THEORIE UND BESCHREIBUNG

EINER

NEUEN BRÜCKEN-WAGE.

VON

THEODOR SCHÖNEMANN,

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU BRANDENBURG.

(MIT II TAFELN.)

(VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM XVI. FEBRUAR MDCCCLIV.)

Die folgenden Blätter haben den Zweck, vorzüglich die wissenschaftlichen Gesichtspunkte hervorzuheben und in Anwendung zu bringen, nach welchen die neue Construction zu beurtheilen ist. Dass dieselben Principien bei sehr verschiedenen Formen, bei welchen sich der Belastungsraum höher oder tiefer befinden kann, Anwendung finden, wird klar sein. Da aber diese verschiedenen Anwendungen, welche für verschiedene Zwecke nothwendig sind, nicht hierher gehören, so ist bei der Darlegung nur auf eine bestimmte Construction Bezug genommen worden.

§. 1. Die Mittel, welche die praktische Mechanik bis jetzt anwandte, um den Brücken-Körper einer Brücken-Wage Parallel-Bewegung zu ertheilen, bestanden darin, gewisse Punkte desselben auf bestimmten Kreisen, andere dagegen auf festen oder veränderlichen Kugelflächen zu leiten. Sind diese Punkte in hinreichender Anzahl vorhanden, so kann sich der Brücken-Körper unter Einwirkung der Schwerkraft mit seinen Punkten nur auf bestimmten Curven bewegen und die Leitungen sind so eingerichtet, dass die mögliche Bewegung des Körpers, zum mindesten die momentane, von der Normalstellung heraus, eine Parallel-Bewegung werde.

Bei der neuen Construction werden alle Punkte des Brücken-Körpers, die einer Leitung unterworfen werden, vermöge Ketten und Streben, die unter sich weiter keine besondere Verbindung haben, auf constanten Kugelflächen so geleitet, dass der Brücken-Körper unter der Einwirkung jeder Kraft nur Parallel-Bewegung erhalten kann.

§. 2. Um die Einrichtung der neuen Wage darzulegen, ist nun zunächst zu zeigen, dass ein Körper im Allgemeinen mit fünf constanten Punkten auf fünf festen Oberflächen geleitet werden könne und dass bei einer solchen Leitung jeder Punkt des Körpers im Allgemeinen eine bestimmte krumme Linie beschreiben müsse.

Bezieht man nämlich den Körper wie die Oberflächen auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System und bezeichnet die Gleichungen der fünf Oberflächen durch

$$f_1(x\,y\,z) = 0,\ f_2(x\,y\,z) = 0,\ f_3(x\,y\,z) = 0,\ f_4(x\,y\,z) = 0 \text{ und } f_5(x\,y\,z) = 0$$

und die Coordinaten der fünf Punkte durch:

$$x_1\,y_1\,z_1,\ x_2\,y_2\,z_2, \text{ etc.}$$

so erhält man für diese fünfzehn Grössen, da die Punkte ihre gegenseitige Lage nicht ändern, zunächst folgende neun unabhängige Gleichungen:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2 = k_1^2;\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = k_2^2$$
$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = k_3^2$$
$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2 = k_4^2;\ (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2 = k_5^2$$
$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 = k_6^2$$
$$(x_5 - x_1)^2 + (y_5 - y_1)^2 + (z_5 - z_1)^2 = k_7^2;\ (x_5 - x_2)^2 + (y_5 - y_2)^2 + (z_5 - z_2)^2 = k_8^2$$
$$(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 + (z_5 - z_3)^2 = k_9^2$$

wo k_1, k_2 etc. die gegenseitigen Entfernungen der fünf Punkte des Körpers angeben.

Nimmt man nun an, der Körper liege mit fünf Punkten auf den vorher erwähnten fünf Oberflächen, so erhält man noch fünf Gleichungen zwischen jenen fünzehn Grössen, so dass etwa

$$f_1(x_1\,y_1\,z_1) = 0,\ f_2(x_2\,y_2\,z_2) = 0 \text{ etc. etc.}$$

wird. Man erhält mithin zwischen den fünfzehn Coordinaten der fünf Punkte des festen Körpers im Ganzen 9 + 5 oder 14 Gleichungen, woraus hervorgeht, dass man durch Elimination muss eine Gleichung zwischen je zweien dieser Grössen herstellen können.

Denkt man sich nun eine solche Gleichung zwischen x_1 und y_1 abgeleitet, so muss diese in Verbindung mit der Gleichung $f_1(x_1\,y_1\,z_1) = 0$ die Gleichungen der Curve bestimmen, auf welcher sich der Punkt des Körpers, dessen ursprüngliche Coordinaten $x_1\,y_1\,z_1$ waren, auf seiner Oberfläche bewegen muss.

