ÜBER DIE KONFORME ABBILDUNG DER RIEMANN'SCHEN FLÄCHE DURCH ABEL'SCHE INTEGRALE, BESONDERS BEI p=1, 2

VON

WILHELM WIRTINGER,

W. M. K. AKAD.

Mit 26 Textfiguren.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 29. APRIL 1909.

Seit Jacobi[1] den Nachweis geliefert hat, daß das einzelne hyperelliptische Integral erster Gattung nicht eindeutig umkehrbar ist, sind meines Wissens über die Art der Abhängigkeit dieser Integrale von der oberen Grenze und den Moduln des Gebildes keine Untersuchungen angestellt worden, welche über die Periodizität und Verzweigung hinausgehen.

Die letztere ist ja namentlich durch die Riemann'sche Figur von p Parallelogrammen, welche durch $2p-2$ Verzweigungspunkte miteinander verknüpft sind, dem Verständnis näher gerückt.

Einzelne Bemerkungen bei Prym,[2] Thomä,[3] Casorati[4] und Klein[5] betreffen spezielle Gestalten dieser Figur.

Da es sich dabei um ein periodisch sich wiederholendes Größengebiet handelt, welches allerdings die Ebene mehrfach überdeckt, so zeigt sich, daß nach einer leichten Modifikation der Begriff des normalen Diskontinuitätsbereiches, wie er von Fricke[6] in die Theorie der automorphen Funktionen eingeführt wurde, auch hier sein Analogon besitzt und gestattet, gewisse Normalformen des Bereiches aufzustellen.

Dieses allgemeine Ergebnis wird dann speziell für die Untersuchung eines besonderen elliptischen Integrals zweiter Gattung verwendet und dabei die Berechnung des Moduls aus dem Periodenverhältnis eines solchen Integrals gezeigt. Es ergibt sich dabei zum Beispiel, daß nicht jedes elliptische Gebilde in die Gestalt des Äußeren eines Parallelogrammes gebracht werden kann, sondern gewisse Ungleichungen dafür

---

1 J. f. M. 13 (1835). Ges. Werke, II, p. 23.

2 Denkschr. d. k. Akad., Wien, 1864.

3 Sammlung von Formeln, die bei Anwendung der ell. und Rosentain'schen Funktionen gebraucht werden. Halle, 1878.

4 Acta Mathem., Bd. VIII.

5 Autogr. Vorlesung über Riemann'sche Flächen. Göttingen, 1892, I, p. 61 ff.

6 Automorphe Funktionen, I, p. 106 (1897).

erfüllt sein müssen. Sodann wendet sich die Untersuchung dem hyperelliptischen Integral erster Gattung zu und gelangt schließlich zu dem Ergebnis, daß bei geeigneter, durch das Integral im allgemeinen eindeutig bestimmter Zerschneidung der Riemann'schen Fläche die Abbildung des einzelnen Blattes durch das Integral ein sich selbst nicht schneidendes, einfaches geradliniges Sechseck mit gewissen geometrischen Bedingungen wird.

Hierin liegt das Analogon des von Schwarz[1] für den Fall des elliptischen Gebildes bewiesenen Satzes von der Abbildung auf ein spitzwinkeliges Dreieck. Auch die lineare Periodentransformation[2] bekommt am Sechseck eine einfache und übersichtliche Gestalt und liefert sofort die Zusammensetzung sämtlicher Transformationen aus zwei geeigneten.

I. Die Elementarzellen bei beliebigen algebraischen Gebilden.

Es sei G ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte p, welches in der Form einer Riemann'schen Fläche gegeben ist. u bezeichne eine Integralfunktion auf diesem Gebilde, das heißt eine Funktion, die nur logarithmische und algebraische Unstetigkeiten besitzt und bei geschlossenen Wegen auf dem Gebilde sich nur um Konstante vermehrt. F sei durch irgend ein Schnittsystem einfach zusammenhängend gemacht und es sei dabei auch ein Umlaufen der einzelnen logarithmischen Unstetigkeitsstellen ausgeschlossen. Die konforme Abbildung von F vermittels des Integrales u besteht dann aus einem einfach zusammenhängenden Flächenstücke, welches in seinem Innern Verzweigungspunkte enthalten kann, und dessen Ränder paarweise durch Parallelverschiebung zusammengeordnet sind. Sind logarithmische Unstetigkeiten vorhanden, so treten in das Unendliche ziehende Parallelstreifen hinzu. Außerdem kann das Flächenstück sich noch in einem oder mehreren Blättern in das Unendliche erstrecken. Dieses Flächenstück sei P_0. Bei analytischer Fortsetzung von u über die Berandung von F treten an das Flächenstück P_0 kongruente $P_1, P_2 \ldots$, die schließlich die Ebene unendlich oft überdecken, wenn nicht u selbst eine algebraische Funktion oder ein elliptisches Integral I. Gattung ist.

Diese bilden in ihrer Gesamtheit eine unendlich vielblättrige, nirgends berandete Riemann'sche Fläche Π, die nur Verzweigungspunkte von endlich hoher Ordnung aufweist.

Denken wir uns umgekehrt eine solche Fläche Π mit ihren Verzweigungen und Periodizitätseigenschaften gegeben, so ist durch diese sowohl die Riemann'sche Fläche F als auch das Integral u auf dieser vollkommen bestimmt. Die einzelnen Punkte von Π sind zufolge der Periodizität zueinander in Beziehung gesetzt, so daß jeder Punkt unendlich viele äquivalente Punkte hat, entsprechend den unendlich vielen Wiederholungen von P_0. Dabei kommt für die Äquivalenz zweier Punkte sowohl ihre gegenseitige Lage als auch das Blatt, in dem sie liegen, in Betracht. Im besonderen können Verzweigungspunkte nur äquivalent sein, wenn sie von gleicher Ordnung sind. Eine Häufung der Verzweigungspunkte tritt zufolge der Beschaffenheit von P_0 nicht ein.

Wir nehmen einen regulären Punkt u_0 auf Π und denken uns von diesem alle Geraden auf dem Blatte von Π gezogen. Wenn eine solche Gerade einen Verzweigungspunkt von Π trifft, so möge sie dort enden. Dadurch ist dem Punkte u_0 ein Gebiet, ein Stern nach Mittag-Leffler, zugeordnet, welches aus allen diesen Geraden angehörigen Punkten besteht und keinen Verzweigungspunkt in seinem Innern enthält. Es umfaßt also dieses Gebiet alle diejenigen Punkte von Π, die mit u_0 geradlinig verbunden

---

[1] J. f. M. 70 (1868). Ges. Abhandl., II, p. 90ff.

Es sei mir bei der Gelegenheit gestattet, zu bemerken, daß der von mir gelegentlich ohne Beweis ausgesprochene Satz, daß die verallgemeinerten hypergeometrischen Integrale mit 6 Verzweigungspunkten durch die τ_{ik} des hyperelliptischen Gebildes eindeutig darstellbar seien, irrtümlich ist. Es sind vielmehr die Mannigfaltigkeiten $\tau_{12} = 0$ Verzweigungsmannigfaltigkeiten und ihre äquivalenten?

werden können, so daß immer die Verbindungsstrecke mit einem Π angehörigen Flächenstücke umgeben werden kann und durch keinen Verzweigungspunkt geht. Da ja die Verzweigungspunkte sich im Endlichen auf der Fläche Π nie häufen, so gehört jetzt zu u_0 ein einziger oder nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten, welche ihm, immer auf Π gemessen, näher liegen als alle übrigen.

Zu jedem Verzweigungspunkte w gehört daher umgekehrt ein Bereich von Punkten u_0, so daß u der nächste zu u_0 gelegene Verzweigungspunkt ist, der mit einem Punkte u_0 auf der Fläche Π geradlinig verbunden werden kann. Die Gesamtheit dieser Punkte u, die auf diese Weise einem Verzweigungspunkte w zugeordnet sind, bilden nun einen diesen Verzweigungspunkt nach allen Seiten umgebenden, einfach zusammenhängenden, geradlinig begrenzten Bereich Z_w ohne einspringende Winkel, der als die Elementarzelle des Verzweigungspunktes w bezeichnet werden soll.

In der That: zieht man vom Verzweigungspunkte w aus in allen in ihm zusammenhängenden Blättern sämtliche Strahlen und bricht sie dort ab, wo sie auf andere Verzweigungspunkte treffen, so bildet die Gesamtheit der diesen Strecken angehörigen Punkte einen einfach zusammenhängenden, den Verzweigungspunkt vollständig umgebenden Bereich B. Errichtet man nun in den Halbierungspunkten der Verbindungslinien von w mit den auf der Begrenzung von B gelegenen Verzweigungspunkten die Senkrechten, so bleibt eine gewisse Umgebung von w von solchen Senkrechten frei. Diese Umgebung ist notwendig ein von einer endlichen Anzahl von geraden Linien begrenztes, w mehrfach umlaufendes Polygon. Denn würden unendlich viele Seiten vorhanden sein, so würden sich diese notwendig häufen und damit auch die Verzweigungspunkte im Endlichen eine Häufungsstelle haben. Da ferner die Seiten dieser Polygone Orte solcher Punkte sind, die von zwei Verzweigungspunkten w, w' gleich weit entfernt sind, so liegen die dem betrachteten Begrenzungsstücke des Polygons anliegenden Punkte, welche zu w gehören, auch auf der w zugewendeten Seite der Begrenzung. Infolgedessen ist es ausgeschlossen, daß eine Gerade, welche mit einem ihrer Teile zur Begrenzung gehört, in das Innere des Polygons eintritt. Es müssen also alle Winkel des Polygons hohle Winkel sein, wie behauptet wurde.

Zu jedem Verzweigungspunkte w von Π gehört nun eine solche Elementarzelle Z_w und die Gesamtheit dieser Elementarzellen erfüllt die Fläche Π lückenlos und vollständig; denn jeder Punkt u gehört entweder notwendig zu einem Verzweigungspunkte als dem nächsten, dann liegt er im Innern einer Zelle Z_w, oder seine kleinste Entfernung von einem Verzweigungspunkt überhaupt ist für mehrere gleich, dann liegt er notwendig auf der Begrenzung der zu diesen Verzweigungspunkten gehörigen Elementarzellen. Äquivalenten Verzweigungspunkten gehören offenbar kongruente Elementarzellen zu.

Betrachtet man nun ein vollständiges System nicht äquivalenter Verzweigungspunkte, das heißt ein System von Verzweigungspunkten, von denen keine zwei im Sinne der Periodizität einander äquivalent sind, dagegen jeder andere Verzweigungspunkt einem von ihnen äquivalent ist, so bilden die zu diesen Verzweigungspunkten gehörigen Elementarzellen einen Fundamentalbereich, durch dessen periodische Wiederholung die Gesamtfläche Π erzeugt werden kann.

Wenn die Riemann'sche Fläche Π aus einem bekannten Polygon P entstanden ist, hat man nur nötig, die zu den Verzweigungspunkten von P gehörigen Elementarzellen in der durch P angegebenen Anordnung aneinander zu reihen. Wenn aber P nicht bekannt ist, so kann man das folgende Verfahren einschlagen: Man nehme einen beliebigen Verzweigungspunkt w und die zugehörige Elementarzelle Z_w. Fällt man auf die Begrenzungslinien von Z_w von w aus Senkrechte und verdoppelt sie, so sind die Endpunkte neuerlich Verzweigungspunkte. Unter diesen können einer oder mehrere (oder gar keine) zu w äquivalent sein. Diese lasse man weg. Wenn mehrere untereinander äquivalente sind, so behalte man von jeder Gruppe äquivalenter Punkte nur einen bei. Mit den so hinzugefügten neuen Elementarzellen verfahre man in entsprechender Weise weiter, so daß man durch Ziehen von Senkrechten auf die Begrenzungslinien und Verdoppeln neue Verzweigungspunkte erhält. Von diesen werden jedoch nur solche weiter berücksichtigt, die weder untereinander noch zu den schon vorhandenen äquivalent sind. Dieser Prozeß muß

notwendig ein Ende haben, da die Anzahl der nicht äquivalenten Verzweigungspunkte als endlich vorausgesetzt wurde. Er führt schließlich zu einem geschlossenen Bereich, da dann für jede Kante des Gesamtbereiches bestimmt ist, welche Elementarzelle ihr anliegt. Sollte in einem konkreten Falle sich auf diese Weise nicht ein vollständiges System nicht äquivalenter Elementarzellen ergeben, so wäre dadurch der Nachweis erbracht, daß die Fläche Π aus mehreren nicht zusammenhängenden Teilen besteht. In diesem Falle muß das angegebene Verfahren für jeden Teil für sich zum Ziele führen und es sind dann mehrere algebraische Gebilde dadurch definiert.

