EINIGE
SÄTZE ÜBER DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,

C. M. K. AKAD.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 17. JULI 1890.

Ich werde im ersten Abschnitte der vorliegenden Mittheilung einige invariantentheoretische Relationen und mehrere Theoreme über Determinanten höheren Ranges aufstellen, welche sich aus dem von mir bewiesenen Multiplicationstheoreme dieser Gebilde ableiten lassen, und sodann im zweiten Abschnitte eine Reihe von Sätzen über Determinanten höheren Ranges, welche aus einer beliebigen allgemeinen Determinante dadurch entstehen, dass in der zu einem bestimmten an festgesetzter Stelle befindlichen Index gehörigen Reihe die entsprechenden Elemente der zu einem an anderer Stelle liegenden Index gehörigen Reihe in vorgeschriebener Weise vertauscht und mit willkürlichen Grössen multiplicirt werden, und mehrere bemerkenswerthe aus diesen sich ergebende asymptotische Ausdrücke für Summen von gewissen Determinantenquotienten angeben, von denen besonders zwei interessante Darstellungen der Classenanzahl binärer quadratischer Formen mit negativer Discriminante als mittlere Werthe gewisser Summen von Determinantenquotienten und eine Darstellung derselben durch eine Summe von solchen Quotienten hervorgehoben werden mögen. Zum Schlusse theile ich endlich eine Verallgemeinerung einer der Elektricitätstheorie angehörigen Clausius'schen Relation mit, die allerdings ausserhalb des Rahmens der anderen Entwickelungen liegt.

I. Das Product zweier Determinanten n-ter Ordnung und r-ten bez. s-ten Ranges

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, 3, \ldots, n)}; \quad |b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|_{(j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, 3, \ldots, n)}$$

ist, wie ich gezeigt habe [1]), als Determinante derselben Ordnung vom Range $r+s-2$

$$|A_{k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2}}|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, n)}$$

darstellbar, deren Elemente durch die Gleichung

$$A_{k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{k_1, k_2, \ldots, k_\tau, \lambda, k_{\tau+1}, \ldots, k_{r-1}} \, b_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_\mu, \lambda, k_{\mu+1}, k_{r+s-2}}$$

---

1) „Über Determinanten höheren Ranges". Diese Denkschriften 43. Band.

definirt sind, wo der Index λ in Elementen mit einer ungeraden Anzahl von Indices nicht an der Stelle der festen Indices stehen darf.

1. Ist nun zunächst

$$n = 2^\sigma$$

$$a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \lambda, k_\tau, \ldots, k_{r-1}} = \beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_\sigma} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_\sigma = 1, 2)$$

$$b_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{\mu-1}, \lambda, k_\mu, \ldots, k_{r+s-2}} = (i_1, 3-i_1)\,(i_2, 3-i_2)\ldots(i_\sigma, 3-i_\sigma)\,\bar\beta^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{3-i_1, 3-i_2, \ldots, 3-i_\sigma} \qquad (i_1, i_2, \ldots i_\sigma = 1, 2)$$

wo

$$(1, 2) = -(2, 1) = 1$$

ist, und für $\lambda = 1$, alle Indices i_k gleich 1, für $\lambda = 2$ alle mit Ausnahme des letzten gleich 1, für $\lambda = 3$ alle mit Ausnahme des vorletzten gleich $1, \ldots\ldots$ für $\lambda = \sigma+2$ alle mit Ausnahme des letzten und vorletzten gleich 1 sind u. s. f., endlich für $\lambda = n = 2^\sigma$ alle den Werth 2 besitzen, so wird

$$A_{k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2}} = \left| B^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2})}_{j_1, j_2, \ldots, j_{\sigma+1}} \right|_{(j_1, j_2, \ldots, j_{\sigma+1} = 1, 2)}$$

wenn

$$B^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2})}_{1, j_2, j_3, \ldots, j_{\sigma+1}} = \beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{j_2, j_3, \ldots, j_{\sigma+1}}$$

$$B^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2})}_{2, j_2, j_3, \ldots, j_{\sigma+1}} = \bar\beta^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{3-j_2, 3-j_3, \ldots, 3-j_{\sigma+1}}$$

ist, und daher hat man die Relation

$$\left| \left| B^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2})}_{j_1, j_2, \ldots, j_{\sigma+1}} \right|_{(j_1, j_2, \ldots, j_{\sigma+1} = 1, 2)} \right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, 2^\sigma)} = \left| \beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_\sigma} \right| .$$

$$\left| \bar\beta^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{3-i_1, 3-i_2, \ldots, 3-i_\sigma} \right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, 2^\sigma;\ i_1, i_2, \ldots, i_\sigma = 1, 2)} .$$

Sind

$$\beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})} = \alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})^{m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}}}$$

$$\bar\beta^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})} = \bar\alpha_x^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})^{\bar m_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}}}$$

binäre Formen $m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}$ ten bez. $\bar m_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}$-ter Ordnung und ist

$$\beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_\sigma} = \frac{(m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}} - \sigma)\,!}{m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}\,!} \; \frac{\partial^\sigma \beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}}{\partial x_1^{\sigma-\rho}\, \partial x_2^\rho}$$

$$\bar\beta^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{i_1, i_2, \ldots, i_\sigma} = \frac{(\bar m_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}} - \sigma)\,!}{\bar m_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}} \; \frac{\partial^\sigma \bar\beta^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}}{\partial x_1^{\sigma-\rho}\, \partial x_2^\rho}$$

wo ρ die Anzahl jener Indices i_k ist, welche den Werth 2 besitzen, so ist, wie schon Herr G. R. v. Escherich[1]) hervorgehoben hat,

---

[1]) „Die Determinanten höheren Ranges und ihre Verwendung zur Bildung von Invarianten." Diese Denkschriften 43. Band.

$$\left|B_{j_1, j_2, \ldots, j_{s+1}}^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2})}\right|_{(j_1, j_2, \ldots, j_{s+1} = 1, 2)} = \left(\alpha^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}\, \bar{\alpha}^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}\right)^{\sigma} \alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})^{m} k_1, k_2, \ldots, k_{r-1} - \sigma} \,.$$

$$.\; \bar{\alpha}_x^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})^{\bar{m}} k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2} - \sigma}$$

$$= \left(\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})^{m} k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}},\; \bar{\alpha}_x^{(k_r, k_{r+2}, \ldots, k_{r+s-2})^{\bar{m}} k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}\right)^{\sigma}$$

die σ-te Überschiebung[1]) der Formen $\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})^{m} k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}$ und $\bar{\alpha}_x^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})^{\bar{m}} k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}$ und es wird ferner jede der beiden Determinanten auf der rechten Seite der letzten Gleichung gleich Null, wenn bei ungeradem r bez. s die Indices i_k nicht die feste Indexreihe vorstellen, weil die entsprechenden Elemente mehrerer zu einem an bestimmter Stelle befindlichen Index gehörigen Reihen denselben Werth haben.

Die Gesammtheit aller Elemente einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges, welche an der σ-ten Stelle den Index ρ besitzen, wird hierbei die zum σ-ten Index ρ gehörige Reihe genannt. Zwei in verschiedenen solchen Reihen befindliche Elemente heissen entsprechend, wenn ihre Indices an allen Stellen ausser der σ-ten übereinstimmen.

