THEORIE DER SONNENFINSTERNISSE,

DER DURCHGÄNGE

DER UNTEREN PLANETEN VOR DER SONNE

UND DER

STERNBEDECKUNGEN FÜR EINEN GEGEBENEN ORT DER ERDE.

VON J. A. GRUNERT,
CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 9. JUNI MDCCCLIII.)

Erstes Capitel.

Vorläufige Betrachtungen[1]).

§. 1.

Wir legen im Folgenden ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Erde ist. Die Ebene der xy sei die Ebene des Erdäquators und der positive Theil der Axe der x sei von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Frühlingspunkte hin gerichtet; der positive Theil der Axe der y werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher die Erde sich um ihre Axe bewegt; der positive Theil der Axe der z gehe von dem Mittelpunkte der Erde nach ihrem Nordpole hin.

Die Erde betrachten wir als ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenes Sphäroid, so dass, wenn wir unter dieser Voraussetzung den Halbmesser des Erdäquators durch a, die halbe Erdaxe durch b bezeichnen, die Gleichung der Erdoberfläche

$$1)\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

ist, welche sich auf mannigfaltige Weise umgestalten lässt, wobei wir uns jedoch jetzt nicht aufhalten wollen, da diese Transformationen bekannt genug sind.

---

[1]) Sonnenfinsternisse, Planetendurchgänge und Sternbedeckungen sind in der folgenden Abhandlung kurz mit dem allgemeinen Namen „Bedeckungen“ bezeichnet worden.

Sei nun O ein beliebiger Punkt auf der Oberfläche der Erde, dessen geographische Breite, die man wohl auch zuweilen die geocentrische Breite dieses Punktes oder Ortes auf der Erdoberfläche zu nennen pflegt, wir durch φ bezeichnen, und als positiv oder als negativ betrachten wollen, je nachdem der Ort O auf der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt, wobei wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, dass der absolute Werth von φ niemals grösser als 90^0 ist. Der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte O auf ihrer Oberfläche gezogene Erdhalbmesser werde durch r bezeichnet. Die einem beliebigen, jedoch bestimmten absoluten Zeitmomente entsprechende, in Stunden ausgedrückte Sternzeit des Ortes O mag durch T bezeichnet werden. Dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit $15\ T$ der in Graden ausgedrückte Winkel, den die nach der Projection des Ortes O auf der Ebene der xy von dem Anfange der Coordinaten gezogene gerade Linie mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin, also nach dem Obigen im Sinne der Bewegung der Erde um ihre Axe, von 0 bis 360^0 zählt. Hieraus ergibt sich aber auf der Stelle mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung, dass, wenn X, Y, Z die Coordinaten des Ortes O auf der Erdoberfläche in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente, welchem die in Stunden ausgedrückte Sternzeit T des Ortes O entspricht, bezeichnen, in völliger Allgemeinheit

$$2)\quad \begin{cases} X = r\cos\varphi\cos 15\ T, \\ Y = r\cos\varphi\sin 15\ T, \\ Z = r\sin\varphi \end{cases}$$

ist.

§. 2.

Bezeichnen wir den Ort, für welchen die Ephemeriden, die wir allen unseren Rechnungen zu Grunde zu legen beabsichtigen, berechnet sind, durch A, und die demselben absoluten Zeitmomente, welchem die in Stunden ausgedrückte Sternzeit T des Ortes O entspricht, entsprechende, gleichfalls in Stunden ausgedrückte Sternzeit des Ortes A durch $\mathfrak{T}$, die in Graden ausgedrückte Länge des Ortes O in Bezug auf den Meridian des Ortes A als Anfang der Längen, indem wir die Längen von dem Meridiane des Ortes A an im Sinne der Bewegung der Erde um ihre Axe von 0 bis 360^0 zählen, aber durch L, so erhellet durch eine ganz leichte Betrachtung auf der Stelle, dass immer entweder

$$15\ \mathfrak{T} = 15\ T - L$$

oder

$$360^0 - 15\ \mathfrak{T} = L - 15\ T,$$

also entweder

$$15\ T = L + 15\ \mathfrak{T}$$

oder

$$15\ T = L + 15\ \mathfrak{T} - 360^0,$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$\cos 15\ T = \cos(L + 15\ \mathfrak{T}),$$
$$\sin 15\ T = \sin(L + 15\ \mathfrak{T})$$

ist. Daher sind nach dem vorhergehenden Paragraphen die Coordinaten X, Y, Z des Ortes O in dem absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeit T des Ortes O oder, was dasselbe ist, die Sternzeit $\mathfrak{T}$ des Ortes A entspricht, wenn man dieselben, statt wie vorher durch T, durch L und $\mathfrak{T}$ ausdrückt:

$$3)\quad \begin{cases} X = r\cos\varphi\cos(L + 15\ \mathfrak{T}), \\ Y = r\cos\varphi\sin(L + 15\ \mathfrak{T}). \\ Z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

§. 3.

Führen wir die Ausdrücke 2) oder 3) der Coordinaten X, Y, Z des auf der Erdoberfläche liegenden Ortes O in die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

der Erdoberfläche ein, so erhalten wir auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{r^2 \cos\varphi^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin\varphi^2}{b^2} = 1,$$

aus der sich

$$4)\quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}$$

ergibt. Auch ist hiernach

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos\varphi^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin\varphi^2}},$$

also, wenn wir der Kürze wegen

$$5)\quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

setzen:

$$6)\quad r = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos\varphi^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin\varphi^2}}.$$

Weil nach 5)

$$7)\quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon^2};$$

also

$$b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad a = b\sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

ist, so ist auch

$$8)\quad r = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos\varphi^2}} = \frac{b\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin\varphi^2}}.$$

Zur logarithmischen Rechnung lassen die vorhergehenden Ausdrücke von r sich auf verschiedene Arten bequem einrichten. Wir wollen jedoch nur auf die folgende Methode aufmerksam machen.

Man berechne den Hülfswinkel ϖ mittelst der Formel

$$9)\quad \tan\varpi = \frac{a^2}{b^2}\tan\varphi,$$

so ist

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan\varpi}{\tan\varphi},$$

also

$$\begin{aligned}\cos\varphi^2 + \frac{a^2}{b^2}\sin\varphi^2 &= \cos\varphi^2 + \frac{\tan\varpi}{\tan\varphi}\sin\varphi^2 \\ &= \cos\varphi\,(\cos\varphi + \sin\varphi\tan\varpi) \\ &= \frac{\cos\varphi\cos(\varpi - \varphi)}{\cos\varpi},\end{aligned}$$

und weil nun nach dem Obigen

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}} = \frac{a}{\sqrt{\cos\varphi^2 + \frac{a^2}{b^2}\sin\varphi^2}}$$

ist, so ist

$$10)\quad r = a\sqrt{\frac{\cos\varpi}{\cos\varphi\cos(\varpi - \varphi)}},$$

mittelst welcher Formel r sehr leicht und bequem durch Logarithmen berechnet werden kann.

Über den Hülfswinkel $\bar{\omega}$, den wir immer absolut nicht grösser als 90°, und mit φ von einerlei Zeichen nehmen wollen, ist nun aber noch die folgende Bemerkung zu machen.

Wir wollen die dem Orte O auf der Erdoberfläche entsprechende Meridianebene als Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems der uv annehmen, dessen Anfang der Mittelpunkt der Erde ist. Die Axe der u sei die Durchschnittslinie der in Rede stehenden Meridianebene mit der Ebene des Erdäquators, und die Axe der v sei die Erdaxe. Die Coordinaten des Punktes O in diesem Systeme seien u_1, v_1. Dann ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$v - v_1 = -\frac{du_1}{dv_1}(u - u_1),$$

vorausgesetzt, dass man den in dieser Gleichung vorkommenden Differentialquotienten aus der die gegenseitige Abhängigkeit von u_1 und v_1 ausdrückenden Gleichung

$$\left(\frac{u_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{b}\right)^2 = 1$$

entwickelt, die Gleichung der Normale des Punktes O in dem Systeme der uv. Differentiirt man aber die vorstehende Gleichung nach v_1, so erhält man

$$\frac{u_1}{a^2} \cdot \frac{du_1}{dv_1} + \frac{v_1}{b^2} = 0, \quad \frac{du_1}{dv_1} = -\frac{a^2 v_1}{b^2 u_1};$$

und die Gleichung der Normale des Punktes O in dem Systeme der uv ist also nach dem Obigen:

$$v - v_1 = \frac{a^2 v_1}{b^2 u_1}(u - u_1).$$

Nimmt man nun den Theil der Axe der u, welcher die Projection des von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Orte O auf deren Oberfläche gezogenen Erdhalbmessers r auf der Ebene des Äquators ist, als den positiven Theil der Axe der u, den von dem Mittelpunkte der Erde nach ihrem Nordpole gezogenen Erdhalbmesser, d. h. den von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Nordpole gehenden Theil der Erdaxe, als den positiven Theil der Axe der v an, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{v_1}{u_1},$$

wobei man zu beachten hat, dass u_1 stets positiv ist, und v_1 mit φ oder $\operatorname{tang} \varphi$ immer einerlei Vorzeichen hat. Ferner ergibt sich aus der Gleichung

$$v - v_1 = \frac{a^2 v_1}{b^2 u_1}(u - u_1)$$

nach den Principien der analytischen Geometrie, dass, wenn man die, je nachdem der Ort O in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt, als positiv oder negativ betrachtete Polhöhe desselben durch $(\bar{\omega})$ bezeichnet, in völliger Allgemeinheit

$$\operatorname{tang}(\bar{\omega}) = \frac{a^2 v_1}{b^2 u_1}, \text{ d. i. } \operatorname{tang}(\bar{\omega}) = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \varphi$$

ist. Nun ist aber nach dem Obigen

$$\operatorname{tang} \bar{\omega} = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \varphi,$$

also

$$\operatorname{tang} \bar{\omega} = \operatorname{tang}(\bar{\omega}),$$

und folglich $\bar{\omega} = (\bar{\omega})$. Daher ist der oben durch $\bar{\omega}$ bezeichnete Hülfswinkel nichts weiter als die, je nachdem der Ort O in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Polhöhe des Ortes O.

Ist nun die Polhöhe $\bar{\omega}$ des Ortes O gegeben, so findet man dessen geographische Breite φ mittelst der Formel

$$11) \operatorname{tang} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \bar{\omega}.$$

und hierauf den dem Orte O entsprechenden Erdhalbmesser r mittelst der Formel

$$11^{*})\ r = a\sqrt{\frac{\cos\varpi}{\cos\varphi\cos(\varpi-\varphi)}}.$$

Ist dagegen die geographische Breite φ des Ortes O gegeben, so findet man dessen Polhöhe ϖ mittelst der Formel

$$12)\ \operatorname{tang}\varpi = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}\varphi,$$

und hierauf den dem Orte O entsprechenden Erdhalbmesser r wieder mittelst der Formel

$$12^{*})\ r = a\sqrt{\frac{\cos\varpi}{\cos\varphi\cos(\varpi-\varphi)}}.$$

Weil bekanntlich

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,\quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1-e^2}$$

ist, so kann man auch setzen:

$$13)\ \begin{cases} \operatorname{tang}\varphi = (1-e^2)\operatorname{tang}\varpi = (1+e)(1-e)\operatorname{tang}\varpi. \\ \operatorname{tang}\varpi = \dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{1-e^2} = \dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{(1+e)(1-e)}. \end{cases}$$

Die obigen Rechnungsmethoden scheinen mir vor manchen anderen zu demselben Zwecke in Vorschlag gebrachten Verfahrungsarten den Vorzug zu verdienen. Weitere Entwickelungen über diesen Gegenstand halte ich hier für überflüssig.

§. 4.

Durch Einführung der im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdrücke von r in die Formeln 2) oder 3) lassen sich die Coordinaten X, Y, Z des Ortes O in dem absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeiten T und $\mathfrak{T}$ entsprechen, nun noch auf verschiedene Arten ausdrücken, von denen wir hier nur die folgenden bemerken wollen.

Es ist nämlich:

$$14)\ \begin{cases} X = \dfrac{b\cos\varphi\cos 15\,T}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{b\cos\varphi\sin 15\,T}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}, \\ Z = \dfrac{b\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}. \end{cases}\quad \text{oder:}\quad 15)\ \begin{cases} X = \dfrac{b\cos\varphi\cos(L+15\,\mathfrak{T})}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{b\cos\varphi\sin(L+15\,\mathfrak{T})}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}, \\ Z = \dfrac{b\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$16)\ \begin{cases} X = \dfrac{a\cos\varphi\cos 15\,T\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{a\cos\varphi\sin 15\,T\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}. \\ Z = \dfrac{a\sin\varphi\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}. \end{cases}\quad \text{oder:}\quad 17)\ \begin{cases} X = \dfrac{a\cos\varphi\cos(L+15\,\mathfrak{T})\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{a\cos\varphi\sin(L+15\,\mathfrak{T})\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}, \\ Z = \dfrac{a\sin\varphi\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}. \end{cases}$$

Auch ist:

$$18)\ \begin{cases} X = \dfrac{a\cos\varphi\cos 15\,T}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{a\cos\varphi\sin 15\,T}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \\ Z = \dfrac{a\sin\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \end{cases}\quad \text{oder:}\quad 19)\ \begin{cases} X = \dfrac{a\cos\varphi\cos(L+15\,\mathfrak{T})}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{a\cos\varphi\sin(L+15\,\mathfrak{T})}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}. \\ Z = \dfrac{a\sin\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}. \end{cases}$$

Endlich ist auch:

$$20)\begin{cases} X = \dfrac{b\cos\varphi\cos 15\,T\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{b\cos\varphi\sin 15\,T\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \\ Z = \dfrac{b\sin\varphi\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \end{cases} \quad \text{oder:} \quad 21)\begin{cases} X = \dfrac{b\cos\varphi\cos(L+15\,\mathfrak{T})\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \\ Y = \dfrac{b\cos\varphi\sin(L+15\,\mathfrak{T})\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \\ Z = \dfrac{b\sin\varphi\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin\varphi^2}}. \end{cases}$$

§. 5.

Wir wollen jetzt für das absolute Zeitmoment, welchem die Sternzeiten T und $\mathfrak{T}$ der Orte O und A entsprechen, die Gleichung der Ebene des Horizontes des Ortes O suchen indem wir, ganz der Natur der Sache gemäss, diese Ebene als die Berührungsebene der Erdoberfläche in dem durch die Coordinaten X, Y, Z bestimmten Orte O betrachten.

Differentiiren wir die Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

partiell nach x und y, so erhalten wir:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{z}{b^2}\cdot\frac{d_x z}{dx} = 0,\quad \frac{y}{a^2} + \frac{z}{b^2}\cdot\frac{d_y z}{dy} = 0;\ \text{woraus sich}\ \frac{d_x z}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 z},\ \frac{d_y z}{dy} = -\frac{b^2 y}{a^2 z}$$

ergibt. Also ist nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung der Ebene des Horizontes des Ortes O in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente:

$$\frac{b^2 X}{a^2 Z}(x-X) + \frac{b^2 Y}{a^2 Z}(y-Y) + (z-Z) = 0 \ \text{oder}\ b^2 X(x-X) + b^2\,Y(y-Y) + a^2\,Z(z-Z) = 0,$$

woraus sogleich

$$\frac{Xx+Yy}{a^2} + \frac{Zz}{b^2} = \frac{X^2+Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2},\quad \text{also}\ 22)\ \frac{Xx+Yy}{a^2} + \frac{Zz}{b^2} = 1$$

folgt.

Für X, Y, Z kann man alle im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdrücke dieser Coordinaten in die vorstehende Gleichung einführen; auf diese Weise erhält man z. B. aus 16) und 17) leicht:

$$23)\ (x\cos 15\,T + y\sin 15\,T)\cos\varphi + \frac{z\sin\varphi}{1-e^2} = \frac{a\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}{\sqrt{1-e^2}}$$

und

$$24)\ \{x\cos(L+15\,\mathfrak{T}) + y\sin(L+15\,\mathfrak{T})\}\cos\varphi + \frac{z\sin\varphi}{1-e^2} = \frac{a\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Andere Ausdrücke dieser Gleichung lassen sich mittelst der verschiedenen im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdrücke der Coordinaten X, Y, Z leicht angeben, wobei wir jedoch jetzt nicht länger verweilen wollen.

§. 6.

Die Gleichung der Ebene des Meridians des Ortes O in dem absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeiten T oder $\mathfrak{T}$ entsprechen, ist offenbar:

$$25)\ y = x\,tang\,15\,T \qquad \text{oder} \qquad 26)\ y = x\,tang\,(L + 15\,\mathfrak{T}).$$

§. 7.

Wenn α, δ die Rectascension und Declination eines Weltkörpers und ρ dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde in dem absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeiten T und $\mathfrak{T}$ der Orte O und A entsprechen, bezeichnen, so sind

$$27)\ \begin{cases} \mathfrak{X} = \rho \cos \alpha \cos \delta, \\ \mathfrak{Y} = \rho \sin \alpha \cos \delta, \\ \mathfrak{Z} = \rho \sin \delta \end{cases}$$

die demselben absoluten Zeitmomente entsprechenden Coordinaten dieses Weltkörpers, und die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Erde nach demselben gezogenen geraden Linie sind nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$28)\ \frac{x}{\mathfrak{X}} = \frac{y}{\mathfrak{Y}} = \frac{z}{\mathfrak{Z}}.$$

Die Gleichungen der von dem Orte O nach dem Weltkörper gezogenen geraden Linie sind dagegen:

$$29)\ \frac{x-X}{X-\mathfrak{X}} = \frac{y-Y}{Y-\mathfrak{Y}} = \frac{z-Z}{Z-\mathfrak{Z}} \quad \text{oder:} \quad 30)\ \frac{x-\mathfrak{X}}{X-\mathfrak{X}} = \frac{y-\mathfrak{Y}}{Y-\mathfrak{Y}} = \frac{z-\mathfrak{Z}}{Z-\mathfrak{Z}}.$$

Bezeichnen wir nun die Höhe des Weltkörpers an dem Orte O in dem mehrerwähnten absoluten Zeitmomente durch h, so ist, weil nach §. 5 die Gleichung des Horizontes des Ortes O bekanntlich

$$\frac{Xx + Yy}{a^2} + \frac{Zz}{b^2} = 1$$

ist, nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$\sin h^2 = \frac{\left\{\frac{X}{a^2}\cdot\frac{X-\mathfrak{X}}{Z-\mathfrak{Z}} + \frac{Y}{a^2}\cdot\frac{Y-\mathfrak{Y}}{Z-\mathfrak{Z}} + \frac{Z}{b^2}\right\}^2}{\left\{1 + \left(\frac{X-\mathfrak{X}}{Z-\mathfrak{Z}}\right)^2 + \left(\frac{Y-\mathfrak{Y}}{Z-\mathfrak{Z}}\right)^2\right\}\left\{\frac{X^2+Y^2}{a^4} + \frac{Z^2}{b^4}\right\}}$$

oder

$$\sin h^2 = \frac{\left\{\frac{X}{a^2}(X-\mathfrak{X}) + \frac{Y}{a^2}(Y-\mathfrak{Y}) + \frac{Z}{b^2}(Z-\mathfrak{Z})\right\}^2}{\left\{(X-\mathfrak{X})^2 + (Y-\mathfrak{Y})^2 + (Z-\mathfrak{Z})^2\right\}\left\{\frac{X^2+Y^2}{a^4} + \frac{Z^2}{b^4}\right\}},$$

oder, weil

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

ist:

$$\sin h^2 = \frac{\left\{1 - \frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} - \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}\right\}^2}{\left\{(X-\mathfrak{X})^2 + (Y-\mathfrak{Y})^2 + (Z-\mathfrak{Z})^2\right\}\left\{\frac{X^2+Y^2}{a^4} + \frac{Z^2}{b^4}\right\}}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Durchschnittspunktes der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Weltkörper ($\mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$) gezogenen geraden Linie mit der Ebene des Horizontes des Punktes O durch x, y, z, so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten nach dem Vorhergehenden die Gleichungen

$$\frac{x}{\mathfrak{X}} = \frac{y}{\mathfrak{Y}} = \frac{z}{\mathfrak{Z}}, \quad \frac{Xx + Yy}{a^2} + \frac{Zz}{b^2} = 1:$$

und erhalten aus denselben leicht:

$$x = \frac{\mathfrak{X}}{\frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} + \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}, \quad y = \frac{\mathfrak{Y}}{\frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} + \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}, \quad z = \frac{\mathfrak{Z}}{\frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} + \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}.$$

Haben nun zuerst z und $\mathfrak{Z}$ ungleiche Vorzeichen, so erhellet mittelst einer einfachen Betrachtung sogleich, dass der Weltkörper sich jedenfalls unter dem Horizonte des Ortes O befindet, und daher $\sin h$ negativ ist. Wegen der Formel

$$z = \frac{\mathfrak{Z}}{\frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} + \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}$$

ist aber in diesem Falle

$$\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}+\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}$$

negativ, also

$$1-\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}-\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}$$

positiv; folglich muss man in diesem Falle nach dem Obigen offenbar

$$\sin h=-\frac{1-\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}-\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}{\sqrt{\{(X-\mathfrak{X})^2+(Y-\mathfrak{Y})^2+(Z-\mathfrak{Z})^2\}\left\{\frac{X^2+Y^2}{a^4}+\frac{Z^2}{b^4}\right\}}}$$

setzen.

Haben ferner z und $\mathfrak{Z}$ gleiche Vorzeichen, so überlege man, dass in diesem Falle der Weltkörper sich offenbar

über, in, unter

dem Horizonte des Ortes O befindet, je nachdem

$$x^2+y^2+z^2 \lesseqgtr \mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2$$

ist, wo bekanntlich

$$x^2+y^2+z^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2$$

die Quadrate der Entfernungen des Punktes (xyz) und des Weltkörpers $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z})$ von dem Mittelpunkte der Erde sind. Weil nun aber nach dem Obigen

$$x^2+y^2+z^2=\frac{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2}{\left\{\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}+\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}\right\}^2}$$

ist, so ist

$$x^2+y^2+z^2 \lesseqgtr \mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2,$$

je nachdem

$$\left\{\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}+\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}\right\}^2 \gtreqless 1,$$

d. h. weil im vorliegenden Falle wegen der Formel

$$z=\frac{\mathfrak{Z}}{\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}+\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}$$

die Grösse

$$\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}+\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}$$

positiv ist, je nachdem

$$\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}+\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2} \gtreqless 1,$$

oder je nachdem

$$1-\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}-\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2} \lesseqgtr 0$$

ist. Also befindet sich der Weltkörper

über, in, unter

dem Horizonte des Ortes O, d. h. es ist

$$\sin h \gtreqless 0,$$

je nachdem

$$1-\frac{X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}}{a^2}-\frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2} \lesseqgtr 0$$

ist; folglich ist nach dem Obigen offenbar

$$sin\, h = -\frac{1 - \frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} - \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}{\sqrt{\{(X-\mathfrak{X})^2 + (Y-\mathfrak{Y})^2 + (Z-\mathfrak{Z})^2\}\left\{\frac{X^2+Y^2}{a^4} + \frac{Z^2}{b^4}\right\}}}.$$

Hält man dies mit dem Vorhergehenden zusammen, so ergibt sich, dass in völliger Allgemeinheit

$$31)\ sin\, h = -\frac{1 - \frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} - \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2}}{\sqrt{\{(X-\mathfrak{X})^2 + (Y-\mathfrak{Y})^2 + (Z-\mathfrak{Z})^2\}\left\{\frac{X^2+Y^2}{a^4} + \frac{Z^2}{b^4}\right\}}}$$

ist.