Differentiirt man sämmtliche 14 Gleichungen zwischen den Grössen $x_1\,y_1\,z_1$, $x_2\,y_2\,z_2$ etc., so erhält man, wenn man dieselben durch dx_1 dividirt, 14 Gleichungen des ersten Grades für die 14 Verhältnisse

$$\frac{d\,y_1}{d\,x_1},\ \frac{d\,z_1}{d\,x_1},\ \frac{d\,x_2}{d\,x_1},\ \frac{d\,y_2}{d\,x_1}, \text{ etc.},$$

woraus zu schliessen ist, dass die Richtung der Curven in den angegebenen Punkten sich stets auf reelle Weise bestimmen lasse. Sollten diese Werthe unter der unbestimmten Form $^0/_0$ erscheinen, so wird man einen oder mehrere beliebig annehmen und die andern vermöge jener Gleichungen bestimmen können.

Anmerkung. Die fünf Punkte, mit denen ein Körper auf fünf Oberflächen geleitet werden kann, dürfen nicht in gerader Linie liegen, denn solche fünf Punkte würden die jedesmalige Lage des geleiteten Körpers noch nicht bestimmen, sondern vielmehr nur eine Drehungaxe desselben, und man würde dann im Allgemeinen den Körper mit einem sechsten Punkt noch auf einer sechsten Fläche leiten können. In der That lässt sich leicht nachweisen, dass eine gerade Linie mit 4 constanten Punkten sich auf 4 Oberflächen leiten lasse, denn man erhält zwischen den 12 Coordinaten der 4 Punkte die folgenden 11 Gleichungen:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = k_1^2;\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = k_2^2$$
$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2 = k_3^2$$

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_4 - x_1}{y_4 - y_1}\,;\quad \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} = \frac{x_3 - x_1}{z_3 - z_1} = \frac{x_4 - x_1}{z_4 - z_1}$$

$$f_1\,(x_1\,y_1\,z_1) = 0,\quad f_2\,(x_2\,y_2\,z_2) = 0,\quad f_3\,(x_3\,y_3\,z_3) = 0,\quad f_4\,(x_4\,y_4\,z_4) = 0,$$

woraus der Satz wie vorher folgt.

Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass ein Körper sich mit 3 Punkten auf drei Oberflächen, und mit dem vierten auf einer Curve, oder mit zwei Punkten auf zwei Curven und einem Punkte auf einer Oberfläche leiten lasse, so wie von selbst klar ist, dass eine gerade Linie mit zwei Punkten sich auf zwei Curven leiten lasse. Hieraus geht ganz allgemein hervor, dass für diese Betrachtungen die Bedingung, ein Körper werde mit zwei constanten Punkten auf zwei Oberflächen geleitet, nicht mehr bestimmende Kraft habe, als die Voraussetzung, der Körper werde mit einem Punkte auf einer bestimmten Curve geleitet.

Bei den verschiedenen Constructionen von Brücken-Wagen finden sich die meisten dieser Leitungen vor, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Oberflächen, auf denen die Punkte geleitet werden, zum Theil veränderlich sind. Die obigen Sätze gelten aber noch, wenn die Leitungsflächen veränderlich sind und etwa ihre Form von der Lage eines bestimmten Punktes des geleiteten Körpers abhängt.

Bei den Roberval'schen Tafel-Wagen wird der Brücken-Körper auf zwei constanten Kreisen und einer constanten Kugel-Oberfläche geleitet. Bei der Strassburger Wage wird derselbe auf zwei constanten Kreisen und einer variablen Kugelfläche geleitet.

Die Leitung eines Körpers ist überbestimmt, wenn derselbe noch mehreren Bedingungen, als den oben aufgestellten genügen soll, und der Körper wird im Allgemeinen unter dieser Voraussetzung keiner Bewegung mehr fähig sein. So wird ein Körper, welcher der Bedingung unterworfen ist, mit sechs Punkten auf sechs Oberflächen zu liegen, im Allgemeinen fest sein. Da man aber den Weg des sechsten Punktes als eine Function der ersten fünften Oberflächen ansehen kann, so wird noch dieselbe Bewegung möglich sein, wenn dieser Weg auf die sechste Oberfläche fällt. Da indessen eine mathematische Genauigkeit nie von praktischen Ausführungen zu erwarten ist, so würde bei überbestimmten Leitungen entweder eine der Leitungen verlassen werden müssen oder Stillstand eintreten, wenn die geleiteten Körper wirklich fest und die Leitungsflächen unveränderlich wären. Die Elasticität der Körper hebt beide Voraussetzungen auf und macht es möglich, dass allerdings ein Körper bei überbestimmter Leitung noch Beweglichkeit behalte, ähnlich wie ein belasteter Körper in der Wirklichkeit auf mehr als drei Punkten mit bestimmten Druckkräften ruhen kann. Natürlich dürfen die überzähligen Leitungen nicht weit von den Wegen, die ihnen von den andern angewiesen werden, abweichen, wenn sie dem Körper nicht eine ganz unveränderliche Lage ertheilen sollen. Die Leitung an der Roberval'schen Wage mit zwei verbundenen Streben (vergl. §. 6 meiner früheren Abhandlung über die Empfindlichkeit der Brücken-Wagen) sowohl, wie die Leitung an der George'schen Wage ist überbestimmt. Bei der ersten wird der Brücken-Körper auf vier festen Kreisen, bei der zweiten sogar auf vier festen Kreisen und einer veränderlichen Kugelfläche geleitet.