Die bisherigen Entwicklungen liefern demnach folgende interessante Relation zwischen Covarianten von $2^{\sigma(r+s-2)}$ beliebigen binären Formen:

$$\left|\left(\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})^{m} k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}},\; \bar{\alpha}_x^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})^{\bar{m}} k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}\right)^{\sigma}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, 2^{\sigma})} = 0$$

und speciell für

$$r = s$$

$$\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})} = \bar{\alpha}_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}$$

$$m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}} = \bar{m}_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}$$

$$\left|\left(\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})^{m} k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}},\; \alpha_x^{(k_r, k_{r-1}, \ldots, k_{2r-2})^{m} k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{2r-2}}\right)^{\sigma}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{2r-2} = 1, 2, 3, \ldots, 2^{\sigma})} = 0.$$

Setzt man speciell

$$r = s = 2$$

so erhält man die bekannte u. A. in Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie enthaltene und vielfach benützte Formel

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & (f, \chi)^2 \\ (\varphi, f)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & (\varphi, \chi)^2 \\ (\psi, f)^2, & (\psi, \varphi)^2, & (\psi, \psi)^2, & (\psi, \chi)^2 \\ (\chi, f)^2, & (\chi, \varphi)^2, & (\chi, \psi)^2, & (\chi, \chi)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Sowohl der Überschiebungs-, als auch selbstverständlich der Omegaprocess, der ja nichts anderes als ein Überschiebungsprocess für Formen mehrerer Reihen von Veränderlichen ist, lassen eine wesentliche Verallgemeinerung mit Hilfe der Determinanten höheren Ranges zu, wie bei einer anderen Gelegenheit gezeigt werden soll. Hier will ich nur noch bemerken, dass man die in der Invariantentheorie gebräuchliche Unterscheidung von Factoren erster Art und Klammerfactoren oder Factoren zweiter Art leicht vermeiden kann, wenn man die letzteren als Producte von alternirenden Zahlen betrachtet. Der fundamentale Faltungsprocess stellt sich dann als ein Verfahren dar, durch welches eine der Anzahl der Veränderlichen gleiche Zahl von Factoren erster Art in alternirende Zahlen verwandelt wird.

Setzt man ferner

$$a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \lambda, k_\tau, \ldots, k_{r-1}} = \beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} = 1, 2)$$

$$b_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_\mu, \lambda, k_{\mu+1}, \ldots, k_{r+s-2}} = (i_1, 3-i_1)(i_2, 3-i_2)\ldots(i_{n-1}, 3-i_{n-1})\binom{n-1}{\tau}\overline{\beta}^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{3-i_1, 3-i_2, \ldots, 3-i_{n-1}}$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} = 1, 2)$$

wo für $\lambda = 1$ alle Indices i_k gleich 1, für $\lambda = 2$ alle bis auf den letzten gleich 1 sind, für $\lambda = 1$ alle mit Ausnahme der letzten zwei u. s. f. den Werth 1 haben, endlich für $\lambda = n$ alle gleich 2 sind und τ die Anzahl jener Indices i_k vorstellt, welche den Werth 2 besitzen, so wird

$$A_{k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2}} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}' (i_1, 3-i_1)(i_2, 3-i_2)\ldots(i_{n-1}, 3-i_{n-1})\binom{n-1}{\tau}\beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\overline{\beta}^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{3-i_1, 3-i_2, \ldots, 3-i_{n-1}}$$

und demnach ist

$$\left|\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}' (i_1, 3-i_1)(i_2, 3-i_2)\ldots(i_{n-1}, 3-i_{n-1})\binom{n-1}{\tau}\beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\overline{\beta}^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{3-i_1, 3-i_2, \ldots, 3-i_{n-1}}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, n)} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1}\prod_{1}^{n-2}\!\lambda\binom{n-1}{\lambda}\left|\beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\right|\left|\overline{\beta}^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, n;\ i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} = 1, 2)}$$

wo die Summation bezüglich der Grössen i_k die eben erwähnte Bedingung zu erfüllen hat.

Stellen nun wieder die Grössen $\beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}$ und $\overline{\beta}^{(k_r, k_{r-1}, \ldots, k_{r+s-2})}$ die früher angeführten binären Formen vor und werden durch die unteren Indices die mit den angegebenen Zahlenfactoren behafteten $(n-1)$-ten Ableitungen verstanden, so wird

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}' (i_1, 3-i_1)(i_2, 3-i_2)\ldots(i_{n-1}, 3-i_{n-1})\binom{n-1}{\tau}\beta^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\beta^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} =$$

$$= \left(\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})\, m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}}, \overline{\alpha}_x^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})\, \overline{m}_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}}\right)^{n-1}$$

und daher erhält man die folgende Relation zwischen Covarianten von n^{r+s-2} beliebigen binären Formen:

$$\left|\left(\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})\, m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}}, \overline{\alpha}_x^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})\, \overline{m}_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2}}}\right)^{n-1}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, n)} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1}\prod_{1}^{n-2}\!\lambda\binom{n-1}{\lambda}\left|\alpha^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{x, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\right|\left|\overline{\alpha}^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+s-2})}_{x, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r+s-2} = 1, 2, 3, \ldots, n;\ i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} = 1, 2)}$$

und speciell

$$\left|\left(\alpha_x^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})\, m_{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}}}, \alpha_x^{(k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{2r-2})\, m_{k_r, k_{r+1}, \ldots, k_{2r-2}}}\right)^{n-1}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{2r-2} = 1, 2, 3, \ldots, n)} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1}\prod_{1}^{n-2}\!\lambda\binom{n-1}{\lambda}\left|\alpha^{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})}_{x, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\right|^2_{(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1} = 1, 2, 3, \ldots, n;\ i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} = 1, 2)}$$

Als specielle Fälle dieser Relation mögen die beiden folgenden längst bekannten und wiederholt verwendeten Formeln angeführt werden:

$$\begin{vmatrix} (f,f)^2, & (f,\varphi)^2, & (f,\psi)^2 \\ (\varphi,f)^2, & (\varphi,\varphi)^2, & (\varphi,\psi)^2 \\ (\psi,f)^2, & (\psi,\varphi)^2, & (\psi,\psi)^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{22} \\ \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{22} \\ \psi_{11}, & \psi_{12}, & \psi_{22} \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} (f,f)^2, & (f,\varphi)^2, & f \\ (\varphi,f)^2, & (\varphi,\varphi)^2, & \varphi \\ f, & \varphi, & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} f_1, & f_2 \\ \varphi_1, & \varphi_2 \end{vmatrix}^2 .$$

2. Einige englische Mathematiker[1]) haben sich mit der Untersuchung derjenigen Gebilde beschäftigt, welche entstehen, wenn alle Glieder einer quadratischen Determinante mit dem positiven Vorzeichen versehen werden, und denselben den Namen „Permanenten" gegeben. Diese Functionen sind übrigens, wie aus früheren Entwickelungen von Herrn R. F. Scott und mir hervorgeht, specielle cubische Determinanten. Man kann natürlich den Bergiff der Permanenten, ähnlich wie dies bei den gewöhnlichen Determinanten geschah, wesentlich erweitern, indem man als Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges jenes algebraische Gebilde bezeichnet, welches aus einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges entsteht, wenn allen Gliedern derselben das positive Vorzeichen gegeben wird. Nach dieser Definition ist demnach eine allgemeine Permanente durch folgende Gleichung definirt

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|^{+}_{(i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, 3, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{m-1}^{(n)} = n}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{m-1}^{(n)} = n} \prod_{1}^{m-1} \left| \mu \right| \left(i_\mu^{(1)}, i_\mu^{(2)}, \ldots, i_\mu^{(n)}\right)^2 a_{1, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{m-1}^{(1)}} \; a_{2, i_2^{(2)}, \ldots, i_{m-1}^{(2)}}, \ldots, a_{n, i_1^{(n)}, i_2^{(n)}, \ldots, i_{m-1}^{(n)}} .$$

Aus dieser Gleichung kann man unmittelbar eine Reihe von Eigenschaften der Permanenten ablesen, von denen nur einige erwähnt werden mögen.

Eine Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges ändert sich nicht, wenn man die entsprechenden Elemente von zwei zu verschiedenen σ-ten Indices gehörigen Reihen mit einander vertauscht.

Jede Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges kann als eine Summe von $(n)^{m-p}$ Permanenten n-ter Ordnung vom Range p $(m > p)$ dargestellt werden.

Eine Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges bleibt ungeändert, wenn man in allen Gliedern sämmtliche zwei verschiedenen Indexreihen angehörige Indices mit einander vertauscht.

Sind alle Elemente einer Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges gleich Null, welche denselben σ-ten Index haben, mit Ausnahme eines einzigen, so ist dieselbe gleich dem Producte aus dem von Null verschiedenen Elemente und einer Permanente desselben Ranges von nächst niedrigerer Ordnung.

