ÜBER DIE BERECHNUNG DER RECHTWINKELIGEN HELIOZENTRISCHEN KOORDINATEN EINES PLANETEN MITTELS NUMERISCHER INTEGRATION UND EINE DARAUF GEGRÜNDETE DIFFERENZENMETHODE FÜR EPHEMERIDENRECHNUNGEN

VON

DR. CARL HILLEBRAND,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT IN GRAZ.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 29. APRIL 1909.

Durch die vorliegende Arbeit soll die Aufgabe gelöst werden, eine Methode der Ephemeridenrechnung herzustellen, die der strengsten Anforderung an Genauigkeit entspricht, also noch Hundertelbogensekunden mit Sicherheit ermitteln läßt, ohne daß es aber nötig wäre, über eine sechstellige logarithmische Rechnung hinauszugehen.

In einer früheren Arbeit (»E. Methode der Ephemeridenrechnung mittels numerischer Integration« der Denkschr. 84. Bd. p. 15) habe ich aus der Anwendung der mechanischen Quadratur auf die Gleichungen des Zweikörperproblems ein einfaches Verfahren abgeleitet, die heliozentrischen Koordinaten zu berechnen. Dabei war vorzugsweise daran gedacht, die Unbequemlichkeit der Rechnung bei größeren Exzentrizitäten wegzuschaffen und durch eine Methode zu ersetzen, deren rasche und sichere Durchführung ganz unabhängig von dem Werth der Exzentrizität ist. Es wurde daher das vorgeschlagene Verfahren nur zur Bestimmung des Radiusvector und der wahren Anomalie herangezogen, da von hier ab die Bequemlichkeit der gewöhnlichen Methode durch den erwähnten Umstand nicht beeinträchtigt wird.

Anders stehen natürlich die Dinge, wenn die Anforderungen an die Genauigkeit der Methode so hohe sind, daß wegen der Unzulänglichkeit einer siebenstelligen Rechnung das Verfahren überhaupt anfängt unpraktikabel zu werden.

Da nun das Bedürfnis nach einer derartigen Genauigkeit bei den Oppositionsephemeriden erdnaher Planeten tatsächlich vorliegt, so soll hier auf den gleichen Grundlagen wie in der oben erwähnten Arbeit eine diese Unbequemlichkeit vermeidende Differenzenrechnung entwickelt werden, die sich aber — dem anders gearteten Zweck entsprechend — bis auf die Ermittlung des geozentrischen Ortes erstrecken muß.

I.

Nach den bekannten Formeln der numerischen Integration ist

$$x = {}^{\mathrm{II}}f + \frac{1}{12}\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{1}{240} f^{\mathrm{II}} + .$$

wobei als Intervall die Zeiteinheit angenommen wird. Stellt x eine heliozentrische rechtwinklige Koordinate eines Planeten vor, so ist wegen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} = 0$$

auch

$$x = {}^{\mathrm{II}}f - \frac{k^2}{12} \frac{x}{r^3} - \frac{1}{240} f^{\mathrm{II}}.$$

Das letzte Glied kann bei engen Intervallen der Ephemeride — und nur um solche kann es sich hier praktischerweise handeln — stets vernachlässigt werden. Die Größenordnung von f^{II} ist durch $\frac{d^4 x}{dt^4}$ gegeben — in der entsprechenden Zeiteinheit ausgedrückt. Nun folgt aus $\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 \frac{x}{r^3}$, wenn die Bahnebene als Koordinatenebene gewählt und $x = r \cos v$ gesetzt wird,

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{k^3}{\sqrt{p}} \frac{\sin v}{r^3}(1 + 3\,\varepsilon \cos v) = \frac{k^3}{p^{7/2}}(1 + \varepsilon \cos v)^3 \,(1 + 3\,\varepsilon \cos v) \sin v$$

$$\left(\frac{d^4 x}{dt^4}\right) = \frac{k^4}{p^5}(1 + \varepsilon \cos v)^4 \,[\cos v + 2\,(5 \cos^2 v - 3)\,\varepsilon + 3\,(5 \cos v^3 - 4 \cos v)\,\varepsilon^2]$$

die Maxima und Minima dieses Ausdruckes treten ein für:

$$\sin v\,[1 + 25\,\varepsilon \cos v + 3\,(35 \cos^2 v - 12)\,\varepsilon^2 + 15\,(7 \cos^2 v - 4)\,\varepsilon^3 \cos v] = o,$$

da der unterdrückte Faktor $(1 + \varepsilon \cos v)^3$ für $\varepsilon < 1$ nie verschwinden kann.

Das Hauptmaximum findet für $v = o°$, das Hauptminimum für $v = 180°$ statt, und es ist demgemäß:

$$\text{Max. von } \frac{d^4 x}{dt^4} = \frac{k^4}{p^5}(1 + \varepsilon)^5 (1 + 3\,\varepsilon)$$

$$\text{Min. von } \frac{d^4 x}{dt^4} = -\frac{k^4}{p^5}(1 - \varepsilon)^5 (1 - 3\,\varepsilon).$$

Die Annullierung des zweiten Faktors, führt, wenn er überhaupt reelle Werte für v liefert, auf sekundäre Maxima und Minima.

Die größten Exzentrizitäten unter den Asteroidenbahnen belaufen sich auf etwa $\varepsilon = \frac{1}{3}$; für diese steigt das Maximum auf rund: $8 \cdot 5\,\frac{k^4}{p^5}$. Führt man für p den Parameter der Erosbahn ein: $\log p = 0 \cdot 14166$

und als Zeiteinheit den mittleren Sonnentag, so resultiert für die Größenordnung von $\frac{1}{240}\frac{d^4 x}{dt^4}$ eine Zahl, die sechs Einheiten der zehnten Dezimalstelle beträgt; daher wird $\frac{1}{240}f''$ selbst für mehrtägige Intervalle belanglos und das umsomehr, als es sich wieder nur um Differenzen dieser Größe handeln wird.

Man hat demnach

$$x = {}^{\mathrm{II}}f - \frac{k^2}{12}\frac{x}{r^3}$$

und für das nächste Argument

$$x_1 = {}''f_{\mathrm{I}} - \frac{k^2}{12}\frac{x_1}{r_1{}^3},$$

so daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte der x-Koordinate aus der Gleichung folgt

$$\Delta x = {}^{\mathrm{I}}f - \frac{k^2}{12}\left(\frac{x + \Delta x}{r_1{}^3} - \frac{x}{r^3}\right).$$

Mit ${}^{\mathrm{I}}f$ soll der Kürze halber das Glied aus der ersten Summenreihe gemeint sein, das gewöhnlich mit

$${}^{\mathrm{I}}f\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]\omega\right)$$

bezeichnet wird, wenn $\frac{d^2 x}{dt^2} = f(a + i\omega)$ ist.