Dabei ist zu beachten, daß die einzelnen Elementarzellen voneinander nicht unabhängig sind, sondern außer der Konvexität denjenigen Bedingungen in Bezug auf Winkel und Seiten unterworfen sind, welche daraus entstehen, daß sie sich:

1. lückenlos ohne Verzweigung aneinander fügen, und
2. in dem schließlich entstehenden Bereich die einander zugeordneten Kanten parallel sind.

Die Anordnung dieser Elementarzellen kann jedoch im einzelnen Falle eine verschiedene sein. Ebenso können sich auch einzelne Elementarzellen auf mannigfache Art ins Unendliche erstrecken:

»Damit ist also gezeigt, daß jedes algebraische Integral die Riemann'sche Fläche F auf eine aus einer endlichen Anzahl von konvexen, geradlinig begrenzten Polygonen, deren jedes in seinem Innern einen Verzweigungspunkt enthält, bestehende Fläche konform abgebildet werden kann«.

Die Anzahl der verschiedenen Elementarzellen ist gleich der Anzahl der Nullstellen des Differentials du. Bei einem Integral I. Gattung ist sie niemals größer als $2p-2$. Durch besondere Wahl des Integrals kann die Anzahl auf $p-1$ vermindert oder in speziellen Fällen wie im hyperelliptischen auf 1 herabgesetzt werden. Natürlich erhöht sich dann entsprechend die Ordnung der Nullstelle.

Statt der Verzweigungspunkte könnten zur Bildung der Elementarzellen andere ausgezeichnete Punkte auf Π herangezogen werden. Es würden dann die Verzweigungspunkte im allgemeinen auf die Seiten fallen.

II. Die Abbildung durch das Integral

$$w = \int \frac{(x-a_1)}{(x-a_2)} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}$$

Auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche F mit den Verzweigungspunkten a_1, a_2, a_3, a_4 ist das in der Überschrift genannte Integral dadurch charakterisiert, daß es seinen einzigen Pol in a_2 hat und daß sein Differential in a_1 von der dritten Ordnung verschwindet. Von den zwölf Integralen dieser Art, welche auf dem elliptischen Gebilde möglich sind, sind nur drei voneinander wesentlich verschieden und diese können in der Weierstraß'schen Bezeichnung geschrieben werden

$$\int (pu - e_\lambda)\, du \quad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Die konforme Abbildung, welche durch w von der Riemann'schen Fläche F geliefert wird, nachdem diese vorher einfach zusammenhängend gemacht worden, ist daher ein parallelogrammatisch begrenztes, einfach durch das Unendliche ziehendes Gebiet mit einem Verzweigungspunkt zweiter Ordnung, in welchem drei Blätter zusammenhängen.

Die periodische Wiederholung dieses Gebietes, entsprechend der analytischen Fortsetzung des Integrals über die Querschnitte, liefert eine unendlich vielblättrige Fläche F_w, deren einzelne Blätter durch die Verzweigungspunkte verknüpft sind, während diese selbst sämtlich im Sinne der Periodizität äquivalent sind.

Nach dem vorigen ist es daher möglich, auf der Fläche eine einzige Elementarzelle Π abzugrenzen, durch deren periodische Wiederholung die ganze Fläche erzeugt wird und welche daher ein deutliches Bild der Abhängigkeit des Integrals w von seiner oberen Grenze gibt.

Man beachte nun zuerst, daß für die Fläche F_w die Bilder der Verzweigungspunkte a_1, a_3, a_4, die wir mit 0, w_3, w_4 bezeichnen wollen, Symmetriezentren sind, und zwar die letzteren beiden im gewöhnlichen Sinn, der erstere Punkt aber, den wir zum Mittelpunkt der Elementarzelle zu nehmen haben, in dem Sinne, daß wir erst durch eine Drehung von 3π um 0 die Fläche F_w wieder mit sich selbst zur Deckung bringen können. Denken wir uns ferner die Elementarzelle für 0 konstruiert und die Begrenzungslinien rückwärts auf die Fläche F übertragen, so müssen jetzt diese Begrenzungslinien auf F ein Liniensystem bilden, welches in beiden Blättern gleich verläuft und von welchem außerhalb der Verzweigungspunkte immer mindestens drei Linien zusammenstoßen, da ja die Winkel zweier anstoßender Begrenzungsteile immer kleiner als π sein müssen, die Summe der in einem Punkt zusammenstoßenden Winkel aber 2π sein muß.

Schließen wir noch a_2 durch einen kleinen doppelt herumlaufenden Kreis aus und erstrecken die Zerschneidung von F nur bis zu diesem Kreis, so können wir zur Bestimmung der Anzahl der Begrenzungsstücke den erweiterten Euler'schen Satz anwenden und haben $e-k+f=-2p+2$, wo f die Anzahl der Flächenstücke, k die Anzahl der Linienstücke und e die Anzahl der Ecken in F, also die Anzahl der Zyklen von Π bezeichnet. Außerdem haben wir noch die Bedingung $3e \leqq 2k$. Dies gibt für unseren Fall $k-e=2$ und daher $e \leqq 4$, $k \leqq 6$.

Fig. 1.

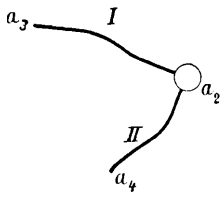
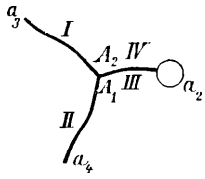


Fig. 2.



Da ferner die Zyklen und Linien auf F in beiden Blättern genau übereinanderliegen müssen, so liegen in jedem Blatt höchstens zwei Zyklen, welche entweder beide auf dem a_2 ausschließenden Kreis liegen oder doch eine von ihnen. Hiemit ergeben sich die beiden in der Fig. 1 schematisch angedeuteten Möglichkeiten der Zerschneidung, welche wir als ersten und zweiten Typus unterscheiden wollen. Es ist dabei unmittelbar ersichtlich, wie die Fälle von geringerer Kanten-, respektive Zyklenzahl aus den gezeichneten durch Verschwinden einzelner Kanten und Auftreten mehrgliedriger Zyklen hervorgehen.

Man bemerke nun zunächst, daß auf der Elementarzelle die Bilder von a_3, a_4 als Symmetriezentren von F_w notwendig auf der Begrenzung von Π liegen (als Halbierungspunkte der Verbindungslinie zweier Verzweigungspunkte), daß ferner diejenigen Kanten von Π, auf denen w_3, w_4 liegen, auf den Geraden Ow_3, Ow_4, respektive senkrecht stehen müssen, nach der Konstruktion der Elementarzelle und endlich die Punkte w_3, w_4 die Kanten, auf welchen sie liegen, halbieren müssen. In jedem Eckpunkt von Π müssen nämlich mindestens drei Elementarzellen zusammenstoßen. Würde nun w_3 nicht die hindurchgehende Kante halbieren, so würde die zentrische Symmetrie um w_3 das Eintreten einer Kante in die erste Elementarzelle zur Folge haben, was unmöglich ist. Nennen wir solche Kanten, welche das Bild eines Verzweigungspunktes tragen, V e r z w e i g u n g s k a n t e n, so bildet also jede Verzweigungskante zusammen mit 0 ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze in 0 und das Symmetriezentrum ist Halbierungspunkt der Basis. Dies kommt jedoch erst für den zweiten Typus in Betracht, da im ersten Typus die Verzweigungskanten sich ins Unendliche erstrecken, sobald man den Kreis um a_2 auf Null zusammenzieht.

Hiemit ergibt sich die Gestalt der zum ersten Typus gehörigen Elementarzelle ohneweiters als eine von zwei Paaren paralleler Geraden begrenzte Fläche mit dreiblättrigem Verzweigungspunkt in 0, welche im Unendlichen in der in der Figur angegebenen Weise zusammenhängen. Fällt man nun von 0 aus auf die vier Kanten Senkrechte, so zerfällt die Zelle in vier Teile. Diesen Senkrechten entsprechen aber auf F Linien, welche einander nicht schneiden, von a_1 ausgehend die Punkte a_3, a_4 umlaufen und im zweiten Blatt in derselben Weise nach a_1 zurückkehren. Zerschneidet man F längs dieser Linien, so kann man das Bild der so zerschnittenen Fläche einfach dadurch erhalten, daß man die Teile der Elementarzelle

in der entsprechenden Weise zusammenfügt. Man erhält so eine ganze Ebene, aus welcher ein Parallelogramm herausgeschnitten ist (Fig. 4). Dieses letztere ist dabei keiner weiteren Bedingung unterworfen, denn jedes Parallelogramm liefert, wenn man in den Seitenmitten nach außen die Senkrechten errichtet, unmittelbar vier Teile, welche zu einer Elementarzelle erster Art zusammengefügt werden können.

Wegen der zentrischen Symmetrie genügt es zur Bestimmung der Elementarzelle und damit des elliptischen Gebildes und des Integrals zweiter Gattung, die Hälfte der Figur anzugeben. Mit Rücksicht auf spätere Verwendung zerschneiden wir noch das Äußere des Parallelogramms durch die Verlängerung

Fig. 3.

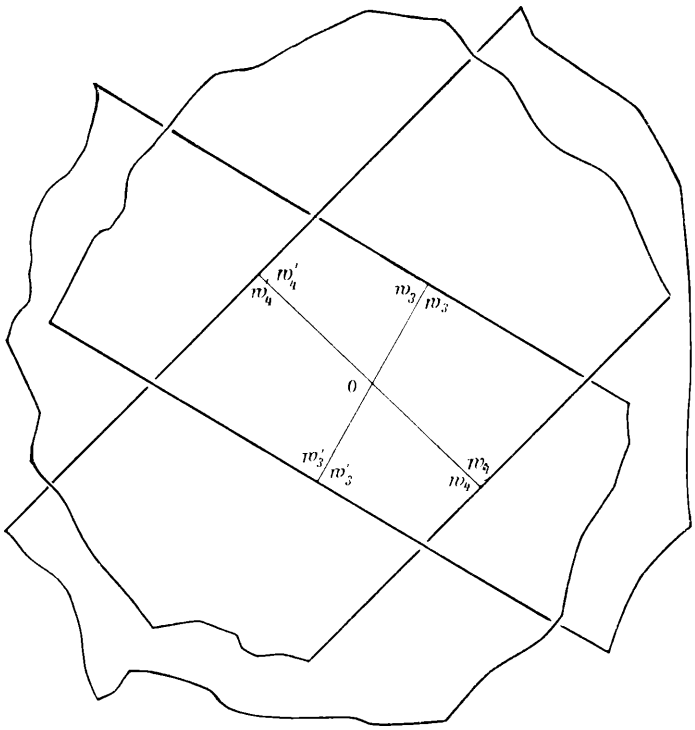
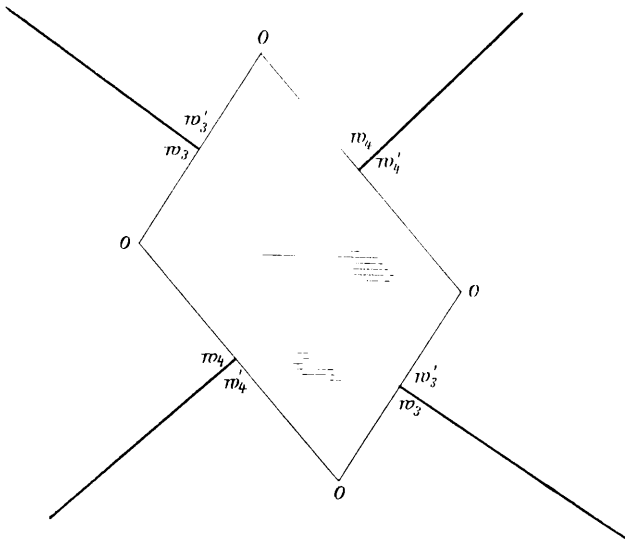


Fig. 4.



der längeren Diagonale und benützen diese Figur zur Festlegung der Elementarzelle. Es ist klar, daß, wenn überhaupt auf F ein solcher Fundamentalbereich herausgeschnitten werden kann, dies nur auf eine einzige Weise möglich ist, da ja die Elementarzelle einzig ist.

Die Elementarzelle des zweiten Typus erfordert noch eine Bemerkung. Man sieht nämlich, daß den in Fig. 1 mit III, IV bezeichneten Begrenzungsteilen von 0 gleichweit abstehende parallele Gerade entsprechen, da ja längs dieser Kanten an die erste Elementarzelle nur um Perioden verschobene anstoßen und diese Kanten daher die Mittelsenkrechten auf die Verbindungslinien von 0 mit den Zentren der anstoßenden Elementarzellen sein müssen.