Sind alle Elemente einer Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges, welche denselben σ-ten Index haben, gleich Null, so ist dieselbe identisch gleich Null.

Werden alle Elemente einer Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges, welche derselben Reihe angehören, mit einer und derselben Grösse multiplicirt, so wird die Permanente mit dieser Grösse multiplicirt.

Sind alle Elemente einer Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges, welche sich in der zu einem bestimmten an vorgeschriebener Stelle liegenden Index gehörigen Reihe befinden, Polynome von r Gliedern, so ist dieselbe gleich der Summe von r Permanenten desselben Ranges und derselben Ordnung, welche man aus der vorgelegten dadurch erhält, dass man an Stelle der zusammengesetzten Elemente jedesmal einen der Summanden setzt und die übrigen ungeändert lässt.

[1]) S. u. A.: Th. Muir, „On a class of permanent symmetric functions." Proceedings of the Royal Society. Edinburgh. V. XI. p. 409—418.

Genügen die n^m Elemente einer Permanente n-ter Ordnung und m-ten Ranges

$$\left|a_{i_1, i_2, \dots, i_m}\right|^{+}_{(i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2, 3, \dots, n)}$$

den Gleichungen

$$a_{1, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} = a_{2, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} = \dots = a_{n, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}$$

so ist dieselbe gleich dem n!-fachen der Permanente n-ter Ordnung vom Range $m-1$, welche aus den n^{m-1} verschiedenen Elementen gebildet werden kann.

Auf dem von mir in der Abhandlung „Über windschiefe Determinanten höheren Ranges"[1]) auseinandergesetzten Wege lassen sich aus der Definitionsgleichung derselben mit Hilfe des Sylvester'schen Multiplicationstheorems der quadratischen Determinanten leicht zwei für manche Untersuchungen (z. B. über windschiefe Permanenten) recht brauchbare Darstellungen dieser Gebilde ableiten, nämlich:

$$\left|a_{i_1, i_2, \dots, i_m}\right|^{+}_{(i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2, 3, \dots, n)} = \sum_{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_r^{(\sigma_r)};\, \lambda_1'^{(1)}, \lambda_2'^{(1)}, \dots, \lambda_r'^{(\sigma_r)};\, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_{m-1}^{(n)} = 1;\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r;\, \alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_r'}^{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_r^{(\sigma_r)};\, \lambda_1'^{(1)}, \lambda_2'^{(1)}, \dots, \lambda_r'^{(\sigma_r)};\, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_{m-1}^{(n)} = n;\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r;\, \alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_r'} \prod_{\tau=1}^{r} \binom{n-\sigma_\tau}{\alpha_\tau}.$$

$$\cdot \binom{n-\sigma_\tau}{\alpha_\tau'} \binom{\sigma_\tau}{\alpha_\tau} \binom{\sigma_\tau}{\sigma_\tau'} \left[\left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(n)}\right), \left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right); k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \lambda_\tau^{(1)}, \lambda_\tau^{(2)}, \dots, \lambda_\tau^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau\right].$$

$$\cdot \left[\left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right), \left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(n)}\right); \lambda_\tau^{(1)}, \lambda_\tau^{(2)}, \dots, \lambda_\tau^{(\sigma_\tau)}; k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau\right] \left[\left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(n)}\right),\right.$$

$$\left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right); k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \lambda_\tau'^{(1)}, \lambda_\tau'^{(2)}, \dots, \lambda_\tau'^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau'\Big] \Big[\left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right), \left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(n)}\right);$$

$$\left.\lambda_\tau'^{(1)}, \lambda_\tau'^{(2)}, \dots, \lambda_\tau'^{(\sigma_\tau)}; k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau'\right] \prod_{\sigma=1}^{m-2r-1} \left(i_{\nu_\sigma}^{(1)}, i_{\nu_\sigma}^{(2)}, \dots, i_{\nu_\sigma}^{(n)}\right) a_{1, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_{m-1}^{(1)}}\, a_{2, i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \dots, i_{m-1}^{(2)}} \cdots a_{n, i_1^{(n)}, i_2^{(n)}, \dots, i_{m-1}^{(n)}}$$

$$\left|a_{i_1, i_2, \dots, i_m}\right|^{+}_{(i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2, 3, \dots, n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_r^{(\sigma_r)};\, \lambda_1'^{(1)}, \lambda_2'^{(1)}, \dots, \lambda_r'^{(\sigma_r)};\, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_{m-1}^{(n)} = 1;\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r;\, \alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_r'}^{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_r^{(\sigma_r)};\, \lambda_1'^{(1)}, \lambda_2'^{(1)}, \dots, \lambda_r'^{(\sigma_r)};\, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_{m-1}^{(n)} = n;\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r;\, \alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_r'} \prod_{\tau=1}^{r} \binom{n-\sigma_\tau}{\alpha_\tau}.$$

$$\cdot \binom{n-\sigma_\tau}{\alpha_\tau'} \binom{\sigma_\tau}{\alpha_\tau} \binom{\sigma_\tau}{\alpha_\tau'} \left[\left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(n)}\right), \left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right); k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \lambda_\tau^{(1)}, \lambda_\tau^{(2)}, \dots, \lambda_\tau^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right), \left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(n)}\right); \lambda_\tau^{(1)}, \lambda_\tau^{(2)}, \dots, \lambda_\tau^{(\sigma_\tau)}; k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau\right] \Big[\left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(n)}\right), \left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right);$$

$$k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \lambda_\tau'^{(1)}, \lambda_\tau'^{(2)}, \dots, \lambda_\tau'^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau'\Big) \Big[\left(i_{\mu_\tau'}^{(1)}, i_{\mu_\tau'}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau'}^{(n)}\right), \left(i_{\mu_\tau}^{(1)}, i_{\mu_\tau}^{(2)}, \dots, i_{\mu_\tau}^{(m)}\right); \lambda_\tau'^{(1)}, \lambda_\tau'^{(2)}, \dots, \lambda_\tau'^{(\sigma_\tau)};$$

$$k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}; \alpha_\tau'\Big] \prod_{\tau=1}^{m-2r} \left(i_{\nu_\sigma}^{(1)}, i_{\nu_\sigma}^{(2)}, \dots, i_{\nu_\sigma}^{(n)}\right) a_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_m^{(1)}}\, a_{i_1^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_m^{(2)}} \cdots a_{i_1^{(n)}, i_2^{(n)}, \dots, i_m^{(n)}}$$

wo die Grösse $k_\tau^{(1)}, k_\tau^{(2)}, \dots, k_\tau^{(\sigma_\tau)}$ irgend eine Combination σ_τ-ter Classe der Zahlen 1, 2, 3, ..., n, die Grössen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \mu_1', \mu_2', \dots, \mu_r', \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{m-1-2r}$ bez. ν_{m-2r} eine Permutation der Zahlen 1, 2, ..., $m-1$ bez. m sind,

---

[1]) Diese Denkschriften, 55. Band.

$$\left[\left(i^{(1)}_{\mu_\tau}, i^{(2)}_{\mu_\tau}, \ldots, i^{(n)}_{\mu_\tau}\right), \left(i^{(1)}_{\mu'_\tau}, i^{(2)}_{\mu'_\tau}, \ldots, i^{(n)}_{\mu'_\tau}\right);\; k^{(1)}_\tau, k^{(2)}_\tau, \ldots, k^{(\sigma_\tau)}_\tau;\; \lambda^{(1)}_\tau, \lambda^{(2)}_\tau, \ldots, \lambda^{(\sigma_\tau)}_\tau;\; \alpha_\tau\right]$$

eine von den quadratischen Determinanten n-ter Ordnung ist, welche aus $\left(i^{(1)}_{\mu_\tau}, i^{(2)}_{\mu_\tau}, \ldots\, i^{(n)}_{\mu_\tau}\right)$ dadurch entstehen, dass die $k^{(1)}_\tau$-te, $k^{(2)}_\tau$-te, ..., $k^{(\sigma_\tau)}_\tau$-te Verticalreihe derselben bez. durch die $\lambda^{(1)}_\tau$-te, $\lambda^{(2)}_\tau$-te, ..., $\lambda^{(\sigma_\tau)}_\tau$-te Verticalreihe der Determinante $\left(i^{(1)}_{\mu'_\tau}, i^{(2)}_{\mu'_\tau}, \ldots\, i^{(n)}_{\mu'_\tau}\right)$ ersetzt wird, wo genau α_τ unter den Grössen λ_τ von den Zahlen k_τ verschieden sind und bezüglich α_τ bez. α'_τ von 0 bis zur kleineren von den zwei ganzen Zahlen α_τ bez. $n-\alpha'_\tau$ und $n-\alpha_\tau$ bez. $n-\alpha'_\tau$ summirt wird.