Bei der weiteren Entwickelung dieser Formel, so bemerkenswerth mir dieselbe auch in mehreren Beziehungen zu sein scheint, will ich mich jetzt nicht aufhalten, sondern will nur darauf aufmerksam machen, dass die Bedingung, dass der Weltkörper sich im Horizonte des Ortes O befindet, durch die Gleichung

$$32)\ 1 - \frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{a^2} - \frac{Z\mathfrak{Z}}{b^2} = 0$$

ausgedrückt wird. Führt man für X, Y, Z und $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ ihre aus dem Obigen bekannten Ausdrücke ein, so wird diese Gleichung:

$$33)\ 1 - \frac{r\rho}{a^2} cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cos\, (\alpha - 15\, T) - \frac{r\rho}{b^2} sin\, \varphi\, sin\, \delta = 0$$

oder

$$34)\ 1 - \frac{r\rho}{a^2} cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cos\, (\alpha - L - 15\, \mathfrak{T}) - \frac{r\rho}{b^2} sin\, \varphi\, sin\, \delta = 0,$$

wo man nur noch für r alle dafür im Obigen gefundenen Ausdrücke setzen kann. Nach 6) und 8) ist z. B.

$$35)\ 0 = 1 - \frac{\rho}{a} \cdot \frac{cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cos\, (\alpha - 15\, T)\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}} - \frac{\rho}{b} \cdot \frac{sin\, \varphi\, sin\, \delta}{\sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}}$$

oder

$$36)\ 0 = 1 - \frac{\rho}{a} \cdot \frac{cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cos\, (\alpha - L - 15\, \mathfrak{T})\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}} - \frac{\rho}{b} \cdot \frac{sin\, \varphi\, sin\, \delta}{\sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}}.$$

oder auch:

$$37)\ 0 = 1 - \frac{\rho}{a} \cdot \frac{cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cos\, (\alpha - 15\, T)\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}} - \frac{\rho}{a} \cdot \frac{sin\, \varphi\, sin\, \delta}{\sqrt{1-e^2} \cdot \sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}}$$

oder

$$38)\ 0 = 1 - \frac{\rho}{a} \cdot \frac{cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cos\, (\alpha - L - 15\, \mathfrak{T})\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}} - \frac{\rho}{a} \cdot \frac{sin\, \varphi\, sin\, \delta}{\sqrt{1-e^2} \cdot \sqrt{1-e^2 cos\, \varphi^2}}.$$

§. 8.

Sind

$$x = Az + \alpha,\ y = Bz + \beta$$

die Gleichungen der Verticale des Punktes O, so ist, weil diese Verticale auf der Ebene des Horizontes von O, deren Gleichung bekanntlich

$$\frac{Xx + Yy}{a^2} + \frac{Zz}{b^2} = 1$$

ist, in dem Punkte (XYZ) senkrecht steht, nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{X}{a^2} = A\frac{Z}{b^2},\quad \frac{Y}{a^2} = B\frac{Z}{b^2};$$

also

$$A = \frac{b^2 X}{a^2 Z},\quad B = \frac{b^2 Y}{a^2 Z};$$

und weil nun auch

$$X = AZ + \alpha,\quad Y = BZ + \beta;$$

also

$$x - X = A(z - Z),\quad y - Y = B(z - Z)$$

ist; so sind

$$39)\quad x - X = \frac{b^2 X}{a^2 Z}(z - Z),\quad y - Y = \frac{b^2 Y}{a^2 Z}(z - Z)$$

oder

$$40)\quad \frac{x - X}{b^2 X} = \frac{y - Y}{b^2 Y} = \frac{z - Z}{a^2 Z}$$

die gesuchten Gleichungen der Verticale des Ortes O.

Durch diese Verticale und die von O nach dem Weltkörper gezogene gerade Linie, deren Gleichungen bekanntlich

$$\frac{x - X}{X - \mathfrak{X}} = \frac{y - Y}{Y - \mathfrak{Y}} = \frac{z - Z}{Z - \mathfrak{Z}}$$

sind, wollen wir uns nun eine Ebene gelegt denken, und die Gleichung dieser Ebene, welche nothwendig die Form

$$x - X + M(y - Y) + N(z - Z) = 0$$

haben muss, suchen. Zur Bestimmung von M und N erhalten wir aber mittelst des Obigen auf der Stelle die beiden Gleichungen:

$$b^2 X + b^2 YM + a^2 ZN = 0,$$
$$X - \mathfrak{X} + (Y - \mathfrak{Y})M + (Z - \mathfrak{Z})N = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$b^2 X(Z - \mathfrak{Z}) - a^2 Z(X - \mathfrak{X}) + \{b^2 Y(Z - \mathfrak{Z}) - a^2 Z(Y - \mathfrak{Y})\} M = 0,$$
$$b^2 X(Y - \mathfrak{Y}) - b^2 Y(X - \mathfrak{X}) - \{b^2 Y(Z - \mathfrak{Z}) - a^2 Z(Y - \mathfrak{Y})\} N = 0;$$

oder

$$(a^2 - b^2) XZ - (a^2 Z\mathfrak{X} - b^2 X\mathfrak{Z}) + \{(a^2 - b^2) YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})\} M = 0,$$
$$b^2 (X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X}) - \{(a^2 - b^2) YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})\} N = 0;$$

also

$$M = -\frac{(a^2 - b^2) XZ - (a^2 Z\mathfrak{X} - b^2 X\mathfrak{Z})}{(a^2 - b^2) YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})},$$
$$N = \frac{b^2 (X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X})}{(a^2 - b^2) YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})}.$$

Folglich ist die Gleichung unserer Ebene:

$$41)\quad \left.\begin{array}{r} \{(a^2 - b^2) YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})\}(x - X) \\ - \{(a^2 - b^2) XZ - (a^2 Z\mathfrak{X} - b^2 X\mathfrak{Z})\}(y - Y) \\ + b^2 (X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X})(z - Z) \end{array}\right\} = 0.$$

Die Gleichung der Ebene des Meridians des Punktes O ist, wie leicht erhellet:

$$42)\quad Yx - Xy = 0$$

oder

$$43)\quad Y(x - X) - X(y - Y) = 0.$$

Bezeichnen wir nun für den Punkt O in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente das Azimuth des Weltkörpers durch ω, und setzen der Kürze wegen:

$$F = \left\{\begin{array}{l} X\{(a^2 - b^2) XZ - (a^2 Z\mathfrak{X} - b^2 X\mathfrak{Z})\} \\ + Y\{(a^2 - b^2) YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})\} \end{array}\right\}$$
$$= \{(X^2 + Y^2)[(a^2 - b^2) Z + b^2 \mathfrak{Z}] - a^2 (X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}) Z\}.$$

$$G = \begin{Bmatrix} X\{(a^2 - b^2)\, YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})\}\\ - Y\{(a^2 - b^2)\, XZ - (a^2 Z\mathfrak{X} - b^2 X\mathfrak{Z})\}\end{Bmatrix}^2$$

$$+ b^4 (X^2 + Y^2)(X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X})^2$$

$$= (X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X})^2 \{b^4 (X^2 + Y^2) + a^4 Z^2\},$$

$$H = (X^2 + Y^2)\begin{Bmatrix} \{(a^2 - b^2)\, XZ - (a^2 Z\mathfrak{X} - b^2 X\mathfrak{Z})\}^2\\ + \{(a^2 - b^2)\, YZ - (a^2 Z\mathfrak{Y} - b^2 Y\mathfrak{Z})\}^2\\ + (b^4 (X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X})^2\end{Bmatrix};$$

so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$44)\quad \cos \omega^2 = \frac{F}{H},\ \sin \omega^2 = \frac{G}{H};$$

oder

$$45)\quad \begin{cases} \cos \omega^2 = \dfrac{\{(X^2 + Y^2)\ \{(a^2 - b^2)\ Z + b^2 \mathfrak{Z}\} - a^2 (X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y})\, Z\}^2}{H},\\[2ex] \sin \omega^2 = \dfrac{(X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X})^2\ \{b^4 (X^2 + Y^2) + a^4 Z^2\}}{H}.\end{cases}$$

Auch ist

$$46)\quad \tang \omega^2 = \frac{(X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X})^2\ \{b^4 (X^2 + Y^2) + a^4 Z^2\}}{\{(X^2 + Y^2)\ \{(a^2 - b^2)\ Z + b^2 \mathfrak{Z}\} - a^2 (X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y})\, Z\}^2}.$$

Von diesen drei Formeln wollen wir blos den Ausdruck für $\sin \omega^2$ etwas genauer betrachten.

Bezeichnen wir die Winkel, welche die Projectionen der von dem Mittelpunkte der Erde, d. h. von dem Anfange der Coordinaten, nach dem Punkte O und nach dem Weltkörper gezogenen geraden Linien auf der Ebene des Äquators oder auf der Ebene der xy mit dem positiven Theile der Axe der x einschliessen, indem wir diese Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an im Sinne der Bewegung der Erde um ihre Axe von 0 bis 360° zählen, respective durch v und $\mathfrak{v}$; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\tang v = \frac{Y}{X},\ \tang \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}};$$

also

$$\tang \mathfrak{v} - \tang v = \frac{X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X}}{X\mathfrak{X}}.$$

$$1 + \tang v \tang \mathfrak{v} = \frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{X\mathfrak{X}}:$$

folglich

$$\frac{\sin (\mathfrak{v} - v)}{\cos v \cos \mathfrak{v}} = \frac{X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X}}{X\mathfrak{X}},$$

$$\frac{\cos (\mathfrak{v} - v)}{\cos v \cos \mathfrak{v}} = \frac{X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}}{X\mathfrak{X}}:$$

oder

$$\sin (\mathfrak{v} - v) = \frac{\cos v}{X} \cdot \frac{\cos \mathfrak{v}}{\mathfrak{X}} (X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X}),$$

$$\cos (\mathfrak{v} - v) = \frac{\cos v}{X} \cdot \frac{\cos \mathfrak{v}}{\mathfrak{X}} (X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}).$$

Weil nun offenbar $\cos v$, $\cos \mathfrak{v}$ respective mit X, $\mathfrak{X}$ einerlei Vorzeichen haben, also die Brüche

$$\frac{\cos v}{X},\ \frac{\cos \mathfrak{v}}{\mathfrak{X}}$$

immer positiv sind; so haben

$$\sin (\mathfrak{v} - v),\ \cos (\mathfrak{v} - v)$$

respective mit

$$X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X},\ X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y}$$

jederzeit gleiche Vorzeichen.

Mittelst einer einfachen Betrachtung überzeugt man sich aber bald, dass, je nachdem $\sin (\mathfrak{v} - v)$ und folglich nach dem Vorhergehenden auch $X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X}$ positiv oder negativ ist, der Weltkörper sich auf der

Seite der Ebene des Meridians von O, nach welcher hin man sich bewegt, wenn man von der Projection der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte O gezogenen Linie auf der Ebene des Äquators an der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe folgt, oder auf der entgegengesetzten Seite der Ebene des Meridians von O befindet. Zählt man nun aber die Azimuthe stets von dem die Ebene des Äquators schneidenden Theile der Mittagslinie des Ortes O an der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe entgegen von 0 bis 360°, so ist offenbar im ersten der beiden so eben unterschiedenen Fälle

$$180^0 < \omega < 360^0,$$

im zweiten der beiden unterschiedenen Fälle dagegen

$$0 < \omega < 180^0;$$

also im ersten Falle $\sin \omega$ negativ, im zweiten Falle dagegen $\sin \omega$ positiv. Da nun nach dem Obigen im ersten Falle $X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X}$ positiv, im zweiten Falle dagegen diese Grösse negativ ist, so hat unter den gemachten Voraussetzungen $\sin \omega$ mit $X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X}$ stets ungleiches Vorzeichen, und es ist also nach 45) in völliger Allgemeinheit:

$$47)\quad \sin \omega = -\frac{(X\mathfrak{Y}-Y\mathfrak{X})\sqrt{b^4(X^2+Y^2)+a^4Z^2}}{\sqrt{H}}$$

oder

$$48)\quad \sin \omega = \frac{(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)\sqrt{b^4(X^2+Y^2)+a^4Z^2}}{\sqrt{H}}.$$

Soll der Weltkörper sich im Meridiane des Ortes O befinden, so muss $\sin \omega = 0$, also nach den vorhergehenden Formeln

$$49)\quad X\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{X} = 0$$

sein. Führt man in diese Gleichung die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von X, Y und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ ein, so erhält man die Gleichung

$$r \cos \varphi \cos 15\, T \,.\, \rho \sin \alpha \cos \delta - r \cos \varphi \sin 15\, T \,.\, \rho \cos \alpha \cos \delta = 0$$

oder

$$r \cos \varphi \cos (L + 15\,\mathfrak{T}) \,.\, \rho \sin \alpha \cos \delta - r \cos \varphi \sin (L + 15\,\mathfrak{T}) \,.\, \rho \cos \alpha \cos \delta = 0,$$

d. i. die Gleichung

$$50)\quad \cos \delta \sin (\alpha - 15\, T) = 0,$$

oder

$$51)\quad \cos \delta \sin (\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}) = 0,$$

wobei vorausgesetzt worden ist, dass $\cos \varphi$ nicht verschwindet, d. h. dass nicht $\varphi = \pm 90^0$ ist. In sofern nun auch $\cos \delta$ nicht verschwindet, d. h. nicht $\delta = \pm 90^0$ ist, werden die obigen Gleichungen:

$$52)\quad \sin (\alpha - 15\, T) = 0$$

oder

$$53)\quad \sin (\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}) = 0,$$

d. h. es muss $\alpha - 15\, T$ oder $\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}$ ein positives oder negatives Vielfaches von 180° sein, was wir hier nicht weiter discutiren wollen, da überhaupt 52) oder 53) die einfachsten und allgemeinsten Ausdrücke dieser Bedingungsgleichungen sind.

Zweites Capitel.

Scheinbare Entfernung zweier Weltkörper von einander an einem gegebenen Orte auf der Erdoberfläche in einem gegebenen absoluten Zeitmomente.

§. 1.

Einen beliebigen, aber gegebenen Ort auf der Erdoberfläche wollen wir wieder durch O bezeichnen und alle für denselben im vorhergehenden Capitel gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten, wobei sich von selbst versteht, dass wir auch hier alle unsere Betrachtungen auf ein bestimmtes absolutes Zeitmoment, welchem die Sternzeiten T und $\mathfrak{T}$ der Orte O und A entsprechen, beziehen.

Zwei Weltkörper, deren Rectascensionen, Declinationen, Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde und Entfernungen von dem Punkte O auf der Erdoberfläche respective durch α, δ, ρ, ρ^1 und α_1, δ_1, ρ_1, $\rho_1{}^1$ bezeichnet werden sollen, seien S und S_1. Die Coordinaten des Punktes O in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente sind nach dem vorhergehenden Capitel bekanntlich:

$$1)\quad \begin{cases} X = r\cos\varphi\cos 15\,T, \\ Y = r\cos\varphi\sin 15\,T, \\ Z = r\sin\varphi; \end{cases}$$

wo man für $15\,T$ auch $L + 15\,\mathfrak{T}$ schreiben kann; und die demselben absoluten Zeitmomente entsprechenden Coordinaten der Weltkörper S und S_1 sind respective:

$$2)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \rho\cos\alpha\cos\delta, \\ \mathfrak{Y} = \rho\sin\alpha\cos\delta, \\ \mathfrak{Z} = \rho\sin\delta \end{cases}$$

und

$$3)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1, \\ \mathfrak{Y}_1 = \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1, \\ \mathfrak{Z}_1 = \rho_1\sin\delta_1. \end{cases}$$

Also ist nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$\begin{aligned} \rho^{1\,2} = {} & (r\cos\varphi\cos 15\,T - \rho\cos\alpha\cos\delta)^2 \\ & + (r\cos\varphi\sin 15\,T - \rho\sin\alpha\cos\delta)^2 \\ & + (r\sin\varphi - \rho\sin\delta)^2, \\ \rho_1{}^{1\,2} = {} & (r\cos\varphi\cos 15\,T - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1)^2 \\ & + (r\cos\varphi\sin 15\,T - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1)^2 \\ & + (r\sin\varphi - \rho_1\sin\delta_1)^2; \end{aligned}$$

woraus man mittelst leichter Rechnung

$$4)\quad \begin{cases} \rho^{1\,2} = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\,\{\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(\alpha - 15\,T)\}, \\ \rho_1{}^{1\,2} = r^2 + \rho_1{}^2 - 2r\rho_1\,\{\sin\delta_1\sin\varphi + \cos\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T)\}; \end{cases}$$

oder wenn, indem Θ, Θ_1 zwei Hülfswinkel bezeichnen, der Kürze wegen

$$5)\quad \begin{cases} \cos\Theta = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(\alpha - 15\,T), \\ \cos\Theta_1 = \sin\delta_1\sin\varphi + \cos\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T) \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$6)\quad \begin{cases} \rho^{1\,2} = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\Theta, \\ \rho_1{}^{1\,2} = r^2 + \rho_1{}^2 - 2r\rho_1\cos\Theta_1 \end{cases}$$

erhält. Setzt man

$$7)\quad \sin\pi = \frac{r}{\rho},\ \sin\pi_1 = \frac{r}{\rho_1};$$

so ist nach 6):

$$8) \begin{cases} \left(\frac{\rho^1}{\rho}\right)^2 = 1 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\theta. \\ \left(\frac{\rho_1^1}{\rho_1}\right)^2 = 1 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1. \end{cases}$$

Wenn in den Ephemeriden die Entfernungen ρ, ρ_1 der beiden Weltkörper von dem Mittelpunkte der Erde angegeben sind, so bedient man sich zur Bestimmung von π, π_1 unmittelbar der Formeln 7). Sind aber in den Ephemeriden die sogenannten Äquatoreal-Horizontalparallaxen, welche wir durch (π), (π_1), den Halbmesser des Erdäquators durch (r) bezeichnen wollen, angegeben: so ist

$$\rho \sin(\pi) = (r),\ \rho_1 \sin(\pi_1) = (r);$$

also

$$\rho = \frac{(r)}{\sin(\pi)},\ \rho_1 = \frac{(r)}{\sin(\pi_1)};$$

folglich nach dem Obigen:

$$9)\ \sin\pi = \frac{r}{(r)}\sin(\pi),\ \sin\pi_1 = \frac{r}{(r)}\sin(\pi_1);$$

mittelst welcher Formeln jetzt π, π_1 berechnet werden müssen.

Bezeichnet man nun die dem Mittelpunkte der Erde und die dem Orte O auf deren Oberfläche entsprechenden scheinbaren Entfernungen der beiden Weltkörper S, S_1 von einander respective durch Δ und Δ^1, so hat man offenbar die Gleichung

$$\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\Delta = \rho^{1\,2} + \rho_1^{1\,2} - 2\rho^1\rho_1^1\cos\Delta^1,$$

also, wenn man die aus 6) sich ergebenden Ausdrücke von ρ^1 und ρ_1^1 in diese Gleichung einführt:

$$10)\ -r^2 + r\rho\cos\theta + r\rho_1\cos\theta_1$$

$$= \rho\rho_1\cos\Delta - \cos\Delta^1\sqrt{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta)(r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1\cos\theta_1)},$$

oder auch:

$$11)\ -\sin\pi\sin\pi_1 + \sin\pi_1\cos\theta + \sin\pi\cos\theta_1$$

$$= \cos\Delta - \cos\Delta^1\sqrt{(1 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\theta)(1 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1)},$$

an welche letztere Formel wir uns im Folgenden ausschliesslich halten wollen.

Man erhält aus dieser letzteren Formel unmittelbar:

$$12)\ \cos\Delta^1 = \frac{\cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\theta_1 - \sin\pi_1\cos\theta}{\sqrt{(1 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\theta)(1 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1)}}.$$

Wenn auch mittelst einer etwas weitläufigen Rechnung, im Ganzen jedoch ohne Schwierigkeit, lässt sich aus dieser Formel auch ein bemerkenswerther Ausdruck für $\sin\Delta^1$ mittelst der Formel

$$\sin\Delta^1 = \sqrt{1 - \cos\Delta^{1\,2}}$$

ableiten. Man kann jedoch, wie es mir scheint, auf folgende Art kürzer zu diesem Ausdrucke gelangen.

Die Gleichungen der von dem Punkte O auf der Erdoberfläche nach dem Weltkörper S gezogenen geraden Linie sind:

$$\frac{x - r\cos\varphi\cos 15T}{r\cos\varphi\cos 15T - \rho\cos\alpha\cos\delta}$$

$$= \frac{y - r\cos\varphi\sin 15T}{r\cos\varphi\sin 15T - \rho\sin\alpha\cos\delta}$$

$$= \frac{z - r\sin\varphi}{r\sin\varphi - \rho\sin\delta},$$

und eben so sind die Gleichungen der von dem Punkte O auf der Erdoberfläche nach dem Weltkörper S_1 gezogenen geraden Linie:

$$\frac{x - r\cos\varphi\cos 15\,T}{r\cos\varphi\cos 15\,T - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1}$$
$$= \frac{y - r\cos\varphi\sin 15\,T}{r\cos\varphi\sin 15\,T - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1}$$
$$= \frac{z - r\sin\varphi}{r\sin\varphi - \rho_1\sin\delta_1}.$$

Sind aber überhaupt

$$x = \varkappa z + (\varkappa),\ y = \lambda z + (\lambda);$$
$$x = \varkappa_1 z + (\varkappa_1),\ y = \lambda_1 z + (\lambda_1).$$

die Gleichungen zweier gerader Linien, welche den Winkel V mit einander einschliessen, so ist bekanntlich

$$\cos V^2 = \frac{(1 + \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1)^2}{(1 + \varkappa^2 + \lambda^2)(1 + \varkappa_1^2 + \lambda_1^2)},$$

also, wie man leicht findet:

$$\sin V^2 = \frac{(\varkappa - \varkappa_1)^2 + (\lambda - \lambda_1)^2 + (\varkappa\lambda_1 - \lambda\varkappa_1)^2}{(1 + \varkappa^2 + \lambda^2)(1 + \varkappa_1^2 + \lambda_1^2)}.$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so ist

$$\varkappa = \frac{r\cos\varphi\cos 15\,T - \rho\cos\alpha\cos\delta}{r\sin\varphi - \rho\sin\delta},$$
$$\lambda = \frac{r\cos\varphi\sin 15\,T - \rho\sin\alpha\cos\delta}{r\sin\varphi - \rho\sin\delta}$$

und

$$\varkappa_1 = \frac{r\cos\varphi\cos 15\,T - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1}{r\sin\varphi - \rho_1\sin\delta_1},$$
$$\lambda_1 = \frac{r\cos\varphi\sin 15\,T - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1}{r\sin\varphi - \rho_1\sin\delta_1}$$

zu setzen. Man kann aber auch

$$\varkappa^1 = r\cos\varphi\cos 15\,T - \rho\cos\alpha\cos\delta,$$
$$\lambda^1 = r\cos\varphi\sin 15\,T - \rho\sin\alpha\cos\delta,$$
$$\mu^1 = r\sin\varphi - \rho\sin\delta$$

und

$$\varkappa_1^1 = r\cos\varphi\cos 15\,T - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1,$$
$$\lambda_1^1 = r\cos\varphi\sin 15\,T - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1,$$
$$\mu_1^1 = r\sin\varphi - \rho_1\sin\delta_1$$

setzen, und hat dann

$$\sin\Delta^{1\,2} = \frac{(\varkappa^1\lambda_1^1 - \lambda^1\varkappa_1^1)^2 + (\lambda^1\mu_1^1 - \mu^1\lambda_1^1)^2 + (\mu^1\varkappa_1^1 - \varkappa^1\mu_1^1)^2}{(\varkappa^{1\,2} + \lambda^{1\,2} + \mu^{1\,2})(\varkappa_1^{1\,2} + \lambda_1^{1\,2} + \mu_1^{1\,2})}.$$

Auch ist es offenbar verstattet, in diese Formel für $\varkappa^1$, λ^1, μ^1 und $\varkappa_1^1$, λ_1^1, μ_1^1 statt der obigen Werthe dieser Grössen vielmehr die folgenden einzuführen:

$$\varkappa^1 = \sin\pi\cos\varphi\cos 15\,T - \cos\alpha\cos\delta,$$
$$\lambda^1 = \sin\pi\cos\varphi\sin 15\,T - \sin\alpha\cos\delta,$$
$$\mu^1 = \sin\pi\sin\varphi - \sin\delta$$

und

$$\varkappa_1^1 = \sin\pi_1\cos\varphi\cos 15\,T - \cos\alpha_1\cos\delta_1,$$
$$\lambda_1^1 = \sin\pi_1\cos\varphi\sin 15\,T - \sin\alpha_1\cos\delta_1$$
$$\mu_1^1 = \sin\pi_1\sin\varphi - \sin\delta_1.$$

Mittelst leichter Rechnung erhält man aber:

$$\begin{aligned}\varkappa^1\lambda_1^1 - \lambda^1\varkappa_1^1 = &- \sin\pi\cos\delta_1\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T)\\ &+ \sin\pi_1\cos\delta\cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T)\\ &- \cos\delta\cos\delta_1\sin(\alpha - \alpha_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda' \mu_1' - \mu' \lambda_1' = & \quad \sin \pi\, (\sin \alpha_1 \cos \delta_1 \sin \varphi - \sin \delta_1 \cos \varphi \sin 15\, T) \\
& - \sin \pi_1 (\sin \alpha \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \sin 15\, T) \\
& + \sin \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \sin \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1 \\
= & \quad (\sin \pi \sin \alpha_1 \cos \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \alpha \cos \delta) \sin \varphi \\
& - (\sin \pi \sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \delta) \sin 15\, T \cos \varphi \\
& + \sin \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \sin \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1, \\
\mu' \varkappa_1' - \varkappa' \mu_1' = & - \sin \pi\, (\cos \alpha_1 \cos \delta_1 \sin \varphi - \sin \delta_1 \cos \varphi \cos 15\, T) \\
& + \sin \pi_1 (\cos \alpha \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos 15\, T) \\
& - (\cos \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \cos \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1) \\
= & - (\sin \pi \cos \alpha_1 \cos \delta_1 - \sin \pi_1 \cos \alpha \cos \delta) \sin \varphi \\
& + (\sin \pi \sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \delta) \cos 15\, T \cos \varphi \\
& - (\cos \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \cos \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varkappa'^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 & = 1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \{\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos (\alpha - 15\, T)\} \\
& = 1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta, \\
\varkappa_1'^2 + \lambda_1'^2 + \mu_1'^2 & = 1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \{\sin \delta_1 \sin \varphi + \cos \delta_1 \cos \varphi \cos (\alpha_1 - 15\, T)\} \\
& = 1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1.
\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt also der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
13)\quad (K) = & \quad \sin \pi \cos \delta_1 \cos \varphi \sin (\alpha_1 - 15\, T) \\
& - \sin \pi_1 \cos \delta \cos \varphi \sin (\alpha - 15\, T) \\
& + \cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1), \\
(L) = & \quad \sin \pi\, (\sin \alpha_1 \cos \delta_1 \sin \varphi - \sin \delta_1 \cos \varphi \sin 15\, T) \\
& - \sin \pi_1 (\sin \alpha \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \sin 15\, T) \\
& + \sin \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \sin \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1 \\
= & \quad (\sin \pi \sin \alpha_1 \cos \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \alpha \cos \delta) \sin \varphi \\
& - (\sin \pi \sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \delta) \sin 15\, T \cos \varphi \\
& + \sin \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \sin \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1. \\
(M) = & \quad \sin \pi\, (\cos \alpha_1 \cos \delta_1 \sin \varphi - \sin \delta_1 \cos \varphi \cos 15\, T) \\
& - \sin \pi_1 (\cos \alpha \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos 15\, T) \\
& + \cos \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \cos \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1 \\
= & \quad (\sin \pi \cos \alpha_1 \cos \delta_1 - \sin \pi_1 \cos \alpha \cos \delta) \sin \varphi \\
& - (\sin \pi \sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \delta) \cos 15\, T \cos \varphi \\
& + \cos \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \cos \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1;
\end{aligned}$$

so ist

$$14)\quad \sin \Delta' = \sqrt{\frac{(K)^2 + (L)^2 + (M)^2}{(1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta)\ (1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1)}}.$$

Bestimmt man $\sin \Delta'$ nach der schon oben angedeuteten Methode aus der Formel 12) mittelst der Formel

$$\sin \Delta' = \sqrt{1 - \cos \Delta'^2},$$

so erhält man einen anderen Ausdruck von $\sin \Delta'$, den ich auch für bemerkenswerth halte, und daher, ohne die zu denselben führende etwas weitläufige Rechnung mitzutheilen, hier noch anführen will.

Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$
\begin{aligned}
15)\; J = \;& \sin \Delta^2 + \sin \pi^2 \sin \theta_1^{\,2} + \sin \pi_1^{\,2} \sin \theta^2 \\
& - 2\,(\sin \pi - \sin \pi_1 \cos \Delta) \cos \theta \\
& - 2\,(\sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Delta) \cos \theta_1 \\
& - 2 \sin \pi \sin \pi_1 (\cos \Delta - \cos \theta \cos \theta_1) \\
= \;& \sin \Delta^2 + \sin \pi^2 \sin \theta_1^{\,2} + \sin \pi_1^{\,2} \sin \theta^2 \\
& - 2 \sin \pi (\cos \theta - \cos \Delta \cos \theta_1) \\
& - 2 \sin \pi_1 (\cos \theta_1 - \cos \Delta \cos \theta) \\
& - 2 \sin \pi \sin \pi_1 (\cos \Delta - \cos \theta \cos \theta_1),
\end{aligned}
$$

so ist

$$16)\; \sin \Delta^1 = \sqrt{\frac{J}{(1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta)\,(1 + \sin \pi_1^{\,2} - 2 \sin \pi_1 \cos \theta_1)}}.$$

Übrigens kann man die Grösse J auch auf folgende Art ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
17)\; J = \;& (\sin \Delta - \sin \pi \sin \theta_1 - \sin \pi_1 \sin \theta)^2 \\
& - 2 \sin \pi \{\cos \theta - \cos (\Delta - \theta_1)\} \\
& - 2 \sin \pi_1 \{\cos \theta_1 - \cos (\Delta - \theta)\} \\
& - 2 \sin \pi \sin \pi_1 \{\cos \Delta - \cos (\theta - \theta_1)\},
\end{aligned}
$$

oder nach einer bekannten Zerlegung:

$$
\begin{aligned}
18)\; J = \;& (\sin \Delta - \sin \pi \sin \theta_1 - \sin \pi_1 \sin \theta)^2 \\
& - 4 \sin \pi \sin \tfrac{1}{2} (\Delta - \theta - \theta_1) \sin \tfrac{1}{2} (\Delta + \theta - \theta_1) \\
& - 4 \sin \pi_1 \sin \tfrac{1}{2} (\Delta - \theta - \theta_1) \sin \tfrac{1}{2} (\Delta - \theta + \theta_1) \\
& + 4 \sin \pi \sin \pi_1 \sin \tfrac{1}{2} (\Delta - \theta + \theta_1) \sin \tfrac{1}{2} (\Delta + \theta - \theta_1).
\end{aligned}
$$

§. 2.

Bezeichnen wir in dem Zeitmomente, welchem die Sternzeiten T und $\mathfrak{T}$ der Orte O und A entsprechen, die lineare Entfernung der beiden Weltkörper S und S_1 von einander durch E, so ist nach dem Obigen

$$
\begin{aligned}
E^2 = \;& (\rho \cos \alpha \cos \delta - \rho_1 \cos \alpha_1 \cos \delta_1)^2 \\
& + (\rho \sin \alpha \cos \delta - \rho_1 \sin \alpha_1 \cos \delta_1)^2 \\
& + (\rho \sin \delta - \rho_1 \sin \delta_1)^2,
\end{aligned}
$$

also, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$E^2 = \rho^2 + \rho_1^{\,2} - 2 \rho\rho_1 \{\sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1)\}.$$

Nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie ist aber

$$E^2 = \rho^2 + \rho_1^{\,2} - 2 \rho\rho_1 \cos \Delta,$$

und folglich, wenn man diese Formel mit der vorhergehenden vergleicht:

$$19)\; \cos \Delta = \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1),$$

mittelst welcher Formel man Δ aus α, δ und α_1, δ_1 berechnen kann, bei welcher Rechnung man sich zur Erleichterung und Abkürzung bekannter Kunstgriffe bedienen kann, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf.

§. 3.

Wenn wir jetzt in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente die dem Mittelpunkte der Erde und dem Punkte O auf ihrer Oberfläche entsprechenden scheinbaren Halbmesser der beiden Gestirne S, S_1 respective durch D, D_1 und D^1, $D_1^{\,1}$, bezeichnen, so ist offenbar

$$20)\ \rho \sin D = \rho^1 \sin D^1,\ \rho_1 \sin D_1 = \rho_1^{\ 1} \sin D_1^{\ 1};$$

also nach 6):

$$21) \begin{cases} \dfrac{\sin D}{\sin D^1} = \dfrac{\rho^1}{\rho} = \dfrac{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}}{\rho}, \\ \dfrac{\sin D_1}{\sin D_1^{\ 1}} = \dfrac{\rho_1^{\ 1}}{\rho_1} = \dfrac{\sqrt{r^2 + \rho_1^{\ 2} - 2r\rho_1 \cos \theta_1}}{\rho_1}; \end{cases}$$

oder nach 7):

$$22) \begin{cases} \dfrac{\sin D}{\sin D^1} = \sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta}, \\ \dfrac{\sin D_1}{\sin D_1^{\ 1}} = \sqrt{1 + \sin \pi_1^{\ 2} - 2 \sin \pi_1 \cos \theta_1}; \end{cases}$$

folglich

$$\frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\ 1}} = \sqrt{(1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta)(1 + \sin \pi_1^{\ 2} - 2 \sin \pi_1 \cos \theta_1)}.$$

Daher ist nach 12):

$$23) \cos \Delta^1 = \frac{\sin D^1 \sin D_1^{\ 1}}{\sin D \sin D_1} (\cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \theta_1 - \sin \pi_1 \cos \theta),$$

oder

$$24) \frac{\sin D^1 \sin D_1^{\ 1}}{\cos \Delta^1} = \frac{\sin D \sin D_1}{\cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \theta_1 - \sin \pi_1 \cos \theta},$$

oder

$$25) \frac{\cos (D^1 - D_1^{\ 1}) - \cos (D^1 + D_1^{\ 1})}{\cos \Delta^1}$$

$$= \frac{2 \sin D \sin D_1}{\cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \theta_1 - \sin \pi_1 \cos \theta}.$$

Lässt man in der Formel

$$\frac{\sin D}{\sin D^1} = \sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta}$$

die Entfernung ρ sich dem Unendlichen, also

$$\sin \pi = \frac{r}{\rho}$$

sich der Null nähern, so nähert sich das Verhältniss oder der Quotient

$$\frac{\sin D}{\sin D^1}$$

offenbar der Einheit. Wäre also der Weltkörper S ein Fixstern, so würde man für den Bruch

$$\frac{\sin D}{\sin D^1}$$

überall, wo er vorkäme, die Einheit zu setzen haben. Dass man bei Fixsternen für D und D^1 selbst immer Null zu setzen oder diese scheinbaren Halbmesser als verschwindend zu betrachten hat, versteht sich von selbst, und es ist also bei Fixsternen immer

$$\sin D = 0,\ \sin D^1 = 0 \text{ und } \cos D = 1,\ \cos D^1 = 1.$$

Die obige Bemerkung, dass bei Fixsternen immer

$$\frac{\sin D}{\sin D^1} = 1$$

zu setzen ist, ist aber von Wichtigkeit, weil nur durch diese Bemerkung es möglich wird, aus der für den allgemeinen Fall, wo die scheinbaren Halbmesser keines der beiden Weltkörper verschwinden, entwickelten Formeln mit Leichtigkeit die Formeln abzuleiten, welche dem Falle entsprechen, wenn einer der beiden Weltkörper ein Fixstern ist, welches bekanntlich der Fall der Sternbedeckungen ist.

Wenn man D und daher auch D^1 als verschwindend zu betrachten sich berechtigt halten darf, ohne dass jedoch wie bei Fixsternen π verschwindet, so muss man wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\frac{\sin D}{\sin D^1} = \sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}$$

für den Bruch

$$\frac{\sin D}{\sin D^1}$$

überall die Grösse

$$\sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}$$

setzen. Diese Bemerkung würde z. B. bei den Vorübergängen der unteren Planeten vor der Sonne Anwendung finden können.

§. 4.

Für äussere und innere Berührungen der beiden Weltkörper, indem man immer den ersteren die oberen, den letzteren die unteren Zeichen entsprechen lässt, ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$26)\ \cos \Delta^1 = \cos (D^1 \pm D_1^1),$$

also nach 25):

$$\frac{\cos (D^1 - D_1^1) - \cos (D^1 + D_1^1)}{\cos (D^1 \pm D_1^1)}$$

$$= \frac{2 \sin D \sin D_1}{\cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta},$$

oder, wie leicht erhellen wird:

$$27)\ \frac{\cos (D^1 \mp D_1^1)}{\cos (D^1 \pm D_1^1)} = 1 \pm \frac{2 \sin D \sin D_1}{\cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta}.$$

Auch ist nach 23) und 26)

$$28)\ \cos (D^1 \pm D_1^1) = \frac{\sin D^1 \sin D_1^1}{\sin D \sin D_1} (\cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta),$$

oder

$$29)\ \left.\begin{array}{l} \cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta \\ \qquad - \dfrac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^1} \cos (D^1 \pm D_1^1) \end{array}\right\} = 0,$$

oder, wie man leicht findet:

$$30)\ \left.\begin{array}{l} \cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta \\ \pm \sin D \sin D_1 - \sin D \sin D_1 \cot D^1 \cot D_1^1 \end{array}\right\} = 0.$$

Will man aus dieser, wie ich glaube, sehr bemerkenswerthen Gleichung die dem Orte O entsprechenden scheinbaren Halbmesser D^1, D_1^1 ganz eliminiren, so hat man zuvörderst nach 22) die Formeln:

$$31)\ \left\{\begin{array}{l} \sin D^1 = \dfrac{\sin D}{\sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}}, \\ \sin D_1^1 = \dfrac{\sin D_1}{\sqrt{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1}}; \end{array}\right.$$

aus denen sogleich

$$32)\ \left\{\begin{array}{l} \cos D^1 = \sqrt{\dfrac{\cos D^2 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}}, \\ \cos D_1^1 = \sqrt{\dfrac{\cos D_1^2 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1}{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1}}; \end{array}\right.$$

also

$$33)\ \begin{cases} \cot D^1 = \dfrac{\sqrt{\cos D^2 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta}}{\sin D}, \\ \cot D_1{}^1 = \dfrac{\sqrt{\cos D_1{}^2 + \sin \pi_1{}^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \theta_1}}{\sin D_1} \end{cases}$$

folgt. Daher kann man die Gleichung 30) auch auf folgende Art ausdrücken:

$$34)\ \left.\begin{array}{c} \cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \theta_1 - \sin \pi_1 \cos \theta \\ \pm \sin D \sin D_1 - \sqrt{(\cos D^2 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta)(\cos D_1{}^2 + \sin \pi_1{}^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \theta_1)} \end{array}\right\} = 0.$$

§. 5.

Es wird gut sein, zur Berechnung von D^1, $D_1{}^1$ auch zweckmässige Näherungsformeln zu haben, zu denen man leicht auf folgende Art gelangen kann. Nach 31) ist:

$$\sin D^1 = (1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \sin D,$$
$$\sin D_1{}^1 = (1 + \sin \pi_1{}^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \theta_1)^{-\frac{1}{2}} \sin D_1.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber

$$(1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = \{1 + \sin \pi (\sin \pi - 2 \cos \theta)\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} \sin \pi (\sin \pi - 2 \cos \theta) + \tfrac{3}{8} \sin \pi^2 (\sin \pi - 2 \cos \theta)^2 - \ldots,$$

und folglich in Bezug auf $\sin \pi$ bis auf Glieder der ersten Ordnung genau:

$$(1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sin \pi \cos \theta,$$

so wie ganz eben so in Bezug auf $\sin \pi_1$ bis auf Glieder der ersten Ordnung genau:

$$(1 + \sin \pi_1{}^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \theta_1)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sin \pi_1 \cos \theta_1.$$

Also ist nach dem Obigen in Bezug auf $\sin \pi$ und $\sin \pi_1$ bis auf Glieder der ersten Ordnung genau:

$$35)\ \begin{cases} \sin D^1 = (1 + \sin \pi \cos \theta) \sin D, \\ \sin D^1{}_1 = (1 + \sin \pi_1 \cos \theta_1) \sin D_1; \end{cases}$$

oder

$$\frac{\sin D^1}{\sin D} = 1 + \sin \pi \cos \theta,$$
$$\frac{\sin D_1{}^1}{\sin D_1} = 1 + \sin \pi_1 \cos \theta_1;$$

folglich

$$\frac{\sin D^1 - \sin D}{\sin D} = \sin \pi \cos \theta,$$
$$\frac{\sin D_1{}^1 - \sin D_1}{\sin D_1} = \sin \pi_1 \cos \theta_1;$$

d. i.

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}(D - D^1) \cos \frac{1}{2}(D + D^1)}{\sin D} = -\sin \pi \cos \theta,$$
$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}(D_1 - D_1{}^1) \cos \frac{1}{2}(D_1 + D_1{}^1)}{\sin D_1} = -\sin \pi_1 \cos \theta_1.$$

Nun ist

$$D + D^1 = 2D - (D - D^1),$$
$$D_1 + D_1{}^1 = 2D_1 - (D_1 - D_1{}^1);$$

also

$$\tfrac{1}{2}(D + D^1) = D - \tfrac{1}{2}(D - D^1),$$
$$\tfrac{1}{2}(D_1 + D_1{}^1) = D_1 - \tfrac{1}{2}(D_1 - D_1{}^1);$$

folglich

$$\cos \tfrac{1}{2}(D + D^1) = \cos D \cos \tfrac{1}{2}(D - D^1) + \sin D \sin \tfrac{1}{2}(D - D^1),$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(D_1 + D_1{}^1) = \cos D_1 \cos \tfrac{1}{2}(D_1 - D_1{}^1) + \sin D_1 \sin \tfrac{1}{2}(D_1 - D_1{}^1).$$

Weil nun $\frac{1}{2}(D - D^1)$ und $\frac{1}{2}(D_1 - D_1^1)$ der Null sehr nahe kommende Grössen sind, so ist näherungsweise, und zwar in Bezug auf diese Grössen bis auf Glieder der ersten Ordnung genau:

$$\cos\tfrac{1}{2}(D + D^1) = \cos D + \sin D \sin\tfrac{1}{2}(D - D^1),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(D_1 + D_1^1) = \cos D_1 + \sin D_1 \sin\tfrac{1}{2}(D_1 - D_1^1);$$

folglich mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$\sin\tfrac{1}{2}(D - D^1)\cos\tfrac{1}{2}(D + D^1) = \sin\tfrac{1}{2}(D - D^1)\cos D,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(D_1 - D_1^1)\cos\tfrac{1}{2}(D_1 + D_1^1) = \sin\tfrac{1}{2}(D_1 - D_1^1)\cos D_1.$$

Daher ist nach dem Obigen näherungsweise:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(D - D^1)\cot D = -\sin\pi\cos\theta,$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(D_1 - D_1^1)\cot D_1 = -\sin\pi_1\cos\theta_1;$$

also

$$36)\ \begin{cases}\sin\tfrac{1}{2}(D - D^1) = -\tfrac{1}{2}\sin\pi\cos\theta\tan D,\\ \sin\tfrac{1}{2}(D_1 - D_1^1) = -\tfrac{1}{2}\sin\pi_1\cos\theta_1\tan D_1;\end{cases}$$

welche Formeln zur Berechnung von D^1 und D_1^1 aus D und D_1 sehr bequem sind, in sofern man sich die obigen Vernachlässigungen gestatten darf.

§. 6.

Wenn S ein Fixstern ist, so ist $\sin\pi = 0$ zu setzen, und die Formel 12) wird also in diesem Falle:

$$37)\ \cos\Delta^1 = \frac{\cos\Delta - \sin\pi_1\cos\theta}{\sqrt{1 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1}},$$

oder weil nach 22) bekanntlich

$$\frac{\sin D_1}{\sin D^1_1} = \sqrt{1 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1}$$

ist:

$$38)\ \cos\Delta^1 = \frac{\sin D_1^1}{\sin D_1}(\cos\Delta - \sin\pi_1\cos\theta)$$

oder

$$39)\ \cos\Delta - \sin\pi_1\cos\theta = \sin D_1\frac{\cos\Delta^1}{\sin D_1^1}.$$

Für eine Berührung ist in diesem Falle offenbar $\Delta^1 = D_1^1$, also

$$40)\ \cos\Delta - \sin\pi_1\cos\theta = \sin D_1\cot D_1^1$$

oder

$$41)\ \cos\Delta - \sin\pi_1\cos\theta - \sin D_1\cot D_1^1 = 0.$$

Weil nach 33)

$$\cot D_1^1 = \frac{\sqrt{\cos D_1^2 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1}}{\sin D_1}$$

ist, so kann man die Gleichung 41) auch auf folgende Art ausdrücken:

$$42)\ \cos\Delta - \sin\pi_1\cos\theta - \sqrt{\cos D_1^2 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1} = 0$$

oder

$$43)\ \cos\Delta - \sin\pi_1\cos\theta = \sqrt{\cos D_1^2 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1}.$$

Aus 34) ergibt sich diese Gleichung unmittelbar, wenn man $\sin\pi = 0$ und, wie es hier erforderlich ist, ausserdem $\sin D = 0$, $\cos D = 1$ setzt.

Drittes Capitel.

Allgemeine Darstellung der Berechnung der Erscheinungen einer Bedeckung für einen gegebenen Ort auf der Erdoberfläche[1]).

§. 1.

Der gegebene Ort auf der Erdoberfläche, für welchen die Erscheinungen einer Bedeckung berechnet werden sollen, sei wieder O. Da dieser Ort als gegeben betrachtet wird, so sind seine Länge L in Beziehung auf den Meridian des Ortes A, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, als Anfang der Längen, und seine geographische Breite φ gegeben.

Dies vorausgesetzt, kommt es nun zunächst darauf an, die Zeiten des Anfanges und Endes der Bedeckung zu bestimmen. Diese Zeiten sind aber die Zeiten der äusseren Berührungen der beiden Weltkörper, so wie dieselben von dem Orte O aus gesehen werden, und lassen sich also nur dadurch ermitteln, dass man die Zeiten bestimmt, welche der aus dem Obigen bekannten Gleichung (Cap. II, §. 4, Nr. 30)

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \quad + \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1^1 \end{array}\right\} = 0$$

oder der Gleichung (Cap. II, §. 4, Nr. 34)

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ + \sin D\sin D_1 - \sqrt{(\cos D^2 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\Theta)(\cos D_1^2 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\Theta_1)} \end{array}\right\} = 0,$$

an deren Stelle in dem Falle, wo der eine der beiden Weltkörper, nämlich S, ein Fixstern ist, die Gleichung (Cap. II, §. 6, Nr. 41)

$$\cos\Delta - \sin\pi_1\cos\Theta - \sin D_1\cot D_1^1 = 0$$

oder die Gleichung (Cap. II, §. 6, Nr. 42)

$$\cos\Delta - \sin\pi_1\cos\Theta - \sqrt{\cos D_1^2 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\Theta_1} = 0$$

tritt, genügen. Jedenfalls wird es bei diesen Rechnungen am zweckmässigsten sein, die Sternzeit $\mathfrak{T}$ des Ortes A, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, zur unbekannten Grösse zu wählen, und man wird demzufolge im Obigen

$$\cos\Delta = \sin\delta\sin\delta_1 + \cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha - \alpha_1),$$
$$\cos\Theta = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}),$$
$$\cos\Theta_1 = \sin\delta_1\sin\varphi + \cos\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - L - 15\,\mathfrak{T});$$

ferner

$$\sin D^1 = \frac{\sin D}{\sqrt{1 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\Theta}},$$

$$\sin D_1^1 = \frac{\sin D_1}{\sqrt{1 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\Theta_1}};$$

oder näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(D - D^1) = -\tfrac{1}{2}\sin\pi\cos\Theta\tang D,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(D_1 - D_1^1) = -\tfrac{1}{2}\sin\pi_1\cos\Theta_1\tang D_1$$

setzen.

Da die obigen Gleichungen in Bezug auf $\mathfrak{T}$ als unbekannte Grösse transcendent sind, und die Grössen α, α_1; δ, δ_1; π, π_1; D, D_1 von $\mathfrak{T}$ abhängen, so ist natürlich die Auflösung dieser Gleichungen nur durch

[1]) Die in §. 8. aufgelösten Aufgaben aus der Theorie der Bedeckungen für die Erde überhaupt sind nur ganz kurz behandelt worden, da sie nicht unbedingt zu dem in diesem Capitel behandelten Gegenstande gehören, so wichtig sie auch an sich sind.

successive Annäherungen möglich; indess wird man bei dem gegenwärtigen Zustande der Astronomie die Zeit $\mathfrak{T}$ immer schon so nahe kennen, dass es nie grosse Schwierigkeiten haben kann, die obigen Gleichungen genau zu erfüllen, wenn dies überhaupt möglich ist. Hat man aber $\mathfrak{T}$ gefunden, so ist es immer auch leicht T zu bestimmen, was wir hier, der Kürze wegen blos auf Cap. I, §. 2 verweisend, nicht weiter erläutern wollen.

Ob überhaupt an dem Orte O eine Bedeckung eintritt oder nicht, wird sich immer daraus von selbst ergeben, ob die Erfüllung der obigen Gleichungen möglich ist oder nicht.