Es ist demnach

$$\Delta x = \frac{{}^{\mathrm{I}}f - \frac{k^2}{12}x\left(\frac{1}{r_1{}^3} - \frac{1}{r^3}\right)}{1 + \frac{k^2}{12}\frac{1}{r_1{}^3}}.$$

Man kann nun offenbar auch die zweite Potenz von $\frac{k^2}{12}\frac{1}{r_1{}^3}$ vernachlässigen, da diese von der Ordnung $\frac{1}{240}\frac{d^4 x}{dt^4}$ ist und außerdem mit ${}^{\mathrm{I}}f$ und $\frac{r^3}{r_1{}^3} - 1$ der Größenordnung $\frac{k}{\sqrt{p}}$ multipliziert erscheint, so daß zunächst

$$\Delta x = {}^{\mathrm{I}}f\left(1 - \frac{k^2}{12}\frac{1}{r_1{}^3}\right) - \frac{k^2}{12}x\left(\frac{1}{r_1{}^3} - \frac{1}{r^3}\right).$$

Vertauscht man in der ersten Klammer r_1 mit r, so bedeutet das einen Fehler von der Größenordnung $\frac{k^2}{12}{}^{\mathrm{I}}f.3\frac{\Delta r}{r^4}$ oder

$$\frac{k^2}{4}\frac{dx}{dt}\frac{1}{r^4}\frac{dr}{dt},$$

oder, da

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{p}}\sin v, \frac{dr}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}}\varepsilon\sin v$$

von der Größe $\frac{\varepsilon k^4}{4p^5}\sin^2 v\,(1 + 4\,\varepsilon\cos v)$.

Der Maximalwerth des von v abhängigen Teiles ist wenig von der Einheit verschieden; $\frac{\varepsilon k^4}{4 p^5}$ gibt aber — wieder die Verhältnisse der Erosbahn vorausgesetzt — 0·0000 0000 283, es kann also diese Substitution ohneweiters vorgenommen werden.

Ebenso kann man im letzten Glied

$$\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3} = -\frac{3\,\Delta r}{r^4}$$

setzen, da der Fehler von der Größe

$$\frac{k^2}{4} \quad \frac{x}{r^5} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 k^4}{4 p^5} \sin^2 v \cos v \,(1 + \varepsilon \cos v)^4$$

ist, wofür sich ein Maximalbetrag von nicht ganz fünf Einheiten der zehnten Stelle ergibt.

Man hat also schließlich

$$\Delta x = {}^{\mathrm{I}}f \left(1 - \frac{k^2}{12} \quad \frac{1}{r^3}\right) + \frac{k^2}{4} x \frac{\Delta r}{r^4}.$$

Da ähnliche Überlegungen für die beiden anderen Koordinaten gelten, so kann man für jeden Werthekomplex derselben die zugehörigen Inkremente auf die Koordinaten für das nächste Zeitargument finden, vorausgesetzt, daß Δr bekannt ist. Man könnte die Bestimmung dieser Größe aus den Inkrementen der Koordinaten selbst vornehmen. Man wird zunächst des Faktors $\frac{k^2}{4}$ wegen Größen zweiter Ordnung konform den früheren Überlegungen unterdrücken und demgemäß setzen können

$$r\,\Delta r = x\,\Delta x + y\,\Delta y + z\,\Delta z.$$

Hat man

$$\Delta x = {}^{\mathrm{I}}f_x \left(1 - \frac{k^2}{12} \quad \frac{1}{r^3}\right) + \frac{k^2}{4} x \frac{\Delta r}{r^4}$$

$$\Delta y = {}^{\mathrm{I}}f_y \left(1 - \frac{k^2}{12} \quad \frac{1}{r^3}\right) + \frac{k^2}{4} y \frac{\Delta r}{r^4}$$

$$\Delta z = {}^{\mathrm{I}}f_z \left(1 - \frac{k^2}{12} \quad \frac{1}{r^3}\right) + \frac{k^2}{4} z \frac{\Delta r}{r^4}$$

so folgt unmittelbar

$$r\,\Delta r \left(1 - \frac{k^2}{4} \frac{1}{r^3}\right) = (x\,{}^{\mathrm{I}}f_x + y\,{}^{\mathrm{I}}f_y + z\,{}^{\mathrm{I}}f_z) \left(1 - \frac{k^2}{12} \quad \frac{1}{r^3}\right)$$

oder bei Unterdrückung irrelevanter Quantitäten (mit Rücksicht auf das Vorkommen von Δr in Δx)

$$r\,\Delta r = x\,{}^{\mathrm{I}}f_x + y\,{}^{\mathrm{I}}f_y + z\,{}^{\mathrm{I}}f_z.$$

Es ist zu bemerken, daß man von Δr nur noch die fünfte Stelle zu berücksichtigen braucht.

Obwohl nun Δr auf diese Weise unmittelbar aus den in der Koordinatenrechnung vorkommenden Größen gefunden werden kann, so ist dieser Vorgang rechnungsmäßig eigentlich unpraktisch, da bei den hier in Frage kommenden Planetenexzentrizitäten Δr eine wesentlich kleinere Quantität ist, als die ent-

sprechenden Δx, Δy und Δz, so daß es vortheilhafter sein wird, Δr direkt zu bestimmen. Es soll dazu die in der oben erwähnten Abhandlung entwickelten Methode herangezogen werden, die hier in sehr verkürzter Form zur Anwendung gelangen kann.

Setzt man

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = k^2 . \frac{p-r}{r^3} = f,$$

so ist

$$r = {}^{\mathrm{II}}f + \frac{1}{12}\frac{d^2 r}{dt^2},$$

demnach

$$\Delta r = {}^{\mathrm{I}}f + \frac{1}{12}\Delta\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right).$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes kann wieder vernachlässigt werden, da es von der Ordnung

$$\frac{1}{12}\quad\frac{d^3 r}{dt^3} = \frac{1}{12}\quad\frac{k^3\,\varepsilon}{p^{7/2}}$$

ist, eine Größe, die selbst für Eros nur einige Einheiten der achten Stelle betragen kann. Man wird daher zweckmäßigerweise bei der Ephemeridenrechnung die Funktion $f = \frac{d^2 r}{dt^2}$ samt der ersten summierten Reihe mitführen, der dann unmittelbar $\Delta r = {}^{\mathrm{I}}f$ zu entnehmen ist. Setzt man

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{k^2}{p^2}\left(\frac{p^3}{r^3} - \frac{p^2}{r^2}\right) = \frac{k^2}{p^2}\quad R$$

so kann $R = \frac{p^3}{r^3} - \frac{p^2}{r^2}$ mit dem Argument $\frac{p}{r}$ tabuliert werden. Die Ermittlung von Δr und r kann um so rascher erledigt werden, als dabei auch größere Zeitintervalle angewendet werden können.

Die Relation $r\,\Delta r = x\,{}^{\mathrm{I}}f_x + y\,{}^{\mathrm{I}}f_y + z\,{}^{\mathrm{I}}f_z$ kann von Fall zu Fall als Kontrolle dienen.

Ist übrigens die Rechnung einmal im Gange, so gestaltet sich die numerische Durchführung noch weit einfacher. Aus

$$x = {}^{\mathrm{II}}f + \frac{1}{12}\frac{d^2 x}{dt^2}$$

folgt ja

$$\Delta x = {}^{\mathrm{I}}f + \frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}.$$

Der Gang der Differenzen f^{I} ist nun in jenen Stellen, die hier noch in Betracht kommen, ein derartig langsamer, daß $\frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}$ immer mit völliger Sicherheit extrapoliert werden kann, Δx also sofort anzugeben ist.

Das ganze Verfahren beschränkt sich also darauf, aus $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ die Funktion $f = -k^2 . \frac{x}{r^3}$ zu ermitteln, wofür im allgemeinen eine fünfstellige Rechnung vollkommen ausreicht.

Es genügt auch $x_{i+1} = x_i + {}^{\mathrm{I}}f$ zu setzen, um mit ausreichender Genauigkeit f und daraus f^{I} zu erhalten.