Es soll nun zunächst ein Satz abgeleitet werden, der den innigen Zusammenhang zwischen Permanenten und Determinanten höheren Ranges klar hervortreten lässt.

Es mögen alle Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}}$ einer Determinante n-ter Ordnung und $(2m+1)$-ten Ranges gleich Null sein, in denen

$$i_{k_1^{(1)}} \gtreqless i_{k_2^{(1)}} \gtreqless i_{k_3^{(1)}} \gtreqless \ldots \gtreqless i_{k_{\tau_1}^{(1)}};\; i_{k_1^{(2)}} \gtreqless i_{k_2^{(2)}} \gtreqless i_{k_3^{(2)}} \gtreqless \ldots \gtreqless i_{k_{\tau_2}^{(2)}}, \ldots;\; i_{k_1^{(r)}} \gtreqless i_{k_2^{(r)}} \gtreqless i_{k_3^{(r)}} \gtreqless \ldots \gtreqless i_{k_{\tau_r}^{(r)}}$$

ist, wo keiner der angeführten Indices der festen Indexreihe angehört und σ unter den ganzen Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ gerade sind.

Alsdann ist

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1} = 1, 2, 3, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{2m}^{(n)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{2m}^{(n)} = n}{}' \; \prod_1^{2m}{}'_{\mu} \left(i^{(1)}_\mu, i^{(2)}_\mu, \ldots, i^{(n)}_\mu\right) \prod_1^{r}{}_{\lambda} \left(i^{(1)}_{k_1^{(\lambda)}}, i^{(2)}_{k_1^{(\lambda)}}, \ldots, i^{(n)}_{k_1^{(\lambda)}}\right)_\lambda a_{1, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{2m}^{(1)}}\, a_{2, i_1^{(2)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_{2m}^{(2)}} \cdots a_{n, i_1^{(n)}, i_2^{(n)}, \ldots, i_{2m}^{(n)}}$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass alle Indices i_ν, deren Stellenzeiger eine der Zahlen $k^{(\lambda)}_1, k^{(\lambda)}_2, \ldots, k^{(\lambda)}_{\tau_\lambda}$ ist, für jeden der angeführten Werthe des λ denselben Werth haben, während die Marke am Productzeichen angibt, dass μ keinen der eben angegebenen $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_r$ Werthe annehmen darf. Führt man in der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden $n(2m+1-\tau_1-\tau_2-\ldots-\tau_r+r)$-fachen Summe zunächst die Summation in Bezug auf jene σ von den Indices $k^{(1)}_1, k^{(2)}_1, \ldots, k^{(r)}_1$ aus, für welche der zugehörige Exponent τ_k gerade ist, so erhält man eine Permanente n-ter Ordnung vom Range $\sigma+1$, und summirt man sodann in Bezug auf die übrigen Indices, so ergibt sich ein Ausdruck, der aus einer Determinante n-ter Ordnung vom Range $2m+1-\tau_1-\tau_2\ldots\tau_r+r-\sigma$ dadurch entsteht, dass die einzelnen Producte von n Elementen in der Entwicklung derselben durch die eben genannten Permanenten ersetzt werden. Nennt man diesen Ausdruck kurz eine Determinantenpermanente der Ordnung n vom Range $2m+1-\tau_1-\tau_2-\ldots-\tau_r+r-\sigma$ und dem Grade $\sigma+1$, so erhält man den Satz:

Sind alle Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}}$ einer Determinante n-ter Ordnung und $(2m+1)$-ten Ranges gleich Null in denen

$$i_{k_1^{(1)}} \gtreqless i_{k_2^{(1)}} \gtreqless i_{k_3^{(1)}} \gtreqless \ldots \gtreqless i_{k_{\tau_1}^{(1)}};\; i_{k_1^{(2)}} \gtreqless i_{k_2^{(2)}} \gtreqless i_{k_3^{(2)}} \gtreqless \ldots \gtreqless i_{k_{\tau_2}^{(2)}};\ldots;\; i_{k_1^{(r)}} \gtreqless i_{k_3^{(r)}} \gtreqless \ldots \gtreqless i_{k_{\tau_r}^{(r)}}$$

ist, wo keiner der angegebenen Indices der festen Indexreihe angehört und σ von den ganzen Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ gerade sind, so ist dieselbe gleich einer Determinantenpermanente der Ordnung n vom Range $2m+1-\tau_1-\tau_2-\ldots-\tau_r+r-\sigma$ und dem Grade $\sigma+1$.

Berücksichtigt man die bekannte Eigenschaft der Determinanten ungeraden Ranges rücksichtlich der Gleichsetzung aller festen Indices und die in dieser Mittheilung abgeleitete analoge der Permanenten, so erhält man aus diesem Satze das neue Theorem:

Sind alle Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}}$ einer Determinante n-ter Ordnung und $(2m)$-ten Ranges gleich Null, in denen

$$i_{k_1^{(1)}} \gtrless i_{k_2^{(1)}} \gtrless i_{k_3^{(1)}} \gtrless \ldots \gtrless i_{k_{\tau_1}^{(1)}};\; i_{k_1^{(2)}} \gtrless i_{k_2^{(2)}} \gtrless i_{k_3^{(2)}} \gtrless \ldots \gtrless i_{k_{\tau_2}^{(2)}}; \ldots ;\; i_{k_1^{(r)}} \gtrless i_{k_2^{(r)}} \gtrless i_{k_3^{(r)}} \gtrless \ldots \gtrless i_{k_{\tau_r}^{(r)}}$$

ist, so ist dieselbe gleich einer Determinantenpermanente der Ordnung n vom Range $2m+1-\tau_1-\tau_2-\ldots\tau_r+r-\sigma$ und dem Grade σ, wenn σ die Anzahl der geraden unter den ganzen Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ ist.

Speciell ergeben sich aus diesen Sätzen die zwei von mir früher[1]) in anderer Weise ermittelten Gleichungen

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1} = 1, 2, 3, \ldots, n)} = \left| a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{m+1}, i_2, i_3, \ldots, i_{m+1}} \right|^{+}_{(i_1, i_2, \ldots, i_{m+1} = 1, 2, 3, \ldots, n)}$$

$$(a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}} = 0 \; \{i_2 \gtrless i_{m+2},\; i_3 \gtrless i_{m+3}, \ldots, i_{m+1} \gtrless i_{2m+1}\})$$

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2m} = 1, 2, 3, \ldots, n)} = \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|^{+}_{(i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, 3, \ldots, n)}$$

$$(a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}} = 0 \; \{i_1 \gtrless i_{m+1},\; i_2 \gtrless i_{m+2}, \ldots, i_m \gtrless i_{2m}\}).$$

Den speciellen Fall $m = 1$ der ersten Gleichung hat bekanntlich Herr R. F. Scott[2]) gefunden.

