(g_\rho[z_1, z_2, \ldots, z_r])}{N(g_\rho[z_1, z_2, \ldots, z_r])^k}$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \mu_\sigma(x)\, x^{k\rho} = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \tau_{\rho, k, \sigma}([z_1, z_2, \ldots, z_r])$$

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \lambda_r(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_{r_1} = (n)} \alpha(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_{r_1}]))$$

wo $\alpha(n)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem sämmtliche Exponenten der die ganze Zahl n zusammensetzenden Primzahlpotenzen nach dem Modul $r\rho$ einer unterhalb ρ befindlichen Zahl congruent sind oder nicht, und die Marke am Summenzeichen in der achten Gleichung anzeigt, dass nur jene ganzen Zahlen x des betrachteten Gebietes zu nehmen sind, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen ein Exponent unterhalb 2ρ und nicht unterhalb ρ liegt, während alle anderen kleiner als ρ sind.

Da für das Gebiet der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären complexen Zahlen, wie ich unlängst angegeben habe,[1]) die Beziehung

$$\sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) f(x) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^r \sum_{x=(\infty)} \frac{f(x)}{N(x^{r\rho})} + \Delta'$$

besteht, wo der absolute Betrag von Δ' der Ungleichung

$$|\Delta'| < 2N(n)^{r-\frac{1}{2}} \left| \sum_{x=\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \frac{f(x)}{N(x)^{\frac{r\rho}{2}}} \right| + \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^r \left\{ \frac{\alpha_{r\rho} + \beta_{r\rho} \log N(n)}{N(n)^{\frac{\varepsilon_{r\rho}}{\rho}}} + \gamma_{r\rho} \right\}$$

genügt, falls

$$\left| \sum_{x=(\infty)-\left(\sqrt[\rho]{n}\right)} \frac{f(x)}{N(x)^\mu} \right| < \frac{\alpha_\mu + \beta_\mu \log N(n)}{N(n)^{\frac{\varepsilon_\mu}{\rho}}} + \gamma_\mu \qquad (\varepsilon_\mu > 0)$$

ist, so erhält man aus den angeführten Gleichungen unter Berücksichtigung der bekannten Relationen

$$\left| \sum_{x=(\infty)-(n)} \frac{1}{N(x)^s} \right| < \frac{\zeta(s)}{N(n)^{s-1}} \left\{ \zeta(s) + \log N(n) + C + \frac{1}{N(n)-1} \right\} \qquad (s > 1)$$

$$\left| \sum_{x=(n)} \frac{1}{N(n)} \right| < \pi \log N(n) + \pi C + 4\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{M} = \sum_{x=1}^{x=\infty} (-1)^{x-1} \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)}$$

folgende asymptotische Gesetze:

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \mu\left(y_{\rho r_1}([z_1, z_2, \ldots, z_r])\right) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^r \frac{1}{\zeta(r\rho)\,\zeta(r_1\rho r)\, L_{r\rho}\, L_{r\rho r_1}} + \Delta'_1$$

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \omega\left(g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])\right) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^r \frac{2\Gamma(2r\rho+1)\,\zeta(r\rho)\, L_{r\rho}}{(2\pi)^{2r\rho}\, B_{r\rho}\, L_{2r\rho}} + \Delta'_2$$

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \alpha\left(g_\rho[z_1, z_2, \ldots, z_r]\right) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^r \frac{\zeta(r\rho r_1)\, L_{r\rho r_1}}{\zeta(r\rho)\, L_{r\rho}} + \Delta'_3$$

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)} \tau_{\rho, -k, \sigma}([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^r \frac{\zeta([r+k]\rho)\, L_{(r+k)\rho}}{\zeta(\sigma\rho(r+k))\, L_{\sigma\rho(r+k)}} + \Delta'_4$$

wo

$$|\Delta'_1|, |\Delta'_2|, |\Delta'_4| < 2N(n)^{r-\frac{1}{2}} \zeta\left(\frac{r\rho}{2}\right) L_{\frac{r\rho}{2}} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^r \zeta(r\rho) \left\{ \zeta(r\rho) + \log N(n) + C + \frac{1}{N(n)-1} \right\} N(n)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (r\rho > 2)$$