Ist es aber möglich gewesen, die Zeit $\mathfrak{T}$ so zu bestimmen, dass die obigen Gleichungen erfüllt werden, und hat man zwei dieser Bedingung genügende Werthe von $\mathfrak{T}$ gefunden, so wird natürlich immer das kleinere $\mathfrak{T}$ dem Eintritte, das grössere $\mathfrak{T}$ dem Austritte entsprechen. Wollte man aber, ohne schon beide Werthe von $\mathfrak{T}$ zu kennen, für einen derselben ermitteln, ob er dem Eintritte oder dem Austritte entspricht, so würde man für eine ein wenig spätere Zeit als $\mathfrak{T}$ nach den im vorhergehenden Capitel entwickelten Formeln die scheinbare Entfernung Δ^1 der beiden Weltkörper für den Ort O, so wie auch ihre scheinbaren Halbmesser D^1, D_1^1 für denselben Ort berechnen, und untersuchen, ob

$$\Delta^1 < D^1 + D_1^1 \qquad \text{oder} \qquad \Delta^1 > D^1 + D_1^1$$

ist, indem die Zeit $\mathfrak{T}$ im ersten Falle offenbar dem Eintritte oder dem Anfange der Bedeckung, im zweiten Falle dem Austritte oder dem Ende der Bedeckung entspricht.

Ist der eine der beiden Weltkörper, nämlich S, ein Fixstern, so verschwindet D^1, und die beiden obigen Bedingungen des Eintrittes oder Anfanges und des Austrittes oder Endes werden also in diesem Falle respective:

$$\Delta^1 < D_1^1, \quad \Delta^1 > D_1^1.$$

§. 2.

Hat man auf die vorhergehende Weise die Zeiten des Anfanges und Endes der Bedeckung ermittelt, so wird es zunächst ferner von Interesse sein, die Zeiten des Anfanges und des Endes der ringförmigen Bedeckung zu ermitteln, worüber aber im Allgemeinen ganz Dasselbe zu sagen ist, was im vorhergehenden Paragraphen über die äusseren Berührungen gesagt worden ist, indem an deren Stelle jetzt die inneren Berührungen, und daher an die Stelle der im vorhergehenden Paragraphen zu erfüllenden Gleichungen jetzt die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi \sin\pi_1 - \sin\pi \cos\theta_1 - \sin\pi_1 \cos\theta \\ \quad - \sin D \sin D_1 - \sin D \sin D_1 \cot D^1 \cot D_1^1 \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi \sin\pi_1 - \sin\pi\cos\theta_1 - \sin\pi_1\cos\theta \\ - \sin D \sin D_1 - \sqrt{(\cos D^2 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\theta)(\cos D_1^2 + \sin\pi_1^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1)} \end{array}\right\} = 0$$

treten.

In sofern sich diese Gleichungen erfüllen lassen oder nicht, ist die Bedeckung ringförmig oder nicht.

Hat man zwei den obigen Gleichungen genügende Werthe von $\mathfrak{T}$ gefunden, so entspricht der kleinere Werth von $\mathfrak{T}$ natürlich dem Anfange, der grössere Werth von $\mathfrak{T}$ dem Ende der ringförmigen Bedeckung. Wollte man aber, ohne schon beide Werthe von $\mathfrak{T}$ zu kennen, für einen derselben ermitteln, ob er dem Anfange oder dem Ende der ringförmigen Bedeckung entspricht, so würde man für eine ein wenig spätere Zeit als $\mathfrak{T}$ die entsprechenden Werthe von Δ^1 und D^1, D_1^1, natürlich für den Ort O, mittelst der bekannten Formeln berechnen, und untersuchen, ob rücksichtlich des absoluten Werthes von $D^1 - D_1^1$, was man wohl festzuhalten hat,

$$\Delta^1 < D^1 - D_1^1 \qquad \text{oder} \qquad \Delta^1 > D^1 - D_1^1$$

ist, indem die Zeit $\mathfrak{T}$ im ersten Falle dem Anfange, im zweiten Falle dem Ende der ringförmigen Bedeckung entspricht.

Absichtlich habe ich vorher blos von ringförmigen Bedeckungen gesprochen. Nach dem gewöhnlichen astronomischen Sprachgebrauche muss man aber eigentlich noch zwischen totalen und ringförmigen Bedeckungen unterscheiden. Ob aber nach diesem Sprachgebrauche die Bedeckung total oder ringförmig ist, wird sich immer leicht und sicher entscheiden lassen, wenn man für die Momente der inneren Berührungen, die wir vorher zu bestimmen gelernt haben, die scheinbaren Halbmesser der beiden Gestirne in Bezug auf den Ort O berechnet, und dieselben in gehöriger, sich leicht von selbst ergebender Weise mit einander vergleicht, was auch noch zur Bestimmung anderer Umstände einer Bedeckung dienen kann, wie hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 3.

Wichtig ist es jetzt ferner die Zeit $\mathfrak{T}$ zu kennen, wo die scheinbare Entfernung der beiden Weltkörper von einander an dem Orte O ein Minimum wird. Diese Zeit wird man erhalten, wenn man dieselbe so bestimmt, dass der Bedingungsgleichung

$$\frac{d\Delta^1}{d\mathfrak{T}} = 0$$

genügt wird, wo es nun darauf ankommt, diese Bedingungsgleichung für den praktischen Gebrauch gehörig zu entwickeln.

Zu dem Ende haben wir nach Cap. II, §. 1, Nr. 12) die Gleichung

$$\begin{aligned} &\cos\Delta^1 \sqrt{(1+\sin\pi^2-2\sin\pi\cos\Theta)(1+\sin\pi_1^2-2\sin\pi_1\cos\Theta_1)} \\ &= \cos\Delta+\sin\pi\sin\pi_1-\sin\pi\cos\Theta_1-\sin\pi_1\cos\Theta, \end{aligned}$$

welche, nach $\mathfrak{T}$ differentiirt und dabei

$$\frac{d\Delta^1}{d\mathfrak{T}} = 0$$

gesetzt, die Bedingungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\mathfrak{T}}(\cos\Delta+\sin\pi\sin\pi_1-\sin\pi\cos\Theta_1-\sin\pi_1\cos\Theta) \\ -\cos\Delta^1 &\frac{d}{d\mathfrak{T}}\sqrt{(1+\sin\pi^2-2\sin\pi\cos\Theta)(1+\sin\pi_1^2-2\sin\pi_1\cos\Theta_1)} \end{aligned}\right\} = 0$$

liefert. Nun ist aber

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\mathfrak{T}}(\cos\Delta+\sin\pi\sin\pi_1-\sin\pi\cos\Theta_1-\sin\pi_1\cos\Theta) \\ &\quad= -\sin\Delta\frac{d\Delta}{d\mathfrak{T}}+\cos\pi(\sin\pi_1-\cos\Theta_1)\frac{d\pi}{d\mathfrak{T}} \\ &\quad\quad+\cos\pi_1(\sin\pi-\cos\Theta)\frac{d\pi_1}{d\mathfrak{T}} \\ &\quad\quad+\sin\pi_1\sin\Theta\frac{d\Theta}{d\mathfrak{T}}+\sin\pi\sin\Theta_1\frac{d\Theta_1}{d\mathfrak{T}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\mathfrak{T}}\sqrt{(1+\sin\pi^2-2\sin\pi\cos\Theta)(1+\sin\pi_1^2-2\sin\pi_1\cos\Theta_1)} \\ &= \frac{\left\{\begin{aligned} &(1+\sin\pi^2-2\sin\pi\cos\Theta)\left\{\cos\pi_1(\sin\pi_1-\cos\Theta_1)\frac{d\pi_1}{d\mathfrak{T}}+\sin\pi_1\sin\Theta_1\frac{d\Theta_1}{d\mathfrak{T}}\right\} \\ &+(1+\sin\pi_1^2-2\sin\pi_1\cos\Theta_1)\left\{\cos\pi(\sin\pi-\cos\Theta)\frac{d\pi}{d\mathfrak{T}}+\sin\pi\sin\Theta\frac{d\Theta}{d\mathfrak{T}}\right\} \end{aligned}\right\}}{\sqrt{(1+\sin\pi^2-2\sin\pi\cos\Theta)(1+\sin\pi_1^2-2\sin\pi_1\cos\Theta_1)}}. \end{aligned}$$

Führt man dies in die obige Bedingungsgleichung ein, und setzt zugleich

$$\cos \Delta^1 = \frac{\cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta}{\sqrt{(1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta)\,(1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1)}}\,;$$

so erhält man nach einigen Reductionen zur Bestimmung von $\mathfrak{T}$ die Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = {} & \sin \Delta \frac{d\Delta}{d\mathfrak{T}} \\
& + \cos \pi \frac{\cos \Theta_1 - \cos \Delta \cos \Theta + \sin \pi (\cos \Delta - \cos \Theta \cos \Theta_1) - \sin \pi_1 \sin \Theta^2}{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta} \cdot \frac{d\pi}{d\mathfrak{T}} \\
& + \cos \pi_1 \frac{\cos \Theta - \cos \Delta \cos \Theta_1 + \sin \pi_1 (\cos \Delta - \cos \Theta \cos \Theta_1) - \sin \pi \sin \Theta_1^2}{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1} \cdot \frac{d\pi_1}{d\mathfrak{T}} \\
& + \sin \Theta \frac{\sin \pi (\cos \Delta - \sin \pi \cos \Theta_1) - \sin \pi_1 (1 - \sin \pi \cos \Theta)}{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta} \cdot \frac{d\Theta}{d\mathfrak{T}} \\
& + \sin \Theta_1 \frac{\sin \pi_1 (\cos \Delta - \sin \pi_1 \cos \Theta) - \sin \pi (1 - \sin \pi_1 \cos \Theta_1)}{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1} \cdot \frac{d\Theta_1}{d\mathfrak{T}}
\end{aligned}$$

oder die Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{d \cos \Delta}{d\mathfrak{T}} \\
& - \frac{\cos \Theta_1 - \cos \Delta \cos \Theta + \sin \pi (\cos \Delta - \cos \Theta \cos \Theta_1) - \sin \pi_1 \sin \Theta^2}{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta} \cdot \frac{d \sin \pi}{d\mathfrak{T}} \\
& - \frac{\cos \Theta - \cos \Delta \cos \Theta_1 + \sin \pi_1 (\cos \Delta - \cos \Theta \cos \Theta_1) - \sin \pi \sin \Theta_1^2}{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1} \cdot \frac{d \sin \pi_1}{d\mathfrak{T}} \\
& + \frac{\sin \pi (\cos \Delta - \sin \pi \cos \Theta_1) - \sin \pi_1 (1 - \sin \pi \cos \Theta)}{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta} \cdot \frac{d \cos \Theta}{d\mathfrak{T}} \\
& + \frac{\sin \pi_1 (\cos \Delta - \sin \pi_1 \cos \Theta) - \sin \pi (1 - \sin \pi_1 \cos \Theta_1)}{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1} \cdot \frac{d \cos \Theta_1}{d\mathfrak{T}}.
\end{aligned}$$

Dass man auch diese Gleichungen nur durch Näherung auflösen kann, versteht sich von selbst. Die meiste Bequemlichkeit scheint mir indess die zweite Gleichung darzubieten, indem man die Differentialquotienten

$$\frac{d \cos \Delta}{d\mathfrak{T}}, \quad \frac{d \cos \Theta}{d\mathfrak{T}}, \quad \frac{d \cos \Theta_1}{d\mathfrak{T}},$$

natürlich auch nur näherungsweise, wie dies bei diesem Gegenstande nicht anders möglich ist, unmittelbar aus den bekannten Formeln

$$\begin{aligned}
\cos \Delta &= \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1), \\
\cos \Theta &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos (\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}), \\
\cos \Theta_1 &= \sin \delta_1 \sin \varphi + \cos \delta_1 \cos \varphi \cos (\alpha_1 - L - 15\,\mathfrak{T})
\end{aligned}$$

mittelst der zu Grunde gelegten Ephemeriden, auf welche sich die Zeit $\mathfrak{T}$ bezieht, eben so wie aus diesen Ephemeriden die Differentialquotienten

$$\frac{d \sin \pi}{d\mathfrak{T}}, \quad \frac{d \sin \pi_1}{d\mathfrak{T}}$$

berechnen kann.

§. 4.

Von grosser Wichtigkeit, namentlich für die Beobachtung der Bedeckungen, ist es nun ferner, die Lage der scheinbaren Berührungspunkte der beiden Weltkörper im Raume zu kennen, um im Stande zu sein, bei den Beobachtungen im Voraus sein Augenmerk auf diese Punkte zu richten. Ich werde daher diesen Gegenstand im Folgenden mit aller Strenge zu erledigen suchen.

Alle Zeiten und Elemente beziehen sich hier auf den Moment einer Berührung, wobei wir natürlich voraussetzen, dass diese Zeiten nach der im Vorhergehenden gegebenen Anleitung bestimmt worden seien, und daher auch die diesen Zeiten entsprechenden Elemente der beiden Weltkörper als bekannt angenommen werden können. Die Coordinaten des Ortes O auf der Erdoberfläche bezeichnen wir wie früher durch

$$X,\ Y,\ Z$$

und die Coordinaten der beiden Weltkörper durch

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}:\quad \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{Z}_1;$$

natürlich auch hier wieder in Bezug auf das System der xyz. Dies vorausgesetzt ist bekanntlich:

$$1)\ \begin{cases} X = r\cos\varphi\cos 15\,T = r\cos\varphi\cos(L + 15\,\mathfrak{T}), \\ Y = r\cos\varphi\sin 15\,T = r\cos\varphi\sin(L + 15\,\mathfrak{T}). \\ Z = r\sin\varphi \qquad\qquad = r\sin\varphi \end{cases}$$

und

$$2)\ \begin{cases} \mathfrak{X} = \rho\cos\alpha\cos\delta, & \mathfrak{X}_1 = \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1, \\ \mathfrak{Y} = \rho\sin\alpha\cos\delta, & \mathfrak{Y}_1 = \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1, \\ \mathfrak{Z} = \rho\sin\delta; & \mathfrak{Z}_1 = \rho_1\sin\delta_1. \end{cases}$$

Denken wir uns jetzt durch den Punkt O oder (XYZ) auf der Erdoberfläche ein dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x^1y^1z^1$ gelegt, und bezeichnen die Coordinaten der beiden Weltkörper in diesem Systeme respective durch

$$\mathfrak{X}^1,\ \mathfrak{Y}^1,\ \mathfrak{Z}^1;\quad \mathfrak{X}_1^{\,1},\ \mathfrak{Y}_1^{\,1},\ \mathfrak{Z}_1^{\,1};$$

so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^1 &= \mathfrak{X} - X, & \mathfrak{X}_1^{\,1} &= \mathfrak{X}_1 - X; \\ \mathfrak{Y}^1 &= \mathfrak{Y} - Y, & \mathfrak{Y}_1^{\,1} &= \mathfrak{Y}_1 - Y; \\ \mathfrak{Z}^1 &= \mathfrak{Z} - Z, & \mathfrak{Z}_1^{\,1} &= \mathfrak{Z}_1 - Z. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Punkte O auf der Erdoberfläche nach dem scheinbaren Berührungspunkte der beiden Weltkörper gezogene gerade Linie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z oder x^1, y^1, z^1 einschliesst, respective durch P, Q, R: so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\cos D^1 = \frac{\mathfrak{X}^1}{\rho^1}\cos P + \frac{\mathfrak{Y}^1}{\rho^1}\cos Q + \frac{\mathfrak{Z}^1}{\rho^1}\cos R,$$

$$\cos D_1^{\,1} = \frac{\mathfrak{X}_1^{\,1}}{\rho_1^{\,1}}\cos P + \frac{\mathfrak{Y}_1^{\,1}}{\rho_1^{\,1}}\cos Q + \frac{\mathfrak{Z}_1^{\,1}}{\rho_1^{\,1}}\cos R.$$

Weil aber bekanntlich

$$\frac{1}{\rho^1} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\sin D^1}{\sin D},\quad \frac{1}{\rho_1^{\,1}} = \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{\sin D_1^{\,1}}{\sin D_1}$$

ist, so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{X}^1}{\rho}\cos P + \frac{\mathfrak{Y}^1}{\rho}\cos Q + \frac{\mathfrak{Z}^1}{\rho}\cos R = \sin D\cot D^1,$$

$$\frac{\mathfrak{X}_1^{\,1}}{\rho_1}\cos P + \frac{\mathfrak{Y}_1^{\,1}}{\rho_1}\cos Q + \frac{\mathfrak{Z}_1^{\,1}}{\rho_1}\cos R = \sin D_1\cot D_1^{\,1}.$$

Also ist nach dem Obigen, wenn wir der Kürze wegen

$$3)\ \begin{cases} A = \cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos 15\,T \\ \quad = \cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(L + 15\,\mathfrak{T}), \\ B = \sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\sin 15\,T \\ \quad = \sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\sin(L + 15\,\mathfrak{T}), \\ C = \sin\delta - \sin\pi\sin\varphi \end{cases}$$

und

$$4)\quad \begin{cases} A_1 = \cos\alpha_1 \cos\delta_1 - \sin\pi_1 \cos\varphi \cos 15\ T \\ \quad = \cos\alpha_1 \cos\delta_1 - \sin\pi_1 \cos\varphi \cos(L + 15\,\mathfrak{T}), \\ B_1 = \sin\alpha_1 \cos\delta_1 - \sin\pi_1 \cos\varphi \sin 15\ T \\ \quad = \sin\alpha_1 \cos\delta_1 - \sin\pi_1 \cos\varphi \sin(L + 15\,\mathfrak{T}), \\ C_1 = \sin\delta_1 - \sin\pi_1 \sin\varphi \end{cases}$$

setzen, nach dem Obigen:

$$5)\quad \begin{cases} A\ \cos P + B\ \cos Q + C\ \cos R = \sin D \cot D^1, \\ A_1 \cos P + B_1 \cos Q + C_1 \cos R = \sin D_1 \cot D_1^{\,1}. \end{cases}$$

Ist jetzt

$$Kx + My + Nz + H = 0$$

die Gleichung der durch den Punkt O und die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gelegten Ebene, so ist

$$KX + MY + NZ + H = 0$$

und

$$K\mathfrak{X} + M\mathfrak{Y} + N\mathfrak{Z} + H = 0,$$
$$K\mathfrak{X}_1 + M\mathfrak{Y}_1 + N\mathfrak{Z}_1 + H = 0:$$

also

$$K(\mathfrak{X} - X) + M(\mathfrak{Y} - Y) + N(\mathfrak{Z} - Z) = 0,$$
$$K(\mathfrak{X}_1 - X) + M(\mathfrak{Y}_1 - Y) + N(\mathfrak{Z}_1 - Z) = 0:$$

d. i. nach dem Obigen

$$K\mathfrak{X}^1 + M\mathfrak{Y}^1 + N\mathfrak{Z}^1 = 0,$$
$$K\mathfrak{X}_1^{\,1} + M\mathfrak{Y}_1^{\,1} + N\mathfrak{Z}_1^{\,1} = 0$$

oder

$$K\frac{\mathfrak{X}^1}{\rho} + M\frac{\mathfrak{Y}^1}{\rho} + N\frac{\mathfrak{Z}^1}{\rho} = 0,$$
$$K\frac{\mathfrak{X}_1^{\,1}}{\rho_1} + M\frac{\mathfrak{Y}_1^{\,1}}{\rho_1} + N\frac{\mathfrak{Z}_1^{\,1}}{\rho_1} = 0;$$

also nach dem Obigen

$$AK + BM + CN = 0,$$
$$A_1K + B_1M + C_1N = 0.$$

Die Gleichungen der von dem Punkte O nach dem scheinbaren Berührungspunkte der beiden Weltkörper gezogenen geraden Linie sind:

$$\frac{x - X}{\cos P} = \frac{y - Y}{\cos Q} = \frac{z - Z}{\cos R},$$

und da diese Linie nothwendig in der durch die Gleichung

$$Kx + My + Nz + H = 0$$

oder

$$K(x - X) + M(y - Y) + N(z - Z) = 0$$

charakterisirten Ebene liegen muss, so hat man die Gleichung

$$K\cos P + M\cos Q + N\cos R = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$AK + BM + CN = 0,$$
$$A_1K + B_1M + C_1N = 0$$

folgt:

$$(BC_1 - CB_1)\ K = (BC_1 - CB_1)\ K,$$
$$(CA_1 - AC_1)\ K = (BC_1 - CB_1)\ M,$$
$$(AB_1 - BA_1)\ K = (BC_1 - CB_1)\ N:$$

oder

$$(BC_1 - CB_1)\,M = (CA_1 - AC_1)\,K, \quad (CA_1 - AC_1)\,M = (CA_1 - AC_1)\,M, \quad (AB_1 - BA_1)\,M = (CA_1 - AC_1)\,N;$$

oder

$$(BC_1 - CB_1)\,N = (AB_1 - BA_1)\,K, \quad (CA_1 - AC_1)\,N = (AB_1 - BA_1)\,M, \quad (AB_1 - BA_1)\,N = (AB_1 - BA_1)\,N.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung

$$K\cos P + M\cos Q + N\cos R = 0$$

nach und nach mit

$$BC_1 - CB_1,\ CA_1 - AC_1,\ AB_1 - BA_1:$$

so erhält man mittelst des Obigen sogleich:

$$K\,\{(BC_1 - CB_1)\cos P + (CA_1 - AC_1)\cos Q + (AB_1 - BA_1)\cos R\} = 0,$$
$$M\,\{(BC_1 - CB_1)\cos P + (CA_1 - AC_1)\cos Q + (AB_1 - BA_1)\cos R\} = 0,$$
$$N\,\{(BC_1 - CB_1)\cos P + (CA_1 - AC_1)\cos Q + (AB_1 - BA_1)\cos R\} = 0:$$

woraus sich, in sofern K, M, N nicht **zugleich** verschwinden, die Gleichung

$$(BC_1 - CB_1)\cos P + (CA_1 - AC_1)\cos Q + (AB_1 - BA_1)\cos R = 0$$

ergibt.