Es erübrigt nun noch die Bestimmung der Ausgangswerte der ersten Summenreihen ${}^{\mathrm{I}}f$ für

$$f = \frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2 r}{dt^2},$$

die in den entsprechenden Differenzen Δx u. s. w. auftreten. Bezüglich der rechtwinkligen Koordinaten müssen sie mit aller Schärfe bestimmt werden.

Für die Ausgangsepoche t_0 der Ephemeride ist das Anfangsglied der ersten summierten Reihe

$${}^{\mathrm{I}}f_x\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_0 + \frac{1}{12} f_x^{\mathrm{I}}(t_0) - \frac{11}{720} f_x^{\mathrm{III}}(t_0) + \cdot$$

Ist x in der Form gegeben

$$x_0 = r_0 \sin a \sin (A' + v_0),$$

so ist

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{k}{\sqrt{p}} \sin a \left[\cos (A' + v_0) + \varepsilon \cos A'\right]$$

wofür im Allgemeinen eine sechsstellige Rechnung genügt.

Ferner ist

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_0 = -\frac{k^2}{r_0{}^2} \sin a \sin (A' + v_0) \cdot$$

Von den übrigen Gliedern sind f^{III} und die folgenden unbedingt zu vernachlässigen, hingegen kann $\frac{1}{12} f^{\mathrm{I}}$ bei weitestgehender Genauigkeit noch einen merklichen Beitrag liefern. Da aber $f^{\mathrm{I}} = -k^2 \Delta \left(\frac{x}{r^3}\right)$ ist und darin Δx durch ${}^{\mathrm{I}}f$ ersetzt werden kann, so ist unmittelbar

$$f_x^{\mathrm{I}}(t_0) = -\frac{k^2}{r_0{}^3}\left[{}^{\mathrm{I}}f_x\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) - 3\frac{x_0}{r_0} \Delta r_0\right],$$

wo für ${}^{\mathrm{I}}f$ die beiden ersten Glieder ausreichen.

Für die Δr-Ephemeride genügt natürlich

$${}^{\mathrm{I}}f_r\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)_0,$$

wo

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = \frac{k}{\sqrt{p}} \varepsilon \sin v_0 \text{ und } \left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)_0 = \frac{k^2}{r_0{}^2} \varepsilon \cos v_0$$

ist, und

$${}^{\mathrm{II}}f_r(t_0) = r_0 - \frac{1}{12}\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)_0$$

II.

Der Gang der Rechnung zur Ermittlung der Differenzen der heliozentrischen rechtwinkligen Koordinaten stellt sich demnach folgendermaßen.

Mit den Ausgangswerten

$$^{\mathrm{I}}f_r\left(t_0-\frac{1}{2}\right)=\frac{k}{\sqrt{p}}\varepsilon\sin v_0-\frac{1}{2}\frac{k^2}{r_0^{\,2}}\varepsilon\cos v_0$$

und

$$^{\mathrm{II}}f_r\,(t_0)=r_0-\frac{1}{12}\quad\frac{k^2}{r_0^{\,2}}\varepsilon\cos v_0$$

rechnet man zunächst eine r-Ephemeride nach dem Schema:

$$r_i,\ \frac{p}{r_i},\ R_i=\left(\frac{p}{r_i}\right)^3-\left(\frac{p}{r_i}\right)^2$$

aus der nachstehenden Tafel zu entnehmen,

$$f_i=\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_i=\frac{k^2}{p^2}R_i.$$

Daraus aber findet man $^{\mathrm{I}}f_{i+1/2}={}^{\mathrm{I}}f_{i+1/2}+f_i=\Delta r$ dem Inkrement auf den nächsten Wert r_{i+1}, mit welchem der Vorgang weitergeführt wird. Es ist zu bemerken, daß hierzu dreistellige Multiplikationstafeln unter allen Umständen ausreichen. Da im weiteren Verlauf der Koordinatenrechnung Δr für diese nicht mehr erforderlich ist und die Kenntnis von r auf fünf Stellen dazu völlig hinreicht, so wird auch das eine überflüssige Genauigkeit sein und es sind die angezeigten Operationen entweder unmittelbar oder mit Hilfe einer zweistelligen Multiplikationstafel ohneweiters durchzuführen.

Zur Berechnung der Koordinatendifferenzen werden zunächst die Ausgangswerte hergestellt

$$x_0=r_0\sin a\sin(A'+v_0),\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=\frac{k}{\sqrt{p}}\sin a\,[\cos(A'+v_0)+\varepsilon\cos A']$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0=-k^2\frac{x_0}{r_0^{\,3}},\ f_x^{\mathrm{I}}(t_0)=\quad\frac{k^2}{r_0^{\,3}}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_0-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0-3\frac{x_0}{r_0}\Delta r_0\right],$$

woraus

$$^{\mathrm{I}}f_x\left(t_0\quad\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{dx}{dt}\right)_0-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0+\frac{1}{12}f_x^{\mathrm{I}}(t_0)$$

und analoge Formeln für die beiden anderen Koordinaten.

Mit Zugrundelegung dieser Ausgangswerte wird nun die Rechnung so geführt, daß für ein x_{i-1}

$$f_{i-1}=-k^2\frac{x_{i-1}}{r_{i-1}^{\,3}}$$

gerechnet wird, woraus $^{\mathrm{I}}f_{i-1/2}$ folgt. Setzt man

$$x_i=x_{i-1}+{}^{\mathrm{I}}f_{i-1/2},$$

so genügt dies vollkommen zur Bestimmung von

$$f_i = -k^2 \frac{x_i}{r_i^3};$$

daraus ergibt sich einerseits $f^{\mathrm{I}}_{i-1/2}$ und das zu ermittelnde Inkrement

$$\Delta x_{i-1/2} = {}^{\mathrm{I}}f_{i-1/2} + \frac{1}{12} f^{\mathrm{I}}_{i-1/2}$$

andrerseits ${}^{\mathrm{I}}f_{i+1/2}$ und damit $x_{i+1} = x_i + {}^{\mathrm{I}}f_{i+1/2}$, mit welchem Wert die Rechnung in der angegebenen Weise fortgesetzt wird. Für die einzige hier vorkommende logarithmische Auswertung $f = -k^2 \frac{x}{r^3}$ ist im Allgemeinen eine fünfstellige Rechnung vollkommen ausreichend.

Nachstehend folgt die für die r-Ephemeride zu benützende Tafel der Größe R.

$$R = \frac{p^3}{r^3} - \frac{p^2}{r^2}.$$

$\frac{p}{r}$	R	Differenz	$\frac{p}{r}$	R	Differenz	$\frac{p}{r}$	R	Differenz
0·50	− 0·1250	− 24	0·70	− 0·1470	+ 8	0·90	− 0·0810	+ 65
0·51	0·1274	24	0·71	0·1462	10	0·91	0·0745	68
0·52	0·1298	22	0·72	0·1452	13	0·92	0·0677	72
0·53	0·1320		0·73	0·1439	15	0·93	0·0605	75
0·54	0·1341	20	0·74	0·1424	18	0·94	0·0530	79
0·55	0·1361	19	0·75	0·1406	20	0·95	0·0451	82
0·56	0·1380	17	0·76	0·1386	22	0·96	0·0369	87
0·57	0·1397	16	0·77	0·1364	26	0·97	0·0282	90
0·58	0·1413	14	0·78	0·1338	27	0·98	0·0192	94
0·59	0·1427	13	0·79	0·1311	31	0·99	− 0·0098	98
0·60	0·1440		0·80	0·1280	33		0·0000	
0·61	0·1451	10	0·81	0·1247	37		+ 0·0102	106
0·62	0·1461	8	0·82	0·1210	39		0·0208	
0·63	0·1469	6	0·83	0·1171	42		0·0318	115
0·64	0·1475	4	0·84	0·1129	45	1·04	0·0433	118
0·65	0·1479	− 2	0·85	0·1084	49	1·05	0·0551	123
0·66	0·1481		0·86	0·1035	51	1·06	0·0674	127
0·67	0·1481	+	0·87	0·0984	55	1·07	0·0801	132
0·68	0·1480	4	0·88	0·0929	58	1·08	0·0933	136
0·69	0·1476	6	0·89	0·0871	61	1·09	0·1069	141
0·70	− 0·1740	+ 8	0·90	− 0·0810	+ 65		+ 0·1210	+ 145