$$|\Delta'_1|, |\Delta'_2|, |\Delta'_4| < 2N(n)^{\frac{1}{2}} (\pi \log N(n) + \pi C + 4\mathfrak{M}) + \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{r+2} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \log N(n) + C + \frac{1}{N(n)-1} \right\} N(n)^{\frac{1}{2}}$$
$$(r = 1 \quad \rho = 2)$$

$$|\Delta'_3| < \frac{2N(n)^{r-\frac{1}{2}} \zeta\left(\frac{r\rho}{2} + k\rho\right) L_{\frac{r\rho}{2}+k\rho}}{\zeta\left(\sigma\left(\frac{r\rho}{2} + k\rho\right)\right) L_{\sigma\rho\left(\frac{r}{2}+k\right)}} + \frac{\pi}{4} \zeta(r\rho) \left\{ \zeta(r\rho) + \log N(n) + C + \frac{1}{N(n)-1} \right\} N(n)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\rho > 1)$$

ist.

---

[1]) „Wahrscheinlichkeiten im Gebiete der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen." Sitzungsberichte der k. Akad. der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe. 98. Band. Abtheilung II a. S. 635—646.

Die siebente der aufgestellten Gleichungen lässt sich in folgender Form schreiben

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} \varphi(\Delta, g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])) = \tau n^r \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right) \frac{1}{x^{r\rho}} + \Delta''$$

wo

$$\Delta'' = -\tau \left[n^r \sum_{x = \left(\sqrt[\rho]{n}\right)+1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right) \frac{1}{x^{r\rho}} - \sum_{x=1,\ \lambda=1}^{x = \left[\sqrt[\rho]{n}\right],\ \lambda = r} \binom{r}{\lambda} (-\varepsilon_x)^\lambda \left(\frac{n}{x^\rho}\right)^{r-\lambda} \left(\frac{\Delta}{x}\right) \right]$$

und demnach

$$|\Delta''| < A n^{r-1} + B n^{\frac{1}{2\rho}}$$

ist. Ist $r\rho = 2s+1$ und $\Delta < 0$, so wird diese Gleichung nach früher erwähnten Sätzen von Berger

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} \varphi(\Delta, g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])) = \frac{(-1)^{s+1} (2\pi)^{2s+1}\, \tau n^r}{\Pi(2s+1) \sqrt{-\Delta}} \sum_{h=1}^{h = \left[\frac{-\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2s+1\right) + \Delta''$$

ist aber $r\rho = 2s+2$ und $\Delta > 0$, so hat man

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} \varphi(\Delta, g_\rho([z_1, z_2, \ldots, z_r])) = \frac{(-1)^s (2\pi)^{2s+2}\, \tau n^r}{\Pi(2s+2) \sqrt{\Delta}} \sum_{h=1}^{h = \left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{\Delta}{h}\right) \varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2s+2\right) + \Delta''.$$

Die auf den rechten Seiten der Gleichungen 1) bis 4) stehenden Summen lassen sich leicht durch folgende Betrachtungen in andere umformen. Da offenbar

$$[z_1, z_2, \ldots, z_r] = [[z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda-1}], z_\lambda, z_{\lambda+1}, \ldots, z_r]$$

ist, so muss $[z_1, z_2, \ldots z_r]$ unter den Theilern d von $[z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda-1}]$ enthalten sein und zwar hat derselbe genau den Werth d, wenn $z_\lambda, z_{\lambda+1}, \ldots, z_r$ Vielfache von d und so beschaffen sind, dass $\frac{z_\lambda}{d}, \frac{z_{\lambda+1}}{d}, \ldots, \frac{z_r}{d}$ ein zu $[z_1, z_2, \ldots z_{\lambda-1}]$ theilerfremdes System von $r-\lambda+1$ ganzen Zahlen bilden. Bezeichnet man nun die Anzahl von je k der Systeme Zahlen des Complexes (n), welche ein zu x theilerfremdes Werthsystem bilden, mit $\varphi_k(x, n)$, so ist

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = n} F([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda-1} = (n)} \left(\sum_d F(d)\, \varphi_{r-\lambda+1}\left(\frac{[z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda-1}]}{d}, n\right) \right)$$

und speciell

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots z_r = (n)} F([z_1, z_2, \ldots z_r]) = \sum_{z_1 = (n)} \left(\sum_d F(d)\, \varphi_{r-1}\left(\frac{z_1}{d}, n\right) \right).$$

wo die Summationen bezüglich d über alle Theiler von $[z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda-1}]$ bez. z_1 auszudehnen sind