Da die Permanenten sich als specielle Fälle von Determinanten höheren Ranges erwiesen haben, so lassen sich Multiplicationstheoreme derselben aus dem Multiplicationstheoreme der Determinanten ableiten. Dasselbe liefert zunächst die Gleichung

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|^{+} \cdot \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_s} \right|^{\cdot}_{(i_1, i_2, \ldots, i_m, j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, 3, \ldots, n)} = \left| A_{k_1, k_2, \ldots, k_{2m+2s-4}} \right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{2m+2s-4} = 1, 2, 3, \ldots, n)}$$

wo

$$A_{k_1, k_2, \ldots, k_{2m+2s-4}} = 0 \; (k_2 \gtrless k_m,\; k_3 \gtrless k_{m+1}, \ldots, k_{\alpha-1} \gtrless k_{m+\alpha-2},\; k_{\alpha+1} \gtrless k_{m+\alpha-1}, \ldots, k_{m-1} \gtrless k_{2m-3},$$

$$k_{2m-1} \gtrless k_{2m+s-2}, k_{2m} \gtrless k_{2m+s-1}, \ldots, k_{2m+\beta-4} \gtrless k_{2m+s+\beta-5}, k_{2m+\beta-2} \gtrless k_{2m+s+\beta-4}, \ldots, k_{2m+s-3} \gtrless k_{2m-2s-5}; k_\alpha \gtrless k_{2m+\beta-3})$$

$$A_{k_1,k_2,\ldots,k_{\alpha-1},k_\alpha,k_{\alpha+1},\ldots,k_{m-1},k_2,k_3,\ldots,k_{\alpha-1},k_{\alpha+1},\ldots,k_{m-1},k_m,k_{m+1},k_{m+2},\ldots,k_{m+\beta-2},k_\alpha,k_{m+\beta},\ldots,k_{m+s-2},k_{m+1},k_{m+2},\ldots,k_{m+\beta-2},k_{m+\beta},\ldots,k_{m+s-2}} =$$

$$= a_{k_1,k_2,\ldots,k_{\alpha-1},k_\alpha,k_{\alpha+1},\ldots,k_{m-1},k_2,h_3,\ldots,k_{\alpha-1},k_\alpha,k_{\alpha+1},\ldots,k_{m-1}}\, b_{k_m,k_{m+1},\ldots,k_{m+\beta-2},k_\alpha,k_{m+\beta},\ldots,k_{m+s-2},k_{m+1},k_{m+2},\ldots,k_{m+\beta-2},k_\alpha,k_{m+\beta},\ldots,k_{m+s-2}}$$

ist und die Indices k_α und k_β nicht an der Stelle der festen Indices stehen dürfen.

Die eben ermittelte Gleichung liefert das Theorem:

Das Product von zwei Permanenten n-ter Ordnung und m-ten bez. s-ten Ranges lässt sich als eine cubische Determinantenpermanente n-ter Ordnung vom Grade $m+s-3$ darstellen.

Auf demselben Wege lässt sich der folgende, übrigens unmittelbar aus der Definitionsgleichung der Permanenten ersichtliche Satz ableiten:

Das Product von zwei Permanenten n-ter Ordnung und m-ten bez. s-ten Ranges ist eine Permanente n-ter Ordnung vom Range $m+s-1$.

3. Mit Hilfe des Multiplicationstheorems der Determinanten höheren Ranges beweist man ferner leicht die folgenden Sätze:

---

[1]) „Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges." Diese Denkschriften 46. Band.

[2]) „On some Forms of Cubic Determinants." Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. XIII.

Ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges die Elemente von $\rho \leqq n$ zu beliebigen σ-ten Indices $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ gehörigen Reihen $a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, \sigma_\lambda, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots k_m = 1, 2, 3, \ldots, n;$ $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$ durch die Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\rho} a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma_\lambda, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m} \psi_o([\lambda, \mu]) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$$

wo bei ungeraden m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, $[\lambda, \mu]$ der grösste gemeinsame Theiler der ganzen Zahlen λ und μ und $\psi_o([\lambda, \mu])$ die Anzahl der Divisoren desselben ist, so ändert sich die Determinante nicht.

Eine Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges wird mit $\prod_{1}^{s} \rho_\lambda 2^{\rho_\lambda - 1}(2-\rho_\lambda)$ multiplicirt, wenn man in ρ_1 zu beliebigen σ_1-ten Indices der ursprünglichen, ρ_2 zu beliebigen σ_2-ten Indices der durch den eben genannten Process entstehenden neuen Determinante $, \ldots,$ ρ_s zu beliebigen σ_s-ten Indices der vorletzten Determinante gehörigen Reihen von den Elementen einer jeden Reihe die Summe der entsprechenden Elemente der $\rho_\lambda - 1$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$ anderen subtrahirt, wo bei ungeradem m die feste Indexreihe von der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$-ten verschieden ist.

Ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges die Elemente von $\rho \leqq n$ zu beliebigen σ-ten Indices $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ gehörigen Reihen $a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, \sigma_\lambda, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m =$ $= 1, 2, 3, \ldots, n;$ $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$ durch die Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\rho} a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma_\lambda, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m} \frac{\varphi(\Delta, [\lambda, \mu])}{\tau_1} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$$

wo bei ungeradem m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, $\varphi(\Delta, x)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl x durch das System der binären quadratischen Formen der Fundamentaldiscriminante Δ, $[\lambda, \mu]$ der grösste gemeinsame Theiler der ganzen Zahlen λ und μ und τ_1 die Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst ist, so ist die neue Determinante gleich Null, wenn Δ nicht zu allen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots \rho$ theilerfremd ist.

Ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges die Elemente von $\rho \leqq n$ zu beliebigen σ-ten Indices $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ gehörigen Reihen $a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, \sigma_\lambda, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m =$ $= 1, 2, 3, \ldots, n;$ $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$ durch die Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\rho} a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma_\lambda, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m} \omega([\lambda, \mu]) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$$

wo bei ungeradem m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, $[\lambda, \mu]$ der grösste gemeinsame Theiler der beiden ganzen Zahlen λ, μ und $\omega([\lambda, \mu])$ die Anzahl der Zerlegungen desselben in ein Product von zwei theilerfremden Factoren ist, so ist die dadurch entstehende Determinante gleich der ursprünglichen oder Null, je nachdem $\rho < 4$ oder $\rho \geqq 4$ ist.

Ersetzt man in der Determinante n-ter Ordnung und $(2p)$-ten Ranges $a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p}} \,|\, (i_1, i_2, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, n)$, wo

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p}} = 0 \qquad (i_1 \gtrless i_{p+1},\ i_2 \gtrless i_{p+2}, \ldots, i_p \gtrless i_{2p})$$

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_p, i_1, i_2, \ldots, i_p} = 1$$

ist, die Elemente von $\rho \leqq n$ zu beliebigen σ-ten Indices $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ gehörigen Reihen $a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, \sigma_\lambda, k_{\sigma+1}, \ldots, k_{2p}}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, n;$ $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$ durch die Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\rho} a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma_\lambda, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_{2p}} \psi_k([\lambda, \mu]) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$$

wo $[\lambda, \mu]$ der grösste gemeinschaftliche Theiler der zwei ganzen Zahlen λ, μ und $\psi_k([\lambda, \mu])$ die Summe der k-ten Potenzen der Theiler desselben ist, so ist die so entstehende Determinante gleich $(n!)^{p-1}(\rho!)^k$.

Ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges in ρ_1 zu beliebigen σ_1-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente einer jeden Reihe durch die Summe der entsprechenden Elemente der ρ_1-1 anderen, in der dadurch entstehenden Determinante in ρ_2 zu beliebigen σ_2-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente jeder Reihe durch die Summe der entsprechenden Elemente der ρ_2-1 übrigen, ..., endlich in der vorletzten durch Fortsetzung dieses Verfahrens sich ergebenden Determinante in ρ_s zu beliebigen σ_s-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente jeder Reihe durch die Summe der entsprechenden Elemente der ρ_s-1 anderen, wo bei ungeradem m die σ_1-ten, σ_2-ten, ..., σ_s-ten Indices nicht die feste Indexreihe vorstellen, so ist die schliesslich entstehende Determinante gleich der ursprünglichen multiplicirt mit $\prod_{\lambda=1}^{s} (-1)^{\rho_\lambda-1}(\rho_\lambda-1)$.

Ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges die Elemente von $\rho \leqq n$ zu beliebigen σ-ten Indices $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ gehörigen Reihen $a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, \sigma_\lambda, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots k_m = 1, 2, 3, \ldots, n;$ $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$ durch diejenigen quadratischen Determinanten $(a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma_\lambda, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m};$ $|b_{i,k}|_{(i, k = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\rho)})$, welche dadurch entstehen, dass in der quadratischen Determinante $|b_{i,k}|_{(i, k = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho)}$ die ρ Elemente der λ-ten Verticalreihe durch die Grössen $a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma_\lambda, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$ ersetzt werden, so ist die neue Determinante gleich dem Producte aus der ursprünglichen und der $(\rho-1)$-ten Potenz der quadratischen Determinante $|b_{i,k}|_{(i, k = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho)}$. Für ein ungerades m stellen hierbei weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vor.

Ist $\rho = n$, so entsteht die specielle Formel

$$\left|\left(a_{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m}; |b_{i,k}|_{(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)}\right|_{(k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-1}, \sigma, k_\tau, \ldots, k_{\sigma-1}, k_{\sigma+1}, \ldots, k_m = 1, 2, 3, \ldots, n)} =$$
$$= |b_{i,k}|^{n-1}_{(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)} \cdot |a_{k_1, k_2, \ldots, k_m}|_{(k_1, k_2, \ldots, k_m = 1, 2, 3, \ldots, n)}.$$

Diese Gleichung hat für quadratische Determinanten Herr W. Kretkowski[1]) ermittelt.

Das zweite von diesen Theoremen haben die Herren C. L. Landré[2]) und Fouret[3]) für quadratische Determinanten im Allgemeinen abgeleitet, während Herr Glaisher[4]) es für die specielle Determinante $|a_{i-k}|_{(i, k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1)}$ bewies. Das vorletzte Theorem enthält als ganz speciellen Fall den folgenden von Glaisher a. a. O. aufgestellten Satz:

Die Determinante $|a_{i-k}|_{(i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)}$ ist so beschaffen, dass ihr Werth mit $(-1)^{n-1}(n-1)$ multiplicirt wird, wenn man ihre Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ durch die Summen $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$, $a_0+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}$, ..., $a_0+a_1+\ldots+a_{n-2}$ ersetzt.

II. Über diejenigen Determinanten höheren Ranges, welche aus einer beliebigen allgemeinen Determinante hervorgehen, wenn man in der zu einem bestimmten an festgesetzter Stelle befindlichen Index gehörigen Reihe die entsprechenden Elemente der zu einer an anderer Stelle liegenden Index gehörigen Reihen in

---

1) „Beweis eines Satzes über zwei allgemeine Determinanten." Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften in Krakau, IX. Bd. Der Inhalt dieser in polnischer Sprache veröffentlichten Mittheilung ist mir nur durch das Referat in den „Fortschritten der Mathematik" bekannt.

2) Eene stelling omtrent determinanten." Nieuw Archief voor wiskunde, VI, 208—211.

3) „Sur une mode de transformation des déterminants". Bulletin de la société de mathématiques de la France; t. 14, p. 146—151.

4) „On some algebrical expressions which are unaltered by certain substitutions." The Messenger of mathematics, (2) X.

vorgeschriebener Weise vertauscht, lassen sich mit Hilfe von früher bei verschiedenen Gelegenheiten von mir aufgestellten Sätzen eine Reihe von Theoremen ableiten, von denen in den folgenden Zeilen einige angegeben werden.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler der ganzen Zahl $1 < \mu \leqq n$ und nur diese zu Wurzeln, und ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null, wenn k durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, und durch die mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem k eine gerade oder ungerade Anzahl von Primfactoren enthält, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, so ist die Summe der so entstehenden n Determinanten gleich Null.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler der ganzen Zahl $1 \leqq \mu \leqq n$ und nur diese zu Wurzeln und ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch die mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente der zum σ-ten Index $f(k)$ gehörigen Reihe, je nachdem k aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt ist, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, so ist die Summe der so entstehenden n-Determinanten gleich der ursprünglichen Determinante oder Null, je nachdem μ das Quadrat einer ganzen Zahl ist oder nicht.

Ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch die entsprechenden Elemente des Index $n+1-k$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo bei ungeradem m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, so ist die Summe der so entstehenden n Determinanten gleich der ursprünglichen Determinante oder Null, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler der ganzen Zahl $1 \leqq \mu \leqq n$ und nur diese zu Wurzeln und ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null oder die mit k^λ multiplicirten entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem k durch eine r-te Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, so ist die Summe der so entstehenden n Determinanten gleich dem Producte aus der ursprünglichen Determinante und der Summe der λ-ten Potenzen derjenigen Theiler der ganzen Zahl μ, welche durch keine r-te Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler der ganzen Zahl $1 \leqq \mu \leqq n$ und nur diese zu Wurzeln und ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null, wenn $k = 1$ ist oder mindestens einen

Primfactor in einer höheren als der zweiten oder mindestens zwei Primzahlen in einer höheren als der ersten Potenz enthält, durch die entsprechenden mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen Elemente des Index $f(k)$, je nachdem die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von k gerade oder ungerade ist, falls k eine Primzahl in der zweiten Potenz enthält, endlich durch die mit der Anzahl der Primfactoren von k multiplicirten, mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem diese Anzahl ungerade oder gerade ist, falls k durch kein Quadrat theilbar ist, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, so ist die Summe der so entstehenden n Determinanten gleich der ursprünglichen Determinante oder Null, je nachdem μ eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler der ganzen Zahl $1 \leqq \mu \leqq n$ und nur diese zu Wurzeln, und ersetzt man in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch 0, wenn k entweder einen quadratischen Theiler (ausser 1) besitzt oder zur Fundamentaldiscriminante Δ nicht theilerfremd ist, und durch die durch k dividirten, mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem der dem Legendre-Jacobi'schen Symbol $\left(\frac{\Delta}{k}\right)$ zugehörige Exponent von -1 nach dem Modul 2 der Anzahl der verschiedenen Primfactoren von k congruent ist oder nicht, in allen anderen Fällen, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt jede der so entstehenden n Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser Quotienten gleich dem Producte aus der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen und dem natürlichen Logarithmus der Fundamentaleinheit der Discriminante $\Delta\mu^2$ dividirt durch den natürlichen Logarithmus der zur Pell'schen Gleichung gehörigen Einheit

$$E(\omega) = e^{(\sqrt{\Delta}) \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda}}$$

wo $(\sqrt{\Delta})$ der Hauptwerth von $\sqrt{\Delta}$ und $\omega = e^{\frac{2\pi i}{(\sqrt{\Delta})}}$ ist.

Ist Δ eine Fundamentaldiscriminante,

$$e^{(\sqrt{\Delta}) \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda}} = \frac{t + u\sqrt{\Delta}}{r}$$

die zur Pell'schen Gleichung gehörige Einheit, hat ferner die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n) \qquad (n \geqq u)$$

sämmtliche Theiler der ganzen Zahl u und nur diese zu Wurzeln, ersetzt man endlich in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null, wenn k entweder einen quadratischen Theiler (ausser 1) oder einen Primtheiler der Fundamentaldiscriminante Δ besitzt und durch die durch k dividirten, mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem der dem Legendre-Jacobi'schen Symbol $\left(\frac{\Delta}{k}\right)$ zugehörige Exponent von -1 nach dem Modul 2 der Anzahl der verschiedenen Primfactoren von k congruent ist oder nicht, in allen anderen Fällen, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt jede der so entstehenden n Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser n Quotienten gleich der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen der Discriminante Δn^2.

Ersetzt man in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch die entsprechenden Elemente des Index k^2+k-D für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind, für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen und bei doppelt geradem n $D \equiv 1 \pmod{4}$, bei mindestens dreifach geradem aber $D \equiv 1 \pmod{8}$ ist, und dividirt jede der so entstehenden n Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser Quotienten gleich $2^{\mu} \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{ \left(\frac{D}{p_\lambda}\right) + \left(\frac{D}{p_\lambda}\right)^2 \right\}$, wo $p_1, p_2, \ldots, p_r$ alle ungeraden Primfactoren von n sind und μ die Werthe 0, 1, 2 erhält, je nachdem n ungerade oder einfach gerade, doppelt gerade, oder endlich mindestens dreifach gerade ist.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \pmod{n}$$

sämmtliche Theiler der ganzen Zahl $1 \leqq \mu \leqq n$ und nur diese zu Wurzeln und ersetzt man in einer Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null, wenn k einen Primtheiler der Fundamentaldiscriminante Δ besitzt, und durch die mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem das Legendre-Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{k}\right)$ den Werth $+1$ oder -1 hat, falls k zu Δ theilerfremd ist, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, so ist die Summe der so entstehenden n Determinanten gleich dem Producte aus der ursprünglichen Determinante und der Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl μ durch das System der binären quadratischen Formen der Fundamentaldiscriminante Δ dividirt durch die Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst.