Damit ergibt sich die in Fig. 5 gezeichnete Gestalt der Elementarzelle, welche demnach sechs auf einem Kreise gelegene Ecken hat und zwei Paare in verschiedenen Blättern gelegene, ins Unendliche ziehende Gerade, welche zum Teil oder doch verlängert sich decken, zur weiteren Begrenzung hat. Diese stehen auf der in Fig. 5 mit A_1, A_2, respektive A_1', A_2' bezeichneten Strecke senkrecht und können sich auch teilweise überdecken.

Zerschneidet man nun wieder die Elementarzelle durch die von 0 auf die Verzweigungskanten gefällten Senkrechten, zieht die entsprechenden Linien auf F, zerschneidet längs dieser und fügt die Teile der Elementarzelle in der Weise zusammen, daß man das Bild der so zerschnittenen Fläche F erhält, so erkennt man, daß man auf diese Weise eine Figur erhält, welche als eine volle Ebene mit einem Schnitt pp', längs dessen zwei zentrisch symmetrische Dreiecke angefügt sind, bezeichnen kann. (Fig. 6.)

Diese letzteren sind aber der Bedingung unterworfen, mit ihren beiden spitzen Winkeln an den Schlitz anzustoßen. Zerschneidet man die Ebene noch längs der Verlängerung des Schlitzes, so erhält man eine Halbebene mit an den Schlitz mit spitzen Winkeln angesetztem Dreieck. (Fig. 6*b*.)

Fig. 5.

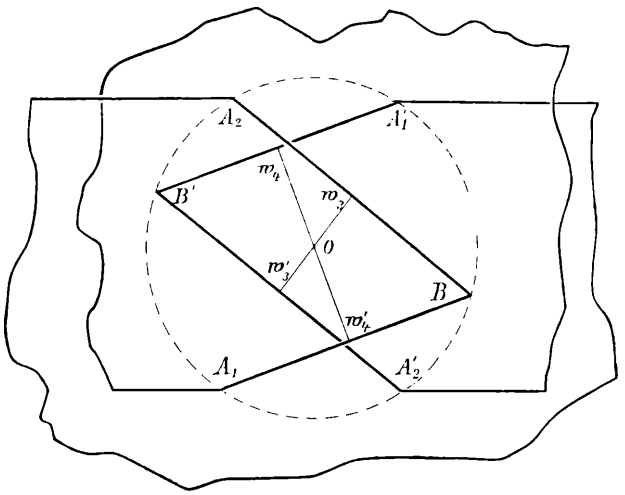


Fig. 6 *a*.

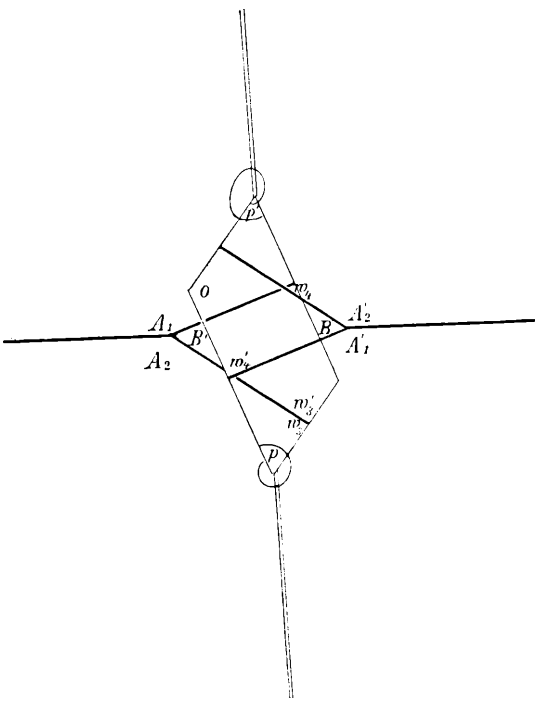
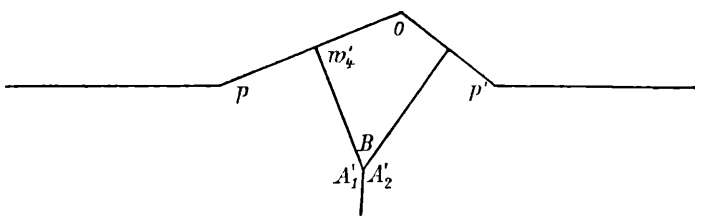


Fig. 6 *b*.

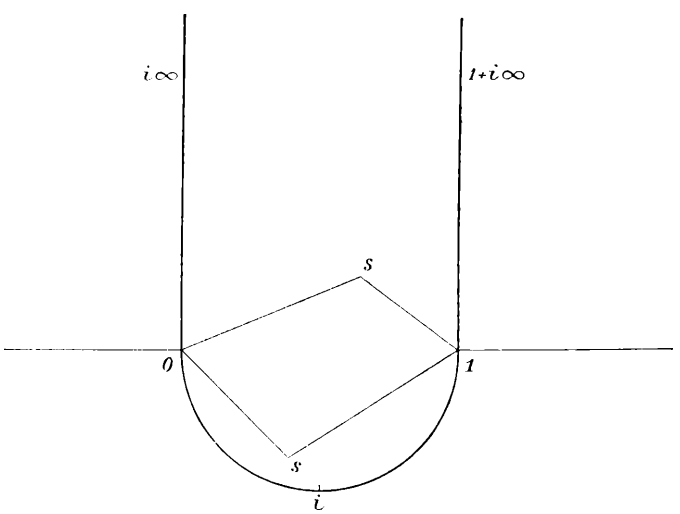


Man kann nun die vorigen Ergebnisse auch dahin zusammenfassen: Es gibt immer eine und nur eine Zerschneidung der Fläche F durch drei einander nicht schneidende Linien, welche von a_1 ausgehen und respektive nach a_2, a_3, a_4 ziehen, so beschaffen, daß, abgesehen von einem konstanten Faktor, das Integral

$$\int (x-a_1)^{1/2}(x-a_2)^{-3/2}(x-a_3)^{-1/2}(x-a_4)^{-1/2}\,dx$$

das einzelne Blatt von F auf ein Gebiet abbildet, welches von den beiden Geraden $-\infty$, 0 und 1 bis $+\infty$ und außerdem von den Verbindungsstrecken eines Punktes s mit 0, 1 begrenzt wird. Der Punkt s liegt dabei (Fig. 7) im Innern des von den beiden Geraden 0, $+i\infty$, 1, $1+i\infty$ und dem über 0, 1 als Durchmesser beschriebenen, in die negativ imaginären Werte ziehenden Halbkreises oder auf einer der beiden gegen die Halbierungslinie des Gebietes symmetrischen Hälften der Begrenzung.

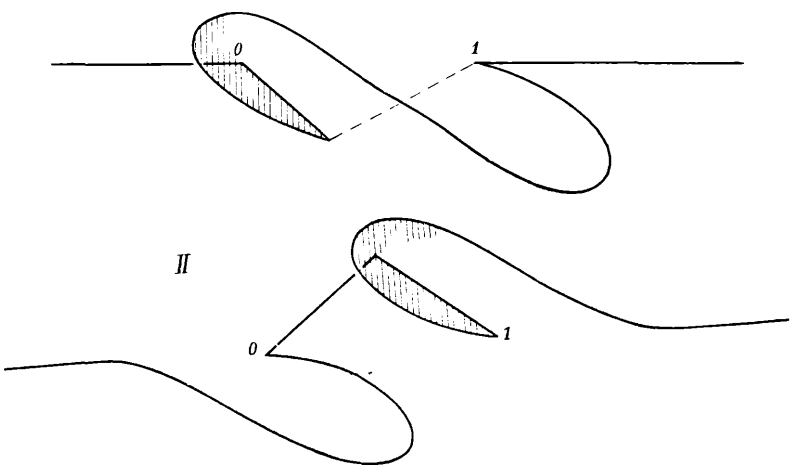
Fig. 7.



III. Die Umkehrung des Periodenverhältnisses für das Integral zweiter Gattung.

Die obigen Resultate erlauben nun die Untersuchung der Abhängigkeit des elliptischen Gebildes von dem Periodenverhältnis des obigen Integrals zweiter Gattung geometrisch bis zur Konstruktion sämtlicher Riemann'scher Flächen F_w, welche ein gegebenes Periodenverhältnis aufweisen, und schließlich bis zur Berechnung des zugehörigen Periodenverhältnisses erster Gattung wirklich durchzuführen.

Fig. 8.



Durch die wirkliche Herstellung der Flächen F_w erhalten die Ergebnisse gegenüber den aus der allgemeinen Theorie der konformen Abbildung durch den Quotienten zweier Zweige der hypergeometrischen Funktion, mit denen sie natürlich übereinstimmen, eine nicht unerhebliche Verschärfung.

Bezeichnen wir die Vectoren $(1, s)$, $(s, 0)$ in Fig. 7, respektive mit H_1, H_2, so ist zunächst zu bemerken, daß durch deren Angabe allein ohne die Bedingung geradliniger Begrenzung noch unendlich viele Bereiche konstruiert werden können, welche im allgemeinen zu verschiedenen elliptischen Gebilden gehören und dennoch bei zentrisch symmetrischer Reproduktion um die Halbierungspunkte von H_1, H_2, Riemann'sche Flächen F_w und daher zugehörige Integrale zweier Gattung bestimmen. In der obenstehenden Fig. 8 sind für beide Typen die einfachsten Formen, welche nicht Normalbereiche sind, gezeichnet.

Der in Fig. 7 beschriebene Bereich von w soll künftig als ein Normalbereich U bezeichnet werden, die zugehörigen Perioden von $w: H_1$, H_2, als Normalperioden, neben denen später auch noch die Periode $H_3 = -H_1 - H_2$ als der Strecke 0, 1 entsprechend in Betracht zu ziehen ist. Demgegenüber soll der Bereich für s in Fig. 7 als ein Normalbereich S bezeichnet werden.

Aus einem Normalbereich U kann man nun durch folgende einfache Operationen neue Gestalten des Fundamentalbereiches auf F herleiten: man ergänze den Bereich durch Anfügen eines kongruenten, aber um π verdrehten Bereiches längs einer Seite zu einem Abbild der ganzen Riemann'schen Fläche F und zerlege den ganzen so gewonnenen neuen Bereich in zwei zentrisch-symmetrische Hälften durch Zerschneidung längs einer ganz im Innern verlaufenden, in Bezug auf den Halbierungspunkt der benützten Seite zentrisch symmetrischen Linie, welche die nicht auf der benützten Seite liegenden Ecken verbindet. Bei der durch das Unendliche ziehenden Seite des Bereiches erleidet die Ausdrucksweise, nicht aber die Sache eine geringe Abänderung.

Es ist ferner klar, daß diese drei Operationen beliebig oft wiederholt und kombiniert werden können. Die folgenden Figuren 9 und 10 geben einen Überblick über die durch diese Operationen, die wir mit T_1, T_2, T_3 bezeichnen, bei beiden Typen erhaltenen Gestalten für die Operationen T_1 und T_3. Dabei sind die im zweiten Blatt verlaufenden Linien gestrichelt.

Die Perioden H_1, H_2, H_3 gehen dabei in drei neue über, die wir durch Beifügen eines oberen Index von den ursprünglichen unterscheiden. Man erhält sofort für

$$T_1)\quad H_1^{(1)} = -H_2,\quad H_2^{(1)} = H_1 + 2H_2,\quad H_3^{(1)} = H_3$$
$$T_2)\quad H_1^{(2)} = H_2 + 2H_1,\quad H_2^{(2)} = -H_1,\quad H_3^{(2)} = H_3$$
$$T_3)\quad H_1^{(2)} = H_2,\quad H_2^{(3)} = -H_1,\quad H_3^{3)} = H_2 - H_1 = 2H_2 - H_3.$$

Hieraus folgt sofort für den Quotienten

$$s = \frac{-H_2}{H_3}$$

$$s^{(1)} = s + 1,\qquad s^{(2)} = s - 1,\qquad s^{(3)} = \frac{s-1}{2s-1}$$

und aus den Substitutionen $s^{(1)}$ und $s^{(3)}$ lassen sich alle ganzzahligen linearen Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{smallmatrix}\right)$ von der Determinante 1 zusammensetzen, für die $\gamma \equiv 0$ mod. 2 ist. Es legen sich dementsprechend neben den

Fig. 9.