Daher haben wir jetzt zur Bestimmung von $\cos P$, $\cos Q$, $\cos R$ die drei folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$A\cos P + B\cos Q + C\cos R = \sin D\cot D^1,$$
$$A_1\cos P + B_1\cos Q + C_1\cos R = \sin D_1\cot D_1^{\,1},$$
$$(BC_1 - CB_1)\cos P + (CA_1 - AC_1)\cos Q + (AB_1 - BA_1)\cos R = 0.$$

Will man aus diesen drei Gleichungen $\cos P$ bestimmen, so verfährt man am besten auf folgende Art. Wegen der beiden ersten Gleichungen ist:

$$(AB_1 - BA_1)\cos P - (BC_1 - CB_1)\cos R = B_1\sin D\cot D^1 - B\sin D_1\cot D_1^{\,1},$$
$$(BC_1 - CB_1)\cos P - (BC_1 - CP_1)\cos P = 0,$$
$$(CA_1 - AC_1)\cos P - (BC_1 - CB_1)\cos Q = -C_1\sin D\cot D^1 + C\sin D_1\cot D_1^{\,1}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$AB_1 - BA_1,\ BC_1 - CB_1,\ CA_1 - AC_1$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man vermöge der dritten Hauptgleichung:

$$\{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2\}\cos P$$
$$= \{B_1(AB_1 - BA_1) - C_1(CA_1 - AC_1)\}\sin D\cot D^1$$
$$- \{B(AB_1 - BA_1) - C(CA_1 - AC_1)\}\sin D_1\cot D_1^{\,1}.$$

Ueberhaupt erhält man auf diese Weise:

$$\cos P = \frac{\{B_1(AB_1 - BA_1) - C_1(CA_1 - AC_1)\}\sin D\cot D^1 - \{B(AB_1 - BA_1) - C(CA_1 - AC_1)\}\sin D_1\cot D_1^{\,1}}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2},$$

$$\cos Q = \frac{\{C_1(BC_1 - CB_1) - A_1(AB_1 - BA_1)\}\sin D\cot D^1 - \{C(BC_1 - CB_1) - A(AB_1 - BA_1)\}\sin D_1\cot D_1^{\,1}}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2},$$

$$\cos R = \frac{\{A_1(CA_1 - AC_1) - B_1(BC_1 - CB_1)\}\sin D\cot D^1 - \{A(CA_1 - AC_1) - B(BC_1 - CB_1)\}\sin D_1\cot D_1^{\,1}}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2};$$

oder

$$\cos P = \frac{\{A(B_1B_1 + C_1C_1) - A_1(BB_1 + CC_1)\}\sin D\cot D^1 - \{A(BB_1 + CC_1) - A_1(BB + CC)\}\sin D_1\cot D_1^{\,1}}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2},$$

$$\cos Q = \frac{\{B(C_1C_1 + A_1A_1) - B_1(CC_1 + AA_1)\}\sin D\cot D^1 - \{B(CC_1 + AA_1) - B_1(CC + AA)\}\sin D_1\cot D_1^{\,1}}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2},$$

$$\cos R = \frac{\{C(A_1A_1 + B_1B_1) - C_1(AA_1 + BB_1)\}\sin D\cot D^1 - \{C(AA_1 + BB_1) - C_1(AA + BB)\}\sin D_1\cot D_1^{\,1}}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2}.$$

Setzen wir

$$6)\ \begin{cases} U = AA + BB + CC, \\ U_1 = A_1A_1 + B_1B_1 + C_1C_1 \end{cases}$$

und

$$7)\ V = AA_1 + BB_1 + CC_1;$$

so ist, wie man leicht findet:

$$\cos P = \frac{(AU_1 - A_1V)\sin D \cot D^1 - (AV - A_1U)\sin D_1 \cot D_1{}^1}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2},$$

$$\cos Q = \frac{(BU_1 - B_1V)\sin D \cot D^1 - (BV - B_1U)\sin D_1 \cot D_1{}^1}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2},$$

$$\cos R = \frac{(CU_1 - C_1V)\sin D \cot D^1 - (CV - C_1U)\sin D_1 \cot D_1{}^1}{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2}.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man

$$U = AA + BB + CC = 1 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\theta,$$

$$U_1 = A_1A_1 + B_1B_1 + C_1C_1 = 1 + \sin\pi_1{}^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1$$

und

$$V = AA_1 + BB_1 + CC_1 = \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\theta_1 - \sin\pi_1\cos\theta.$$

Es ist aber bekanntlich

$$1 + \sin\pi^2 - 2\sin\pi\cos\theta = \left(\frac{\sin D}{\sin D^1}\right)^2,$$

$$1 + \sin\pi_1{}^2 - 2\sin\pi_1\cos\theta_1 = \left(\frac{\sin D_1}{\sin D_1{}^1}\right)^2$$

und nach Cap. II, §. 1, Nr. 12)

$$\cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\theta_1 - \sin\pi_1\cos\theta = \cos\Delta^1\,\frac{\sin D\sin D_1}{\sin D^1\sin D_1{}^1}.$$

Also ist

$$8)\ U = \left(\frac{\sin D}{\sin D^1}\right)^2,\quad U_1 = \left(\frac{\sin D_1}{\sin D_1{}^1}\right)^2$$

und

$$9)\ V = \cos\Delta^1\frac{\sin D\sin D_1}{\sin D^1\sin D_1{}^1};$$

folglich

$$(AU_1 - A_1V)\sin D\cot D^1 - (AV - A_1U)\sin D_1\cot D_1{}^1$$

$$= A\,\frac{\sin D}{\sin D^1}\left(\frac{\sin D_1}{\sin D_1{}^1}\right)^2(\cos D^1 - \cos\Delta^1\cos D_1{}^1)$$

$$+ A_1\,\frac{\sin D_1}{\sin D_1{}^1}\left(\frac{\sin D}{\sin D^1}\right)^2(\cos D_1{}^1 - \cos\Delta^1\cos D^1)$$

$$= A\sin D_1\sin D^1(\cos D^1 - \cos\Delta^1\cos D_1{}^1)\,\frac{\sin D\sin D_1}{(\sin D^1\sin D_1{}^1)^2}$$

$$+ A_1\sin D\sin D_1{}^1(\cos D_1{}^1 - \cos\Delta^1\cos D^1)\,\frac{\sin D\sin D_1}{(\sin D^1\sin D_1{}^1)^2};$$

und da nun aus Cap. II, §. 1, verglichen mit dem Vorhergehenden, wenn man berücksichtigt, dass die dortigen

$$\varkappa^1,\ \lambda^1,\ \mu^1;\quad \varkappa_1{}^1,\ \lambda_1{}^1,\ \mu^1{}_1$$

mit

$$A,\ B,\ C;\quad A_1,\ B_1,\ C_1$$

rücksichtlich der absoluten Werthe ganz übereinstimmen, sich leicht ergibt, dass

$$(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2$$

$$= \left(\frac{\sin D}{\sin D^1}\right)^2\left(\frac{\sin D_1}{\sin D_1{}^1}\right)^2\sin\Delta^{1\,2} = \sin D\sin D_1\sin\Delta^{1\,2}\,\frac{\sin D\sin D_1}{(\sin D^1\sin D_1{}^1)^2}$$

ist, so ist

$$\cos P = \frac{A \sin D_1 \sin D^1 (\cos D^1 - \cos \Delta^1 \cos D_1{}^1) + A_1 \sin D \sin D_1{}^1 (\cos D_1{}^1 - \cos \Delta^1 \cos D^1)}{\sin D \sin D_1 \sin \Delta^{1\,2}}.$$

Aus diesem Ausdrucke von $\cos P$ erhält man $\cos Q$, $\cos R$, wenn man in demselben für A respective B, C setzt; und man erhält daher für

$$\cos P,\ \cos Q,\ \cos R$$

die folgenden Ausdrücke:

$$\cos P = \frac{A \frac{\sin D^1}{\sin D}(\cos D^1 - \cos \Delta^1 \cos D_1{}^1) + A_1 \frac{\sin D_1{}^1}{\sin D_1}(\cos D_1{}^1 - \cos \Delta^1 \cos D^1)}{\sin \Delta^{1\,2}}.$$

$$\cos Q = \frac{B \frac{\sin D^1}{\sin D}(\cos D^1 - \cos \Delta^1 \cos D_1{}^1) + B_1 \frac{\sin D_1{}^1}{\sin D_1}(\cos D_1{}^1 - \cos \Delta^1 \cos D^1)}{\sin \Delta^{1\,2}},$$

$$\cos R = \frac{C \frac{\sin D^1}{\sin D}(\cos D^1 - \cos \Delta^1 \cos D_1{}^1) + C_1 \frac{\sin D_1{}^1}{\sin D_1}(\cos D_1{}^1 - \cos \Delta^1 \cos D^1)}{\sin \Delta^{1\,2}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$10)\ \begin{cases} G = \dfrac{\sin D^1}{\sin D}(\cos D^1 - \cos \Delta^1 \cos D_1{}^1), \\ G_1 = \dfrac{\sin D_1{}^1}{\sin D_1}(\cos D_1{}^1 - \cos \Delta^1 \cos D^1); \end{cases}$$

so ist

$$11)\ \begin{cases} \cos P = \dfrac{AG + A_1 G_1}{\sin \Delta^{1\,2}}, \\ \cos Q = \dfrac{BG + B_1 G_1}{\sin \Delta^{1\,2}}, \\ \cos R = \dfrac{CG + C_1 G_1}{\sin \Delta^{1\,2}}. \end{cases}$$

Diese Formeln, in Verbindung mit 3) und 4), halte ich für sehr bequem; überdies sind dieselben völlig genaue Formeln.

Wie man sich in dem Falle, wenn der eine der beiden Weltkörper ein Fixstern ist, zu verhalten hat, ist aus Cap. II, §. 3 bekannt und braucht hier nicht weiter erläutert zu werden.

Die Gleichungen der von dem Punkte O nach dem scheinbaren Berührungspunkte der beiden Weltkörper gezogenen geraden Linie sind nach dem Obigen:

$$12)\ \frac{x - X}{\cos P} = \frac{y - Y}{\cos Q} = \frac{z - Z}{\cos R}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Linie in dem Systeme der $x^1 y^1 z^1$ durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und dessen Entfernung von dem Punkte O durch $\mathfrak{r}$; so ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} \cos P,\ \mathfrak{y} = \mathfrak{r} \cos Q,\ \mathfrak{z} = \mathfrak{r} \cos R.$$

Sind nun aber (α), (δ) die sogenannte scheinbare Rectascension und Declination des Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und also auch des scheinbaren Berührungspunktes der beiden Weltkörper; so ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} \cos(\alpha) \cos(\delta),\ \mathfrak{y} = \mathfrak{r} \sin(\alpha) \cos(\delta),\ \mathfrak{z} = \mathfrak{r} \sin(\delta).$$

Also ist nach dem Obigen

$$\cos(\alpha) \cos(\delta) = \cos P,\ \sin(\alpha) \cos(\delta) = \cos Q,\ \sin(\delta) = \cos R;$$

woraus die folgenden Gleichungen fliessen:

$$13)\ \sin(\delta) = \cos R,\ \cos(\alpha) = \frac{\cos P}{\cos(\delta)},\ \sin(\alpha) = \frac{\cos Q}{\cos(\delta)};$$

mittelst welcher (α) und (δ) ohne alle Zweideutigkeit berechnet werden können. Auch ist

$$14)\ \tang(\alpha) = \frac{\cos Q}{\cos P}.$$

Weil man die Sternzeiten T und $\mathfrak{T}$ der Berührung kennt, so kann man aus (α) und T leicht den Stundenwinkel des scheinbaren Berührungspunktes der beiden Weltkörper ableiten, und ist man also im Besitze eines parallaktisch aufgestellten Fernrohres, so ist es, weil man den Stundenwinkel und die scheinbare Declination des scheinbaren Berührungspunktes kennt, leicht, auf denselben das Fernrohr zu richten, und sich so vollständig auf die Beobachtungen vorzubereiten. Aus dem Stundenwinkel, der scheinbaren Declination des scheinbaren Berührungspunktes und der Polhöhe des Beobachtungsortes kann man aber auch leicht das Azimuth und die Höhe des scheinbaren Berührungspunktes finden, und würde also auch auf denselben leicht etwa das Fernrohr eines Theodoliten richten können, wenn man nicht im Besitze eines parallaktisch aufgestellten Fernrohres wäre. Da es sehr wichtig ist, sich auf die Beobachtung einer Bedeckung gehörig vorzubereiten, so habe ich mich bei dem Vorhergehenden etwas länger aufgehalten, als dies sonst geschehen sein würde.

§. 5.

Wir wollen dem Vorhergehenden in diesem und den nächstfolgenden Paragraphen nun noch einige Betrachtungen hinzufügen, welche nicht unmittelbar hierher, sondern eigentlich schon zu der Theorie der Bedeckungen für die Erde überhaupt gehören. Indess werden diese Betrachtungen geeignet sein, die verschiedenen Wege näher zu zeigen, auf denen man zu der Auflösung der in der Theorie der Bedeckungen überhaupt vorkommenden Aufgaben gelangen kann.

Die Gleichung der Ebene des Horizontes des Punktes O in dem im vorhergehenden Paragraphen stets festgehaltenen Zeitmomente ist nach Cap. I, §. 5, Nr. 22) bekanntlich:

$$\frac{Xx + Yy}{a^2} + \frac{Zz}{b^2} = 1.$$

Weil aber der Punkt O, dessen Coordinaten X, Y, Z sind, auf der Erdoberfläche liegt, so ist

$$\frac{XX + YY}{a^2} + \frac{ZZ}{b^2} = 1,$$

und die Gleichung der Ebene des Horizontes von O ist also auch:

$$\frac{X(x-X) + Y(y-Y)}{a^2} + \frac{Z(z-Z)}{b^2} = 0,$$

oder

$$X(x-X) + Y(y-Y) + \frac{a^2}{b^2} Z(z-Z) = 0,$$

oder

$$\frac{b^2}{a^2}\{X(x-X) + Y(y-Y)\} + Z(z-Z) = 0.$$

Bezeichnen wir nun die Höhe des scheinbaren Berührungspunktes der beiden Weltkörper an dem Orte O durch $\mathfrak{H}$, so ist, weil die Gleichungen der von O nach dem scheinbaren Berührungspunkte der beiden Weltkörper gezogenen geraden Linie bekanntlich

$$\frac{x-X}{\cos P} = \frac{y-Y}{\cos Q} = \frac{z-Z}{\cos R}$$

sind, nach den Lehren der analytischen Geometrie, wie man leicht findet:

$$\sin \mathfrak{H}^2 = \frac{\left(X \cos P + Y \cos Q + \frac{a^2}{b^2} Z \cos R\right)^2}{X^2 + Y^2 + \frac{a^4}{b^4} Z^2}.$$

Es ist aber

$$X^2 + Y^2 = a^2\left(1 - \frac{Z^2}{b^2}\right),$$

also

$$X^2 + Y^2 + \frac{a^4}{b^4} Z^2 = a^2 \left\{1 - \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2} Z^2\right)\right\};$$

folglich

$$\sin \mathfrak{H} = \pm \frac{X \cos P + Y \cos Q + \frac{a^2}{b^2} Z \cos R}{a\sqrt{1 - \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2} Z^2\right)}}.$$

Soll nun die Berührung der beiden Weltkörper im Horizonte von O erscheinen, so muss die Bedingungsgleichung

$$X \cos P + Y \cos Q + \frac{a^2}{b^2} Z \cos R = 0$$

erfüllt sein. Führen wir in diese Gleichung die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Ausdrücke von $\cos P$, $\cos Q$, $\cos R$ ein, so wird dieselbe:

$$(AG + A_1G_1)X + (BG + B_1G_1)Y + \frac{a^2}{b^2}(CG + C_1G_1)Z = 0$$

oder

$$\left(AX + BY + \frac{a^2}{b^2} CZ\right) G + \left(A_1X + B_1Y + \frac{a^2}{b^2} C_1Z\right) G_1 = 0,$$

oder auch

$$\left(A\frac{X}{r} + B\frac{Y}{r} + \frac{a^2}{b^2} C\frac{Z}{r}\right) G + \left(A_1\frac{X}{r} + B_1\frac{Y}{r} + \frac{a^2}{b^2} C_1\frac{Z}{r}\right) G_1 = 0,$$

oder, wenn wir

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + \varepsilon^2$$

setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \left(A\frac{X}{r} + B\frac{Y}{r} + C\frac{Z}{r} + \varepsilon^2 C\frac{Z}{r}\right) G \\ + \left(A_1\frac{X}{r} + B_1\frac{Y}{r} + C_1\frac{Z}{r} + \varepsilon^2 C_1\frac{Z}{r}\right) G_1 \end{array}\right\} = 0.$$

Setzen wir nun für

$$A, B, C; \quad A_1, B_1, C_1; \quad \frac{X}{r}, \frac{Y}{r}, \frac{Z}{r}$$

ihre bekannten Werthe, so ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$A\frac{X}{r} + B\frac{Y}{r} + C\frac{Z}{r} = \cos \Theta - \sin \pi,$$

$$A_1\frac{X}{r} + B_1\frac{Y}{r} + C_1\frac{Z}{r} = \cos \Theta_1 - \sin \pi_1;$$

und die obige Bedingungsgleichung wird also:

$$\left.\begin{array}{l} \{\cos \Theta - \sin \pi + \varepsilon^2 \sin \varphi (\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi)\}\, G \\ + \{\cos \Theta_1 - \sin \pi_1 + \varepsilon^2 \sin \varphi (\sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \varphi)\}\, G_1 \end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$\frac{G}{G_1} = -\frac{\cos \Theta_1 - \sin \pi_1 + \varepsilon^2 \sin \varphi (\sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \varphi)}{\cos \Theta - \sin \pi + \varepsilon^2 \sin \varphi (\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi)},$$

oder auch

$$(\cos \Theta - \sin \pi) G + (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1) G_1$$
$$= -\varepsilon^2 \sin \varphi \{(\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi) G + (\sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \varphi) G_1\}.$$

§. 6.

Die Gleichung der durch den Punkt O und die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gehenden Ebene sei jetzt überhaupt:

$$Kx + My + Nz + H = 0,$$

so ist

$$KX + MY + NZ + H = 0$$

und

$$K\mathfrak{X} + M\mathfrak{Y} + N\mathfrak{Z} + H = 0,$$
$$K\mathfrak{X}_1 + M\mathfrak{Y}_1 + N\mathfrak{Z}_1 + H = 0;$$

also

$$K(\mathfrak{X} - X) + M(\mathfrak{Y} - Y) + N(\mathfrak{Z} - Z) = 0.$$
$$K(\mathfrak{X}_1 - X) + M(\mathfrak{Y}_1 - Y) + N(\mathfrak{Z}_1 - Z) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich, dass man

$$K = (\mathfrak{Y} - Y)(\mathfrak{Z}_1 - Z) - (\mathfrak{Z} - Z)(\mathfrak{Y}_1 - Y),$$
$$M = (\mathfrak{Z} - Z)(\mathfrak{X}_1 - X) - (\mathfrak{X} - X)(\mathfrak{Z}_1 - Z),$$
$$N = (\mathfrak{X} - X)(\mathfrak{Y}_1 - Y) - (\mathfrak{Y} - Y)(\mathfrak{X}_1 - X)$$

setzen kann.

Soll nun die in Rede stehende Ebene auf der Ebene des Horizontes von O senkrecht stehen, so muss nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$KX + MY + \frac{a^2}{b^2} NZ = 0$$

oder

$$\frac{K}{\rho\rho_1} \cdot \frac{X}{r} + \frac{M}{\rho\rho_1} \cdot \frac{Y}{r} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{N}{\rho\rho_1} \cdot \frac{Z}{r} = 0$$

sein.

Führt man aber die bekannten Werthe von

$$X, Y, Z$$

und

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z};\ \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$$

in die obigen Ausdrücke von K, M, N ein, so erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{K}{\rho\rho_1} = {} & \sin\alpha \cos\delta \sin\delta_1 - \sin\alpha_1 \sin\delta \cos\delta_1 \\
& + \sin\pi\,(\sin\alpha_1 \cos\delta_1 \sin\varphi - \sin\delta_1 \cos\varphi \sin 15\,T) \\
& - \sin\pi_1\,(\sin\alpha \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \sin 15\,T).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{M}{\rho\rho_1} = {} & - \cos\alpha \cos\delta \sin\delta_1 + \cos\alpha_1 \sin\delta \cos\delta_1 \\
& - \sin\pi\,(\cos\alpha_1 \cos\delta_1 \sin\varphi - \sin\delta_1 \cos\varphi \cos 15\,T) \\
& + \sin\pi_1\,(\cos\alpha \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos 15\,T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{N}{\rho\rho_1} = {} & - \cos\delta \cos\delta_1 \sin(\alpha - \alpha_1) \\
& - \sin\pi \cos\delta_1 \cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15\,T) \\
& + \sin\pi_1 \cos\delta \cos\varphi \sin(\alpha - 15\,T);
\end{aligned}$$

wo man für $15\,T$ auch $L + 15\,\mathfrak{T}$ setzen kann.

Hieraus ergibt sich ferner sehr leicht:

$$\begin{aligned}
& \frac{K}{\rho\rho_1} \cdot \frac{X}{r} + \frac{M}{\rho\rho_1} \cdot \frac{Y}{r} \\
= {} & \cos\delta \cos\varphi\,(\sin\delta_1 - \sin\pi_1 \sin\varphi) \sin(\alpha - 15\,T) \\
& - \cos\delta_1 \cos\varphi\,(\sin\delta - \sin\pi \sin\varphi) \sin(\alpha_1 - 15\,T):
\end{aligned}$$

und die obige Bedingungsgleichung wird nun:

$$\begin{aligned}
& (1 + \varepsilon^2) \sin(\alpha - \alpha_1) \\
= {} & \frac{\cot\varphi}{\cos\delta_1} (\sin\delta_1 + \varepsilon^2 \sin\pi_1 \sin\varphi) \sin(\alpha - 15\,T) \\
& - \frac{\cot\varphi}{\cos\delta} (\sin\delta + \varepsilon^2 \sin\pi \sin\varphi) \sin(\alpha_1 - 15\,T)
\end{aligned}$$

oder

$$\sin(\alpha-\alpha_1) - \cot\varphi\,\{\tang\delta_1 \sin(\alpha - 15\,T) - \tang\delta \sin(\alpha_1 - 15\,T)\}$$
$$= -\varepsilon^2 \left\{\sin(\alpha-\alpha_1) - \cos\varphi\left[\sin\pi_1 \frac{\sin(\alpha - 15\,T)}{\cos\delta_1} - \sin\pi\,\frac{\sin(\alpha_1 - 15\,T)}{\cos\delta}\right]\right\}.$$

§. 7.

Die Gleichungen der Ebene des Meridians und der Verticale des Ortes O sind nach Cap. I, §. 8, Nr. 42) und Cap. I, §. 8, Nr. 40)

$$Yx - Xy = 0$$

und

$$\frac{x-X}{b^2 X} = \frac{y-Y}{b^2 Y} = \frac{z-Z}{a^2 Z}.$$

Die Gleichung der durch die Verticale und die durch die Gleichungen

$$\frac{x-X}{\cos P} = \frac{y-Y}{\cos Q} = \frac{z-Z}{\cos R}$$

charakterisirte gerade Linie gelegten Ebene ist, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{l}(b^2 Y\cos R - a^2 Z\cos Q)(x-X)\\ +\,(a^2 Z\cos P - b^2 X\cos R)(y-Y)\\ +\,(b^2 X\cos Q - b^2 Y\cos P)(z-Z)\end{array}\right\} = 0.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\mathfrak{J} = \{b^2(X^2+Y^2)\cos R - a^2 Z\,(X\cos P + Y\cos Q)\}^2,$$
$$\mathfrak{K} = (X\cos Q - Y\cos P)^2\,\{b^4(X^2+Y^2) + a^4 Z^2\},$$
$$\mathfrak{L} = (X^2+Y^2)\left\{\begin{array}{l}(b^2 X\cos Q - b^2 Y\cos P)^2\\ +\,(b^2 Y\cos R - a^2 Z\cos Q)^2\\ +\,(a^2 Z\cos P - b^2 X\cos R)^2\end{array}\right\},$$

und bezeichnen das Azimuth des scheinbaren Berührungspunktes der beiden Weltkörper durch $\mathfrak{A}$, so ist

$$\cos\mathfrak{A}^2 = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{L}},\quad \sin\mathfrak{A}^2 = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{L}}.$$

Soll nun die Berührung der beiden Weltkörper im Meridiane von O erscheinen, so muss die Bedingungsgleichung

$$X\cos Q - Y\cos P = 0,$$

d. i. die Bedingungsgleichung

$$(BG + B_1G_1)\,X - (AG + A_1G_1)\,Y = 0,$$

oder die Bedingungsgleichung

$$(AY - BX)\,G + (A_1Y - B_1X)\,G_1 = 0,$$

oder die Bedingungsgleichung

$$\left(A\frac{Y}{r} - B\frac{X}{r}\right)G + \left(A_1\frac{Y}{r} - B_1\frac{X}{r}\right)G_1 = 0$$

erfüllt sein. Es ist aber, wie man leicht findet:

$$A\frac{Y}{r} - B\frac{X}{r} = -\cos\delta\cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T),$$
$$A_1\frac{Y}{r} - B_1\frac{X}{r} = -\cos\delta_1\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T).$$

Also muss, wenn die Berührung der beiden Weltkörper im Meridiane von O erscheinen soll, die Bedingungsgleichung

$$\cos\delta\sin(\alpha - 15\,T)\,.\,G + \cos\delta_1\sin(\alpha_1 - 15\,T)\,.\,G_1 = 0$$

erfüllt sein, wo G und G_1 ihre bekannten Bedeutungen haben.

§. 8.

Mittelst des Vorhergehenden lassen sich die wichtigsten Aufgaben über die Bedeckungen auflösen, worüber wir uns aber hier nur mit einigen allgemeinen Andeutungen begnügen wollen, weil wir der vollständigen Auflösung dieser Aufgaben eine besondere Abhandlung zu widmen die Absicht haben.