Haben die Systeme a_{i+k} und b_{i+k} $(i, k = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Bezug auf den ungeraden Primzahlmodul p denselben Rang und ersetzt man in einer Determinante p-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe einmal durch die entsprechenden Elemente des Index

$$a_0 k^{p-2} + a_1 k^{p-3} + \ldots + a_{p-4} k^2 + (a_{p-3}+1) k + a_{p-2}$$

und ein anderes Mal durch die entsprechenden Elemente des Index

$$b_0 k^{p-2} + b_1 k^{p-3} + \ldots + b_{p-4} k^2 + (b_{p-3}+1) k + b_{p-2}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots, p$, wo a_{p-2} und b_{p-2} zu p theilerfremd sind, alle Indices nach dem Modul p betrachtet werden und bei ungeradem m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, so geben die jedesmal entstehenden p Determinanten die gleiche Summe.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \pmod{n}$$

sämmtliche Theiler einer dem Intervalle $\mu - \eta + 1 \ldots \mu + \eta \leqq n$ angehörigen ganzen Zahl und nur diese zu Wurzeln, wo

$$\lim_{\eta,\,\mu=\infty} \frac{\eta}{\mu} = 0$$

$$\lim_{\eta,\,\mu=\infty} \frac{\sqrt[r]{\mu}\log\mu}{\eta} = 0$$

ist, ersetzt man ferner in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null oder die entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem k durch eine r-te Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt jede der so entstehenden Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser Quotienten im Mittel gleich

$$\frac{1}{\zeta(r)}\left\{\log\mu + 2C + \frac{r\mathfrak{F}_r}{\zeta(r)}\right\},$$

wo C die Euler'sche Constante des Integrallogarithmus

$$\zeta(r) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^r}$$

$$\mathfrak{F}_r = \sum_{x=2}^{x=\infty} \frac{\log x}{x^r}$$

ist.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \pmod{n}$$

sämmtliche Theiler einer n nicht übersteigenden s-zifferigen Zahl und nur diese zu Wurzeln, ersetzt man ferner in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null oder die entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem k durch eine r-te Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt jede der so entstehenden Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser Quotienten für sehr grosse s im Mittel gleich

$$\frac{1}{\zeta(r)}\left\{s\log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 + \frac{r\mathfrak{F}_r}{\zeta(r)}\right\}.$$

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \pmod{n}$$

sämmtliche Theiler einer im Intervalle $\mu - \eta + 1 \ldots \mu + \eta \leqq n$ befindlichen ganzen Zahl und nur diese zu Wurzeln, wo

$$\lim_{\eta,\,\mu=\infty} \frac{\eta}{\mu} = 0$$

$$\lim_{\eta,\,\mu=\infty} \frac{\sqrt{\mu}\log\mu}{\eta} = 0$$

ist, ersetzt man ferner in einer nicht verschwindenen Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten

Index k gehörigen Reihe durch die entsprechenden Elemente des Index $f(k)$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und bei ungeradem m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt jede der so entstehenden Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser Quotienten im Mittel gleich $\log \mu + 2C$.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler einer n nicht übersteigenden s-zifferigen Zahl und nur diese zu Wurzeln, ersetzt man ferner in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch die entsprechenden Elemente des Index $f(k)$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt die so entstehenden n Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser Quotienten für sehr grosse s im Mittel gleich $s \log 10 + \dfrac{\log 10}{9} + 2C - 1$.

Ersetzt man in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch die entsprechenden Elemente des Index $k^2 + k - \Delta$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo Δ eine negative Fundamentaldiscriminante ist, alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen und dividirt jede der so entstehenden n Determinanten durch die ursprünglichen, so ist die mit der Quadratwurzel aus dem absoluten Betrage von Δ multiplicirte Summe dieser Quotienten bei sehr grossem n im Mittel gleich der Anzahl der Classen binärer Formen der Fundamentaldiscriminante Δ.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler einer im Intervalle $\mu - \eta + 1 \ldots \mu + \eta \leqq n$ befindlichen ganzen Zahl und nur diese zu Wurzeln, wo

$$\lim\nolimits_{\eta,\, \mu = \infty} \frac{\eta}{\mu} = 0$$

$$\lim\nolimits_{\eta,\, \mu = \infty} \frac{\log \mu}{\eta} = 0$$

ist, ersetzt man ferner in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null, wenn k einen quadratischen Factor (ausser 1) besitzt und durch die mit der grössten in $\dfrac{n}{k}$ enthaltenen ganzen Zahl multiplicirten, mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem k aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und für ein ungerades m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt jede der so entstehenden Determinanten durch die ursprüngliche, so ist die Summe dieser Quotienten im Mittel gleich $\dfrac{12\mu}{\pi^2}$.

Hat die Congruenz

$$f(k) \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, n)$$

sämmtliche Theiler einer dem Intervalle $\mu-\eta+1\ldots\mu+\eta\leqq n$ angehörigen ganzen Zahl und nur diese zu Wurzeln, wo

$$\lim_{\eta,\,\mu=\infty}\frac{\eta}{\mu}=0$$

$$\lim_{\eta,\,\mu=\infty}\frac{\sqrt{\mu}}{\eta}=0$$

ist, ersetzt man ferner in einer nicht verschwindenden Determinante n-ter Ordnung und m-ten Ranges der Reihe nach in jeder der zu den verschiedenen τ-ten Indices gehörigen Reihen die Elemente der zum σ-ten Index k gehörigen Reihe durch Null, wenn k mit der negativen Fundamentaldiscriminante Δ einen Theiler gemein hat und durch die mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen entsprechenden Elemente des Index $f(k)$, je nachdem das Legendre-Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{k}\right)$ den Werth $+1$ oder -1 besitzt, falls h zu Δ theilerfremd ist, für $k=1, 2, 3,\ldots, n$, wo alle Indices nach dem Modul n zu nehmen sind und bei ungeradem m weder die σ-ten noch die τ-ten Indices die feste Indexreihe vorstellen, und dividirt die so entstehenden n Determinanten durch die mit 2π multiplicirte ursprüngliche Determinante, so ist die mit der Quadratwurzel aus dem absoluten Betrage von Δ und der Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst multiplicirte Summe dieser Quotienten für sehr grosse μ im Mittel gleich der Anzahl der Classen binärer Formen der Fundamentaldiscriminante Δ.

III. Ich will schliesslich noch diese Gelegenheit benützen, um die Verallgemeinerung eines von Clausius herrührenden Satzes der Elektricitätslehre mitzutheilen. Mit Hilfe der von mir und Herrn Sonine bewiesenen Relation

$$\int_0^\infty e^{-hx}J^\nu(qx)x^\nu\,dx=\frac{\Pi(2\nu)}{2^\nu\Pi(\nu)}\frac{q^\nu}{(q^2+h^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\qquad\left(\nu>-\frac{1}{2}\right),$$

welche eine Verallgemeinerung der bekannten Lipschitz'schen Relation ist, kann man leicht eine Reihe von Sätzen der Potentialtheorie auf den Fall ausdehnen, dass das Wirkungsgesetz nicht das Newton'sche ist, sondern dass die Wirkung der Kräfte irgend einer Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist. Von den vielen hieher gehörigen Sätzen lässt sich besonders elegant das von Clausius im 86. Bande der Poggendorff'schen Annalen abgeleitete Theorem verallgemeinern, nach welchem die Dichte der auf einer Kreisscheibe mit dem Radius R vertheilten Elektricität, welche sich ohne äussere Einflüsse im Gleichgewichte befindet, im Punkte r, φ gleich $\frac{c}{\pi^2\sqrt{R^2-r^2}}$ ist. Verbindet man nämlich die von mir wiederholt abgeleitete Gleichung