§. 3. Allgemeine Gesetze der Bewegung, denen ein Körper unterworfen ist, der sich mit fünf Punkten auf fünf bestimmten Oberflächen bewegt.

Da ein Körper, der mit fünf seiner Punkte auf fünf Oberflächen geleitet wird, mit jedem Punkte eine bestimmte Curve beschreiben muss, welche die Bahn des Punktes heissen mag, so wird eine Kraft, welche einen solchen in Ruhe befindlichen Körper ergreift, keine Wirkung ausüben, wenn sie senkrecht gegen das Bahn-Element des Angriffspunktes gerichtet ist. Da man aber bekanntlich bei einem festen Körper den Angriffspunkt in irgend einem Punkte der Richtung der Kraft annehmen darf, so kann man behaupten, dass eine Kraft, die irgend ein Bahn-Element senkrecht trifft, alle Bahn-Elemente, die in ihrer Richtung liegen, senkrecht treffe.

Errichtet man mithin auf einem Bahn-Elemente eine Normal-Ebene, so trifft jede Transversale dieser Ebene, die durch das Bahn-Element geht, sämmtliche Bahn-Elemente senkrecht. Legt man nun durch zwei Bahn-Elemente zwei Normal-Ebenen, so muss jedes Bahn-Element der Durchschnittskante senkrecht auf einer Ebene stehen, die durch die drei in Betracht gezogenen Bahn-Elemente geht. Hierdurch ist man im Stande die Richtung sämmtlicher Bahn-Elemente der Durchschnittskante der Normal-Ebenen anzugeben, wenn nicht überhaupt die Bahn solcher Elemente Null ist.

Wird mithin ein Körper mit zwei Punkten auf zwei Curven und mit einem dritten Punkte auf einer beliebigen Oberfläche geleitet, so sind die Richtungen der Bahn-Elemente jener Durchschnittskante im Allgemeinen unabhängig von der Leitungsoberfläche. Es können aber auch sämmtliche Punkte oder ein Punkt der Durchschnittskante momentan unveränderlich sein, und dieser letzte Fall muss insbesondere eintreten, wenn die Leitungen auf der Leitungsfläche im Durchschnittspunkt dieser Fläche und der Durchschnittskante stattfindet. — Legt man durch drei Bahn-Elemente drei Normal-Ebenen, so werden diese eine körperliche Ecke bilden; da aber das Bahn-Element dieser Ecke, wenn dasselbe existirt, d. h. wenn diese Ecke nicht momentan in Ruhe ist, auf den drei Verbindungslinien mit den drei Bahn-Elementen senkrecht stehen muss, so müssen diese drei Verbindungslinien in einer Ebene liegen.

Man erhält mithin den merkwürdigen Satz:

Die drei Normal-Ebenen dreier Bahn-Elemente schneiden sich jedesmal in einem Punkte der Ebene, welche durch die drei Elemente hindurchgeht, und: die Normal-Ebenen der Bahn-Elemente sämmtlicher Punkte einer bewegten Ebene schneiden sich in einem Punkte dieser Ebene.

Hieraus folgt, dass, wenn man die Richtung der Bahn-Elemente zweier der fünf geleiteten Punkte des Körpers kennt, man auch die Richtung der übrigen drei leicht geometrisch bestimmen könne. Man braucht nämlich nur durch den dritten und die beiden gegebenen Punkte eine Ebene zu legen und den Schnittpunkt derselben mit der Kante der Normal-Ebenen der Bahn-Elemente der beiden ersten Punkte mit dem dritten zu verbinden, und die Senkrechte auf dieser Verbindungslinie zu bestimmen, welche in der Leitungsfläche des dritten Punktes liegt. Um die Richtung des Bahn-Elementes irgend eines Punktes des Körpers zu bestimmen, verbinde man den Punkt erst mit zweien jener drei Punkte durch eine Ebene, dann verbinde man ihn mit dem Schnitt-Punkte der Kante der Normal-Ebenen der Bahn-Elemente jener Punkte und der construirten Ebene, so muss das gesuchte Bahn-Element auf dieser Linie senkrecht stehen; verbindet man den Punkt mit zwei andern jener drei Punkte, so erhält man noch eine zweite Linie, auf der das Bahn-Element senkrecht stehen muss und gelangt so zur vollständigen Bestimmung der Richtung desselben.