$\frac{p}{r}$	R	Differenz	$\frac{p}{r}$	R	Differenz
	+ 0·1210	+ 145	1·30	+ 0·5070	+ 250
	0·1355	150	1·31	0·5320	256
	0·1505	155		0·5576	261
1·13	0·1660	159	1·33	0·5837	268
1·14	0·1819	165	1·34	0·6105	274
1·15	0·1984	169	1·35	0 6379	280
1·16	0·2153	174	1·36	0·6659	286
1·17	0·2327	179	1·37	0·6945	292
1·18	0·2506	185	1·38	0·7237	298
1·19	0·2691	189	1·39	0·7535	305
1 20	0·2880	195	1·40	0·7840	311
1·21	0·3075	199	1·41	0·8151	318
1·22	0·3274	206	1·42	0·8469	324
1·23	0·3480	210	1·43	0·8793	331
1·24	0·3690	216	1·44	0 9124	337
1·25	0·3906		1·45	0·9461	344
1·26	0·4128	227	1·46	0·9805	351
1·27	0·4355	233	1·47	1·0156	358
1·28	0·4588	238	1·48	1·0514	364
1·29	0·4826	244	1·49	1·0878	+ 372
1·30	+ 0·5070	+ 250	1·50	+ 1·1250	

Um nun schon für diesen Teil der Ephemeridenrechnung, der Ermittlung der heliozentrischen Koordinatendifferenzen eine numerische Anwendung zu geben, sei als Beispiel die Eros-Opposition 1900 gewählt und zwar soll, um eine Epoche mit besonders starker geozentrischer Bewegung herauszugreifen ein Teil der Februarpositionen 1901 nach der angegebenen Methode gerechnet werden.

Der betreffenden Ephemeride wurde von H. Millosevich folgendes Elementensystem zu Grunde gelegt (Astron. Nachr. Bd. 153, p. 218).

Epoche 1900 Okt. 31·5 m. Zt. Berlin

$$M = 304^\circ\ 24'\ 40''34$$

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 121^\circ\ \ 9'\ 47''82 \\ \Omega &= 303^\circ\ 30'\ 50''02 \\ i &= \ \ 10^\circ\ 49'\ 38''97 \end{aligned}\right\} \text{m. Aequin. 1900 0}$$

$$\varphi = 12^\circ\ 52'\ 40''61$$

$$\mu = 2015''23324.$$

woraus für den vorliegenden Fall erhalten wird:

Epoche 1901 Febr. 8·5 m. Zt. Berlin

$$M = 0^\circ\ 23'\ 23''66$$

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 121^\circ\ 10'\ 38''04 \\ \Omega &= 303^\circ\ 31'\ 42''18 \\ i &= 10^\circ\ 49'\ 39''27 \end{aligned}\right\} \text{m. Aequin. } 1901.0$$

$$\varphi = 12^\circ\ 52'\ 40''61$$

$$\mu = 2015''23324$$

und daraus

$$A' = 211^\circ\ 39'\ 9''98 \qquad \sin a = 9\cdot994\ 6086$$

$$B' = 116^\circ\ 35'\ 35''64 \qquad \sin b = 9\cdot941\ 4666$$

$$C' = 137^\circ\ 8'\ 4''17 \qquad \sin c = 9\cdot708\ 1571$$

Man erhält weiter für die gewählte Epoche

$$v_0 = 0^\circ\ 37'\ 45''75 \qquad \log r_0 = 0\cdot054\ 2834$$

und als Ausgangswerte für die r-Ephemeride

$$r_0 = 1\cdot133\ 1497$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = +0\cdot000\ 0357\ 76$$

$$\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_0 = +0\cdot000\ 0513\ 61$$

und demgemäß

$$^{\mathrm{I}}f\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) = +0\cdot000\ 0100\ 96$$

$$^{\mathrm{II}}f(t_0) = 1\cdot133\ 1353.$$

Es ist dann

$$^{\mathrm{I}}f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) = +0\cdot000\ 0614\ 57$$

und da diese Größe mit Δr identifiziert werden kann

$$r_1 = 1\cdot133\ 2112$$

mit welchem Wert $\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_1 = f(t_0 + 1)$ gerechnet werden kann usw.

Die Rechnung stellt sich hiemit folgendermaßen:

$$p = 1\cdot386, \quad \frac{k^2}{p^2} = 0\cdot000\ 154$$

1901 Febr.	8·5	9·5	10·5	11·5	12·5
r	1 1331	1·1332	1·1333	1 1335	1·1337
$1:r$	0·8826 3406	0·8825 3406	0·8824 3406	0·8823 3406	0·8821 3405
$p:r$	1·2232	1·2231	1·2230	1·2229	1·2226
$R=\left(\frac{p}{r}\right)^3-\left(\frac{p}{r}\right)^2$	0·334	0·334	0·334	0·333	0·333
$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{k^2}{p^2}R$	0·000 0514	0514	0514	0513	0513

	$\frac{d^2r}{dt^2}$	${}^{I}f=\Delta r$	r
		+ 0·000 0101	
II. 8·5	+ 0·000 0514		1 133 1396
		0615	
9·5	0514		2011
		1129	
10·5	0514		3140
		1643	
11·5	0513		4782
		2156	
12·5	0513		6938

Es ist nun klar, daß man bei einem derartig geringen Gange, wie es die hier in Frage kommenden Stellen von $\frac{d^2r}{dt^2}$ zeigen, ein mehr summarisches Verfahren wird einschlagen können. Setzt man für einen mäßigen Zeitraum $\frac{d^2r}{dt^2}$ in erster Näherung als konstant voraus, so ist

$$r=r_0+n\,{}^{I}f\left(t_0+\frac{1}{2}\right)+\frac{n\,(n-1)}{2}f\,(t_0)$$

ein Näherungswert, der zur Berechnung von $\frac{d^2r}{dt^2}$ vollständig ausreicht. Man wird nun die Zwischenwerte von $\frac{d^2r}{dt^2}$ ohneweiters interpolieren können.