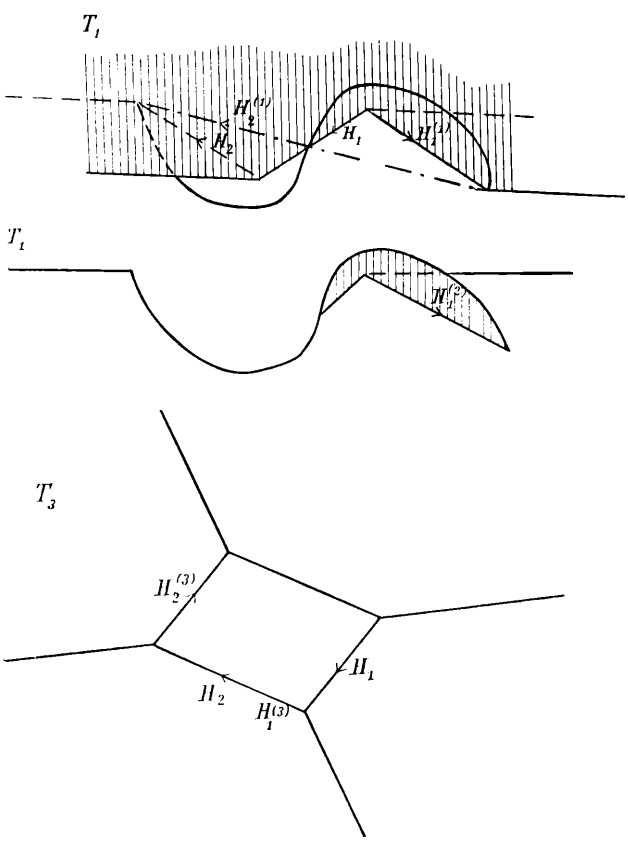
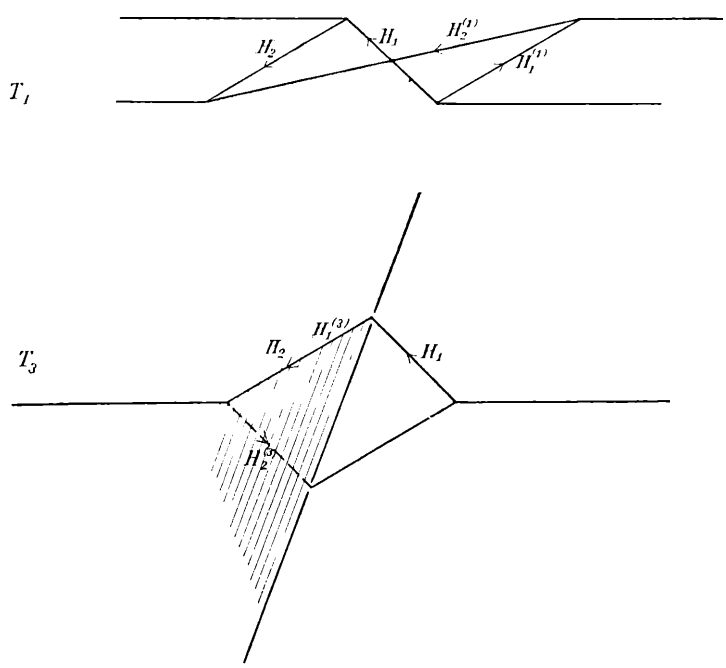


Fig. 10.



Bereich s weitere Bereiche, welche die ganze Ebene in leicht ersichtlicher Weise unendlich oft überdecken, ohne daß jedoch die Linie der reellen Zahlen als natürliche Grenze auftreten würde.

Andrerseits sind aber die den Operationen T_1, T_3 entsprechenden Substitutionen von s gerade die Erzeugenden jener Gruppe G von gewöhnlichen linearen Transformationen des elliptischen Gebildes, welche die Verzweigungspunkte a_1, a_2 an ihrer Stelle lassen. Der Fundamentalbereich dieser Untergruppe der Modulgruppe in der positiven Halbebene ist bekanntlich von den beiden vertikalen Geraden durch die Punkte 0, 1 und den über 0, 1 beschriebenen Halbkreis in der positiven Halbebene begrenzt.

Denken wir uns nun die der Gruppe G entsprechende Einteilung sowohl der positiven als der negativen Halbebene gezeichnet, so wird auch der Bereich S von unendlich vielen Fundamentalbereichen und konjugierten solcher gerade einmal ausgefüllt. Damit ergibt sich nun folgendes Verfahren zur Konstruktion sämtlicher Normalbereiche für einen gegebenen Wert von s:

Man bestimme alle diejenigen in Bezug auf die Gruppe G zu s äquivalenten Werte s_λ innerhalb S. Jeder von diesen bestimmt nach Fig. 7 einen Normalbereich für eine Fläche F, und zwar erhält man so alle solchen Normalbereiche und jeden nur einmal. (Fig. 11.)

Die Fundamentalbereiche der Flächen F_w, welche genau dem gegebenen Wert von s entsprechen, erhält man hieraus dadurch, daß man entsprechend diejenigen Operationen T_1, T_3 ausführt, welche rückwärts s_λ in s überführen.

Dabei bleibt das Zeichen des imaginären Teiles von s immer erhalten, so daß sämtliche Normalbereiche den zweiten Typus aufweisen, wenn dies einer unter ihnen tut.

Ist s reell, so haben alle äquivalenten Werte reelles Verhältnis und die verschiedenen Normalbereiche bilden eine überall dichte Menge.

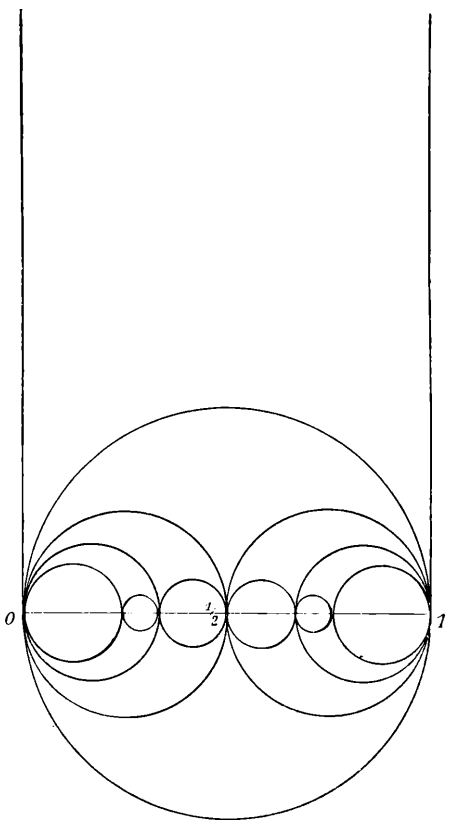
IV. Berechnung des Periodenverhältnisses erster Gattung bei gegebenem s.

Setzt man, um nun zu Formeln überzugehen, das Integral w in der Gestalt an:

$$w = \int z^{-1/2}(1-z)^{-1/2}(1-cz)^{-3/2}\, dz,$$

bezeichnet das zugehörige Integral erster Gattung mit

Fig. 11.



$$u = \int z^{-1/2}(1-z)^{-1/2}(1-cz)^{-1/2}\, dz$$

und betrachtet gleichzeitig die durch u und w vermittelte konforme Abbildung des Bereiches der Werte von z mit positivem imaginären Teil für reelle Werte von c, so findet man durch Vergleich des jeweiligen Normalbereiches F_w mit dem entsprechenden Bereich des w für die Intervalle

$$-\infty < c^{-1} < 0, \quad 0 < c^{-1} < 1, \quad 1 < c^{-1} < \infty$$

ohne Mühe

$$H_1 = 2\int_1^\infty dw, \qquad H_2 = -2\int_\infty^0 dw, \qquad H_3 = 2\int_0^1 dw$$

während gleichzeitig

$$2K = \int_0^1 du, \qquad 2iK' = \int_1^\infty du, \qquad \tau = \frac{iK'}{K}$$

ist.

Die Integration ist dabei durch z Werte mit positiv imaginärem Bestandteil zu führen. Hieraus ergibt sich in bekannter Weise, daß der Quotient s das Gebiet der c mit positivem imaginären Bestandteil auf den Beeich S abbildet, während gleichzeitig dasselbe c Gebiet auf den Berreich T von τ abgebildet wird, der zur Gruppe G in der positiven Halbebene von τ gehört.

Geht man jetzt zur Weierstraß'schen Bezeichnung in der Weise über, daß man den Verzweigungspunkt c ins Unendliche verlegt, den Punkten 0, 1, ∞ der z Ebene, respektive die Indices ν, μ, λ zuweist, so nimmt w jetzt bis auf einen konstanten Faktor die Form an

$$w = \int (pu - e_\lambda)\, du$$

und es wird

$$s = \frac{\eta' + e_\lambda \omega'}{\eta + e_\lambda \omega}.$$

Dann ist aber nach Schwarz-Weierstraß, Formelsammlung p. 44, Formel 14:

$$(h = e^{\pi i \tau})$$

$$2(\eta + e_\lambda \omega)\,\omega = -\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} = -2\pi i \frac{dlg\,\vartheta_2(\tau)}{d\tau} = \frac{\pi^2}{2}\frac{1+3^2 h^{1.2} + 5^2 h^{2.3} + \ldots}{1+h^{1.2} + h^{2.3} + - \ldots}$$

woraus zusammen mit der Legendre'schen Relation $\eta\,\omega' - \eta'\,\omega = \frac{\pi i}{2}$ folgt:

$$s = \tau - \frac{\pi i}{2\,\omega\,(\eta + e_\lambda\,\omega)} = \tau + \frac{1}{2\,\frac{dlg\,\vartheta_2(\tau)}{d\tau}}$$

oder

1.) $$s = \tau - \frac{2i}{\pi}\,\frac{1 + h^{1.2} + h^{2.3} + -}{1 + 9h^{1.2} + 25\,h^{2.3} + \ldots}.$$

Diese Formel zeigt genügend rasche Konvergenz, wenn der imaginäre Teil von τ nicht zu klein ist. Da wir aber noch für kleine τ den Ausdruck für s nötig haben, so transformieren wir die ϑ-Reihe rechts noch in eine solche für $\tau' = \frac{\tau - 1}{\tau}$. Man hat dann

$$\vartheta_2(0,\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3(0,\tau')$$

$$\frac{dlg\,\vartheta_2(0_1\,\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2\tau} + \frac{dlg\,\vartheta_3(0_1\,\tau')}{d\tau'}\;\frac{1}{\tau^2}$$

und nach Einführung von τ' in 1.

2.) $$s = \frac{1 + (1-\tau')\,\frac{dlg\,\vartheta_3(0,\tau')}{d\tau'}}{(1-\tau')\left(\frac{dlg\,\vartheta_3(0,\tau)}{d\tau'}(1-\tau') - 2\right)}$$

oder wegen

$$\frac{dlg\,\vartheta_3(0,\tau')}{d\tau'} = \frac{2\pi i\,(h_1 + 4\,h_1^4 + 9\,h_1^9 \ldots)}{1 + 2\,h_1 + 2\,h_1^4 + \ldots}, \quad (h_1 = e^{\pi i \tau'})$$

schließlich für τ' mit sehr großem imaginärem Teil in erster Annäherung

3.) $$s = \frac{1}{2\,(1-\tau')}\,(1 - \pi i h_1).$$

Insbesondere wird für $\tau' = \frac{1}{2} + it$, also für τ auf dem Kreise $\mathfrak{K}_1$ mit dem Mittelpunkt 1 durch den Nullpunkt

$$h_1 = i e^{-\pi t}$$

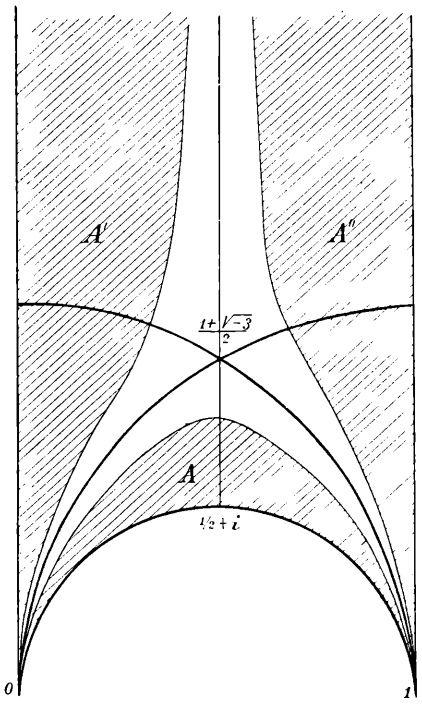
4.) $$s = \frac{1 + 2it}{1 + 4t^2}\,(1 + \pi e^{-\pi t}),$$

der imaginäre Teil von s also positiv.