Offenbar müssen sich diese Sätze auf die Bewegung jedes Körpers beziehen, und lassen sich auch aus dem bereits von Euler nachgewiesenen Satze ableiten, dass jede unendlich kleine Bewegung eines Körpers sich in eine drehende Bewegung um eine bestimmte Axe, und in eine fortschreitende nach der Richtung dieser Axe zerlegen lasse. Da indessen hier zugleich noch einige Eigenthümlichkeiten gezeigt werden können, welche auf die Grösse der Bahn-Elemente Bezug haben, so werde ich mir erlauben, von diesen Dingen eine sehr einfache, rein geometrische Darstellung zu geben. (Fig. I.) Hat man nämlich im Raume zwei congruente Dreiecke A, B, C und $a\,b\,c$ und man construirt irgendwo ein Tetraeder, in welchen drei anstossende Kanten Aa, Bb, Cc gleich und parallel sind, und denkt drei Tetraeder, die mit jenem congruent sind und mit ihm parallele Lage haben, construirt, von denen die drei mit jener Ecke homologen in A, B und C liegen und nennt dieselben $A\,a\,b_1\,c_1$, $B\,b\,c_2\,a_2$, $C\,c\,a_3\,b_3$, so sind offenbar die Grundflächen dieser Tetraeder $a\,b_1\,c_1$, $b\,c_2\,a_2$, $c\,a_3\,b_3$ parallel. Legt man nun durch A, B und C ebenfalls drei Ebenen, welche mit ihnen parallel sind, denkt ausserdem durch irgend zwei homologe Punkte beider Dreicke noch zwei mit jenem parallele Ebenen gelegt, so ist klar, dass der Abstand zweier solcher Parallel-Ebenen gleich der Höhe des Tetraeders sei, die man etwa von A auf $a\,b_1\,c_1$ fällen kann.

Ausserdem ist klar, dass $A\,C = a\,a_3 = b_1\,b_3 = c_1\,c$; $A\,B = a\,a_2 = b_1\,b = c_1\,c_2$; $B\,C = a_2\,a_3 = b\,b_3 = c_2\,c$ ist. Es ist mithin Dreieck $abc \cong$ Dreieck $a\,a_3\,a_2$. Projicirt man nun sämmtliche betrachteten Dreiecke auf eine jener Parallel-Ebenen, so müssen die Projectionen von $A\,B\,C$, $a\,a_3\,a_2$ und abc congruente Figuren werden; die Projectionen der homologen Seiten von $A\,B\,C$ und $a\,a_3\,a_2$ sind, wie diese Seiten selbst, parallel und da die Projection von $a\,b\,c$ durch Drehung um a in die Projection von $a\,a_3\,a_2$ übergehen kann, so muss nun auch die Projection von $a\,b\,c$, ohne dass sie aus der Projections-Ebene herausgenommen zu werden brauchte, sich auf die Projection von $A\,B\,C$ schieben lassen. Es können mithin die Projectionen von $A\,B\,C$ und $a\,b\,c$ durch Drehung um einen Punkt s in ihrer Ebene in einander übergehen. Den Punkt s erhält man in dem Schnittpunkte der Perpendikel, die man auf die Verbindungslinien zweier homologen Punkte der Projectionen in ihren Halbirungspunkten errichten kann. Dreht man nun $A\,B\,C$ nebst seiner Projection so, dass letztere in die Lage der Projection von $a\,b\,c$ übergeht und erhebt dasselbe sodann in senkrechter Richtung gegen die Projections-Ebene, um die Höhe des Tetraeders $A\,a\,b_1\,c_1$, so muss offenbar Dreieck $A\,B\,C$ in Dreieck $a\,b\,c$ übergegangen sein. Denkt man sich Erhebung und Drehung gleichzeitig und gleichförmig ausgeführt, so erhält hierdurch $A\,B\,C$ eine Schraubenbewegung, und man kann sagen, dass zwei congruente Dreiecke stets durch Schraubenbewegung in einander übergehen können. Da aber zwei congruente Körper zusammenfallen müssen, wenn drei homologe Punkte von ihnen zusammenfallen, so kann man stets einen Körper in die Lage eines zweiten congruenten Körpers durch Schraubenbewegung übergehen lassen. Da es nun also für zwei congruente Körper ein System von Parallel-Ebenen gibt, der Art, dass je zwei solcher Ebenen, die durch zwei homologe Punkte der Körper gehen, eine constante Entfernung von einander haben und dieses System auf der Axe der Schraubenbewegung senkrecht steht — da es ferner für zwei congruente Dreiecke nur ein solches System gibt, welches auf die angegebene Weise gefunden werden muss, so gibt es überhaupt auch für zwei congruente Körper nur ein solches System paralleler Ebenen, und da dies durch irgend zwei homologe Dreiecke beider Körper gefunden werden kann, so erhält man folgenden Satz: Hat man zwei congruente Körper im Raume und denkt sich durch irgend einen Punkt o eine Schaar von begrenzten Linien gelegt, die den Verbindungslinien der homologen Punkte der Körper gleich und parallel sind, so liegen die Endpunkte in einer Ebene und es gibt das Perpendikel von o auf diese Ebene die Richtung der Axe der Schraubenbewegung an, durch welche ein Körper in die Lage des andern übergehen kann. — Geht ein Körper also durch Bewegung in eine nächste Lage über und man kennt die Richtung und das Verhältniss dreier Bahn-Elemente, so kann man die Grösse jedes andern Bahn-Elementes leicht folgendermassen bestimmen: Man ziehe aus einem Punkte o drei Linien, welche den drei Bahn-Elementen gleich und parallel sind, verbinde ihre Endpunkte durch eine Ebene c, ziehe durch o eine Linie parallel mit der Richtung des Bahn-Elementes, dessen Grösse gefunden werden soll, so ist die Strecke zwischen der Ebene und o gleich der gesuchten Grösse. Geht die Ebene aber durch o selbst, so geht der eine Körper in den andern durch blosse Drehung über und die zuletzt gegebene Construction wird unbestimmt, lässt sich aber dann leicht durch eine andere ersetzen.