Will man etwa für Februar 16·5 die Funktion $\frac{d^2r}{dt^2}$ rechnen, so erhält man für $n=8$ und mit den obigen Ausgangswerten den Näherungswert $(r)_{16\cdot5}=1\ 135090$ und daraus streng $\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_{16\cdot5}=0\cdot000\,0507$. Es folgt unmittelbar die r-Ephemeride:

	Δr	r	$\log r$	$\log\frac{1}{r}$	$\log\frac{1}{r^3}$
	+ 0·000 0101				
1901 Februar 8·5	514	1·133 1396	0·05 4284	9·945716	9·83 7148
	0615				
9·5	514	2011	4307	5693	7079
	1129				
10·5	513	3140	4350	5650	6950
	1642				
11·5	512	4782	4413	5587	6761

		Δr	r	$\log r$	$\log \frac{1}{r}$	$\log \frac{1}{r^3}$
		+0·000 2154				
1901 Febr.	12·5	511	1 133 6936	0·05 4496	9·94 5504	9·83 6512
		2665				
	13·5	510	9601	4598	5402	6206
		3175				
	14·5	509	1 134 2779	4720	5280	5840
		3684				
	15·5	508	6467	5861	5139	5417
		4192				
	16·5	507	1 135 0664	0·05 5021	9·94 4979	9·83 4937
		4699				

Die Werte $\log r$ stimmen mit den ebenfalls sechsstellig angegebenen der Ephemeride Millosevich's vollständig. Nach dieser Vorarbeit, von der im weiteren Verlauf eigentlich nur die Kenntnis von $\log \frac{1}{r^3}$ auf fünf Stellen benötigt werden wird, kann die Rechnung der heliozentrischen Koordinatendifferenzen begonnen werden.

Nach den oben angegebenen Formeln findet man die folgenden Ausgangswerte

$$\log x_0 = 9_n776\ 5056 \qquad \log y_0 = 9{\cdot}944\ 7670$$

$$x_0 = -0{\cdot}597\ 7307 \qquad y_0 = +0{\cdot}880\ 5763$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -0{\cdot}014\ 9404\ 8 \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = -0{\cdot}007\ 1162\ 0$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = +0{\cdot}000\ 1215\ 7 \qquad \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 = +0{\cdot}000\ 0895\ 5$$

$$f_x^{\mathrm{I}} = +0{\cdot}000\ 0030\ 4 \qquad f_y^{\mathrm{I}} = +0{\cdot}000\ 0014\ 5$$

$$^{\mathrm{I}}f_x\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) = -0{\cdot}015\ 0010\ 1 \qquad ^{\mathrm{I}}f_y\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) = -0{\cdot}007\ 0265\ 3$$

$$\log z_0 = 9{\cdot}589\ 9310$$

$$z_0 = +0{\cdot}388\ 9833$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = -0{\cdot}006\ 7445\ 5$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 = -0{\cdot}000\ 0791\ 1$$

$$f_z^{\mathrm{I}} = +0{\cdot}000\ 0013\ 7$$

$$^{\mathrm{I}}f_z\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) = -0{\cdot}006\ 7048\ 8$$

Die Rechnung kann nun sofort in der oben angedeuteten einfachen Weise fortgesetzt werden: für das nächste Argument Februar 9·5 wird $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1$ vollständig genügend mit $x_1 = x_0 + {}^1f$ gerechnet, woraus sich f^1 und der strenge Wert $\Delta x = {}^1f + \frac{1}{12} f^1$ ergibt.

Die Ermittlung der Differenzen der heliozentrischen rechtwinkligen Koordinaten stellt sich in folgender Weise.

1901 Eebruar	9·5	10·5	11·5	12·5	13·5	14·5	15·5	16·5
	− 0·61261	− 0·62736	− 0·64199	− 0·65649	− 0·67085	− 0·68508	− 0·69917	−0·71311
$\log x$	9_n78719	9_n29752	9_n80753	9_n81722	9_n82663	9_n83574	9_n84458	9_n85316
log 1	9·83708	9 83695	9·83676	9·83651	9·83621	9·83584	9·83542	9·83494
$\log x \quad r^3$	9_n62427	9_n63447	9_n64429	9_n65373	9 66284	9_n67158	9_n68000	9_n68810
$\log f = \log\left(-k^2 \frac{x}{r^3}\right)$	6·09543	6·10563	6·11545	6·12489	6·13400	6·14274	6·15116	6·15926
f	+ 0·000							
	1245 7	12754	13045	13332	13614	13891	14163	14430

1901	$f'x$	$\frac{d^2x}{dt^2} = fx$	$'fx$	Δx	
		+ 0·000	− 0·015 0010 1		
Februar 8·5	+ 0·000	1215 7			− 0·597 7307
	0030 0		− 0·014 8794 4	− 0·014 8791 9	
9·5		1245 7			− 0·612 6099
	0029 7		7548 7	− 0·014 7546 2	
10·5		1275 4			− 0·627 3645
	0029 1		6273 3	− 0·014 6270 9	
11·5		1304 5			− 0·641 9914
	0028 7		4968 8	− 0·014 4966 4	
12·5		1333 2			− 0·656 4880
	0028 2		3635 6	− 0·014 3633 2	
13·5		1361 4			− 0·670 8513
	0027 7		2274 2	− 0·014 2272 9	
14·5		1389 1			− 0·685 0786
	0027 2		− 0·014 0885 1	− 0·014 0882 8	
15·5		1416 3			− 0·699 1679
	0026 7		− 0·013 9468 8	− 0·013 9466 6	
16·5		1443 0			− 0·713 1146

1901 Februar	9·5	10·5	11·5	12·5	13·5	14·5	15·5	16·5
y	+ 0 87337	+ 0 86599	+ 0·85843	+ 0·85070	+ 0·84279	+ 0·83471	+ 0·82646	+ 0·81805
log y	9·94120	9·93751	9·93370	9·92978	9·92571	9·92154	9·91722	9·91278
log 1 : r^3	9·83708	9·83695	9·83676	9·83651	9·83621	9·83584	9·83542	9·83494
log y	9·77828	9·77446	9·77046	9·76629	9·76192	9·75738	9·75264	9·74772
log f	6_n24944	6_n24562	6_n24162	6_n23745	6_n23308	6_n22854	6_n22380	6_n21888
f	— 0·000							
	17760	17604	17443	17276	17103	16925	16742	16553

1901	$f'y$	$\frac{d^2y}{dt^2} = fy$	$'fy$	Δy	y
		— 0·000	— 0·007 0265 3		
Februar 8·5	+ 0·000	1790 9			+ 0·880 5763
	0014 9		2056 2	— 0·007 2055 0	
9·5		1776 0			+ 0·873 3708
	0015 6		3832 2	— 0·007 3830 9	
10·5		1760 4			+ 0·865 9877
	0016 1		5592 6	— 0·007 5591 3	
11·5		1744 3			+ 0·858 4286
	0016 7		7336 9	— 0·007 7335 5	
12·5		1727 6			+ 0·850 6950
	0017 3		— 0·007 9064 5	— 0·007 9063 1	
13·5		1710 3			+ 0·842 7887
	0017 8		— 0·008 0774 8	— 0·008 0773 3	
14·5		1692 5			+ 0·834 7114
	0018 3		2467 3	— 0·008 2465 8	
15·5		1674 2			+ 0·826 4648
	0018 9		4141 5	— 0·008 4139 9	
16·5		1655 3			+ 0·818 0508

1901 Februar	9·5	10·5	11·5	12·5	13·5	14·5	15·5	16·5
	+ 0·38220	+ 0·37534	+ 0·36840	+ 0·36139	+ 0·35430	+ 0·34714	+ 0·33991	+ 0·33262
log z	9·58229	9·57442	9·56632	9·55797	9·54937	9·54050	9·53136	9·52195
log 1 : r^3	9·83708	9·83695	9·83676	9·83651	9·83621	9·83584	9·83542	9·83494
log $z : r^3$	9·41937	9·41137	9·40308	9·39448	9·38558	9·37634	9·36678	9·35689
log f	5_n89053	5_n88253	5_n87424	5_n86564	5_n85674	5_n84750	5_n83794	5_n82805
f	— 0·000							
	07772	07630	07486	07339	07190	07039	06886	06731