I. Will man die Zeit $\mathfrak{T}$ und den Ort $(L\varphi)$ bestimmen, wo von einer der beiden die Weltkörper S, S_1 einhüllenden Kegelflächen die Erdoberfläche berührt wird, so muss man die Grössen $\mathfrak{T}$, L, φ so bestimmen, dass den drei folgenden aus dem Obigen bekannten Gleichungen genügt wird, was freilich nur durch Näherung möglich ist:

$$\left.\begin{array}{r} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1{}^1 \end{array}\right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} &(\cos\Theta - \sin\pi)\,G + (\cos\Theta_1 - \sin\pi_1)\,G_1 \\ &= -\varepsilon^2\sin\varphi\,\{(\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi)\,G + (\sin\delta_1 - \sin\pi_1\sin\varphi)\,G_1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha-\alpha_1) - \cot\varphi\,\{\tang\delta_1\sin(\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}) - \tang\delta\sin(\alpha_1 - L - 15\,\mathfrak{T})\} \\ &= -\varepsilon^2\left\{\sin(\alpha-\alpha_1) - \cos\varphi\left[\sin\pi_1\frac{\sin(\alpha - L - 15\,\mathfrak{T})}{\cos\delta_1} - \sin\pi\frac{\sin(\alpha_1 - L - 15\,\mathfrak{T})}{\cos\delta}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Wie in der ersten Gleichung das Zeichen zu nehmen ist, wird keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

Bekanntlich ist

$$\begin{aligned} \cos\Theta &= \sin\delta\,\sin\varphi + \cos\delta\,\cos\varphi\cos(\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}), \\ \cos\Theta_1 &= \sin\delta_1\sin\varphi + \cos\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - L - 15\,\mathfrak{T}); \\ \cos\Delta &= \sin\delta\sin\delta_1 + \cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sin D^1}{\sin D}(\cos D^1 - \cos\Delta^1\cos D_1{}^1), \\ G_1 &= \frac{\sin D_1{}^1}{\sin D_1}(\cos D_1{}^1 - \cos\Delta^1\cos D^1). \end{aligned}$$

II. Will man den Ort $(L\varphi)$ bestimmen, welcher zu einer gegebenen Zeit $\mathfrak{T}$ eine Berührung der beiden Weltkörper im Horizonte sieht, so muss man L, φ aus den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1{}^1 \end{array}\right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} &(\cos\Theta - \sin\pi)\,G + (\cos\Theta_1 - \sin\pi_1)\,G_1 \\ &= -\varepsilon^2\sin\varphi\,\{(\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi)\,G + (\sin\delta_1 - \sin\pi_1\sin\varphi)\,G_1\} \end{aligned}$$

bestimmen.

III. Will man den Ort $(L\varphi)$ ermitteln, welcher zu einer gegebenen Zeit $\mathfrak{T}$ eine Berührung der beiden Weltkörper im Meridiane sieht, so muss man L, φ aus den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1{}^1 \end{array}\right\} = 0,$$

$$\cos\delta\sin(\alpha - L - 15\,\mathfrak{T})\,.\,G + \cos\delta_1\sin(\alpha_1 - L - 15\,\mathfrak{T})\,.\,G_1 = 0$$

bestimmen.

IV. Will man den Ort $(L\varphi)$ bestimmen, welcher zu einer gegebenen Zeit $\mathfrak{T}$ eine äussere oder innere Berührung der beiden Weltkörper als Maximum der Bedeckung, d. h. so sieht, dass im Moment der Berührung die scheinbare Entfernung der beiden Weltkörper von einander am Beobachtungsorte ein Minimum ist, so muss man L, φ aus den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1{}^1 \end{array}\right\} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
0 = \; & \frac{d \cos \Delta}{d \mathfrak{T}} \\
& - \frac{\cos \Theta_1 - \cos \Delta \cos \Theta + \sin \pi (\cos \Delta - \cos \Theta \cos \Theta_1) - \sin \pi_1 \sin \Theta^2}{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta} \cdot \frac{d \sin \pi}{d \mathfrak{T}} \\
& - \frac{\cos \Theta - \cos \Delta \cos \Theta_1 + \sin \pi_1 (\cos \Delta - \cos \Theta \cos \Theta_1) - \sin \pi \sin \Theta_1^2}{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1} \cdot \frac{d \sin \pi_1}{d \mathfrak{T}} \\
& + \frac{\sin \pi (\cos \Delta - \sin \pi \cos \Theta_1) - \sin \pi_1 (1 - \sin \pi \cos \Theta)}{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta} \cdot \frac{d \cos \Theta}{d \mathfrak{T}} \\
& + \frac{\sin \pi_1 (\cos \Delta - \sin \pi_1 \cos \Theta) - \sin \pi (1 - \sin \pi_1 \cos \Theta_1)}{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1} \cdot \frac{d \cos \Theta_1}{d \mathfrak{T}}
\end{aligned}
$$

bestimmen.

V. Will man den Ort $(L \varphi)$ bestimmen, welcher zu einer gegebenen Zeit $\mathfrak{T}$ die Bedeckung central sieht, so müssen, weil in diesem Falle offenbar $\sin \Delta^1 = 0$ ist, die Grössen L, φ aus den sich unmittelbar aus Cap. II, §. 1, Nr. 14) ergebenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 = \; & \sin \pi \cos \delta_1 \cos \varphi \sin (\alpha_1 - L - 15\,\mathfrak{T}) \\
& - \sin \pi_1 \cos \delta \cos \varphi \sin (\alpha - L - 15\,\mathfrak{T}) \\
& + \cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1), \\
0 = \; & (\sin \pi \sin \alpha_1 \cos \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \alpha \cos \delta) \sin \varphi \\
& - (\sin \pi \sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \delta) \sin (L + 15\,\mathfrak{T}) \cos \varphi \\
& + \sin \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \sin \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1, \\
0 = \; & (\sin \pi \cos \alpha_1 \cos \delta_1 - \sin \pi_1 \cos \alpha \cos \delta) \sin \varphi \\
& - (\sin \pi \sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \delta) \cos (L + 15\,\mathfrak{T}) \cos \varphi \\
& + \cos \alpha \cos \delta \sin \delta_1 - \cos \alpha_1 \sin \delta \cos \delta_1
\end{aligned}
$$

bestimmt werden. Jede dieser drei Gleichungen ist eine Folge aus den beiden anderen, wovon man sich überzeugt, wenn man aus der zweiten und dritten Gleichung $\sin \varphi$ eliminirt, und das durch die Elimination hervorgegangene Resultat durch

$$\sin \pi \sin \delta_1 - \sin \pi_1 \sin \delta$$

dividirt, wodurch man die erste Gleichung erhält. Wenn man also L, φ nur so bestimmt, dass zwei der drei obigen Gleichungen erfüllt werden, so ist immer auch die dritte Gleichung erfüllt.

VI. Wenn man die einer äusseren oder inneren Berührung der beiden Weltkörper entsprechende Zeit T des Ortes O durch Beobachtung bestimmt hat, und die geographische Breite φ dieses Ortes bekannt ist, so lässt sich dessen Länge L auf folgende Art finden.

Nach Cap. I. §. 2, ist entweder

$$15\,T = L + 15\,\mathfrak{T}$$

oder

$$15\,T = L + 15\,\mathfrak{T} - 360^0;$$

also entweder

$$\mathfrak{T} = T - \frac{L}{15}$$

oder

$$\mathfrak{T} = T - \frac{L}{15} + 24,$$

je nachdem

$$T - \frac{L}{15} > 0 \text{ oder } T - \frac{L}{15} < 0$$

ist, wo man also, um dies zu beurtheilen, schon eine genäherte Kenntniss der gesuchten Länge haben muss.

Ist nun

$$T - \frac{L}{15} > 0,$$

so muss man die Grössen L, $\mathfrak{T}$ aus den Gleichungen

$$\mathfrak{T} = T - \frac{L}{15},$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1^1 \end{array}\right\} = 0$$

bestimmen.

Ist dagegen

$$T - \frac{L}{15} < 0,$$

so muss man die Grössen L, $\mathfrak{T}$ aus den Gleichungen

$$\mathfrak{T} = T - \frac{L}{15} + 24,$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D_1\cot D_1^1 \end{array}\right\} = 0$$

bestimmen.

Ist S ein Fixstern, so tritt an die Stelle der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1^1 \end{array}\right\} = 0$$

die Gleichung

$$\cos\Delta - \sin\pi_1\cos\Theta - \sin D_1\cot D_1^1 = 0.$$

Man muss bei der Auflösung dieser wichtigen Aufgabe für L nach und nach verschiedene Werthe setzen, die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{T}$ mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{T} = T - \frac{L}{15}$$

oder

$$\mathfrak{T} = T - \frac{L}{15} + 24$$

berechnen, je nachdem

$$T - \frac{L}{15} > 0 \text{ oder } T - \frac{L}{15} < 0$$

ist, und untersuchen, welcher Werth von L die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta \\ \pm \sin D\sin D_1 - \sin D\sin D_1\cot D^1\cot D_1^1 \end{array}\right\} = 0,$$

oder, im Falle S ein Fixstern ist, die Gleichung

$$\cos\Delta - \sin\pi_1\cos\Theta - \sin D_1\cot D_1^1 = 0$$

genau erfüllt. Natürlich muss man sich hierbei der Methode der successiven Annäherungen bedienen, was weiter zu erläutern an diesem Orte nicht nöthig ist.

Viertes Capitel.

Anwendung der Beobachtungen der Bedeckungen.

§. 1.

Die in Zeit ausgedrückte Länge des Beobachtungsortes O, in Bezug auf den Ort A, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, als Anfang der Längen, wollen wir jetzt durch t, und den Fehler dieser Länge durch dt bezeichnen, so dass also $t + dt$ die wahre in Zeit ausgedrückte Länge des Beobachtungsortes O in Bezug auf den Ort A, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, als Anfang der Längen ist, wobei wieder alle Zeiten in Stunden ausgedrückt sein sollen. Dies vorausgesetzt, ist nach Cap. I. §. 2 offenbar

$$T - t - dt$$

oder

$$24 + T - t - dt,$$

je nachdem $T - t - dt$ positiv oder negativ ist, die A-Zeit der Beobachtung. Da wir indess dt hier immer als der Null sehr nahe kommend annehmen, so wird man offenbar sagen können, dass

$$T - t - dt$$

oder

$$24 + T - t - dt,$$

je nachdem $T - t$ positiv oder negativ ist, die A-Zeit der Beobachtung ist. Ist nun $\mathfrak{T}_1$ die A-Zeit der Conjunction der beiden Gestirne, oder wenigstens eine der Conjunctionszeit sehr nahe kommende Zeit, die man aus den Ephemeriden berechnen kann, so ist, je nachdem $T - t$ positiv oder negativ ist,

$$(T - t - dt) - \mathfrak{T}_1 = T - \mathfrak{T}_1 - t - dt$$

oder

$$(24 + T - t - dt) - \mathfrak{T}_1 = 24 + T - \mathfrak{T}_1 - t - dt$$

die Zwischenzeit zwischen dem Momente der Beobachtung und dem Momente, welchem die A-Zeit $\mathfrak{T}_1$ entspricht, welchen letzteren Moment wir im Folgenden überhaupt die Conjunctionszeit nennen wollen, wobei man des Folgenden wegen nicht übersehen darf, dass diese Zwischenzeit positiv oder negativ ist, je nachdem die Beobachtung nach oder vor der Zeit der Conjunction gemacht worden ist. Setzen wir also der Kürze wegen, je nachdem $T - t$ positiv oder negativ ist,

$$1)\quad \tau = T - \mathfrak{T}_1 - t$$

oder

$$1^*)\quad \tau = 24 + T - \mathfrak{T}_1 - t,$$

so ist überhaupt $\tau - dt$ die Zwischenzeit zwischen dem Momente der Beobachtung und dem Momente der Conjunction oder der Conjunctionszeit, und diese Zwischenzeit ist positiv oder negativ, je nachdem die Beobachtung nach oder vor dem Momente der Conjunction gemacht worden ist.

Aus den Ephemeriden berechne man nun mittelst der bekannten Interpolationsmethoden die der Zeit $\mathfrak{T}_1$ entsprechende Rectascension, Declination, die sogenannte Horizontalparallaxe unter dem Äquator, und den aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser für jeden der beiden Weltkörper S und S_1 und bezeichne diese Grössen respective durch

$$(\alpha),\ (\delta),\ (\Pi),\ (D) \text{ und } (\alpha_1),\ (\delta_1),\ (\Pi_1),\ (D_1);$$

die entsprechenden, aus der Ungenauigkeit der Ephemeriden oder überhaupt der Tafeln entspringenden Fehler dieser Elemente aber durch

$$d(\alpha),\ d(\delta),\ d(\Pi),\ d(D) \text{ und } d(\alpha_1),\ d(\delta_1),\ d(\Pi_1),\ d(D_1);$$

so dass also für die A-Zeit $\mathfrak{T}_1$ die wahre Rectascension, die wahre Declination, die wahre Horizontalparallaxe unter dem Äquator, der wahre aus dem Mittelpunkte der Erde gesehene scheinbare Halbmesser der beiden Weltkörper S und S_1 respective

$$(\alpha) + d(\alpha),\ (\delta) + d(\delta),\ (\Pi) + d(\Pi),\ (D) + d(D)$$

und

$$(\alpha_1) + d(\alpha_1),\ (\delta_1) + d(\delta_1),\ (\Pi_1) + d(\Pi_1),\ (D_1) + d(D_1)$$

sind. Ferner berechne man aus den Ephemeriden die stündlichen Änderungen

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu \quad \text{und} \quad \varkappa_1,\ \lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1$$

der Elemente

$$(\alpha),\ (\delta),\ (\Pi),\ (D) \quad \text{und} \quad (\alpha_1),\ (\delta_1),\ (\Pi_1),\ (D_1);$$

so sind offenbar die Rectascension, die Declination, die Horizontalparallaxe unter dem Äquator, der aus dem Mittelpunkte der Erde gesehene scheinbare Halbmesser der beiden Weltkörper S und S_1 im Momente der Beobachtung respective:

$$\begin{aligned} &(\alpha)+d(\alpha)+\varkappa(\tau-dt), \\ &(\delta)+d(\delta)+\lambda(\tau-dt), \\ &(\Pi)+d(\Pi)+\mu(\tau-dt), \\ &(D)+d(D)+\nu(\tau-dt), \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} &(\alpha_1)+d(\alpha_1)+\varkappa_1(\tau-dt), \\ &(\delta_1)+d(\delta_1)+\lambda_1(\tau-dt), \\ &(\Pi_1)+d(\Pi_1)+\mu_1(\tau-dt), \\ &(D_1)+d(D_1)+\nu_1(\tau-dt): \end{aligned}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\ \begin{cases} \alpha = (\alpha)+\varkappa\tau, \\ \delta = (\delta)+\lambda\tau, \\ \Pi = (\Pi)+\mu\tau, \\ D = (D)+\nu\tau; \end{cases} \quad \text{und } 3)\ \begin{cases} \alpha_1 = (\alpha_1)+\varkappa_1\tau, \\ \delta_1 = (\delta_1)+\lambda_1\tau, \\ \Pi_1 = (\Pi_1)+\mu_1\tau, \\ D_1 = (D_1)+\nu_1\tau; \end{cases}$$

so wie

$$4)\ \begin{cases} d\alpha = d(\alpha)-\varkappa dt, \\ d\delta = d(\delta)-\lambda dt, \\ d\Pi = d(\Pi)-\mu dt, \\ dD = d(D)-\nu dt; \end{cases} \quad \text{und } 5)\ \begin{cases} d\alpha_1 = d(\alpha_1)-\varkappa_1 dt, \\ d\delta_1 = d(\delta_1)-\lambda_1 dt, \\ d\Pi_1 = d(\Pi_1)-\mu_1 dt, \\ dD_1 = d(D_1)-\nu_1 dt \end{cases}$$

setzen:

$$\alpha+d\alpha,\ \delta+d\delta,\ \Pi+d\Pi,\ D+dD$$

und

$$\alpha_1+d\alpha_1,\ \delta_1+d\delta_1,\ \Pi_1+d\Pi_1,\ D_1+dD_1.$$

Dass sich alle diese Grössen auf den Moment der Beobachtung beziehen, ist zwar schon vorher bemerkt worden, wird aber hier absichtlich noch einmal wiederholt.

§. 2.

Denken wir uns nun die vorhergehenden Grössen in die Gleichung Cap. II, §. 4, Nr. 29) eingeführt, so wird dieselbe:

$$\begin{aligned} 0 = &\cos\Delta+\sin\pi\sin\pi_1-\sin\pi\cos\Theta_1-\sin\pi_1\cos\Theta-\frac{\sin D\sin D_1}{\sin D^1\sin D_1{}^1}\cos(D^1\pm D_1{}^1) \\ &-\sin\Delta\, d\Delta \\ &-\cos\pi\,(\cos\Theta_1-\sin\pi_1)\, d\pi \\ &-\cos\pi_1\,(\cos\Theta-\sin\pi)\, d\pi_1 \\ &+\sin\pi_1\sin\Theta\, d\Theta \\ &+\sin\pi\sin\Theta_1\, d\Theta_1 \\ &-d\,.\,\frac{\sin D\sin D_1}{\sin D^1\sin D_1{}^1}\cos(D^1\pm D_1{}^1). \end{aligned}$$

Bekanntlich ist aber

$$\cos\Delta = \sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1),$$

also, wenn man differentiirt:

$$\begin{aligned} -\sin\Delta\, d\Delta = &\{\cos\delta\sin\delta_1-\sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\, d\delta \\ &+\{\sin\delta\cos\delta_1-\cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\, d\delta_1 \\ &-\cos\delta\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)\,(d\alpha-d\alpha_1). \end{aligned}$$

Ferner ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} \cos\Theta &= \sin\delta\ \sin\varphi+\cos\delta\ \cos\varphi\cos(\alpha\ -15\,T), \\ \cos\Theta_1 &= \sin\delta_1\sin\varphi+\cos\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1-15\,T): \end{aligned}$$

also, wenn man differentiirt:

$$\begin{aligned} \sin\Theta\, d\Theta = {} & \cos\delta \cos\varphi \sin(\alpha - 15\,T)\, d\alpha \\ & - \{\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos(\alpha - 15\,T)\}\, d\delta, \\ \sin\Theta_1\, d\Theta_1 = {} & \cos\delta_1 \cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15\,T)\, d\alpha_1 \\ & - \{\cos\delta_1 \sin\varphi - \sin\delta_1 \cos\varphi \cos(\alpha_1 - 15\,T)\}\, d\delta_1. \end{aligned}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$6)\quad P = \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} \cos(D^1 \pm D_1^{\,1}),$$

so ist

$$dP = \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}}\, d\cos(D^1 \pm D_1^{\,1}) + \cos(D^1 \pm D_1^{\,1})\, d \,.\, \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}}.$$

Nun ist aber

$$d\cos(D^1 \pm D_1^{\,1}) = -\sin(D^1 \pm D_1^{\,1})(dD^1 \pm dD_1^{\,1})$$

und

$$\begin{aligned} & \sin {D^1}^2 \sin {D_1^{\,1}}^2\, d \,.\, \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} \\ = {} & \sin D^1 \sin D_1^{\,1} (\cos D \sin D_1\, dD + \sin D \cos D_1\, dD_1) \\ & - \sin D \sin D_1 (\cos D^1 \sin D_1^{\,1}\, dD^1 + \sin D^1 \cos D_1^{\,1}\, dD_1^{\,1}), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sin D^1 \sin D_1^{\,1}\, d \,.\, \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} = {} & \cos D \sin D_1\, dD + \sin D \cos D_1\, dD_1 \\ & - \sin D \sin D_1 (\cot D^1\, dD^1 + \cot D_1^{\,1}\, dD_1^{\,1}). \end{aligned}$$

Führt man nun den sich hieraus ergebenden Ausdruck von

$$d \,.\, \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}}$$

und den vorher gefundenen Ausdruck von $d\cos(D^1 \pm D_1^{\,1})$ in den obigen Ausdruck von dP ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} dP = {} & \frac{\cos(D^1 \pm D_1^{\,1})}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} \left\{ \begin{array}{l} \cos D \sin D_1\, dD + \sin D \cos D_1\, dD_1 \\ - \sin D \sin D_1 (\cot D^1\, dD^1 + \cot D_1^{\,1}\, dD_1^{\,1}) \end{array} \right\} \\ & - \frac{\sin(D^1 \pm D_1^{\,1})}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} \sin D \sin D_1 (dD^1 \pm dD_1^{\,1}) \\ = {} & \frac{\cos(D^1 \pm D_1^{\,1})}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} (\cos D \sin D_1\, dD + \sin D \cos D_1\, dD_1) \\ & - \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} \left\{ \begin{array}{l} [\cos(D^1 \pm D_1^{\,1}) \cot D^1 + \sin(D^1 \pm D_1^{\,1})]\, dD^1 \\ + [\cos(D^1 \pm D_1^{\,1}) \cot D_1^{\,1} \pm \sin(D^1 \pm D_1^{\,1})]\, dD_1^{\,1} \end{array} \right\} \\ = {} & \frac{\cos(D^1 \pm D_1^{\,1})}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} (\cos D \sin D_1\, dD + \sin D \cos D_1\, dD_1) \\ & - \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} \left(\frac{\cos D_1^{\,1}}{\sin D^1}\, dD^1 + \frac{\cos D^1}{\sin D_1^{\,1}}\, dD_1^{\,1} \right) \\ = {} & \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}} \left\{ \begin{array}{l} \cos(D^1 \pm D_1^{\,1})(\cot D\, dD + \cot D_1\, dD_1) \\ - \dfrac{\cos D_1^{\,1}}{\sin D^1}\, dD^1 - \dfrac{\cos D^1}{\sin D_1^{\,1}}\, dD_1^{\,1} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\sin D^1 \sin D_1^{\,1}}{\sin D \sin D_1}\, dP = {} & \cos(D^1 \pm D_1^{\,1})(\cot D\, dD + \cot D_1\, dD_1) \\ & - \frac{\cos D_1^{\,1}}{\sin D^1}\, dD^1 - \frac{\cos D^1}{\sin D_1^{\,1}}\, dD_1^{\,1}. \end{aligned}$$

Zunächst kommt es nun auf die Entwickelung von

$$\frac{\cos D_1^{\,1}}{\sin D^1}\, dD^1 \text{ und } \frac{\cos D^1}{\sin D_1^{\,1}}\, dD_1^{\,1}$$

an. Bekanntlich ist aber

$$\sin D = \sin D^1 \sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}.$$

$$\sin D_1 = \sin D_1^1 \sqrt{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1};$$

also, wenn man differentiirt:

$$\cos D\, d D = \cos D^1\, dD^1 \sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}$$
$$+ \sin D^1 \frac{\sin \pi \sin \Theta\, d\Theta - \cos \pi (\cos \Theta - \sin \pi)\, d\pi}{\sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta}},$$

$$\cos D_1\, d D_1 = \cos D_1^1\, d D_1^1 \sqrt{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1}$$
$$+ \sin D_1^1 \frac{\sin \pi_1 \sin \Theta_1\, d\Theta_1 - \cos \pi_1 (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1)\, d\pi_1}{\sqrt{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1}};$$

oder, weil

$$\sqrt{1 + \sin \pi^2 - 2 \sin \pi \cos \Theta} = \frac{\sin D}{\sin D^1},$$

$$\sqrt{1 + \sin \pi_1^2 - 2 \sin \pi_1 \cos \Theta_1} = \frac{\sin D_1}{\sin D_1^1}$$

ist:

$$\cot D\, d D = \cot D^1\, d D^1$$
$$+ \frac{\sin D^{1\,2}}{\sin D^2} \{\sin \pi \sin \Theta\, d\Theta - \cos \pi (\cos \Theta - \sin \pi)\, d\pi\}$$

$$\cot D_1\, d D_1 = \cot D_1^1\, d D_1^1$$
$$+ \frac{\sin D_1^{1\,2}}{\sin D_1^2} \{\sin \pi_1 \sin \Theta_1\, d\Theta_1 - \cos \pi_1 (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1)\, d\pi_1\}:$$

oder

$$\cot D^1\, d D^1 = \cot D\, dD$$
$$- \frac{\sin D^{1\,2}}{\sin D^2} \{\sin \pi \sin \Theta\, d\Theta - \cos \pi (\cos \Theta - \sin \pi)\, d\pi\},$$

$$\cot D_1^1\, d D_1^1 = \cot D_1\, d D_1$$
$$- \frac{\sin D_1^{1\,2}}{\sin D_1^2} \{\sin \pi_1 \sin \Theta_1\, d\Theta_1 - \cos \pi_1 (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1)\, d\pi_1\}.$$

Folglich ist

$$\frac{\cos D_1^1}{\sin D^1}\, dD^1$$
$$= \frac{\cos D_1^1}{\cos D^1} \left\{\cot D\, dD - \frac{\sin D^{1\,2}}{\sin D^2} [\sin \pi \sin \Theta\, d\Theta - \cos \pi (\cos \Theta - \sin \pi)\, d\pi]\right\},$$

$$\frac{\cos D^1}{\sin D_1^1}\, d D_1^1$$
$$= \frac{\cos D^1}{\cos D_1^1} \left\{\cot D_1\, d D_1 - \frac{\sin D_1^{1\,2}}{\sin D_1^2} [\sin \pi_1 \sin \Theta_1\, d\Theta_1 - \cos \pi_1 (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1)\, d\pi_1\right\}.$$

Führt man dies in den obigen Ausdruck von

$$\frac{\sin D^1 \sin D_1^1}{\sin D \sin D_1}\, dP$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\sin D^1 \sin D_1^1}{\sin D \sin D_1}\, dP$$

$$= \cot D \left\{\cos (D^1 \pm D_1^1) - \frac{\cos D_1^1}{\cos D_1}\right\} dD$$
$$+ \cot D_1 \left\{\cos (D^1 \pm D_1^1) - \frac{\cos D^1}{\cos D_1^1}\right\} dD_1$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\sin D^{1\,2} \cos D_1{}^1}{\sin D^2 \cos D^1} \{\sin \pi \sin \Theta \, d \Theta - \cos \pi \, (\cos \Theta - \sin \pi) \, d\pi\} \\
&+ \frac{\sin D_1{}^{1\,2} \cos D^1}{\sin D_1{}^2 \cos D_1{}^1} \{\sin \pi_1 \sin \Theta_1 \, d \Theta_1 - \cos \pi_1 \, (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1) \, d\pi_1\} .
\end{aligned}
$$

woraus sich mittelst einiger leichten goniometrischen Transformationen

$$
\begin{aligned}
dP = &- \frac{\cos D \sin D_1}{\cos D^1 \sin D_1{}^1} \sin (D^1 \pm D_1{}^1) \, dD \\
&\mp \frac{\sin D \cos D_1}{\sin D^1 \cos D_1{}^1} \sin (D^1 \pm D_1{}^1) \, dD_1 \\
&+ \frac{\sin D_1 \tan D^1}{\sin D \tan D_1{}^1} \{\sin \pi \sin \Theta \, d\Theta - \cos \pi \, (\cos \Theta - \sin \pi) \, d\pi\} \\
&+ \frac{\sin D \tan D_1{}^1}{\sin D_1 \tan D^1} \{\sin \pi_1 \sin \Theta_1 \, d\Theta_1 - \cos \pi_1 (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1) \, d\pi_1\}
\end{aligned}
$$

ergibt.