Die letzte Gleichung lässt sich offenbar auch in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots z_r = (n)} F([z_1, z_2 \ldots, z_r]) = \sum_{z_1 = (n)} \varphi_{r-1}(z_1, n) \left(\sum_{x = \left(\frac{n}{z_1}\right)} F(x) \right)$$

$$= \sum_{z_1 = (n)} F(z_1) \left(\sum_{\lambda = \left(\frac{n}{z_1}\right)} \varphi_{r-1}(\lambda, n) \right).$$

Die zahlentheoretische Function $\varphi_k(x, n)$ besitzt eine Reihe von bemerkenswerthen Eigenschaften, die ich bei einer nächsten Gelegenheit mitzutheilen gedenke.

3) α) Herr A. Schönflies hat in seiner interessanten Abhandlung „Über eine specielle Classe von Configurationen auf den elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung“ [1]) durch geometrische Betrachtungen folgenden zahlentheoretischen Satz erschlossen:

Es seien durch die Gleichung

$$n_\lambda = n^\lambda - n^{\lambda-1} + n^{\lambda-2} - \ldots + (-1)^\lambda$$

für $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots, q$ die ganzen Zahlen

$$1, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_q$$

definirt. Ist dann n_{r-1} die kleinste unter diesen Zahlen, welche mit n_q einen gemeinsamen Theiler hat, so ist r ein Theiler von $q+1$ und es besteht für jeden Index i die Relation

$$m\, n_i \equiv m\, n_{r+i} \,(\text{mod. } n_q).$$

Dieser Satz soll nun arithmetisch bewiesen und auch etwas vervollständigt werden.

Aus der Definition der ganzen Zahlen n_λ folgen die zwei Relationen

1) $$n_\lambda = n\, n_{\lambda-1} + (-1)^\lambda$$

2) $$n_\lambda = n_k\, n_{\lambda-k} + n\, n_{k-1}\, n_{\lambda-k-1}$$

deren Vereinigung die Beziehung

3) $$\begin{aligned} n_\lambda &= (-1)^k\, n_{\lambda-k} + n\, n_{k-1}\,(n_{\lambda-k} + n_{\lambda-k-1}) \\ &= (-1)^k\, n_{\lambda-k} + n^{\lambda-k+1}\, n_{k-1} \end{aligned}$$

liefert. Nach 2) ist nicht nur jeder gemeinsame Theiler von $n_{\lambda-k}$ und n_{k-1} auch Theiler von n_λ, sondern auch da nach 1) n_k und n_{k-1} theilerfremd sind, jeder gemeinsame Theiler von n_λ und n_{k-1} auch Theiler von $n_{\lambda-k-1}$ und demnach besteht die Gleichung

$$[n_\lambda, n_{k-1}] = [n_{\lambda-k}, n_{k-1}]$$

aus welcher unmittelbar die allgemeinere

$$[n_\lambda, n_{k-1}] = [n_{\lambda\mp\sigma k}, n_{k-1}]$$

folgt, so dass also, falls

$$\lambda = \sigma k + \rho - 1 \qquad (1 \leqq \rho \leqq k)$$

ist, auch die Beziehung

4) $$[n_\lambda, n_{k-1}] = [n_{\rho-1}, n_{k-1}]$$

besteht.

Diese Gleichung zeigt zunächst, dass jedesmal, wenn k ein Theiler von $\lambda+1$ ist, n_λ durch n_{k-1} theilbar ist.

Es sei nun k nicht unter den Theilern von $\lambda+1$ enthalten, so dass also $\rho < k$ ist. Ist $\rho = k-1$, so ist nach 4) n_λ und n_{k-1} theilerfremd, ist aber $\rho < k-1$, so hat man nach 2)

$$n_{k-1} = n_\rho\, n_{k-\rho-1} + n\, n_{\rho-1}\, n_{k-\rho-2}$$

und demnach liefert das eben angewendete Verfahren die Relation

$$[n_{k-1}, n_{\rho-1}] = [n_{\rho_1-1}, n_{\rho-1}]$$

wenn

$$k = \sigma_1 \rho + \rho_1 \qquad (1 \leqq \rho_1 < \rho)$$

[1]) Mathematische Annalen von F. Klein, 35. Band. S. 526—540.