1901	$f'z$	$\frac{d^2z}{dt^2}=fz$	$'fz$	Δz	
		− 0·000	− 0·006 7048 8		
Februar 8·5	+ 0·000	0791 1			+ 0·388 9833
	0013 9		7839 9	− 0·006 7838 7	
9·5		0777 2			+ 0·382 1994
	0014 2		8617 1	− 0·006 8615 9	
10·5		0763 0			+ 0·375 3378
	0014 4		− 0·006 9380 1	− 0·006 9378 9	
11·5		0748 6			+ 0.368 3999
	0014 7		− 0·007 0128 7	− 0·007 0127 5	
12·5		0733 9			+ 0·361 3872
	0014 9		0862 6	− 0·007 0861 4	
13·5		0719 0			+ 0·354 3011
	0015 1		1581 6	− 0·007 1580 3	
14·5		0703 9			+ 0·347 1431
	0015 3		2285 5	− 0·007 2284 2	
15·5		0688 6			+ 0·339 9147
	0015 5		2974 1	− 0·007 2972 8	
16·5		0673 1			+ 0·332 6174

Die rechtwinkligen Koordinaten selbst sind eigentlich mit einem überflüssigen Genauigkeitsgrad angegeben, da sie ja nur zur Berechnung der zweiten Differentialquotienten mitgeführt werden.

Die direkte siebenstellige Rechnung ergibt für Februar 16·5

$$x = -0\cdot713\ 1144$$

$$y = +0\cdot818\ 0514$$

$$z = +0\cdot332\ 6177$$

III.

Sind auf die angegebene Weise die Differenzen der heliozentrischen rechtwinkligen äquatorealen Koordinaten gefunden, so erhält man durch Addition der entsprechenden Inkremente der Sonnenkoordinaten die Differenzen eben derselben geozentrischen Koordinaten

$$\Delta\xi = \Delta x + \Delta X,\ \Delta\eta = \Delta y + \Delta Y,\ \Delta\zeta = \Delta z + \Delta Z.$$

Nun handelt es sich darum, aus diesen die Inkremente der Rektaszension und Deklination zu finden. Sind ρ, α, δ und ρ_1, α_1, δ_1 die geozentrischen Polarkoordinaten zweier aufeinanderfolgender Ephemeridenorte, so ist

$$\rho_1 \cos\delta_1 \cos\alpha_1 = \rho \cos\delta \cos\alpha + \Delta\xi$$

$$\rho_1 \cos\delta_1 \sin\alpha_1 = \rho \cos\delta \sin\alpha + \Delta\eta$$

$$\rho_1 \sin\delta_1 = \rho \sin\delta + \Delta\zeta,$$

woraus in bekannter Weise

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{-\Delta\xi \sin\alpha + \Delta\eta . \cos\alpha}{\rho \cos\delta + \Delta\xi \cos\alpha + \Delta\eta \sin\alpha} \quad \text{folgt.}$$

Setzt man

$$\Delta\xi = \sigma \cos h$$
$$\Delta\eta = \sigma \sin h,$$

so ist

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\rho \cos\delta} \sin(h-\alpha)}{1 + \frac{\sigma}{\rho \cos\delta} \cos(h-\alpha)}$$

eine Größe, die mit Hilfe von Additionslogarithmen sofort hinzuschreiben ist, um so mehr, als der Nenner wegen der Kleinheit von σ einen sehr kleinen Gang haben wird.

Durch Multiplikation der ersten und zweiten Gleichung mit $\cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}$, beziehungsweise $\sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}$ und Addition ergibt sich

$$\rho_1 \cos\delta_1 = \rho \cos\delta + \frac{\sigma \cos\left(h - \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha_1 - \alpha}{2}},$$

im Verein mit der dritten Gleichung

$$\rho_1 \sin\delta_1 = \rho \sin\delta + \Delta\zeta$$

erhält man auf ähnliche Weise wie oben

$$\operatorname{tg} \Delta\delta = \frac{-\sigma \cos\left(h - \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}\right) \sec \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \sin\delta + \Delta\zeta \cos\delta}{\rho + \sigma \cos\left(h - \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}\right) \sec \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \cos\delta + \Delta\zeta \sin\delta}$$

Setzt man wieder

$$\sigma \cos\left(h - \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}\right) \sec \frac{\Delta\alpha}{2} = \gamma \cos G$$
$$\Delta\zeta = \gamma \sin G$$

so ist

$$\operatorname{tg} \Delta\delta = \frac{\frac{\gamma}{\rho} \sin(G-\delta)}{1 + \frac{\gamma}{\rho} \cos(G-\delta)}.$$

Multipliziert man noch die Gleichung für $\rho_1 \cos\delta_1$ mit $\cos \frac{\delta_1 + \delta}{2}$ und die für $\rho_1 \sin\delta_1$ mit $\sin \frac{\delta_1 + \delta}{2}$, so erhält man das Inkrement der geozentrischen Distanz in der Form

$$\Delta\rho = \gamma \cos\left(G - \frac{\delta_1 + \delta}{2}\right) \sec \frac{\Delta\delta}{2}.$$

Es ist dieser zweite Teil der Rechnung naturgemäß nicht mehr so einfach wie der frühere, behält aber infolge des mäßigen Ganges aller hier auftretenden Größen den Vorzug, sich selbst beständig zu kontrollieren.

Eine sechsstellige Rechnung genügt natürlich hier unter allen Umständen.

Die Größen σ und h, die unabhängig vom Gang der polaren Koordinaten sind, können direkt bestimmt werden.

Zum nachfolgendem Beispiel, der Fortsetzung der Berechnung einiger Eros-Positionen aus der Opposition 1901, sei noch Folgendes bemerkt. Bei dem Umstande, als in den Ephemeriden die Sonnenkoordinaten nur auf sieben Stellen angegeben sind, wird die hier angestrebte Genauigkeit und die dazu nötige sechsstellige Rechnung der Differenzen eigentlich wieder illusorisch. Nichtsdestoweniger sollen dieselben so, wie bei ausreichend genauen Differenzangaben der Sonnenkoordinaten, gerechnet werden, da es hier ja nur auf die formale Behandlung bei den strengsten Anforderungen ankommt. Natürlich wird durch den erwähnten Umstand der regelmäßige Gang der einzelnen Größen einigermaßen beeinträchtigt.

Im Übrigen würde die angegebene Methode, die sich für die Berechnung der rechtwinkligen, heliozentrischen Koordinaten besonders einfach gestaltet und diese Eigenschaft auch bei Berücksichtigung der Koordinatenstörungen nicht verliert, auch die Berechnung der Sonnenkoordinaten bei erhöhter Genauigkeit in sehr rascher Weise durchführen lassen.

Nachstehend die Ermittlung der Größen σ und h für das gewählte Beispiel (die erst aus dem weiteren Verlauf folgenden α und $\rho \cos \delta$ sind der Übersichtlichkeit wegen hier schon mitgegeben).