Um nun von hier aus die Sätze über die Richtung der Bahn-Elemente abzuleiten, bemerke man, dass eine constante Linie, die mit einem bestimmten Punkte an einer zweiten Linie rechtwinklig nach irgend einem Gesetze geführt wird, mit ihren sämmtlichen Punkten Bahnen beschreibe, die rechtwinklig auf der geleiteten Linie stehen.

Eine Ausnahme von dieser Regel findet nur an den Punkten Statt, in welchen sich zwei auf einander folgende Lagen der geleiteten Linien scheiden und wo mithin die Bahn eines solchen Punktes gegen die Bahn auf den Leitungen verschwindet.

Dass dieser Satz stattfindet, wenn die Linien in einer Ebene geleitet werden, folgt daraus, dass man jede unendlich kleine Bewegung einer solchen Linie durch eine Drehung um einen Punkt hervorbringen könne, den man erhält, wenn man auf zwei Bahn-Elemente zweier Punkte der Linie Normalen errichtet, und den Schnittpunkt derselben construirt. Bewegt sich aber die Linie nicht in einer Ebene, so kann man doch irgend zwei Bahn-Elemente als in zwei Parallel-Ebenen liegend annehmen; steht nun die Linie auf einem Bahn-Elemente senkrecht, so muss auch ihre Projection auf die Ebene, in der das Bahn-Element liegt, auf demselben senkrecht stehen; ferner müssen die Projectionen zweier nächster Lagen der geleiteten Linie auf jene Ebene constant sein, und mithin die Bahn-Elemente der constanten Punkte der Projection auf der Projection senkrecht stehen. Da aber die Bahn-Elemente sämmtlicher Punkte der Projections-Ebene parallel sein müssen, so stehen sie auch auf der geleiteten Linie senkrecht.

Hieraus folgt nun, dass eine Linie, die bei der Schraubenbewegung eines Körpers senkrecht auf irgend einem Bahn-Elemente steht, auf allen Bahn-Elementen, die ihre Punkte beschrieben, senkrecht stehen müsse, und hieraus folgen die übrigen Sätze wie vorher.

§. 4. Construction der neuen Brücken-Wage. Hat ein Körper Parallel-Bewegung und jeder Punkt desselben beschreibt einen Kreisbogen, so kann man jeden dieser Kreise als die Basis eines geraden Kegels ansehen, dessen Axe senkrecht auf der Ebene des Kreises steht und durch den Mittelpunkt geht.

Nimmt man an, dass fünf Punkte des Körpers durch fünf Linien mit constanten Punkten der Axen der Kreise, die sie beschrieben, verbunden seien, so werden diese Linien alle bei der Bewegung von unveränderlicher Länge sein. Setzt man nun aber umgekehrt voraus, jene fünf Linien seien von unveränderlicher Länge und auf der einen Seite an den Axen, auf der andern Seite an dem Körper befestigt, so ist hierdurch der Körper genöthigt, sich mit fünf seiner Punkte auf fünf Kugel-Oberflächen zu bewegen, deren Mittelpunkte in den Axen liegen, und deren Radien den Verbindungslinien gleich sind. Da hierbei der Körper nach dem Vorigen nur eine bestimmte Art von Bewegung haben kann, so muss dies die Parallel-Bewegung sein. Nach diesem Gedanken ist die Construction der neuen Brücken-Wage nun auf folgende Weise ausgeführt:

Fig. II stellt das feste Gestell einer solchen Wage von rechts gesehen, und Fig. III den Brücken-Körper, von links gesehen, vor. Diese beiden Stücke sind abgesondert gezeichnet, weil man sonst die Anordnung nicht übersehen könnte.

Die Brücke befindet sich oben in $B\ B\ B\ B$, der Belastungs-Raum ist also ganz frei und diese Anordnung gehört mithin einer sogenannten Tafel-Wage an. Die Wandfläche $W_1\ W_1$ soll nun so geleitet werden, dass sie stets mit $W\ W$ parallel bleibt und jeder ihrer Punkte einen Kreisbogen von gleicher Grösse beschreibt, deren Mittelpunkte in einer Ebene liegen, die mit der Wandfläche $W\ W$ parallel ist. Dies geschieht durch vier Ketten und eine Strebe, deren Angriffspunkte durch Stahlschneiden gebildet werden, die senkrecht auf den zugehörigen Ketten und der Strebe stehen und horizontal sind, wenn in der Normal-Stellung die Ketten und die Strebe es ebenfalls sind. Von den Mittelpunkten dieser Stahlschneiden nehme man an, dass sie in Ebenen liegen, die den Wänden $W\ W$ und $W_1\ W_1$ parallel sind. In Fig. II und III sind die Schneiden, welche die Angriffspunkte einer Kette im Gestell und im Brücken-Körper bilden, durch dieselben Buchstaben bezeichnet, die aber in Fig. II noch mit dem Zeichen $_1$ versehen sind. Die Ketten und die Strebe kann man zweckmässig mit folgenden Namen belegen:

1) Die Strebe, welche die Schneiden a und a_1 angreift und aus einem eisernen Stabe besteht, der an seinen Enden mit 2 Stahlpfannen versehen ist (Fig. IV).

2) Die Streben-Kette, welche die Schneiden b und b_1 angreift und wie die folgenden Ketten aus drei Theilen besteht (Fig. VII a obere Ansicht, b Seitenansicht).

3) Die obere Quer-Kette, welche die Schneiden c und c_1 angreift.

4) Die untere Quer-Kette, welche die Schneiden d und d_1 angreift.

5) Die Seiten-Kette, welche die Schneiden e und e_1 angreift.

Strebe, Streben-Kette und Seiten-Kette stehen senkrecht auf den Wandflächen, und sind desshalb von gleicher Grösse. Ausserdem liegen Strebe und Streben-Kette in einer Vertical-Ebene.

Die Verbindungslinie der Schneiden a und b an der Brücken-Wand soll die Vertical-Axe derselben heissen. Sind die beiden Quer-Ketten von gleicher Länge, so lässt man dieselben die Brücken-Wand in ungleicher Entfernung von der Vertical-Axe ergreifen, und legt die Seiten-Kette auf die Seite der Vertical-Axe, auf welcher der Angriffspunkt der Quer-Kette den geringeren Abstand von jener Axe hat. Es ist klar, dass man die Seiten-Kette auch durch eine Seiten-Strebe auf der entgegengesetzten Seite der Vertical-Axe ersetzen könne.

Ausser diesen vier Ketten und der Strebe ist noch die Halte-Kette zu bemerken, welche nicht zur Leitung dient, sondern nur verhindert, dass der Brücken-Körper durch zufällige Stösse aus seiner Lage gebracht werde. Dieselbe verbindet die beiden Schneiden f und f_1 und ist durch eine eingeschaltete Spiral-Feder dehnbar. Den Grundriss der Wände und der Ketten zeigt Fig. VI. Die Strebe und Streben-Kette fallen hier in eine Richtung. Eine perspectivische Ansicht der ganzen Wage zeigt Fig. VIII; $g\,g_1$ ist die Hub-Kette, mit welcher der Wage-Balken den Brücken-Körper an der Schneide g ergreift, und es ist aus dem Vorhandenen klar, dass wenn bei einer Belastung sämmtliche Leitungs-Ketten (mit Einschluss der Strebe) gespannt werden, der Brücken-Körper Parallel-Bewegung habe, und mithin nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Einwirkung auf die Hub-Kette ebenso sein müsse, als wenn die ganze Last in der Schneide g_1 vereinigt wäre; dass sonach die Brücke richtig sei.

Dass der Brücken-Körper bei dieser Anordnung parallel bewegt werden müsse, lässt sich noch anderweitig leicht übersehen.

Strebe und Streben-Kette verhindern nämlich eine Drehung des Brücken-Körpers um eine Axe, die senkrecht auf der Ebene steht, die durch sie hindurchgeht und mithin horizontale Lage hat, übrigens aber beliebig angenommen werden kann. Das System von Strebe, Streben-Kette und Seiten-Kette verhindert eine Drehung um die Vertical-Axe, und die beiden Quer-Ketten verhindern in Verbindung mit den vorigen eine Drehung um eine horizontale Axe, die auf den Wandflächen senkrecht steht. Diese drei Axen, um welche keine Drehung stattfinden kann, stehen senkrecht auf einander, sie verhindern mithin jede mögliche Drehung und lassen daher nur Parallel-Bewegung zu.

Es liegt hierin ein zweiter charakteristischer Unterschied von allen früheren Constructionen von Brücken-Wagen. Die in Kraft tretenden Kräfte-Paare befinden sich nämlich bei allen andern Constructionen in Parallel-Ebenen und es sind dieselben in der That unmittelbar aus Constructionen in der Ebene hervorgegangen, indem man die Linien zu Ebenen erweiterte. Hier treten in der That drei Kräfte-Paare in Kraft, welche in Ebenen von verschiedener Richtung liegen und durch besondere technische Mittel aufgehoben werden. Es ist hier also zuerst auf die drei Dimensionen eines Körpers wahrhaft Rücksicht genommen, und man könnte mit Recht die früheren Brücken-Wagen Constructionen mit einem Kräfte-Paar, und diese eine Construction mit drei Kräfte-Paaren nennen.