ist. In der letzten Gleichung kann offenbar ρ_1 nicht gleich ρ werden, weil sonst ρ ein Theiler von $\lambda + 1$ wäre, was ja jetzt ausgeschlossen ist. Da man nun, wenn $\rho_1 > 1$ ist, dieselbe Schlussweise wiederholen kann, so gelangt man schliesslich zu der Gleichung

$$[n_\lambda, n_{k-1}] = [n_{\rho_\tau - 1}, n_0] = 1.$$

Man kann demnach unter Benützung von 3) das Schönflies'sche Theorem in folgender Weise aussprechen: „Jede von den durch die Gleichung

$$n_\lambda = n^\lambda - n^{\lambda-1} + n^{\lambda-2} - \ldots + (-1)^\lambda$$

definirten ganzen Zahlen, welche mit einer vorhergehenden einen Theiler gemeinsam hat, ist durch dieselbe theilbar, es ist ferner der um eine Einheit vermehrte Index $(k-1)$ der ersteren ein Theiler des um eine Einheit vermehrten Index q der zweiten und es bestehen für jeden Werth von λ die Congruenzen

$$n_{\lambda+k} \equiv (-1)^k n_\lambda \; (\text{mod. } n_{k-1})$$

$$r\, n_{\lambda+k} \equiv r\, n_\lambda \; (\text{mod. } n_q).\text{“}$$

Die kleinste der Zahlen n_λ, welche mit n_q einen gemeinsamen Theiler hat, hat demnach zum Index den um eine Einheit verminderten kleinsten Primfactor von $q+1$.

β) Sind $[a_k, b_k, c_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, K(\Delta))$ die Repräsentanten der verschiedenen Classen quadratischer Formen der negativen Fundamentaldiscriminante Δ, so wird in der Summe auf der rechten Seite der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=K(\Delta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a_k x^2 + b_k x y + c_k y^2)\, d x\, d y = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=K(\Delta)} \varepsilon \sum_{\lambda,\mu=-\infty}^{\lambda,\mu=+\infty} f(\varepsilon(a_k \lambda^2 + b_k \lambda \mu + c_k \mu^2))$$

das Glied $f(\varepsilon n)$ so oft auftreten, als es Darstellungen der Zahl n durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ gibt. Da nun diese Anzahl bekanntlich gleich

$$\tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)$$

ist, so hat man

$$\sum_{k=1}^{k=K(\Delta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a_k x^2 + b_k x y + c_k y^2)\, d x\, d y = \tau \lim_{\varepsilon=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\Delta}{n}\right) \sum_{y=1}^{y=\infty} f(y\, \varepsilon\, n)$$

$$= \tau \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} \int_0^\infty f(y)\, d y$$

oder endlich

$$\sum_{k=1}^{k=K(\Delta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a_k x^2 + b_k x y + c_k y^2)\, d x\, d y = \frac{2\pi K(\Delta)}{|\sqrt{-\Delta}|} \int_0^\infty f(y)\, d y.$$

Von den speciellen Fällen dieser Relation mögen die folgenden erwähnt werden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2 + x y + 3y^2)\, d x\, d y = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} \int_0^\infty f(y)\, d y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x^2 + x y + 4y^2) + f(3x^2 + 3 x y + 2y^2)\}\, d x\, d y = \frac{4\pi}{\sqrt{15}} \int_0^\infty f(y)\, d y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x^2 + 3y^2) + f(2x^2 + 2 x y + 2y^2)\}\, d x\, d y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \int_0^\infty f(y)\, d y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(x^2+xy+3y^2)^2} (x^2 + x y + 3y^2)^{\nu+1} J^\nu (a_1 (x^2 + x y + 3y^2))\, d x\, d y = \frac{2\pi a_1^\nu}{(2a^2)\sqrt{11}} e^{-\frac{a_1^2}{4a^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(x^2+xy+3y^2)^2}(x^2+xy+3y^2)\, J^{\nu}(a_1(x^2+xy+3y^2))\, J^{\nu}(a_2(x^2+xy+3y^2))\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\pi\, i^{\nu}}{a^2\sqrt{11}}\, e^{-\frac{a_1^2+a_2^2}{4a^2}}\, J^{\nu}\left(\frac{a_1 a_2}{2a^2 i}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J^{\mu-\nu}(x^2+xy+3y^2)\, J^{\rho-1}(z(x^2+xy+3y^2))}{(x^2+xy+3y^2)^{\rho-\mu-\nu}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\pi\, \Pi(\mu-1)\, z^{\rho-1}}{2^{\rho-\mu-\nu-1}\sqrt{11}\, \Pi(-\nu)\, \Pi(\rho-1)}\, F(\mu,\nu,\rho,z^2) \qquad (|z|<1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J^{\mu-\nu}(x^2+xy+3y^2)\, J^{\rho-1}(z(x^2+xy+3y^2))}{(x^2+xy+3y^2)^{\rho-\mu-\nu}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\pi\, \Pi(\mu-1)\, z^{\rho-2\mu-1}}{2^{\rho-\mu-\nu-1}\, \Pi(\rho-\mu-1)\, \Pi(\mu-\nu)}\, F\left(\mu,\mu-\rho+1,\mu-\nu+1,\frac{1}{z^2}\right) \qquad (|z|>|)$$