1901 Februar	8·5—9·5	9·5—10·5	10·5—11·5	11·5—12·5
Δx	− 0·014 8792	− 0·014 7546	− 0·014 6271	− 0·014 4966
ΔX	+ 0·011 3355	+ 0·011 1022	+ 0·010 8654	+ 0·010 6252
$\Delta \xi$	− 0·003 5437	− 3 6524	− 3 7617	− 3 8714
Δy	− 0·007 2055	− 0·007 3831	− 0·007 5591	− 0·007 7336
ΔY	+ 0·012 1430	+ 0·012 3208	+ 0·012 4950	+ 0·012 6653
$\Delta \eta$	+ 0·004 9375	− 4 9377	4 9359	+ 4 9317
Δz	− 0·006 7839	− 0·006 8616	− 0·006 9379	− 0·007 0128
ΔZ	+ 0·005 2685	+ 0·005 3456	− 0·005 4213	+ 0·005 4951
$\Delta \zeta$	− 0·001 5154	− 1 5160	− 1 5166	− 1 5177
$\sigma \cos h$	7_n549 457	7_n562 578	7_n575 384	7_n587 869
$\sin h$	9·909 778	9·905 234	9·900 560	9·895 748
$\sigma \sin h$	7·693 507	7·693 525	7·693 366	7·692 997
h	125 40 2·7	126 29 24·5	127 18 41·1	128 7 55·5
α	62 26 28·2	63 22 25·5	64 18 26·5	65 14 30·5
$\log \sigma$	7·783 729	7·788 291	7·792 806	7·797 249
$\rho \cos \delta$	9·519 300	9·522 938	9·526 599	9·530 282
$\cos\left(h - \alpha - \frac{1}{2} \Delta\alpha\right)$	9·660 599	9·662 220	9·663 869	6·665 529

1901 Februar	12·5—13·5	13·5—14·5	14·5—15·5	15·5—16·5
Δx	− 0·014 3633	− 0·014 2273	− 0·014 0883	−0·013 9467
ΔX	+ 0·010 3818	+ 0·010 1348	+ 0·009 8845	+0·009 6311
$\Delta \xi$	− 0·003 9815	− 4 0925	− 4 2038	− 4 3165
Δy	− 0·007 9063	− 0·008 0773	− 0·008 2466	−0·008 4140
ΔY	+ 0·012 8320	+ 0·012 9446	+ 0·013 1533	+0·013 3079
$\Delta \eta$	+ 0·004 9257	+ 4 9173	+ 4 9067	+ 4 8939
Δz	− 0·007 0861	− 0·007 1580	− 0·007 2284	−0·007 2973
ΔZ	+ 0·005 5674	+ 0·005 6379	+ 0·005 7067	+0·005 7736
$\Delta \zeta$	− 0·001 5187	− 1 5201	− 1 5217	− 1 5237
$\sigma \cos h$	7_n600 047	7_n611 989	7_n623 642	7_n635 041
$\sin h$	9·890 815	9·885 714	9·880 474	9·875 079
$\sigma \sin h$	7·692 468	7·691 727	7·690 790	7·689 655
h	128 56 56·5	129 46 10·0	130 35 17·4	131 24 24·8
α	66 10 36·9	67 6 45·1	68 2 54·6	68 59 4·6
$\log \sigma$	7·801 653	7·806 013	7·810 316	7·814 576
$\rho \cos \delta$	9·533 983	9·537 706	9·541 448	9·545 210
$\cos\left(h-\alpha-\frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$	9·667 243	9·668 905	9·670 587	9·672 262

Mit diesen Hilfsgrößen σ und h kann nun die weitere Berechnung der Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen durchgeführt werden.

Als Ausgangswerte erhält man

$$x_0 = -0{\cdot}597\ 7307 \qquad y_0 = +0{\cdot}880\ 5763$$

$$X_0 = +0{\cdot}750\ 6840 \qquad Y_0 = -0{\cdot}587\ 4896$$

$$\xi_0 = +0{\cdot}152\ 9533 \qquad \eta_0 = +0{\cdot}293\ 0867$$

$$z_0 = +0{\cdot}388\ 9833$$

$$Z_0 = -0{\cdot}254\ 8663$$

$$\zeta_0 = +0{\cdot}134\ 1170$$

woraus weiter folgt:

$$\alpha_0 = 62^\circ\ 26'\ 28''25$$

$$\delta_0 = +22^\circ\ 4'\ 53''19$$

$$\log \rho_0 = 9{\cdot}552\ 3835$$

oder

$$\alpha_0 \text{ app.} = 4^h\ 9^m\ 47^s462$$

$$\delta_0 \text{ app.} = +22^\circ\ 4'\ 52''90$$

$$\rho_0 = 0{\cdot}356\ 7663.$$

Aus diesen ergibt sich nun die sukzessive Berechnung der Inkremente der Rektaszensionen und Deklinationen in nachstehender Weise.

1901 Februar	8·5—9·5	9·5—10·5	10·5—11·5	11·5—22·5
$h-\alpha$	63 13 34·5	63 6 59·0	63 14·6	62 53 25·0
$-\frac{1}{2}\Delta\alpha$	−27 58·6	−28 0·5	−28	−28 3·2
$h-\alpha-\frac{1}{2}\Delta\alpha$	62 45 35·9	62 38 58·5	62 32 12·6	62 25 21·8
$\cos\delta$	9·966 916	9·968 107	9·969 269	9·970 403
$\log\rho$	9·552 384	9·554 831	9·557 330	9·559 879
$\log\gamma$	7·500 768	7·505 590	7·510 426	7·515 274
$\cos\left(G-\delta-\frac{1}{2}\Delta\delta\right)$	9·803 837	9·810 384	9·816 719	9·822 760
$\cos(h-\alpha)$	9·653 665	9·655 311	9·656 986	9·658 676
$\log(\sigma:\rho\cos\delta)$	8·264 429	8·265 353	8·266 207	8·266 967
$\sin(h-\alpha)$	9·950 751	9·950 329	9·949 897	9·949 457
$\log(\sigma:\rho\cos\delta)\cos(h-\alpha)$	7·918 094	7·920 664	7·923 193	7·925 643
$\log(\sigma:\rho\cos\delta)\sin(h-\alpha)$	8·215 180	8·215 682	8·216 104	8·216 424
$\log[1+(\sigma:\rho\cos\delta)\cos(h-\alpha)]$	0·003 582	0·003 603	0·003 624	0·003 644
$\operatorname{tg}\Delta\alpha$	8·211 598	8·212 079	8·212 480	8·212 780
$\Delta\alpha$	+ 55 57·254	+ 56 0·977	+ 56 4·085	+ 56 6·400
$\sigma\cos\left(h-\alpha-\frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$	7·444 328	7·450 511	7·456 675	7·462 778
$\sec\frac{1}{2}\Delta\alpha$	14	14	14	14
$\gamma\cos G$	7·444 342	7·450 525	7·456 689	7·462 792
$\cos G$	9·943 574	9·944 935	9·946 263	9·947 518
$\gamma\sin G$	7_n180 527	7_n180 699	7_n180 871	7_n181 186
G	−28 34 43·2	−28 14 48·4	−27 55 6·5	−27 36 13·5
$-\delta$	−22 4 53·2	−21 41 24·7	−21 18 3·3	−20 54 48·9
$G-\delta$	−50 39 36·4	−49 56 13·1	−49 13 9·8	−48 31 2·4
$-\frac{1}{2}\Delta\delta$	+ 11 44·3	− 11 40·7	+ 11 37·2	+ 11 33·1
$G-\delta-\frac{1}{2}\Delta\delta$	−50 27 52·1	−49 44 32·4	−49 1 32·6	−48 19 29·3
$\cos(G-\delta)$	9·802 034	9·808 636	9·815 022	9·821 116
$\log(\gamma:\rho)$	7·948 384	7·950 759	7·953 096	7·955 395
$\sin(G-\delta)$	9_n888 404	9_n883 853	9_n879 220	9_n874 572
$\log(\gamma:\rho)\cos(G-\delta)$	7·750 418	7·759 395	7·768 118	7·776 511
$\log(\gamma:\rho)\sin(G-\delta)$	7_n836 788	7_n834 612	7_n832 316	7_n829 967
$\log[1+(\gamma:\rho)\cos(G-\delta)]$	0·002 438	0·002 488	0·002 539	0·002 588
$\operatorname{tg}\Delta\delta$	7_n834 350	7_n832 124	7_n829 777	7_n827 379
$\Delta\delta$	− 23 28·535	− 23 21·335	− 23 13·787	− 23 6·110