$$J^{n+\nu}(\rho_1 y)\,J^{n+\nu}(\rho_2 y)=\frac{2^{\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n)\,(\rho_1\rho_2 y)^\nu}{\pi\,\Pi(n+2\nu-1)}\int_0^\pi(\rho_1^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi+\rho_2^2)^{-\frac{\nu}{2}}J^\nu\left(y\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi}\right).$$
$$.\,C_n^\nu(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi$$

mit der eben erwähnten Relation, so entsteht die Beziehung

$$\frac{\pi\,\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\,\Pi(2\nu-1)\,\rho_2^\nu}\int_0^R\!\!\int_0^\infty e^{-|a|x}J^{n+\nu}(\rho_1 x)\,J^{n+\nu}(\rho_2 x)\,\rho_1^{-\nu+1}f(\rho_1)\,dx\,d\rho_1=\int_0^R\!\!\int_0^\pi\frac{f(\rho_1)\,C_n^\nu(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\,\rho_1\,d\rho_1\,d\varphi}{\sqrt{(a^2+\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi)^{2\nu+1}}}$$
$$\left(\nu>-\frac{1}{2}\right).$$

Setzt man in derselben $n=0$, so wird ersichtlich das Doppelte des auf der rechten Seite stehenden Doppelintegrals, die Kräftefunction $V_{\nu+1}$ einer mit der Masse von der Flächendichtigkeit $f(\rho_1)\,|\sin\varphi|^{2\nu}$ belegten

Kreisscheibe vom Radius R, deren Wirkung der $2(\nu+1)$-ten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist, und daher hat man die Formel

$$V_{\nu+1} = \frac{\pi}{\rho_2^\nu}\int_0^R\int_0^\infty e^{-|\alpha|x} J^\nu(\rho_1 x)\, J^\nu(\rho_2 x)\, f(\rho_1)\, \rho_1^{-\nu+1}\, d\rho_1\, dx.$$

Setzt man speciell

$$f(\rho_1) = \frac{2c\,\Pi(\nu)}{\pi^{3/2}\,\Pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\,\rho_1^{2\nu}\,(R^2-\rho_1^2)^\mu$$

und berücksichtigt, dass

$$\int_0^R J^\nu(\rho_1 x)\,\rho_1^{\nu+1}\,(R^2-\rho_1^2)^\mu\, d\rho_1 = 2^\mu\,\Pi(\mu)\, R^{\nu+\mu+1}\, J^{\nu+\mu+1}(Rx)$$

($\mu > -1$, $\nu+1$ und $\nu+\mu+1$ nicht negativ ganzzahlig)

ist, so ergibt sich die Relation

$$V_{\nu+1} = \frac{2^{\mu+1}\,\Pi(\mu)\,\Pi(\nu)\,c}{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\rho_2^\nu}\int_0^\infty e^{-|\alpha|x} J^\nu(\rho_2 x)\, J^{\nu+\mu+1}(Rx)\,\frac{dx}{x^{\mu+1}}$$

welche eine Verallgemeinerung der interessanten, von den Herren H. Weber[1]) und Beltrami[2]) aufgestellten Ausdruckes der Potentialfunction einer homogenen Kreisscheibe von der Flächendichtigkeit c und dem Radius R vorstellt, der übrigens auch als specieller Fall in der allgemeinen leicht zu beweisenden Relation

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}\, x^{\rho-\nu}\, J^\nu(\alpha x)\, J^\rho(\gamma x)\, dx = \frac{\alpha^\nu\,\Pi(\rho+\mu)\,\gamma^\mu}{2^{\mu+\nu}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(\mu)}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{(\beta-\alpha y i)^{\rho+\mu+1}}\,\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{\rho+\mu+1}{2},\ \frac{\rho+\mu}{2}+1,\ \mu+1,\ -\frac{\gamma^2}{(\beta-\alpha y i)^2}\right) dy \qquad (\rho+\mu+1>0)$$

enthalten ist.

Auf der Kreisscheibe nimmt $V_{\nu+1}$, wie man leicht findet, den Werth

$$\frac{\Pi(\mu)\, R^{2\mu+1} c}{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\, F\left(\nu+\frac{1}{2},\ -\mu-\frac{1}{2},\ \nu+1,\ \left(\frac{\rho_2}{R}\right)^2\right)$$

an, und wird demnach speciell für $\mu = -\frac{1}{2}$ gleich c.

Man hat daher den Satz:

Ist auf einer Kreisscheibe mit dem Radius R Masse, deren Wirkung der $2(\nu+1)$-ten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist, so vertheilt, dass die Flächendichtigkeit im Punkte r, φ gleich $\dfrac{2c\,\Pi(\nu)\, r^{2\nu}\,|\sin\varphi|^{2\nu}}{\pi^{3/2}\,\Pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\sqrt{R^2-r^2}}$ ist, so hat die Kräftefunction auf derselben den constanten Werth c.

---

[1]) „Über die Bessel'schen Functionen und ihre Anwendung in der Theorie der elektrischen Ströme." Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 75. Band.

[2]) „Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche." Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie IV, Tomo II.

Ich will endlich noch erwähnen, dass die von Herrn **Lerch** unlängst in den Monatsheften der Mathematik und Physik neuerlich, allerdings nur für $n=0$, bewiesene Formel **Sonine's**

$$J^n(x)=\sqrt{2\pi}\,\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)x^n}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(m-n-1)}\int_0^\infty J^{m-n-\frac{1}{2}}(y)\,y^{m-n-\frac{1}{2}}\frac{J^m(x+y)}{(x+y)^m}\,dy \qquad \left(m>n>-\frac{1}{2}\right)$$

ein specieller Fall der folgenden, auf Grund von Relationen, die ich früher abgeleitet habe, leicht zu beweisenden Beziehung

$$\int_0^\infty J^{m-n-\frac{1}{2}}(y)\,y^{m-n-\frac{1}{2}}(x^2+y^2-2xy\cos\vartheta)^{-\frac{m}{2}}J^m\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\vartheta}\right)C_{n_1}^m\left(\frac{-y+x\cos\vartheta}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\vartheta}}\right)dy=$$

$$=(-i)^{n_1}\frac{\Pi(m-n-1)}{2^{n-m+1}\pi}(x\sin\vartheta)^{-\frac{2m-1}{2}}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi\cos\vartheta}J^{\frac{2m-1}{2}}(x\sin\vartheta\sin\varphi)\,C_{n_1}^m(\cos\varphi)\sin\varphi^{2n-m+\frac{1}{2}}\,d\varphi$$

$$\left(m>n>-\frac{1}{2}\right)$$

ist, sowie, dass man durch geeignete Specialisirung aus der allgemeinen Relation

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}J^m(\gamma x)\,J^n(\gamma x)\,x^{\rho-\nu}J^\nu(\alpha x)\,dx=\frac{\alpha^\nu\,\Pi(m+n+\rho)\,\gamma^{m+n}}{\pi^{3/2}\,2^{\nu-1}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(m+n)}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(m-n)\varphi\cos^{m+n}\varphi\,.$$

$$.\,F\left(\frac{\rho+m+n+1}{2},\frac{\rho+m+n}{2}+1,m+n+1,-\frac{(2\gamma\cos\varphi)^2}{(\beta-\alpha y i)^2}\right)\frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dy\,d\varphi}{(\beta-\alpha y i)^{\rho+m+n+1}} \quad (\rho+m+n+1>0,\ m \text{ u. } n \text{ ganzzahlig})$$

mehrere theils neue, theils bekannte elegante Ausdrücke für gewisse Potentialfunctionen ableiten kann, und die Gleichung

$$\int_0^\infty [J^{n+\nu}(\rho y)]^2\frac{dy}{y}=\frac{\Pi(n+\nu-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+\nu+2}\,\Pi\left(\frac{n+\nu}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+\nu-1}{2}\right)} \qquad (\nu<{}^3/_2)$$

mittheilen, von der bisher nur einige specielle Fälle hervorgehoben wurden.