Die Formeln 1.) und 2.) gestatten auch ohne zu große Mühe zu jedem Werte s innerhalb S die Auflösung nach τ, indem man je nach dem Werte von s zunächst in 1.) oder 2.) die höheren Potenzen von h, respektive h_1 vernachlässigt und den hieraus zu findenden Näherungswert verbessert.

Der unterhalb der reellen Achse gelegene Teil von S wird dabei auf einen dem Halbkreis von T anliegenden Flächenteil A abgebildet, welcher, wie 4.) lehrt, in der Nähe des Nullpunktes ganz unterhalb des Kreises $\mathfrak{K}_1$ liegt.

Fig. 12.



Man findet so für

$$s = \frac{1}{2} \qquad \tau_{1/2} = \frac{1}{2} + 0 \cdot 70483\, i,$$

und da

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0 \cdot 86602,$$

so liegt auch $\tau_{1/2}$ noch innerhalb $\mathfrak{K}_1$.

Ebenso findet man, daß dem Werte

$$\tau = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

ein s mit positiv imaginärem Teil entspricht, nämlich

5) $$s = \frac{1}{2} + 0 \cdot 20643\, i.$$

Da nun nur die unterhalb der reellen Achse gelegenen s Werte eine Abbildung auf das äußere eines Parallelogrammes liefern, so ist diese auch nur bei solchen elliptischen Gebilden möglich, welche wenigstens einen τ Wert im Innern von A haben. Da aber in **T** jedes elliptische Gebilde dreimal vorkommt, so ergeben sich schließlich längs des Randes von T drei Gebiete, A, A', A'', deren zugehörige elliptische Gebilde immer auf das Äußere eines Parallelogrammes abgebildet werden können und ein im Innern von **T** gelegenes Gebiet, für welches dies unmöglich ist. (Siehe Fig. 12.) Innerhalb des Gebietes A, hat der Einheitskreis einen Bogen von ungefähr 19° 18′.

Man bestätigt in der Tat, daß dem Punkte $\tau = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ ein elliptisches Gebilde entspricht, welches nicht auf das Äußere eines Parallelogrammes abgebildet werden kann, denn die drei Integrale w können hier in die Form gesetzt werden

$$w_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3\,(1-x)}}, \quad w' = \int \frac{\varepsilon\, dx}{\sqrt{1-x^3\,(1-\varepsilon x)}} \quad w'' = \int \frac{\varepsilon^2 dx}{\sqrt{1-x^3\,(1-\varepsilon^2 x)}}$$

und gehen auseinander durch die Substitution εx, $\varepsilon^2 x$ für x hervor. Könnte eines auf das Äußere eines Parallelogrammes abgebildet werden, so müßte dies mit jedem der Fall sein. Aber nach 5.) ist dies ausgeschlossen.

Man kann also endlich sagen:

Die drei Integrale zweiter Gattung eines elliptischen Gebildes von der hier betrachteten Art liefern entweder alle drei Normalbereiche des zweiten Typus oder höchstens einen vom ersten Typus, und zwar das letztere nur dann, wenn das Normal τ in einem der Gebiete A, A', A'' liegt, welche einander in der Modulgruppe äquivalent sind. Insbesondere liefern reelle elliptische Gebilde mit $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$ immer Normalbereiche des ersten Typus, solche mit $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$ aber niemals.

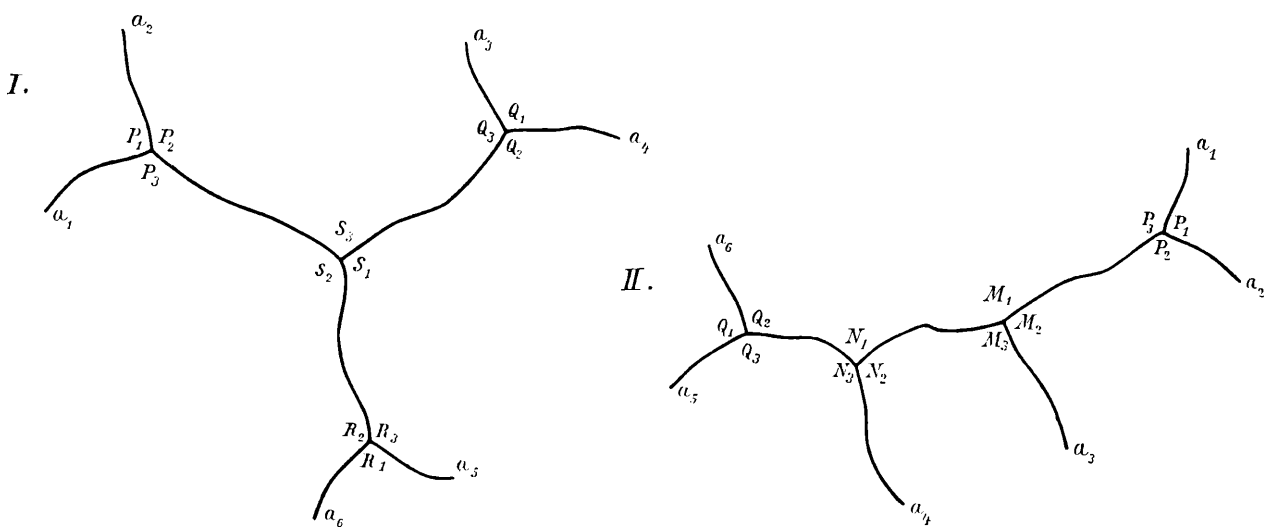
V Das hyperelliptische Integral erster Gattung; Konstruktion der Elementarzelle.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung des hyperelliptischen Integrals erster Gattung, schreiben dasselbe in der Form:

$$u = \int \frac{(x-a)\,dx}{\sqrt{(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,(x-a_4)\,(x-a_5)\,(x-a_6)}}$$

und bezeichnen wieder die Riemann'sche Fläche der Variablen u mit F_u, diejenige der Variablen x mit F Dem Punkt a in einem Blatt von F entspricht dann ein Punkt A in F_u und unendlich viele andere, entsprechend der analytischen Fortsetzung von u, welche wir, wenn nötig, durch obere Indices unterscheiden. Diese sind sämtlich Verzweigungspunkte erster Ordnung von F_u. Ferner entsprechen den Punkten $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ gewöhnliche Punkte von F_u, welche jedoch sämtlich Symmetriezentren von F_u sind. Wir bezeichnen diese Punkte durch $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ und ihre äquivalenten und symmetrischen ebenfalls durch Hinzufügen eines oberen Index. Wir haben dann entsprechend den beiden Punkten a im ersten und zweiten Blatt zwei zueinander zentrisch symmetrische Elementarzellen. Der Euler'sche Satz liefert

Fig. 13, I. Fig. 13, II.



daher $e-k = -4$ und da wieder $3e \leqq 2k$, so folgt $e \leqq 8$, $k \leqq 12$. Da sich die Zyklen auf beide Blätter in genau gleicher Weise verteilen müssen, so liegen in jedem Blatt von F vier Zyklen. Die Fälle mit weniger als vier, dann aber mehrgliedrigen Zyklen erledigen sich als Spezialfälle. Ferner sind von den Kanten notwendig sechs Verzweigungskanten, welche beide Blätter von F verbinden und deren Anfangs- und Endpunkte daher in sich deckende Punkte beider Blätter fallen. Somit bleiben außer den Verzweigungskanten noch sechs Kanten übrig, welche sich auf beide Blätter von F in genau gleicher Weise verteilen, so daß also auf das einzelne Blatt drei solcher Kanten entfallen, welche wir akzessorische Kanten nennen wollen.

Jeder Zyklus muß mindestens eine akzessorische Kante enthalten, da sonst der einzelne Zyklus ohne Verbindung mit den andern wäre und es muß jede akzessorische Kante in zwei und nicht mehr Zyklen vorkommen. Zyklen mit weniger als drei Gliedern können aber deshalb nicht vorkommen, weil die Winkel der Elementarzelle sämtlich kleiner als π sind. Damit findet man leicht, daß man nur zwei Fälle in Bezug auf die Zyklen zu unterscheiden hat, je nachdem die akzessorischen Kanten einen Zyklus

bilden oder nicht. Im letzteren Fall hat man dann noch weiter zu unterscheiden, ob die beiden nicht durch einen Zyklus verbundenen Verzweigungskanten an derselben oder an entgegengesetzten Seiten des Zuges der akzessorischen Kanten anschließen.

Man erhält so auf dem einzelnen Blatt der Riemann'schen Fläche F_u drei Typen möglicher Zerschneidungen nach Elementarzellen, welche in den obenstehenden Figuren 13 I, II, III schematisch dargestellt sind.

Dabei sollen die in die Figuren eingetragenen Bezeichnungen gleichmäßig für die Ecken der Elementarzelle auf F_u übertragen und deren den Ecken anliegende innere Winkel mit den nämlichen Buchstaben bezeichnet werden wie die Ecken selbst.

Die Verzweigungskanten auf F_u sind aus den nämlichen Gründen wie beim elliptischen Integral als Symmetriezentren auf F_u Grundlinien gleichschenkliger Dreiecke mit der Spitze in A, dem Mittelpunkt der Elementarzelle. Ebenso sind die Kanten $P_2 S_3$ und $P_3 S_2$ in Fig. 13 I und die analogen gleich lang und parallel auf der Elementarzelle und haben von A denselben Abstand. Diese Angaben reichen zur Kon-

Fig. 13, III.

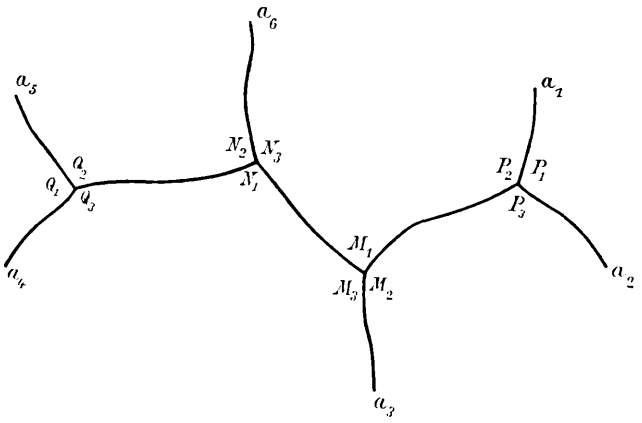
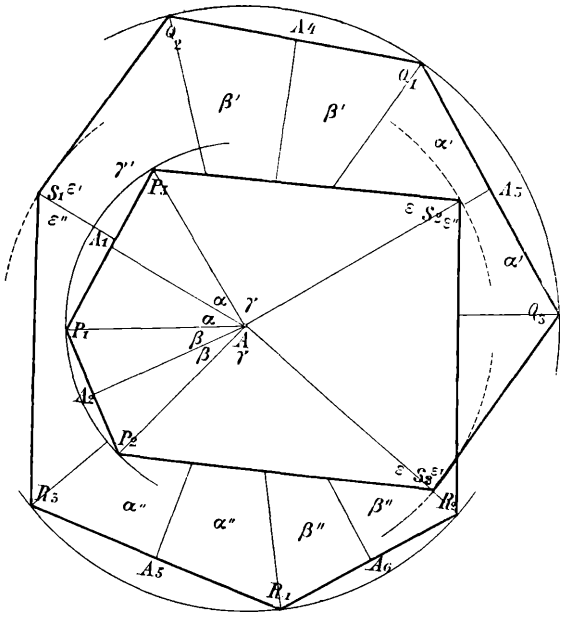


Fig. 14.



struktion der Elementarzelle des ersten Typus aus, wie sie in Figur 14 gezeichnet ist. Man erhält so ein zweimal herumlaufendes Zwölfeck mit gegen A konvexen Winkeln, in welchem die Ecken P_1, P_2, P_3 auf einem Kreise liegen mit dem Mittelpunkt in A, ebenso Q_1, Q_2, Q_3 und R_1, R_2, R_3.

Ferner ist auch

$$AS_1 = AS_2 = AS_3.$$

Führt man noch die Winkel ein, unter denen die halben Verzweigungskanten von A aus gesehen werden und bezeichnet sie wie in der Figur mit $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$, so sind diese sämtlich spitz. Führt man außerdem die Winkel ein, unter denen die Seiten $P_2 S_3$, $S_3 Q_3$, $S_1 R_3$ aus A gesehen werden und nennt sie respektive $\gamma, \gamma', \gamma''$, so ist notwendig $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ und ebenso $\alpha' + \beta' + \gamma' < \pi$, $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' < \pi$, weil sonst die Seiten $P_2 S_3$, $S_2 P_3$ und die analogen der Elementarzelle übereinandergreifen würden, was ja der Definition der Elementarzelle widerstreitet. Die Winkel $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ ergeben sich damit $\varepsilon = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ und da ersichtlich $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' + \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = \pi$, also auch $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' = \pi$ ist, so sind die Bedingung $\varepsilon + \varepsilon' < \pi$ etc. von selbst erfüllt.