Anmerkung. Die Figuren II und III zeigen die Befestigungen der Schneiden an hölzernen Wänden. Die Schneiden für die Streben-Kette und Seiten-Kette sind noch mit einem besonderen Kloben versehen, um ihre Verrückung unmöglich zu machen. Die Schneiden für die Quer-Ketten werden durch Schienen gehalten, welche einestheils den Zweck haben, diese Schneide mit festzuhalten und anderntheils dem Schwinden des Holzes, auf dessen Längenfaser sie rechtwinklich stehen, entgegenzuwirken.

§. 5. Berechnung der Spannung in den Leitungs-Ketten, welche bei der Belastung der Wage eintritt. Bevor zu dieser Berechnung geschritten wird, bemerken wir, das mit dem Ausdruck Leitungs-Ketten die beiden Quer-Ketten, Streben-Kette, Seiten-Kette, so wie die Strebe bezeichnet werden.

Man denke sich nun die Wage in einer solchen Stellung, dass sämmtliche Leitungs-Ketten horizontal sind und nehme an, die Hub-Kette $g\ g_1$ sei senkrecht. Setzt man nun voraus, der Schwerpunkt der Last P befindet sich in einer senkrechten Linie, die durch h geht (Fig. VIII), so ziehe man $h\ i$ parallel mit der Strebe und $i\ l$ senkrecht, so dass $l\ g_1$ wieder horizontal wird. Durch die Angriffspunkte der beiden Quer-Ketten ziehe man auf der inneren Wandfläche zwei Horizontallinien $c\ m$ und $d\ n$. Den Abstand von diesen beiden Linien nenne man U, den Abstand $a\ b$ der Strebe und Streben-Kette A. Nun nehme man in l die beiden gleichen sich aufhebenden senkrechten Kräfte $+ P_l$ und P_l an, die beide $= P$ sind. Das Kräfte-Paar $+ P$ und $— P_l$ drehe man erst in seiner Ebene $h\,i\,l$, bis beide Kräfte horizontal sind und lege es alsdann in die parallele Ebene, in der Strebe und Streben-Kette liegen. Nennt man nun die Kraft, mit welcher dieses Kräfte-Paar Strebe und Streben-Kette spannt, K, so hat man $K\,.\,A = P\,.\,h\,i$ oder wenn man $h\ i$ durch E bezeichnet $K = P\frac{E}{A}$. Jetzt nehme man in g_1 die beiden senkrechten Kräfte wirkend an, $+ P_{g1}$ und $— P_{g1}$, und setze die Grösse beider $= P$, so wird aus $+ P_l$ und $— P_{g1}$ ein Kräfte-Paar entstehen, und in g_1 die senkrecht wirkende Kraft $P_{g1} = P$ übrig bleiben, welche auf den Wage-Balken nach bekannten Gesetzen wirkt.

Das Kräfte-Paar $+ P_l$ und $— P_{g1}$ ersetzte man durch ein anderes, dessen Kräfte durch $d\ n$ und $c\ m$ gehen. Nennt man die Grösse dieser Kräfte Q, so erhält man $Q\,.\,U = P\,.\,l\,g_1$. Oder $Q\,.\,U = P\,.\,L$ und $Q = \frac{P\,.\,L}{U}$, wenn man $g_1 l = L$ setzt. Nennt man nun den Winkel, den die obere Quer-Kette mit $c\ m$ bildet φ, und den Winkel, den die untere mit $d\ n$ bildet ψ, so zerlege man das Q, welches auf die obere Quer-Kette wirkt, in eine Kraft, die durch diese Quer-Kette geht und dieselbe spannt und in eine Kraft, die senkrecht auf der Wandfläche steht. Erstere ist offenbar $\frac{Q}{cos\ \varphi}$ und die zweite $Q\ tang\ \varphi$. Ähnlich zerlegt man die untere Kraft Q, welche in der Richtung $n\ d_1$ wirkt, in $\frac{Q}{cos\ \psi}$, welches die untere Quer-Kette spannt, und in $Q\ tang\ \psi$, welches senkrecht auf der Wandfläche steht. Die beiden Kräfte $Q\ tang\ \psi$ und $Q\ tang\ \varphi$ werden nun die Spannung der Seiten-Kette bewirken, und die bereits nachgewiesene Spannung in Strebe und Steben-Kette noch verändern. Nennt man nämlich die Spannung in der Seiten-Kette S, so müssen sich $Q\ tang\ \varphi$, $Q\ tang\ \psi$ und S, an der Vertical-Axe das Gleichgewicht halten. Man erhält mithin: $Q\ tang\ \varphi\,.\,O + Z\,.\,S = Q\ tang\ \psi\,.\,U$ und folglich $S = \frac{- Q\ tang\ \varphi\,.\,O + Q\ tang\ \psi\,.\,U}{Z}$, wo O den Abstand des Angriffspunktes der oberen Quer-Kette von der Vertical-Axe, U den Abstand der unteren Quer-Kette von der Vertical-Axe und Z den Abstand des Angriffspunktes der Seiten-Kette von der Vertical-Axe bedeutet. Da sich die Kräfte $Q\ tang\ \varphi$, $Q\ tang\ \psi$ und S das Gleichgewicht halten, wenn man die Vertical-Axe als Drehungs-Axe ansieht, so geht die Resultante dieser drei parallelen Kräfte durch die Vertical-Axe und ist $= Q\ tang\ \varphi + Q\ tang\ \psi + S$. Bezeichnet man diese Kaft mit Σ und nimmt an, dass sie durch den Punkt r der Vertical-Axe gehe, dessen Lage sich durch die bekannten Sätze über die Bestimmung des Schwerpunktes leicht angeben lässt, so muss man Σ in zwei parallele Kräfte zerfällen, die durch a_1 und b_1 gehen. Die erste ist offenbar $\Sigma\,.\,\frac{r\,b}{a\,b}$ und die zweite $\Sigma\,.\,\frac{r\,a}{a\,b}$. Die vollständigen Kräfte, welche auf Strebe und Streben-Kette wirken, sind mithin: Auf die erste die Druckkraft $K + \Sigma\,.\,\frac{r\,b}{a\,b}$ und auf die zweite die Zugkraft $K — \Sigma\,.\,\frac{r\,a}{a\,b}$. Diese Ausdrücke, welche die Spannung der Leistungs-Ketten angeben, bestimmen die nach gewissen Richtungen hin nothwendige Begrenzung der Brücke, da dieselbe so beschaffen sein muss, dass keiner dieser Ausdrücke negativ werden darf.