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von $- \sin \Delta \, d\Delta$ und dP in die am Anfange dieses Paragraphen entwickelte Gleichung ein, so wird dieselbe:

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & \cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta - \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1{}^1} \cos (D^1 \pm D_1{}^1) \\
&- \cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1) \, (d\alpha - d\alpha_1) \\
&+ \{\cos \delta \sin \delta_1 - \sin \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1)\} \, d\delta \\
&+ \{\sin \delta \cos \delta_1 - \cos \delta \sin \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1)\} \, d\delta_1 \\
&- \cos \pi \, (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1) \, d\pi \\
&- \cos \pi_1 \, (\cos \Theta - \sin \pi) \, d\pi_1 \\
&+ \sin \pi_1 \sin \Theta \, d \Theta \\
&+ \sin \pi \sin \Theta_1 \, d \Theta_1 \\
&+ \frac{\cos D \sin D_1}{\cos D^1 \sin D_1{}^1} \sin (D^1 \pm D_1{}^1) \, dD \\
&\pm \frac{\sin D \cos D_1}{\sin D^1 \cos D_1{}^1} \sin (D^1 \pm D_1{}^1) \, dD_1 \\
&- \frac{\sin D_1 \tan D^1}{\sin D \tan D_1{}^1} \{\sin \pi \sin \Theta \, d \Theta - \cos \pi \, (\cos \Theta - \sin \pi) \, d\pi\} \\
&- \frac{\sin D \tan D_1{}^1}{\sin D_1 \tan D^1} \{\sin \pi_1 \sin \Theta_1 \, d\Theta_1 - \cos \pi_1 \, (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1) \, d\pi_1\} .
\end{aligned}
$$

oder, wenn man diese Gleichung gehörig ordnet:

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & \cos \Delta + \sin \pi \sin \pi_1 - \sin \pi \cos \Theta_1 - \sin \pi_1 \cos \Theta - \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1{}^1} \cos (D^1 \pm D_1{}^1) \\
&- \cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1) \, (d\alpha - d\alpha_1) \\
&+ \{\cos \delta \sin \delta_1 - \sin \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1)\} \, d\delta \\
&+ \{\sin \delta \cos \delta_1 - \cos \delta \sin \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1)\} \, d\delta_1 \\
&+ \frac{\cos D \sin D_1}{\cos D^1 \sin D_1{}^1} \sin (D^1 \pm D_1{}^1) \, dD \\
&\pm \frac{\sin D \cos D_1}{\sin D^1 \cos D_1{}^1} \sin (D^1 \pm D_1{}^1) \, dD_1 \\
&- \frac{\sin D \tan D_1{}^1 (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1) - \sin D_1 \tan D^1 (\cos \Theta - \sin \pi)}{\sin D \tan D_1{}^1} \cos \pi \, d\pi \\
&+ \frac{\sin D \tan D_1{}^1 (\cos \Theta_1 - \sin \pi_1) - \sin D_1 \tan D^1 (\cos \Theta - \sin \pi)}{\sin D_1 \tan D^1} \cos \pi_1 \, d\pi_1 \\
&- \frac{\sin \pi \sin D_1 \tan D^1 - \sin \pi_1 \sin D \tan D_1{}^1}{\sin D \tan D_1{}^1} \sin \Theta \, d \Theta \\
&+ \frac{\sin \pi \sin D_1 \tan D^1 - \sin \pi_1 \sin D \tan D_1{}^1}{\sin D_1 \tan D^1} \sin \Theta_1 \, d\Theta_1 ,
\end{aligned}
$$

oder auch:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta - \frac{\sin D\sin D_1}{\sin D^1\sin D_1{}^1}\cos(D^1 \pm D_1{}^1)\\
& - \cos\delta\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)(d\alpha - d\alpha_1)\\
& + \{\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\,d\delta\\
& + \{\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\,d\delta_1\\
& + \frac{\cos D\sin D_1}{\cos D^1\sin D_1{}^1}\sin(D^1 \pm D_1{}^1)\,dD\\
& \pm \frac{\sin D\cos D_1}{\sin D^1\cos D_1{}^1}\sin(D^1 \pm D_1{}^1)\,dD_1\\
& - \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D\,tang\,D_1{}^1}\\ - \dfrac{\cos\Theta\sin D_1\,tang\,D^1 - \cos\Theta_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D\,tang\,D_1{}^1}\end{array}\right\}\cos\pi\,d\pi\\
& + \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D_1\,tang\,D^1}\\ - \dfrac{\cos\Theta\sin D_1\,tang\,D^1 - \cos\Theta_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D_1\,tang\,D^1}\end{array}\right\}\cos\pi_1\,d\pi_1\\
& - \frac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D\,tang\,D_1{}^1}\sin\Theta\,d\Theta\\
& + \frac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D_1\,tang\,D^1}\sin\Theta_1\,d\Theta_1.
\end{aligned}
$$

Führt man jetzt in diese Gleichung die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von $\sin\Theta\,d\Theta$ und $\sin\Theta_1\,d\Theta_1$ ein, und ordnet dieselbe gehörig, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \cos\Delta + \sin\pi\sin\pi_1 - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin\pi_1\cos\Theta - \frac{\sin D\sin D_1}{\sin D^1\sin D_1{}^1}\cos(D^1 \pm D_1{}^1)\\
& + \frac{\cos D\sin D_1}{\cos D^1\sin D_1{}^1}\sin(D^1 \pm D_1{}^1)\,dD\\
& \pm \frac{\sin D\cos D_1}{\sin D^1\cos D_1{}^1}\sin(D^1 \pm D_1{}^1)\,dD_1\\
& - \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D\,tang\,D_1{}^1}\\ - \dfrac{\cos\Theta\sin D_1\,tang\,D^1 - \cos\Theta_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D\,tang\,D_1{}^1}\end{array}\right\}\cos\pi\,d\pi\\
& + \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D_1\,tang\,D^1}\\ - \dfrac{\cos\Theta\sin D_1\,tang\,D^1 - \cos\Theta_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D_1\,tang\,D^1}\end{array}\right\}\cos\pi_1\,d\pi_1\\
& - \cos\delta\left\{\begin{array}{l}\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)\\ + \cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T)\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D\,tang\,D_1{}^1}\end{array}\right\}d\alpha\\
& + \cos\delta_1\left\{\begin{array}{l}\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_1)\\ + \cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T)\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D_1\,tang\,D^1}\end{array}\right\}d\alpha_1\\
& + \left\{\begin{array}{l}\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\\ + [\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos(\alpha - 15\,T)]\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D\,tang\,D_1{}^1}\end{array}\right\}d\delta\\
& + \left\{\begin{array}{l}\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\\ - [\cos\delta_1\sin\varphi - \sin\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T)]\dfrac{\sin\pi\sin D_1\,tang\,D^1 - \sin\pi_1\sin D\,tang\,D_1{}^1}{\sin D_1\,tang\,D^1}\end{array}\right\}d\delta_1.
\end{aligned}
$$

Bekanntlich ist nun, wenn a den Halbmesser des Erdäquators bezeichnet:

$$\sin\Pi = \frac{a}{\rho},\quad \sin\Pi_1 = \frac{a}{\rho_1};$$

und folglich, weil

$$\sin\pi = \frac{r}{\rho}, \quad \sin\pi_1 = \frac{r}{\rho_1}$$

ist:

$$\sin\pi = \frac{r}{a}\sin\Pi, \; \sin\pi_1 = \frac{r}{a}\sin\Pi_1;$$

also, wenn man differentiirt:

$$\cos\pi\, d\pi = \frac{r}{a}\cos\Pi\, d\Pi, \; \cos\pi_1\, d\pi_1 = \frac{r}{a}\cos\Pi_1\, d\Pi_1.$$

Führt man nun Π, Π_1 statt π, π_1 in die vorhergehende Gleichung ein, und setzt der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
A &= \cos\Delta + \frac{r^2}{a^2}\sin\Pi\sin\Pi_1 - \frac{r}{a}\sin\Pi\cos\Theta_1 - \frac{r}{a}\sin\Pi_1\cos\Theta \\
&\qquad - \frac{\sin D\sin D_1}{\sin D^1\sin D_1{}^1}\cos(D^1 \pm D_1{}^1); \\
\mathfrak{A} &= \frac{\cos D\sin D_1}{\cos D^1\sin D_1{}^1}\sin(D^1 \pm D_1{}^1), \\
\mathfrak{A}_1 &= \pm\frac{\sin D\cos D_1}{\sin D^1\cos D_1{}^1}\sin(D^1 \pm D_1{}^1); \\
\mathfrak{B} &= -\frac{r}{a}\cdot\frac{\cos\Theta_1\sin D\tan D_1{}^1 - \cos\Theta\sin D_1\tan D^1}{\sin D\tan D_1{}^1}\cos\Pi \\
&\quad + \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{\sin\Pi_1\sin D\tan D_1{}^1 - \sin\Pi\sin D_1\tan D^1}{\sin D\tan D_1{}^1}\cos\Pi, \\
\mathfrak{B}_1 &= \frac{r}{a}\cdot\frac{\cos\Theta_1\sin D\tan D_1{}^1 - \cos\Theta\sin D_1\tan D^1}{\sin D_1\tan D^1}\cos\Pi_1 \\
&\quad - \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{\sin\Pi_1\sin D\tan D_1{}^1 - \sin\Pi\sin D_1\tan D^1}{\sin D_1\tan D^1}\cos\Pi_1; \\
\mathfrak{C} &= -\cos\delta\left\{\begin{array}{l}\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1) \\ -\cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T)\cdot\dfrac{r}{a}\cdot\dfrac{\sin\Pi_1\sin D\tan D_1{}^1 - \sin\Pi\sin D_1\tan D^1}{\sin D\tan D_1{}^1}\end{array}\right\}, \\
\mathfrak{C}_1 &= \cos\delta_1\left\{\begin{array}{l}\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_1) \\ -\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T)\cdot\dfrac{r}{a}\cdot\dfrac{\sin\Pi_1\sin D\tan D_1{}^1 - \sin\Pi\sin D_1\tan D^1}{\sin D_1\tan D^1}\end{array}\right\}; \\
\mathfrak{D} &= \cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1) \\
&\quad - \{\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos(\alpha - 15\,T)\}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{\sin\Pi_1\sin D\tan D_1{}^1 - \sin\Pi\sin D_1\tan D^1}{\sin D\tan D_1{}^1}, \\
\mathfrak{D}_1 &= \sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1) \\
&\quad + \{\cos\delta_1\sin\varphi - \sin\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T)\}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{\sin\Pi_1\sin D\tan D_1{}^1 - \sin\Pi\sin D_1\tan D^1}{\sin D_1\tan D^1};
\end{aligned}$$

so wird die obige Gleichung:

$$\begin{aligned}
7)\quad 0 &= A + \mathfrak{A}\,dD + \mathfrak{B}\,d\Pi + \mathfrak{C}\,d\alpha + \mathfrak{D}\,d\delta \\
&\quad + \mathfrak{A}_1 dD_1 + \mathfrak{B}_1 d\Pi_1 + \mathfrak{C}_1 d\alpha_1 + \mathfrak{D}_1 d\delta_1.
\end{aligned}$$

Setzt man aber der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
8)\quad K &= \sin D\tan D_1{}^1, \\
K_1 &= \sin D_1\tan D^1; \\
M &= K\cos\Theta_1 - K_1\cos\Theta; \\
N &= \frac{r}{a}(K\sin\Pi_1 - K_1\sin\Pi); \\
F &= \cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1), \\
F_1 &= \cos\delta\sin(\alpha-\alpha_1); \\
G &= \cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T), \\
G_1 &= \cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T);
\end{aligned}$$

$$H = \cos\delta \sin\delta_1 - \sin\delta \cos\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1),$$
$$H_1 = \sin\delta \cos\delta_1 - \cos\delta \sin\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1);$$
$$I = \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos(\alpha - 15\,T),$$
$$I_1 = \cos\delta_1 \sin\varphi - \sin\delta_1 \cos\varphi \cos(\alpha_1 - 15\,T);$$

so hat man zur Berechnung der Grössen

$$A; \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}; \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$$

die folgenden Formeln:

$$9)\quad A = \cos\Delta + \frac{r^2}{a^2}\sin\Pi \sin\Pi_1 - \frac{r}{a}\sin\Pi \cos\Theta_1 - \frac{r}{a}\sin\Pi_1 \cos\Theta - \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^1}\cos(D^1 \pm D_1^1);$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\cos D \sin D_1}{\cos D^1 \sin D_1^1}\sin(D^1 \pm D_1^1),$$

$$\mathfrak{A}_1 = \pm \frac{\sin D \cos D_1}{\sin D^1 \cos D_1^1}\sin(D^1 \pm D_1^1);$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{r}{a}\cdot\frac{M-N}{K}\cos\Pi,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{r}{a}\cdot\frac{M-N}{K_1}\cos\Pi_1;$$

$$\mathfrak{C} = -\left(F - \frac{GN}{K}\right)\cos\delta,$$

$$\mathfrak{C}_1 = \left(F_1 - \frac{G_1 N}{K_1}\right)\cos\delta_1;$$

$$\mathfrak{D} = H - \frac{IN}{K},$$

$$\mathfrak{D}_1 = H_1 + \frac{I_1 N}{K_1}.$$

Die Berechnung der Grössen

$$\cos\Delta = \sin\delta \sin\delta_1 + \cos\delta \cos\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1),$$
$$H = \cos\delta \sin\delta_1 - \sin\delta \cos\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1),$$
$$H_1 = \sin\delta \cos\delta_1 - \cos\delta \sin\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1)$$

und

$$\cos\Theta = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos(\alpha - 15\,T),$$
$$\cos\Theta_1 = \sin\delta_1 \sin\varphi + \cos\delta_1 \cos\varphi \cos(\alpha_1 - 15\,T);$$
$$I = \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos(\alpha - 15\,T),$$
$$I_1 = \cos\delta_1 \sin\varphi - \sin\delta_1 \cos\varphi \cos(\alpha_1 - 15\,T)$$

kann man sich auf folgende Art erleichtern.

Weil

$$\cos\Delta = \sin\delta_1\{\sin\delta + \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_1)\cot\delta_1\}$$
$$= \sin\delta\{\sin\delta_1 + \cos\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1)\cot\delta\},$$
$$H = \sin\delta_1\{\cos\delta - \sin\delta \cos(\alpha - \alpha_1)\cot\delta_1\},$$
$$H_1 = \sin\delta\{\cos\delta_1 - \sin\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1)\cot\delta\}$$

ist: so berechne man die Hülfswinkel ξ, ξ_1 mittelst der Formeln

$$10)\quad \begin{cases} \tang\xi = \cos(\alpha - \alpha_1)\cot\delta, \\ \tang\xi_1 = \cos(\alpha - \alpha_1)\cot\delta_1; \end{cases}$$

dann ist:

$$11)\quad \begin{cases} \cos\Delta = \dfrac{\sin\delta_1 \sin(\delta + \xi_1)}{\cos\xi_1} = \dfrac{\sin\delta \sin(\delta_1 + \xi)}{\cos\xi}, \\ H = \dfrac{\sin\delta_1 \cos(\delta + \xi_1)}{\cos\xi_1}, \\ H_1 = \dfrac{\sin\delta \cos(\delta_1 + \xi)}{\cos\xi}. \end{cases}$$

Weil ferner

$$\begin{aligned}
\cos\theta\ &= \sin\varphi\,\{\sin\delta\ + \cos\delta\ \cos(\alpha\ - 15\,T)\cot\varphi\},\\
\cos\theta_1 &= \sin\varphi\,\{\sin\delta_1 + \cos\delta_1 \cos(\alpha_1 - 15\,T)\cot\varphi\}:\\
I\ &= \sin\varphi\,\{\cos\delta\ - \sin\delta\ \cos(\alpha\ - 15\,T)\cot\varphi\},\\
I_1 &= \sin\varphi\,\{\cos\delta_1 - \sin\delta_1 \cos(\alpha_1 - 15\,T)\cot\varphi\}
\end{aligned}$$

ist; so berechne man die beiden Hülfswinkel η, η_1 mittelst der Formeln:

$$12)\ \begin{cases}\tan\eta\ = \cos(\alpha\ - 15\,T)\cot\varphi,\\ \tan\eta_1 = \cos(\alpha_1 - 15\,T)\cot\varphi;\end{cases}$$

dann ist:

$$13)\ \begin{cases}\cos\theta\ = \dfrac{\sin\varphi\,\sin(\delta+\eta)}{\cos\eta},\\[2mm] \cos\theta_1 = \dfrac{\sin\varphi\,\sin(\delta_1+\eta_1)}{\cos\eta_1};\\[2mm] I\ = \dfrac{\sin\varphi\cos(\delta+\eta)}{\cos\eta}\\[2mm] I_1\ = \dfrac{\sin\varphi\,\cos(\delta_1+\eta_1)}{\cos\eta_1}.\end{cases}$$

Auch ist

$$14)\ \begin{cases}H\ = \cos\Delta\,\cot(\delta\ + \xi_1),\\ H_1 = \cos\Delta\,\cot(\delta_1 + \xi)\end{cases}$$

und

$$15)\ \begin{cases}I\ = \cos\theta\ \cot(\delta\ + \eta),\\ I_1\ = \cos\theta_1 \cot(\delta_1 + \eta_1).\end{cases}$$

Führt man in die Gleichung 7) statt der Grössen

$$dD,\ d\Pi,\ d\alpha,\ d\delta$$

mittelst der Formeln 4) die Grössen

$$d(D),\ d(\Pi),\ d(\alpha),\ d(\delta);$$

und statt der Grössen

$$dD_1,\ d\Pi_1,\ d\alpha_1,\ d\delta_1$$

mittelst der Formeln 5) die Grössen

$$d(D_1),\ d(\Pi_1),\ d(\alpha_1),\ d(\delta_1)$$

ein, so erhält die Gleichung 7) die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
16)\ 0 = A - \{\nu\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \varkappa\mathfrak{C} + \lambda\mathfrak{D} + \nu_1\mathfrak{A}_1 + \mu_1\mathfrak{B}_1 + \varkappa_1\mathfrak{C}_1 + \lambda_1\mathfrak{D}_1\}\,dt\\
+ \mathfrak{A}d(D) + \mathfrak{B}\,d(\Pi) + \mathfrak{C}d(\alpha) + \mathfrak{D}\,d(\delta)\\
+ \mathfrak{A}_1\,d(D_1) + \mathfrak{B}_1 d(\Pi_1) + \mathfrak{C}_1 d(\alpha_1) + \mathfrak{D}_1\,d(\delta_1).
\end{aligned}$$

Nimmt man die Ephemeriden als fehlerfrei an, und setzt also

$$d(D) = 0,\ \ d(\Pi) = 0,\ \ d(\alpha) = 0,\ \ d(\delta) = 0$$

und

$$d(D_1) = 0,\ d(\Pi_1) = 0,\ d(\alpha_1) = 0,\ d(\delta_1) = 0:$$

so erhält man aus der Gleichung 16) zur Bestimmung des Fehlers dt der Länge des Beobachtungsortes die Formel

$$17)\ dt = \frac{A}{\nu\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \varkappa\mathfrak{C} + \lambda\mathfrak{D} + \nu_1\mathfrak{A}_1 + \mu_1\mathfrak{B}_1 + \varkappa_1\mathfrak{C}_1 + \lambda_1\mathfrak{D}_1}$$

oder

$$17^*)\ dt = \frac{A}{\nu\mathfrak{A} + \nu_1\mathfrak{A}_1 + \mu\mathfrak{B} + \mu_1\mathfrak{B}_1 + \varkappa\mathfrak{C} + \varkappa_1\mathfrak{C}_1 + \lambda\mathfrak{D} + \lambda_1\mathfrak{D}_1}.$$

Setzt man dagegen $dt = 0$ und nimmt also die Länge t des Beobachtungsortes als richtig an, so erhält man aus 16) zwischen den Fehlern

$$d(D),\ \ d(\Pi),\ \ d(\alpha),\ \ d(\delta)$$

und

$$d(D_1),\ d(\Pi_1),\ d(\alpha_1),\ d(\delta_1)$$

die Gleichung

$$18)\ 0 = A + \mathfrak{A}\,d(D) + \mathfrak{B}\,d(\Pi) + \mathfrak{C}\,d(\alpha) + \mathfrak{D}\,d(\delta)$$
$$+ \mathfrak{A}_1 d(D_1) + \mathfrak{B}_1 d(\Pi_1) + \mathfrak{C}_1 d(\alpha_1) + \mathfrak{D}_1 d(\delta_1).$$

Hat man also Beobachtungen einer Bedeckung von acht Orten, deren Längen als richtig bestimmt angesehen werden können, so erhält man acht Gleichungen von der Form der vorhergehenden Gleichung 18) zwischen den acht unbekannten Grössen

$$d(D),\ d(\Pi),\ d(\alpha),\ d(\delta)$$

und

$$d(D_1),\ d(\Pi_1),\ d(\alpha_1),\ d(\delta_1)$$

welche also mittelst der in Rede stehenden acht Gleichungen bestimmt werden können. Wenn an einigen Orten der Austritt und Eintritt beobachtet worden ist, so liefert jeder solcher Ort für sich zwei Gleichungen von der Form der Gleichung 18), und die Anzahl der Beobachtungsorte von richtiger Länge kann dann geringer als acht sein. Immer dürfen nur Beobachtungen von solchen Orten in Rechnung genommen werden, deren Längen als völlig genau, so weit dies überhaupt möglich ist, bestimmt angesehen werden können. Gestattet die Anzahl der Beobachtungsorte die Bildung von mehr als acht Gleichungen von der Form der Gleichung 18), so müssen diese Gleichungen jederzeit nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden. Kann man nur weniger als acht Gleichungen von der in Rede stehenden Form bilden, so bleibt nur das Auskunftsmittel übrig, dass man einige der Grössen

$$d(D),\ d(\Pi),\ d(\alpha),\ d(\delta)$$

und

$$d(D_1),\ d(\Pi_1),\ d(\alpha_1),\ d(\delta_1)$$

und zwar immer diejenigen, bei denen dies mit der grössten Wahrscheinlichkeit verstattet ist, als verschwindend betrachtet, so dass man die betreffenden Elemente als fehlerfrei ansieht.

§. 3.

Es scheint der besseren Übersicht wegen zweckmässig zu sein, alle zur Rechnung nöthigen Formeln im Folgenden zusammenzustellen.