Die Konstruktion der Elementarzellen des zweiten und dritten Typus verläuft ganz analog, nur nehmen hier die Kanten $M_3 N_2$ und $N_1 M_1$, respektive $M_3 N_1$ und $N_3 M_1$ eine Sonderstellung ein. Da man

nämlich in F von der einen zur andern durch Umkreisung dreier Verzweigungspunkte kommt, das Integral aber nach zweimaliger Durchlaufung dieses Weges Null ist, so ergibt sich, daß längs beider Kanten auf F_u eine und dieselbe zu der ersten zentrisch symmetrisch gelegene Elementarzelle anstoßen muß.

Daraus folgt, daß diese beiden Kanten die Mittelsenkrechten zwischen denselben zwei Verzweigungspunkten A, A' auf F_u in zwei verschiedenen Blättern sind und daher ihre Verlängerungen in beiden Blättern sich decken. Außerdem sind sie natürlich gleich lang und werden bei Durchlaufung der Elementarzelle im gleichen Sinn durchlaufen.

Man erhält damit die in den Figuren 16 und 17 angegebenen Gestalten der Elementarzellen. Dabei sind die halben Gesichtswinkel, unter welchen die Kanten $M_2 M_3$ und $N_2 N_3$ von A aus erscheinen, mit

Fig. 15.

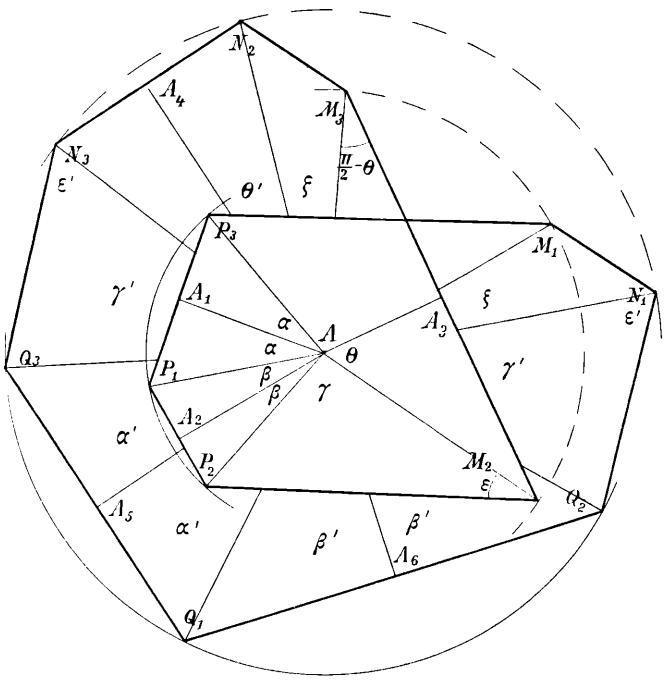
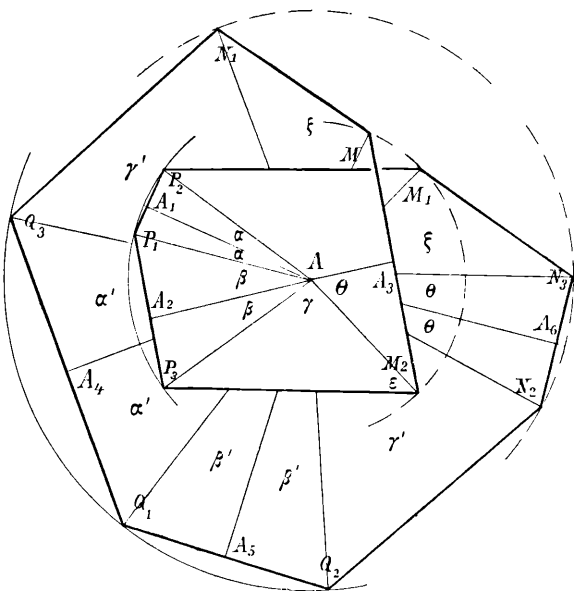


Fig. 16.



θ, θ' bezeichnet. Der Winkel, unter welchem die Kanten $M_1 N_1$, $N_2 M_3$, respektive $M_3 N_1$, $N_3 M_1$ gesehen werden, ist mit ζ bezeichnet und durch die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' + \theta + \theta' + \zeta = 2\pi$$

mit den übrigen Winkeln verbunden, welche auch geschrieben werden kann

$$\zeta = \varepsilon + \varepsilon' - \theta - \theta'.$$

Ferner ist:

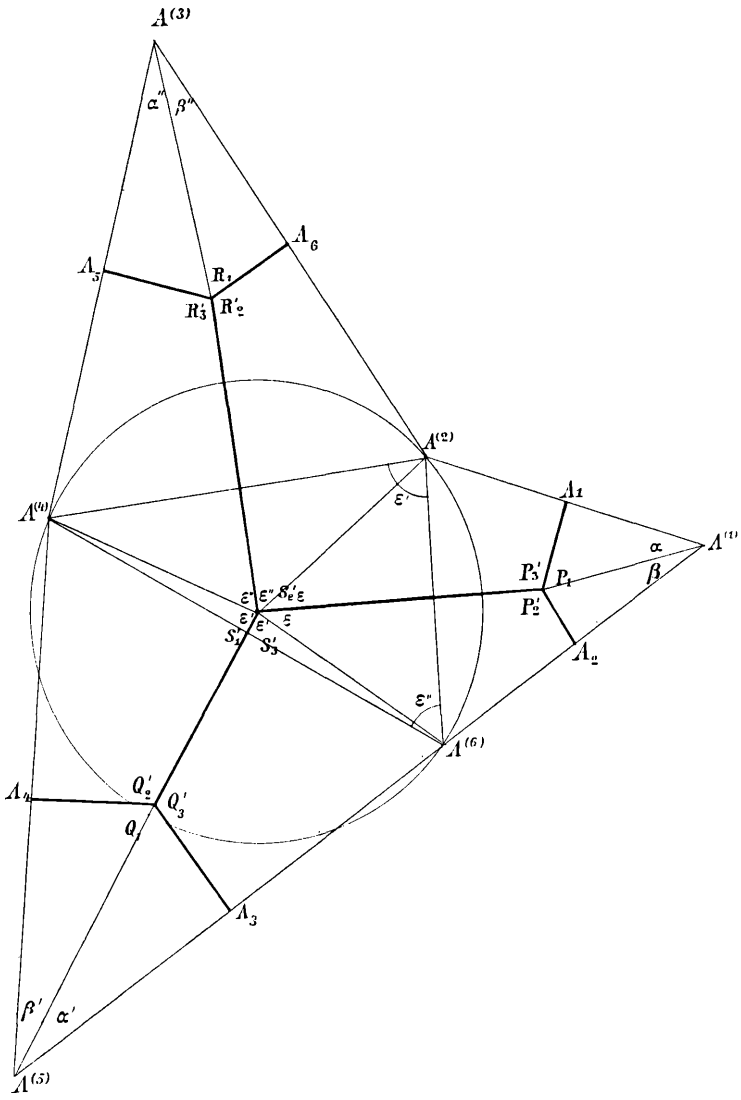
$$AP_1 = AP_2 = AP_3$$
$$AQ_1 = AQ_2 = AQ_3$$
$$AN_1 = AN_2 = AN_3$$
$$AM_1 = AM_2 = AM_3.$$

Man könnte neben den dritten Typus auch einen vierten stellen, der aus dem dritten durch Spiegelung hervorgeht, doch ist für das folgende eben deshalb eine solche weitere Unterscheidung nicht nötig.

VI. Das Normalsechseck.

Denkt man sich nun wieder in der Elementarzelle die Geraden AA_1, AA_2, AA_3, AA_4, AA_5, AA_6 gezogen und deren Bilder auf der Fläche F gezeichnet, so zerschneiden diese das einzelne Blatt der Fläche durch von a nach den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ gehende Linien in der Weise, daß das konforme Abbild auf der Fläche F_u nunmehr ein geradlinig begrenztes Sechseck wird, dessen Inneres von Verzweigungspunkten frei ist.

Fig. 17.



Aber man kann auch zeigen, daß dieses Sechseck, welches nunmehr als Normalsechseck bezeichnet werden soll, sich selbst niemals schneidet und außerdem gewissen sogleich zu entwickelnden Bedingungen genügt, welche je nach dem Typus der zugehörigen Elementarzelle etwas verschieden sind.

Dazu hat man nur nötig, die Teile der Elementarzelle, in welche sie durch die Geraden

$$AA_1,\ AA_2,\ AA_3,\ AA_4,\ AA_5,\ AA_6$$

zerlegt wird, in der Weise zusammenzufügen, wie es der Zusammengehörigkeit auf F entspricht, wobei jedoch einzelne Stücke in eine um 180° verdrehte Lage kommen, entsprechend der zentrischen Symmetrie um die Endpunkte der obengenannten Strecken. Um die Bezeichnung nicht unnütz zu häufen, sind die Ecken und Winkel solcher Teile mit einem Akzent versehen, während die nacheinander auftretenden Bilder des Punktes A in leicht ersichtlicher Weise durch obere Indices von 1 bis 6 unterschieden sind. Die Figur 17 zeigt den ersten Typus. Man kann dieses Normalsechseck beschreiben als bestehend aus einem Dreieck, $A^{(2)}$, $A^{(4)}$, $A^{(6)}$, an welches drei weitere Dreiecke derart angefügt sind, daß sie an der mit dem ersten Dreieck gemeinsamen Seite jedes zwei spitze Winkel anliegend haben und daß außerdem die Ecken $A^{(1)}$, $A^{(3)}$, $A^{(5)}$ außerhalb des Kreises durch $A^{(2)}$, $A^{(4)}$, $A^{(6)}$ liegen.

In der Tat sind ja die Winkel $A^{(1)}A^{(6)}A^{(2)}$, $A^{(1)}A^{(2)}A^{(6)}$ respektive gleich

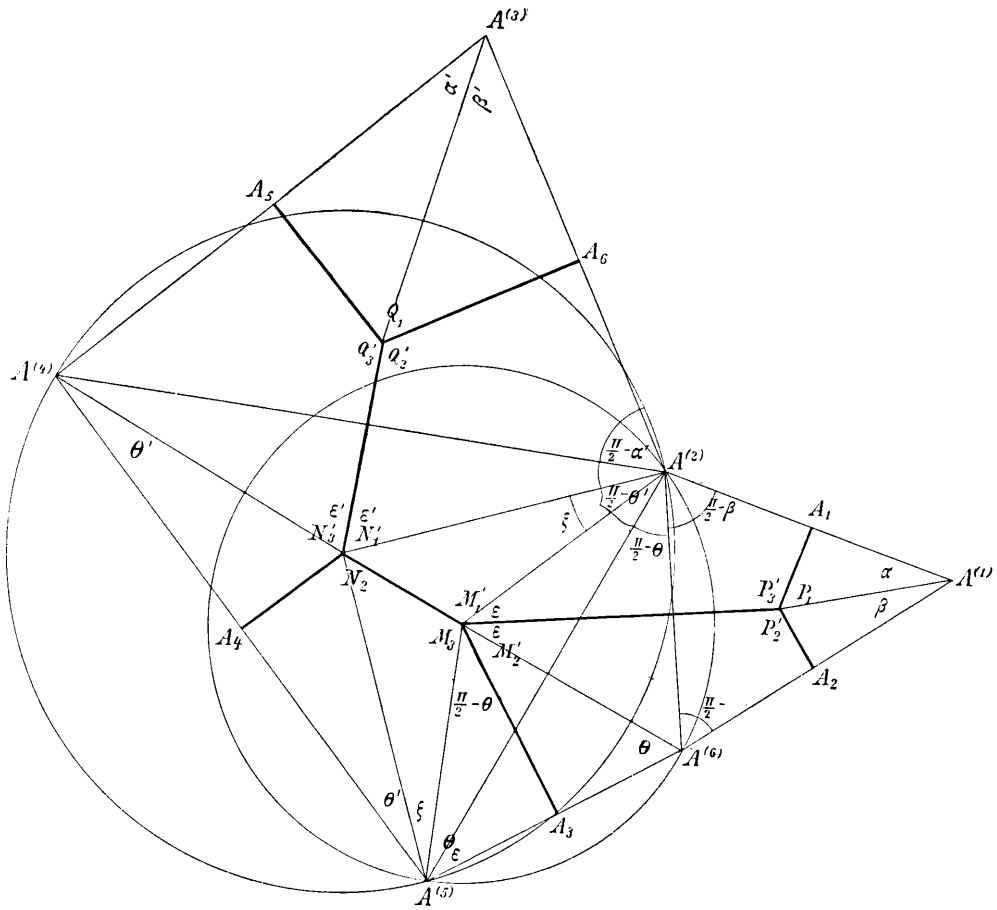
$$\frac{\pi}{2} - \alpha,\ \frac{\pi}{2} - \beta$$

und es ist, da der Winkel $A^{(2)}A^{(4)}A^{(6)} = \varepsilon$ und $\varepsilon + \alpha + \beta = \pi - \gamma$, also kleiner als π ist, $A^{(1)}$ außerhalb des Kreises um $A^{(2)}A^{(4)}A^{(6)}$.