1901 Februar	8·5—9·5	9·5—10·5	10·5—11·5	11·5—12·5
$\gamma \cos\left(G-\delta-\frac{1}{2}\Delta\delta\right)$	7·304 605	7·315 974	7·327 145	7·338 034
$\sec\frac{1}{2}\Delta\delta$	+ 3	+ 3	+ 3	+ 2
$\log \Delta\rho$	7·304 608	7·315 977	7·327 148	7·338 036
$\Delta\rho$	+0·00201655	+0·00207003	+0·00212397	+0·002 1778 9
α	62 26 28·25	63 22 25·50	64 18 26·48	65 14 30·47
Red.	+ 23·68	+ 23·73	+ 23·77	+ 23·81
α app.	62 26 51·93	63 22 49·23	64 18 50·25	65 14 54·28
=	4 9 47·462	4 13 31·282	4 17 15·350	4 20 59·619
δ	+22 4 53·19	+21 41 24·66	+21 18 3·32	+20 54 49·53
Red.	—0·29	—0·42	—0·55	—0·68
δ app.	+22 4 52·90	+21 41 24·24	+21 18 2·77	+20 54 48·85

1901 Februar	12·5—13·5	13·5—14·5	14·5—15·5	15·5—16·5
$h-\alpha$	62 46 19·6	62 39 24·9	62 32 22·8	62 25 20·2
$-\frac{1}{2}\Delta\alpha$	— 28 4·1	— 28 4·7	— 28 5·0	— 28 5·1
$h-\alpha-\frac{1}{2}\Delta\alpha$	62 18 15·5	62 11 20·2	62 4 17·8	61 57 15·1
$\cos\delta$	9·971 507	9·972 582	9·973 629	9·974 649
$\log\rho$	9·562 476	9·565 124	9·567 819	9·570 561
$\log\gamma$	7·520 152	7·525 004	7·529 864	7·534 727
$\cos\left(G-\delta-\frac{1}{2}\Delta\delta\right)$	9·828 638	9·834 243	9·839 640	9·844 810
$\cos(h-\alpha)$	9·660 421	9·662 113	9·663 828	9·665 535
$\log(\sigma:\rho\cos\delta)$	8·267 670	8·268 307	8·268 868	8·269 366
$\sin(h-\alpha)$	9·948 997	9·948 546	9·948 085	9·947 622
$\log(\sigma:\rho\cos\delta)\cos(h-\alpha)$	7·928 091	7·930 420	7·932 696	7·934 901
$\log(\sigma:\rho\cos\delta)\sin(h-\alpha)$	8·216 667	8·216 853	8·216 953	8·216 988
$\log[1+(\sigma:\rho\cos\delta)\cos(h-\alpha)]$	0·003 665	0·003 684	0·003 704	0·003 722
$\operatorname{tg}\Delta\alpha$	8·213 002	8·213 169	8·213 249	8·213 266
$\Delta\alpha$	+ 56 8·123	+ 56 9·418	+ 56 10·039	+ 56 10·169

1901 Februar	12·5—13·5	13·5—14·5	14·5—15·5	15·5—16·5
$\sigma \cos\left(h-\alpha-\frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$	7·468 896	7·474 918	7·480 903	7·486 838
$\sec\frac{1}{2}\Delta\alpha$	14	14	15	15
$\gamma \cos G$	7·468 910	7·474 932	7·480 918	7·486 953
$\cos G$	9·948 758	9·949 928	9·951 054	9·952 126
$\gamma \sin G$	7_n181 472	7_n181 872	7_n182 329	7_n182 899
G	—27 17 20·4	—26 59 16·5	—26 41 38·7	—26 24 39·8
$-\delta$	—20 31 42·8	—20 8 44·7	—19 45 54·8	—19 23 13·4
$G-\delta$	—47 49 3·2	—47 8	—46 27 33·5	—45 47 53·2
$-\frac{1}{2}\Delta\delta$	+ 11 29·1	+ 11 24·9	+ 11 20·7	+ 11 16·4
$G-\delta-\frac{1}{2}\Delta\delta$	—47 37 34·1	—46 56 36·3	—46 16 12·8	—45 36 36·8
$\cos(G-\delta)$	9·827 042	9·832 694	9·838 137	9·843 350
$\log(\gamma:\rho)$	7·957 676	7·959 880	7·962 045	7·964 166
$\sin(G-\delta)$	9_n869 824	9_n865 070	9_n860 269	9_n855 451
$\log(\gamma:\rho)\cos(G-\delta)$	7·784 718	7·792 574	7·800 182	7·807 516
$\log(\gamma:\rho)\sin(G-\delta)$	7_n827 500	7_n824 950	7_n822 314	7_n819 617
$\log[1+(\gamma:\rho)\cos(G-\delta)]$	0·002 637	0·002 685	0·002 733	0·002 779
$\operatorname{tg}\Delta\delta$	7_n824 863	7_n822 265	7_n819 581	7_n816 838
$\Delta\delta$	— 22 58·103	— 22 49·884	— 22 41·444	— 22 32·872
$\gamma \cos\left(G-\delta-\frac{1}{2}\Delta\delta\right)$	7·348 790	7·359 247	7·369 504	7·379 537
$\sec\frac{1}{2}\Delta\delta$			2	
$\log\Delta\rho$	7·348 792	7·359 249	7·369 506	7·379 539
$\Delta\rho$	+0·002 2325 1	+0·002 2869 1	+0·002 3415 6	+0·002 3962 9
	66 10 36·87	67 6 44·99	68 2 54·41	68 59 4·45
Red.	+ 23·85	+ 23·89	+ 23·93	+ 23·97
α app.	66 11 0·72	67 7 8·88	68 3 18·34	68 59 28·42
=	4 24 44·048	4 23 28·592	4 32 13·222	4 35 57·895

1901 Februar	12·5—13·5	13·5—14·5	14·5—15·5	15·5—16·5
δ	+20 31 43·42	+20 8 45·32	+19 45 55·44	+19 23 13·99
Red.	— 0·81	— 0·94	— 1·07	— 1·21
δ app.	+20 31 42·61	+20 8 44·38	+19 45 54·37	+19 23 12·78
				Februar 16·5
			α	69 55 14·62
			Red.	+24·00
			α app.	69 55 38·62
			=	4 39 42·575
			δ	+19 0 41·12
			Red. δ	— 1·35
			δ app.	+19 0 39·77

Der entsprechende Teil der Ephemeride Millosevich's (Astr. Nachr. Bd. 153, p. 255) zeigt gegen die hier angegebenen Orte nur Abweichungen, die innerhalb der Unsicherheit einer siebenstelligen direkten Rechnung liegen.

Ist einmal die Rechnung im Gange, so wird man bei dem mäßigen Gang der Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen, für eine kleinere Serie von Orten die α und δ sowie ρ mit genügender Sicherheit zur Berechnung der Δα und Δδ extrapolieren können, so daß man bei einer ausgedehnteren Ephemeride diese Größen gruppenweise in einem Zuge wird ermitteln könne