Als bekannt werden angenommen:

der Halbmesser a des Erd-Äquators;

die halbe Erd-Axe b;

die Abplattung $\frac{a-b}{a} = n$;

die Polhöhe ($\bar{\omega}$) des Beobachtungsortes;

die in Stunden ausgedrückte Sternzeit T der Beobachtung für den Beobachtungsort;

der genäherte Werth t der in Zeit ausgedrückten Länge des Beobachtungsortes.

Es sei nun $\bar{\omega}$ die als positiv oder negativ betrachtete Polhöhe des Beobachtungsortes, je nachdem derselbe in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt, so findet man die geographische Breite φ des Beobachtungsortes mittelst der Formel

$$tang\ \varphi = \frac{b^2}{a^2}\ tang\ \bar{\omega},$$

oder mittelst der Formel

$$tang\ \varphi = (1 - n)^2\ tang\ \bar{\omega},$$

und hierauf den nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser r mittelst der Formel

$$r = a\sqrt{\frac{\cos\varpi}{\cos\varphi\cos(\varpi-\varphi)}}.$$

Aus den Ephemeriden berechne man nun die A-Zeit $\mathfrak{T}_1$ der Conjunction, oder wenigstens eine der Conjunctionszeit so nahe als möglich kommende Zeit $\mathfrak{T}_1$, und bestimme τ mittelst der Formel

$$\tau = T - \mathfrak{T}_1 - t$$

oder mittelst der Formel

$$\tau = 24 + T - \mathfrak{T}_1 - t,$$

je nachdem die Grösse $T-t$ positiv oder negativ ist. Ferner berechne man aus den Ephemeriden für die Zeit $\mathfrak{T}_1$ mittelst der bekannten Interpolationsmethoden:

I. Für den Weltkörper S:

die Rectascension (α);
die Declination (δ);
die Horizontalparallaxe unter dem Äquator (Π);
den aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser (D):
so wie die stündlichen Änderungen

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,$$

der vier vorhergehenden Grössen.

II. Für den Weltkörper S_1:

die Rectascension (α_1);
die Declination (δ_1);
die Horizontalparallaxe unter dem Äquator (Π_1);
den aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser (D_1):
so wie die stündlichen Änderungen

$$\varkappa_1,\ \lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1$$

dieser vier Grössen.

Hierauf berechne man die Grössen

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha) + \varkappa\tau, \\ \delta &= (\delta) + \lambda\tau, \\ \Pi &= (\Pi) + \mu\tau, \\ D &= (D) + \nu\tau, \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= (\alpha_1) + \varkappa_1\tau, \\ \delta_1 &= (\delta_1) + \lambda_1\tau, \\ \Pi_1 &= (\Pi_1) + \mu_1\tau, \\ D_1 &= (D_1) + \nu_1\tau. \end{aligned}$$

Dann berechne man die Hülfswinkel ξ, ξ_1, und η, η_1 mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} \tang\xi &= \cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta, \\ \tang\xi_1 &= \cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta_1 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \tang\eta &= \cos(\alpha - 15\,T)\cot\varphi, \\ \tang\eta_1 &= \cos(\alpha_1 - 15\,T)\cot\varphi; \end{aligned}$$

worauf man die Grössen $\cos\Delta$, $\cos\Theta$, $\cos\Theta_1$ ohne Schwierigkeit mittelst der Formeln

$$\cos\Delta = \frac{\sin\delta_1\sin(\delta+\xi_1)}{\cos\xi_1} = \frac{\sin\delta\sin(\delta_1+\xi)}{\cos\xi}$$

und

$$\cos\Theta = \frac{\sin\varphi\sin(\delta+\eta)}{\cos\eta},$$

$$\cos\Theta_1 = \frac{\sin\varphi\sin(\delta_1+\eta_1)}{\cos\eta_1}$$

findet.

Nun berechne man zunächst D^1 und $D_1{}^1$ mittelst der Formeln

$$\sin D^1 = \frac{\sin D}{\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}\sin\Pi^2 - 2\frac{r}{a}\sin\Pi\cos\Theta}},$$

$$\sin D_1{}^1 = \frac{\sin D_1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}\sin\Pi_1{}^2 - 2\frac{r}{a}\sin\Pi_1\cos\Theta_1}}:$$

die man auch leicht durch Einführung eines Hülfswinkels zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten könnte, wozu die bekannten Lehren der ebenen Trigonometrie leicht Mittel an die Hand geben werden; oder mittelst der Näherungsformeln

$$\sin \tfrac{1}{2}(D - D^1) = -\frac{r}{2a} \sin \Pi \cos \Theta \tang D,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(D_1 - D_1^1) = -\frac{r}{2a} \sin \Pi_1 \cos \Theta_1 \tang D_1;$$

welche eine sehr leichte Rechnung gestatten; und berechne sodann die sämmtlichen folgenden Grössen:

$$K = \sin D \tang D_1^1,$$
$$K_1 = \sin D_1 \tang D^1:$$
$$M = K \cos \Theta_1 - K_1 \cos \Theta:$$
$$N = \frac{r}{a}(K \sin \Pi_1 - K_1 \sin \Pi):$$
$$F = \cos \delta_1 \sin(\alpha - \alpha_1),$$
$$F_1 = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_1):$$
$$G = \cos \varphi \sin(\alpha - 15\ T),$$
$$G_1 = \cos \varphi \sin(\alpha_1 - 15\ T);$$
$$H = \frac{\sin \delta_1 \cos(\delta + \xi_1)}{\cos \xi_1} = \cos \Delta \cot(\delta + \xi_1),$$
$$H_1 = \frac{\sin \delta \cos(\delta_1 + \xi)}{\cos \xi} = \cos \Delta \cot(\delta_1 + \xi):$$
$$I = \frac{\sin \varphi \cos(\delta + \eta)}{\cos \eta} = \cos \Theta \cot(\delta + \eta),$$
$$I_1 = \frac{\sin \varphi \cos(\delta_1 + \eta_1)}{\cos \eta_1} = \cos \Theta_1 \cot(\delta_1 + \eta_1).$$

Endlich berechne man nun die Grössen:

$$A = \cos \Delta + \frac{r^2}{a^2} \sin \Pi \sin \Pi_1 - \frac{r}{a} \sin \Pi \cos \Theta_1 - \frac{r}{a} \sin \Pi_1 \cos \Theta$$
$$- \frac{\sin D \sin D_1}{\sin D^1 \sin D_1^1} \cos(D^1 \pm D_1^1);$$
$$\mathfrak{A} = \frac{\cos D \sin D_1}{\cos D^1 \sin D_1^1} \sin(D^1 \pm D_1^1),$$
$$\mathfrak{A}_1 = \pm \frac{\sin D \cos D_1}{\sin D^1 \cos D_1^1} \sin(D^1 \pm D_1^1);$$
$$\mathfrak{B} = -\frac{r}{a} \cdot \frac{M - N}{K} \cos \Pi,$$
$$\mathfrak{B}_1 = \frac{r}{a} \cdot \frac{M - N}{K_1} \cos \Pi_1:$$
$$\mathfrak{C} = -\left(F - \frac{GN}{K}\right) \cos \delta,$$
$$\mathfrak{C}_1 = \left(F_1 - \frac{G_1 N}{K_1}\right) \cos \delta_1;$$
$$\mathfrak{D} = H - \frac{IN}{K},$$
$$\mathfrak{D}_1 = H_1 + \frac{I_1 N}{K_1};$$

so hat man alle Grössen, welche zur Bildung der Gleichung

$$0 = A - \{(\nu \mathfrak{A} + \mu \mathfrak{B} + \varkappa \mathfrak{C} + \lambda \mathfrak{D}) + (\nu_1 \mathfrak{A}_1 + \mu_1 \mathfrak{B}_1 + \varkappa_1 \mathfrak{C}_1 + \lambda_1 \mathfrak{D}_1)\}\, dt$$
$$+ \mathfrak{A}\, d(D) + \mathfrak{B}\, d(\Pi) + \mathfrak{C}\, d(\alpha) + \mathfrak{D}\, d(\delta)$$
$$+ \mathfrak{A}_1\, d(D_1) + \mathfrak{B}_1\, d(\Pi_1) + \mathfrak{C}_1\, d(\alpha_1) + \mathfrak{D}_1\, d(\delta_1)$$

erforderlich sind. Von den Folgerungen, welche sich aus dieser Gleichung ziehen lassen, ist schon im vorhergehenden Paragraphen ausführlich gehandelt worden.

§. 4.

Den Fall, wenn der eine der beiden Weltkörper, etwa S_1, ein Fixstern ist, wollen wir nun noch besonders betrachten.

In diesem Falle haben wir nach Cap. II, §. 6, Nr. 41) die Gleichung

$$\cos\Delta - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin D\cot D^1 = 0,$$

auf welche wir nun ein dem in §. 2 angewandten ganz ähnliches Verfahren anwenden wollen.

Zuvörderst erhalten wir nämlich die Gleichung:

$$\begin{aligned}0 = \;& \cos\Delta - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin D\cot D^1\\ & - \sin\Delta\, d\Delta\\ & - \cos\pi\cos\Theta_1\, d\pi\\ & + \sin\pi\sin\Theta_1\, d\Theta_1\\ & - d\,.\,\sin D\cot D^1.\end{aligned}$$

Nach §. 2 ist aber

$$\begin{aligned}-\sin\Delta\, d\Delta = \;& \{\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\, d\delta\\ & + \{\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\, d\delta_1\\ & - \cos\delta\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)(d\alpha - d\alpha_1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin\Theta_1\, d\Theta_1 = \;& \cos\delta_1\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T)\, d\alpha_1\\ & - \{\cos\delta_1\sin\varphi - \sin\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T)\}\, d\delta_1.\end{aligned}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$P = \sin D\cot D^1,$$

so ist

$$dP = \cos D\cot D^1\, dD - \frac{\sin D}{\sin D^{1\,2}}\, dD^1,$$

und folglich, weil nach §. 2

$$\cot D^1\, dD^1 = \cot D\, dD - \frac{\sin D^{1\,2}}{\sin D^2}\{\sin\pi\sin\Theta\, d\Theta - \cos\pi(\cos\Theta - \sin\pi)\, d\pi\}$$

ist:

$$\begin{aligned}dP = \;& \cos D\left(\cot D^1 - \frac{1}{\sin D^1\cos D^1}\right) dD\\ & + \frac{\tang D^1}{\sin D}\{\sin\pi\sin\Theta\, d\Theta - \cos\pi(\cos\Theta - \sin\pi)\, d\pi\}\\ = \;& - \cos D\tang D^1\, dD\\ & + \frac{\tang D^1}{\sin D}\{\sin\pi\sin\Theta\, d\Theta - \cos\pi(\cos\Theta - \sin\pi)\, d\pi\}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}0 = \;& \cos\Delta - \sin\pi\cos\Theta_1 - \sin D\cot D^1\\ & - \cos\delta\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)(d\alpha - d\alpha_1)\\ & + \{\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\, d\delta\\ & + \{\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\, d\delta_1\\ & - \cos\pi\cos\Theta_1\, d\pi\\ & + \sin\pi\sin\Theta_1\, d\Theta_1\\ & + \cos D\tang D^1\, dD\\ & - \frac{\tang D^1}{\sin D}\{\sin\pi\sin\Theta\, d\Theta - \cos\pi(\cos\Theta - \sin\pi)\, d\pi\}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
0 = \;& \cos\Delta - \sin\pi\cos\theta_1 - \sin D\cot D^1 \\
& - \cos\delta\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1)\,(d\alpha - d\alpha_1) \\
& + \{\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\,d\delta \\
& + \{\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\,d\delta_1 \\
& + \cos D\tang D^1\,dD \\
& - \cos\pi\left\{\cos\theta_1 - \frac{\tang D^1}{\sin D}(\cos\theta - \sin\pi)\right\}d\pi \\
& - \sin\pi\frac{\tang D^1}{\sin D}\sin\theta\,d\theta \\
& + \sin\pi\sin\theta_1\,d\theta_1.
\end{aligned}$$

Weil nun nach §. 2

$$\begin{aligned}
\sin\theta\,d\theta &= \cos\delta\cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T)\,d\alpha \\
&\quad - \{\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos(\alpha - 15\,T)\}\,d\delta, \\
\sin\theta_1\,d\theta_1 &= \cos\delta_1\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T)\,d\alpha_1 \\
&\quad - \{\cos\delta_1\sin\varphi - \sin\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T)\}\,d\delta_1
\end{aligned}$$

ist, so erhält man nach gehöriger Substitution dieser Grössen in die obige Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = \;& \cos\Delta - \sin\pi\cos\theta_1 - \sin D\cot D^1 \\
& + \cos D\tang D^1\,dD \\
& - \cos\pi\left\{\cos\theta_1 - \frac{\tang D^1}{\sin D}(\cos\theta - \sin\pi)\right\}d\pi \\
& - \cos\delta\left\{\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1) + \sin\pi\cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T)\frac{\tang D^1}{\sin D}\right\}d\alpha \\
& + \cos\delta_1\{\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_1) + \sin\pi\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T)\}\,d\alpha_1 \\
& + \left\{\begin{aligned}&\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\\ &+ \sin\pi\,[\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos(\alpha - 15\,T)]\frac{\tang D^1}{\sin D}\end{aligned}\right\}d\delta \\
& + \left\{\begin{aligned}&\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\\ &- \sin\pi\,[\cos\delta_1\sin\varphi - \sin\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T)]\end{aligned}\right\}d\delta_1,
\end{aligned}$$

und folglich, wenn man jetzt Π einführt, und der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
A &= \cos\Delta - \frac{r}{a}\sin\Pi\cos\theta_1 - \sin D\cot D^1, \\
\mathfrak{A} &= \cos D\tang D^1, \\
\mathfrak{B} &= -\frac{r}{a}\cos\Pi\left\{\cos\theta_1 - \frac{\tang D^1}{\sin D}\left(\cos\theta - \frac{r}{a}\sin\Pi\right)\right\}, \\
\mathfrak{C} &= -\cos\delta\left\{\cos\delta_1\sin(\alpha-\alpha_1) + \frac{r}{a}\sin\Pi\cos\varphi\sin(\alpha - 15\,T)\frac{\tang D^1}{\sin D}\right\}, \\
\mathfrak{C}_1 &= \cos\delta_1\left\{\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_1) + \frac{r}{a}\sin\Pi\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15\,T)\right\}; \\
\mathfrak{D} &= \cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1) \\
&\quad + \frac{r}{a}\sin\Pi\{\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos(\alpha - 15\,T)\}\frac{\tang D^1}{\sin D}, \\
\mathfrak{D}_1 &= \sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1) \\
&\quad - \frac{r}{a}\sin\Pi\{\cos\delta_1\sin\varphi - \sin\delta_1\cos\varphi\cos(\alpha_1 - 15\,T)\}
\end{aligned}$$

setzt:

$$19)\quad 0 = A + \mathfrak{A}\,dD + \mathfrak{B}\,d\Pi + \mathfrak{C}\,d\alpha + \mathfrak{C}_1\,d\alpha_1 + \mathfrak{D}\,d\delta + \mathfrak{D}_1\,d\delta_1.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned}
20)\quad K &= \frac{r}{a}\sin\Pi, \\
L &= \frac{r}{a}\cos\Pi,
\end{aligned}$$

$$M = \frac{\cos\Theta \tang D^1}{\sin D}$$

$$N = \frac{K \tang D^1}{\sin D}.$$

$$F = \cos\delta_1 \sin(\alpha - \alpha_1),$$

$$F_1 = \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_1),$$

$$G = \cos\varphi \sin(\alpha - 15\,T).$$

$$G_1 = \cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15\,T).$$

$$H = \cos\delta \sin\delta_1 - \sin\delta \cos\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1),$$

$$H_1 = \sin\delta \cos\delta_1 - \cos\delta \sin\delta_1 \cos(\alpha - \alpha_1),$$

$$I = \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos(\alpha - 15\,T),$$

$$I_1 = \cos\delta_1 \sin\varphi - \sin\delta_1 \cos\varphi \cos(\alpha_1 - 15\,T);$$

so ist

$$21)\quad \begin{aligned} A &= \cos\Delta - K\cos\Theta_1 - \sin D \cot D^1. \\ \mathfrak{A} &= \cos D \tang D^1, \\ \mathfrak{B} &= -L(\cos\Theta_1 - M + N). \\ \mathfrak{C} &= -(F + NG)\cos\delta. \\ \mathfrak{C}_1 &= (F_1 + KG_1)\cos\delta_1 \\ \mathfrak{D} &= H + NI, \\ \mathfrak{D}_1 &= H_1 - KI_1. \end{aligned}$$

Wie man sich die Berechnung von $\cos\Delta$, $\cos\Theta$, $\cos\Theta_1$, H, H_1, I, I_1 erleichtern kann, ist schon in §. 2 gezeigt worden, und braucht daher hier nicht wiederholt zu werden.

Führt man in die Gleichung 19) statt der Grössen

$$dD,\ d\Pi,\ d\alpha,\ d\delta$$

mittelst der Formeln 4) die Grössen

$$d(D),\ d(\Pi),\ d(\alpha),\ d(\delta)$$

ein, so wird dieselbe:

$$22)\quad \begin{aligned} 0 = A &- (\nu\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \varkappa\mathfrak{C} + \lambda\mathfrak{D})\,dt \\ &+ \mathfrak{A}\,d(D) + \mathfrak{B}\,d(\Pi) + \mathfrak{C}\,d(\alpha) + \mathfrak{D}\,d(\delta) \\ &+ \mathfrak{C}_1\,d\alpha_1 + \mathfrak{D}_1\,d\delta_1. \end{aligned}$$

Für

$$d(D) = 0,\quad d(\Pi) = 0,\quad d(\alpha) = 0,\quad d(\delta) = 0$$

und auch

$$d\alpha_1 = 0,\quad d\delta_1 = 0$$

ist:

$$23)\quad dt = \frac{A}{\nu\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \varkappa\mathfrak{C} + \lambda\mathfrak{D}}.$$

und überhaupt lassen sich über die Gleichung 22) ganz ähnliche Bemerkungen wie in §. 2 über die Gleichung 16) machen, die wir daher nicht wiederholen wollen.

§. 5.

Wir wollen nun auch noch die in dem im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Falle zur Anwendung kommenden Formeln übersichtlich zusammenstellen.

Als bekannt angenommen werden:

der Halbmesser a des Erdäquators;

die halbe Erdaxe b;

die Abplattung $\frac{a-b}{a} = n$;

die Polhöhe ($\bar{\omega}$) des Beobachtungsortes;

die in Stunden ausgedrückte Sternzeit T der Beobachtung für den Beobachtungsort;

der genäherte Werth t der in Zeit ausgedrückten Länge des Beobachtungsortes.

Es sei nun $\bar{\omega}$ die als positiv oder negativ betrachtete Polhöhe des Beobachtungsortes, je nachdem derselbe in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt; so findet man die geographische Breite φ des Beobachtungsortes mittelst der Formel

$$tang\ \varphi = \frac{b^2}{a^2}\ tang\ \bar{\omega}$$

oder mittelst der Formel

$$tang\ \varphi = (1-n)^2\ tang\ \bar{\omega},$$

und hierauf den nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser r mittelst der Formel

$$r = a\sqrt{\frac{cos\ \bar{\omega}}{cos\ \varphi\ cos\ (\bar{\omega}-\varphi)}}.$$

Aus den Ephemeriden nehme man die A-Zeit der Conjunction oder wenigstens eine der Conjunctionszeit so nahe als möglich kommende Zeit $\mathfrak{T}_1$, und berechne die Grösse τ mittelst der Formel

$$\tau = T - \mathfrak{T}_1 - t$$

oder

$$\tau = 24 + T - \mathfrak{T}_1 - t,$$

je nachdem die Grösse $T-t$ positiv oder negativ ist. Ferner berechne man aus den Ephemeriden mit Hülfe der bekannten Interpolationsmethoden für die Zeit $\mathfrak{T}_1$

die Rectascension (α);

die Declination (δ);

die Horizontalparallaxe unter dem Äquator (Π);

den aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser (D);

so wie die stündlichen Änderungen

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu$$

dieser vier Grössen;

und nehme aus den Ephemeriden oder einem Sternverzeichnisse die Rectascension α_1 und Declination δ_1 des beobachteten Fixsternes.

Dann berechne man die Grössen

$$\alpha = (\alpha) + \varkappa\tau,$$
$$\delta = (\delta) + \lambda\tau,$$
$$\Pi = (\Pi) + \mu\tau,$$
$$D = (D) + \nu\tau;$$

und hierauf die Hülfswinkel ξ, ξ_1 und η, η_1 mittelst der Formeln

$$tang\ \xi = cos\ (\alpha-\alpha_1)\ cot\ \delta,$$
$$tang\ \xi_1 = cos\ (\alpha-\alpha_1)\ cot\ \delta_1$$

und

$$tang\ \eta = cos\ (\alpha - 15\ T)\ cot\ \varphi,$$
$$tang\ \eta_1 = cos\ (\alpha_1 - 15\ T)\ cot\ \varphi;$$

so findet man die Grössen $cos\ \Delta$, $cos\ \theta$, $cos\ \theta_1$ mittelst der Formeln:

$$cos\ \Delta = \frac{sin\ \delta_1\ sin\ (\delta+\xi_1)}{cos\ \xi_1} = \frac{sin\ \delta\ sin\ (\delta_1+\xi)}{cos\ \xi};$$

$$\cos\Theta = \frac{\sin\varphi \sin(\delta+\eta)}{\cos\eta},$$

$$\cos\Theta_1 = \frac{\sin\varphi \sin(\delta_1+\eta_1)}{\cos\eta_1}.$$

Nun berechne man D^1 mittelst der Formel

$$\sin D^1 = \frac{\sin D}{\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}\sin\Pi^2 - 2\frac{r}{a}\sin\Pi\cos\Theta}},$$

die man leicht zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten könnte, oder auch mittelst der sehr bequemen Näherungsformel

$$\sin\tfrac{1}{2}(D-D^1) = -\frac{r}{2a}\sin\Pi\cos\Theta\,tang\,D;$$

und suche hierauf die Grössen

$$K = \frac{r}{a}\sin\Pi,$$

$$L = \frac{r}{a}\cos\Pi,$$

$$M = \frac{\cos\Theta\,tang\,D^1}{\sin D},$$

$$N = \frac{K\,tang\,D^1}{\sin D},$$

$$F = \cos\delta_1 \sin(\alpha-\alpha_1),$$

$$F_1 = \cos\delta\sin(\alpha-\alpha_1),$$

$$G = \cos\varphi\sin(\alpha-15T),$$

$$G_1 = \cos\varphi\sin(\alpha_1-15T),$$

$$H = \frac{\sin\delta_1\cos(\delta+\xi_1)}{\cos\xi_1} = \cos\Delta\cot(\delta+\xi_1),$$

$$H_1 = \frac{\sin\delta\cos(\delta_1+\xi)}{\cos\xi} = \cos\Delta\cot(\delta_1+\xi),$$

$$I = \frac{\sin\varphi\cos(\delta+\eta)}{\cos\eta} = \cos\Theta\cot(\delta+\eta),$$

$$I_1 = \frac{\sin\varphi\cos(\delta_1+\eta_1)}{\cos\eta_1} = \cos\Theta_1\cot(\delta_1+\eta_1).$$

Berechnet man dann noch die Grössen

$$\begin{aligned}
A &= \cos\Delta - K\cos\Theta_1 - \sin D\cot D^1,\\
\mathfrak{A} &= \cos D\,tang\,D^1,\\
\mathfrak{B} &= -L(\cos\Theta_1 - M + N),\\
\mathfrak{C} &= -(F+NG)\cos\delta,\\
\mathfrak{C}_1 &= (F_1+KG_1)\cos\delta_1,\\
\mathfrak{D} &= H+NI,\\
\mathfrak{D}_1 &= H_1 - KI_1;
\end{aligned}$$

so hat man alle Grössen, welche zur Bildung der Gleichung

$$\begin{aligned}
0 = A &- (\nu\mathfrak{A}+\mu\mathfrak{B}+\varkappa\mathfrak{C}+\lambda\mathfrak{D})\,dt\\
&+ \mathfrak{A}\,d(D) + \mathfrak{B}\,d(\Pi) + \mathfrak{C}\,d(\alpha) + \mathfrak{D}\,d(\delta)\\
&+ \mathfrak{C}_1\,d\alpha_1 + \mathfrak{D}_1\,d\delta_1
\end{aligned}$$

erforderlich sind.

Über die Folgerungen, welche sich aus dieser Gleichung ziehen lassen, möge man §. 2 vergleichen.