Aber zugleich ist auch ersichtlich, daß jedes Sechseck von diesen Eigenschaften zu einer Normazelle erster Art gehört. Denn nach der Zerlegung in die vier Dreiecke folgt, daß die Mittelpunkte der umschriebenen Kreise im Innern der Figur liegen und die Mittelsenkrechten auf die Seiten und die drei Diagonalen $A^{(2)}A^{(4)}$, $A^{(4)}A^{(6)}$, $A^{(6)}A^{(2)}$ gerade die zu den einzelnen Ecken des Sechseckes gehörigen Teile einer Elementarzelle abgrenzen.

Die Figuren 18 und 19 stellen die Normalsechsecke des zweiten und dritten Typus dar. Auch hier besteht das Sechseck aus vier aneinandergefügten Dreiecken, von denen das erste und letzte an den

Fig. 18.



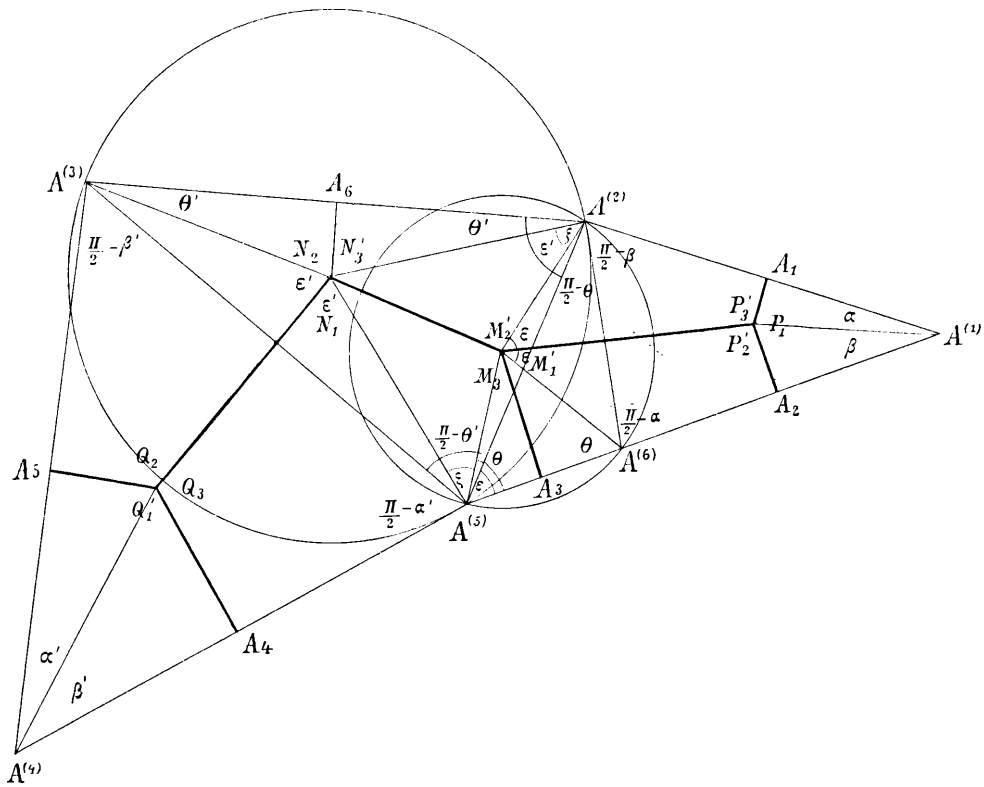
Seiten, welche an Nachbardreiecke anstoßen, spitze Winkel haben, und welche so beschaffen sind, daß von den Spitzen zweier Dreiecke, welche die Grundlinie gemeinsam haben, jede außerhalb des dem anderen Dreieck umschriebenen Kreises liegt. Für das erste und letzte Dreieck findet dies aus denselben Gründen wie beim ersten Typus statt. Für die beiden Dreiecke, welche nur mit einer Seite an die Begrenzung des Sechseckes reichen, ist jedoch beim zweiten Typus der Winkel $A^{(6)}A^{(5)}A^{(4)} = \theta + \theta' + \zeta$ und $A^{(6)}A^{(2)}A^{(4)} = \pi - \theta - \theta'$ und daher die Summe der beiden anderen Winkel kleiner als π, während beim dritten Typus die Summe der Winkel $A^{(6)}A^{(2)}A^{(3)}$ und $A^{(6)}A^{(5)}A^{(3)}$ gleich $\pi - \theta - \theta' + \varepsilon + \varepsilon' = \pi + \zeta$, also größer als π ist, woraus dieselbe Behauptung für die Dreiecke $A^{(5)}A^{(2)}A^{(3)}$ und $A^{(2)}A^{(5)}A^{(6)}$ folgt. Auch hier ist es ausgeschlossen, daß ein solches Sechseck sich selbst schneide, da beim zweiten Typus in $A^{(2)}$ vier spitze Winkel aneinanderstoßen, während beim dritten Typus die Winkel

$$A^{(6)}A^{(2)}A^{(5)} = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ und } A^{(2)}A^{(5)}A^{(3)} = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

sicher spitz sind, während die Winkel $A^{(6)}A^{(5)}A^{(2)} = \varepsilon$ und $A^{(5)}A^{(2)}A^{(3)} = \varepsilon'$ sicher hohl sind, so daß weder

die auf derselben Seite von $A_{(2)}A_{(5)}$ noch die auf entgegengesetzten Seiten dieser Geraden gelegenen Sechseckseiten eine andere Seite schneiden können.

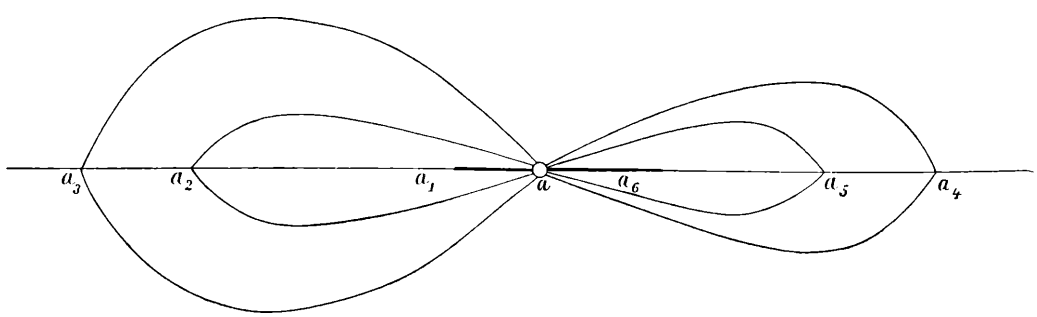
Fig. 19.



VII. Fälle, in welchen das Sechseck nicht eindeutig bestimmt ist.

Während die Elementarzelle ihrem Begriffe nach durch das Integral eindeutig bestimmt ist, trifft dies bei dem Sechseck nur im allgemeinen zu. Es können nämlich dann zwei oder mehr verschiedene Normalsechsecke existieren, wenn es möglich ist, den Punkt a innerhalb des der Elementarzelle entsprechenden Flächenstückes auf mehr als eine Art mit einem Verzweigungspunkt a_ν so zu verbinden, daß der Verbindungslinie auf F_u eine Gerade entspricht. Das ist aber nur so möglich, daß das Bild dieses Verzweigungspunktes auf der Begrenzung der Elementarzelle mehr als einmal erscheint, also immer dann

Fig. 20.



und nur dann, wenn eine der Verzweigungskanten sich auf Null reduziert. In diesem Fall kann dann die Verbindungslinie von A mit einem der beiden Bilder des betreffenden Verzweigungspunktes als Sechseckseite benützt werden und man erhält, wenn λ Verzweigungskanten sich auf Null reduzieren, 2^λ ver-

schiedene Sechsecke. Als Erläuterung diene der Fall eines reellen a und reeller Verzweigungspunkte, wie er in den Figuren 20, 21, 22 zur Darstellung gebracht ist. (Fig. 20 stellt die Riemann'sche Fläche F, Fig. 21 die Elementarzelle und Fig. 22 die 16 Sechsecke dar.) In der Tat muß ja hier zu jeder im Komplexen verlaufenden Sechseckseite auf F auch die konjugierte Linie als Sechseckseite benützt werden können, so daß man 16 verschiedene, aber paarweise konjugierte Zerschneidungen erhält.

Fig. 21.

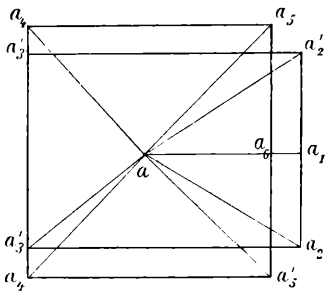
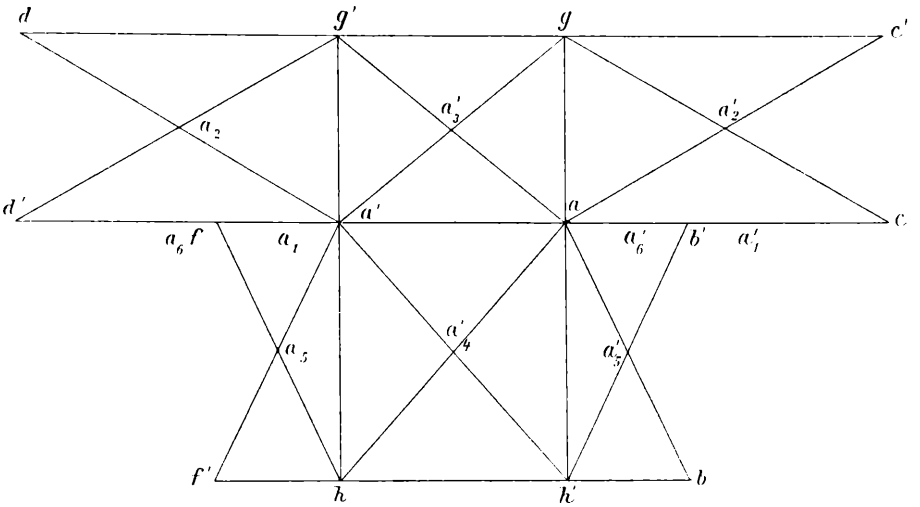


Fig. 22.



Die Sechsecke sind der Reihe nach:

$a\ c\ g\ a'\ h'\ b'$	$a\ g'\ d'\ a'\ f\ h$
$a\ c'\ g\ a'\ h'\ b'$	$a\ g'\ d\ a'\ f\ h$
$a\ c\ g\ a'\ h'\ b$	$a\ g'\ d'\ a'\ f'\ h$
$a\ c'\ g\ a'\ h'\ b$	$a\ g'\ d\ a'\ f'\ h$
$a\ c\ g\ a'\ f'\ h$	$a\ g'\ d'\ a'\ h'\ b$
$a\ c'\ g\ a'\ f'\ h$	$a\ g'\ d\ a'\ h'\ b$
$a\ c\ g\ a'\ f\ h$	$a\ g'\ d'\ a'\ h'\ b'$
$a\ c'\ g\ a'\ f\ h$	$a\ g'\ d\ a'\ h'\ b'$

Man ersieht hieraus, daß der reelle Fall für $p = 2$ eine weit kompliziertere Ausnahmsstellung hat wie für $p = 1$.