($\mu-\nu$ und $\rho-1$ nicht negativ ganzzahlig; α und $\rho-\mu-\nu+1>0$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ J^{2n+2\nu}(x^2+xy+4y^2)\, J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left((x^2+xy+4y^2)\sin\frac{z}{2}\right)(x^2+xy+4y^2)^{-\frac{2\nu-1}{2}} +$$

$$+ J^{2n+2\nu}(3x^2+3xy+2y^2)\, J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left((3x^2+3xy+2y^2)\sin\frac{z}{2}\right)(3x^2+3xy+2y^2)^{-\frac{2\nu-1}{2}}\Big\}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2^{-\frac{2\nu+3}{2}}\, \Pi(2\nu-1)\, \pi\, \sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\frac{z}{2}}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\sqrt{15}}\, C_n^{\nu}(\cos z) \qquad \left(\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{(x^2+xy+4y^2)^{2\nu-1}\, J^{n+\nu}(\zeta(x^2+xy+4y^2))\, J^{-n-\nu}(x^2+xy+4y^2) + (3x^2+3xy+2y^2)^{2\nu-1}\,.$$

$$.\, J^{n+\nu}(\zeta(3x^2+3xy+2y^2))\, J^{-n-\nu}(3x^2+3xy+2y^2)\}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2^{2\nu+1}[\Pi(\nu-1)]^2\,\pi}{\Pi(-n-\nu)\,\Pi(n+\nu-1)\,\zeta^{\nu}\sqrt{15}}\, C_n^{\nu}(x_1) \qquad (1>\nu,\ \zeta+\zeta^{-1}=2x_1,\ |\zeta|>1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{(x^2+xy+4y^2)^{\nu-1}\, J^{2r+\nu}(x^2+xy+4y^2)\cos(z(x^2+xy+4y^2)) + (3x^2+3xy+2y^2)^{\nu-1}\,.$$

$$.\, J^{2r+\nu}(3x^2+3xy+2y^2)\cos(z(3x^2+3xy+2y^2))\}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^r\, 2^{\nu+1}\, \Pi(\nu-1)\,\pi}{\sqrt{15}}\, C_{2r}^{\nu}(z) \qquad (|z|<1,\ \nu<3/2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{(x^2+xy+4y^2)^{\nu-1}\, J^{2r+\nu+1}(x^2+xy+4y^2)\sin(z(x^2+xy+4y^2)) + (3x^2+3xy+2y^2)^{\nu-1}\,.$$

$$.\, J^{2r+\nu+1}(3x^2+3xy+2y^2)\sin(z(3x^2+3xy+2y^2))\}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^r\, 2^{\nu+1}\, \Pi(\nu-1)\,\pi}{\sqrt{15}}\, C_{2r+1}^{\nu}(z) \qquad (|z|<1,\ \nu<3/2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{J^{\nu}(a_1(x^2+3y^2))}{x^2+3y^2} + \frac{J^{\nu}(2a_1(x^2+xy+x^2))}{2(x^2+xy+y^2)}\right\}dx\,dy = \frac{4\pi}{\nu\sqrt{3}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{J^{\nu}(a_1(x^2+3y^2)) + J^{\nu}(2a_1(x^2+xy+y^2))\}\,dx\,dy = \frac{4\pi}{a_1\sqrt{3}}.$$

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1890

Band/Volume: 57

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: Zahlentheoretische Sätze. 497-530