VIII. Monodromie des hyperelliptischen Gebildes.

Die ganze Riemann'sche Fläche F_u wird aus dem Normalsechseck erhalten, indem man an die einzelnen Seiten wiederholt in Bezug auf die Seitenmitten zentrisch symmetrische Sechsecke anschließt. Je zwei solche Sechsecke geben dann ein Bild der ganzen Riemann'schen Fläche F. Läßt man nun auf F den Punkt a einen geschlossenen Weg durchlaufen und die Verzweigungspunkte $a_1 \ldots\ldots a_6$ solche Wege durchlaufen, daß sie, abgesehen von der Anordnung, wieder die nämlichen Punkte darstellen, dabei aber die Zerschneidung der Fläche so mitführen, daß die einzelnen Schnitte den bewegten Punkten $a, a_1 \ldots a_6$ ausweichen, so wird dabei auch das Sechseck stetig abgeändert und geht in ein anderes über, welches zwar noch zentrische Symmetrie in Bezug auf die Seitenmitten aufweist, aber weder geradlinig begrenzt zu sein braucht, noch ein Normalsechseck ist.

Andrerseits lassen sich aus dem Normalsechseck dadurch neue Gestalten des Fundamentalbereiches gewinnen, daß man ein in Bezug auf eine Seitenmitte zentrisch symmetrisches Sechseck anschließt und

nun durch eine in Bezug auf dieselbe Seitenmitte zu sich selbst zentrisch symmetrische Linie einen nicht auf der Seite gelegenen Eckpunkt mit seinem zentrisch symmetrischen verbindet.

In Bezug auf die Bezeichnung kann man noch außerdem die Benennung der Sechseckseiten zyklisch vertauschen. Es ist nun interessant zu sehen, daß sich auf diese Weise alle durch Monodromie entstehenden Fundamentalbereiche tatsächlich ergeben und die Gruppe der linearen Periodentransformation des hyperelliptischen Gebildes eine einfache geometrische Bedeutung bekommt. Ihre Zusammensetzung aus zwei Erzeugenden ergibt sich so unmittelbar, ebenso aber zwei Relationen zwischen den Erzeugenden, so daß die Gruppe im Cayley'schen Sinn vollkommen bestimmt erscheint.

Bezeichnet man die Sechseckseiten in ihrer Aufeinanderfolge bei einem positiven Umlauf mit $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, das einzelne Zeichen als Vektor aufgefaßt, so hat man die Relation $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 0$. Ferner erkennt man, daß die Summe zweier aufeinanderfolgenden Sechseckseiten immer eine Periode des Integrals ist. Der Flächeninhalt des Sechseckes — eventuell im Möbius'schen

Fig. 23.

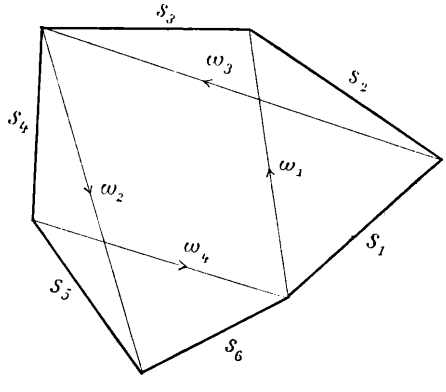
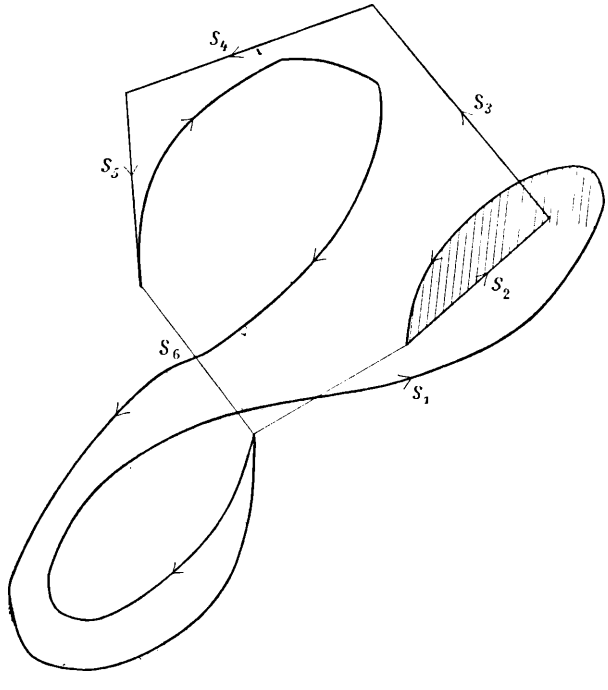


Fig. 24.



Sinn — bleibt bei den oben angeführten Operationen ungeändert und hängt nur von den Vektoren, nicht aber der speziellen Gestalt der Seiten ab, wenn diese nur die Seitenmitten des geradlinigen Vektorensechseckes zu Symmetriezentren haben. Setzt man $S_\nu = S'_\nu + iS''_\nu$, zerlegt also die Vektoren in ihre reellen und imaginären Komponenten, so kann man die doppelte Sechseckfläche ausdrücken durch (vgl. Fig. 23)

$$(S'_1 + S'_2)\ (S''_2 + S''_3) - (S''_1 + S''_2)\ (S'_2 + S'_3) + (S'_4 + S'_5)\ (S''_5 + S''_6) - (S''_4 + S''_5)\ (S'_5 + S'_6)$$

und man erkennt ohneweiters, daß man die Größen

$$\omega_1 = S_1 + S_2,\ \omega_3 = S_2 + S_3,\ \omega_2 = S_4 + S_5,\quad \omega_4 = S_5 + S_6$$

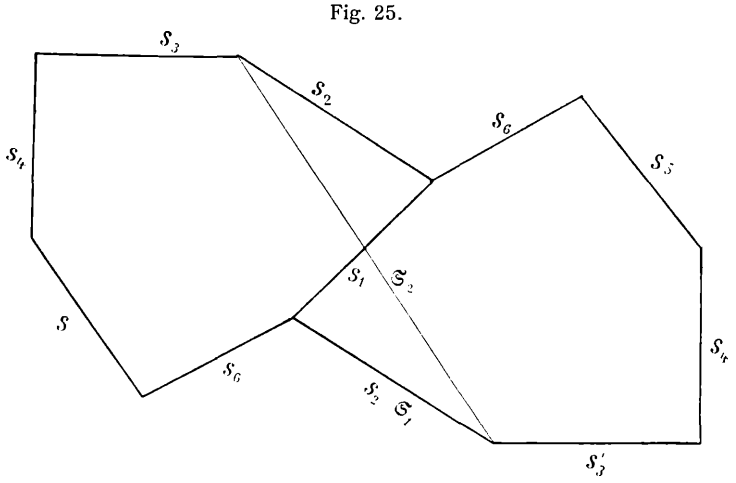
als kanonische Perioden wählen kann.

Es sei jedoch schon hier ausdrücklich bemerkt, daß man zu gegebenen Vektoren S noch unendlich viele Sechsecke zeichnen kann, welche den gegebenen Flächeninhalt haben und die Seitenmitten des aus den S gebildeten geradlinigen Sechseckes für die einzelnen Seiten zu Symmetriezentren haben, ohne jedoch funktionentheoretisch äquivalent zu sein, das heißt zu demselben hyperelliptischen Gebilde zu gehören. Das letztere ergibt sich aus dem Vergleich der zugehörigen Normalsechsecke. Die oben-

stehende Figur 24 gibt ein Beispiel eines solchen Sechseckes und es ist sofort ersichtlich, daß der dort ausgeführte Prozeß beliebig oft wiederholt werden kann.

Es werde nun die zyklische Vertauschung der Seiten S, bei welcher S_1 an die Stelle von S_2 tritt, mit U bezeichnet und dasselbe Zeichen als $U(\omega)$ auch für die hiedurch bewirkte Transformation der Perioden ω verwendet.

Fig. 25.



Es wird dann, wenn die transformierten Perioden mit ω' bezeichnet werden,

$$\omega_1' = \omega_3, \quad \omega_2' = \omega_4,$$

$$\omega_3' = -\omega_1 - \omega_4, \; \omega_4' = -\omega_2 - \omega_3$$

oder auch

$$U(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} (\omega)$$

und es ist klar, daß $U^6 = 1$ ist.

Als zweite Operation V werde diejenige bezeichnet, welche aus dem Anfügen eines zentrisch symmetrischen Sechseckes längs der Seite S_2 und neuerlicher Zerschneidung der Gesamtfigur längs der Linie $\mathfrak{S}_2$ besteht (Fig. 25).

Es wird dann, wenn die Seiten der neuen Figur mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden,

$$\mathfrak{S}_1 = -S_2, \quad \mathfrak{S}_2 = S_1 + 2S_2, \quad \mathfrak{S}_3 = S_3, \quad \mathfrak{S}_4 = S_4, \quad \mathfrak{S}_5 = S_5, \quad \mathfrak{S}_6 = S_6$$

und die zugehörige Substitution der Perioden:

$$V(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nun findet man zunächst ohne Schwierigkeit, daß $(UV)^5$ die Seiten S der Reihe nach überführt in

$$S_1 + 2S_2, \quad S_2 - 2S_2, \quad S_3 + 2S_2, \quad S_4 - 2S_2, \quad S_5 + 2S_2, \quad S_6 - 2S_2,$$

während die Perioden ungeändert bleiben, so daß

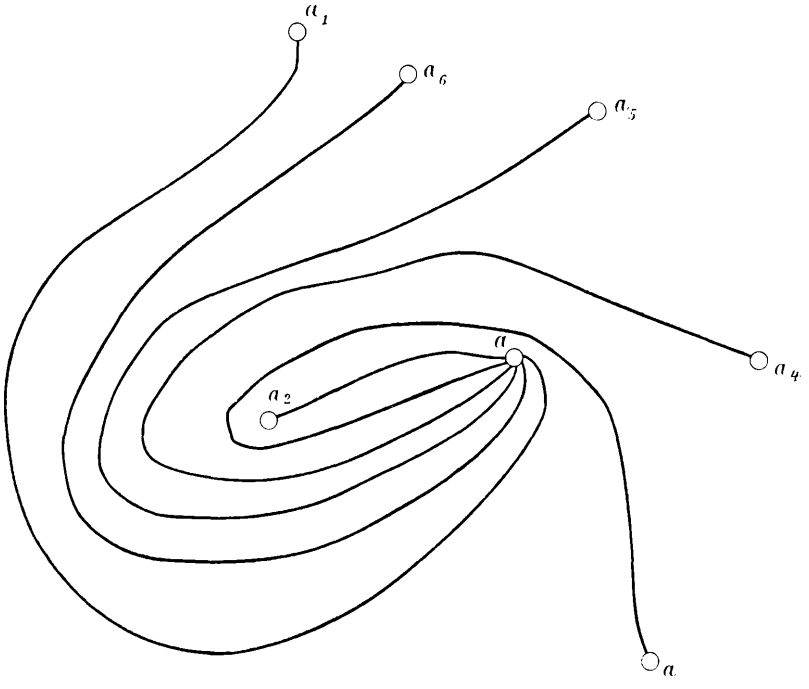
$$(UV)^{10} = 1.$$

Dies ist aber gerade die Abänderung, welche das Sechseck erfährt, wenn der Punkt a einen Umlauf um den Verzweigungspunkt, welcher dem auf der Seite S_2 gelegenen Symmetriezentrum entspricht, macht. Man hat dabei nur auch die Vorzeichenänderungen, welche die Integrale erfahren, gehörig zu beachten. (Die Bezeichnung der Verzweigungspunkte ist hier verschieden von der vorher gewählten, im Anschluß an die Bezeichnung der Sechseckseiten.)

Da man nun durch die zyklische Vertauschung jede Seite an die Stelle von S_2 bringen kann, so kann man auf diese Weise jede Umlaufung eines Verzweigungspunktes ausführen, und zwar ohne die Perioden zu ändern. Man hat also nur mehr nachzusehen, ob man auch alle linearen Transformationen der Perioden auf diese Weise erhält. Dies ist aber in der Tat der Fall, denn man kann die beiden von

Burkhardt angegebenen Erzeugenden der Gruppe ohne besondere Mühe in folgender Weise durch $U(\omega)$ und $V(\omega)$ darstellen.

Fig. 26.



Man findet zunächst

$$W(\omega) = V U^{-1} V U V(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

und ferner

$$U^3(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Damit wird dann

$$M(\omega) = U^3 W^2 U^4 W^2(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{und } N(\omega) = W^2 V^{-1} W^{-1} V^{-1} U^3 W^2 U^3(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

wo die Substitutionen vou rechts nach links anzuwenden sind, M und N aber gerade die Burkhardtschen Erzeugenden der Gruppe bedeuten.

Es ergibt sich also in der That die Gruppe der linearen Transformation durch zwei Erzeugende von einfacher geometrischer Bedeutung erzeugt.