§. 6. Es ist jetzt zu untersuchen, welche Fehler durch die Abweichung der Leitungs-Ketten von den vorgeschriebenen Richtungen hervorgebracht werden müssen.

Da ein Körper, der mit fünf Punkten auf fünf Oberflächen geleitet wird, im Allgemeinen sich mit seinen Punkten auf bestimmten Bahnen bewegen muss, so wird ein Körper, der der Bedingung unterworfen wird, sich mit sechs Punkten auf sechs Oberflächen zu befinden, im Allgemeinen fest sein. Sind insbesondere diese sechs Flächen constante Kugelflächen und geschieht die Leitung vermöge Ketten und Streben, so kann man sagen, dass ein Körper, der diese sechs Theile in Spannung setzt, im Allgemeinen fest sei; dass folglich jede Kraft, die auf einen solchen Körper wirkt, aufgehoben werden müsse, und mithin in sechs Kräfte nach den Richtungen dieser Theile zerlegt werden könne. Bilden die Richtungen dieser sechs Punkte die sechs Kanten eines Tetraeders, so kann die Zerfällung sehr einfach geschehen, ähnlich wie jede Kraft in einer Ebene in drei Kräfte zerfällt werden kann, deren Richtungen durch die Seiten eines constanten Dreiecks angegeben werden. Liegen aber diese sechs Richtungen beliebig im Raume, so lässt sich allerdings leicht übersehen, dass vermöge der sechs bekannten Gleichungen, welche zwischen den Kräften, die auf einen Körper wirken und sich das Gleichgewicht halten, stattfinden, sich sechs lineäre Gleichungen werden aufstellen lassen, mittelst welcher man die Spannungen, die in jeder Kette und Strebe wirken, durch Zuziehung dreier rechtwinkligen Coordinaten-Ebenen wird entwickeln können. Indessen soll hier durch eine specielle Methode das oben vorgesteckte Ziel erreicht werden, und wir halten aus der allgemeinen Betrachtung nur das Ergebniss fest, dass die Spannungen in den sechs Ketten sich vermöge lineärer Gleichungen durch die Elemente der Lage jener Ketten rational müsse ausdrücken lassen.

Der Brücken-Körper unserer Wage spannt in der That sechs Ketten; nämlich die fünf Leitungs-Ketten und die Hub-Kette. Steht die Hub-Kette senkrecht, so wird sie stets genau durch die Last, die sich auf der Brücke befindet, gespannt, und es soll nun gezeigt werden: Erstens, mit welcher Kraft diese Kette gespannt wird, wenn eine der Leitungs-Ketten eine falsche Lage hat, und zweitens, wie gross diese Spannung sei, wenn mehrere der Leistungs-Ketten sich von der richtigen Lage entfernen, diese Abweichung aber nur gering ist.

Nimmt man nun an, alle Leitungs-Ketten hätten ursprünglich eine richtige und horizontale Lage, so kann man jede derselben durch eine andere ersetzen, die auf denselben Angriffspunkt wirkt und auf dem Bahn-Elemente dieses Punktes senkrecht steht. Ersetzt man nun eine richtige Kette durch eine falsche, die auf denselben Angriffspunkt wirkt, so kann man stets annehmen, dass diese beiden Ketten und die Richtung des Bahn-Elements, welches der richtigen Kette entspricht, in einer Ebene liegen. Bildet nun die richtige Kette mit der falschen den Winkel φ, so kann man die Spannung, die in ihr wirkt, nach der falschen Kette und nach der Richtung des Bahn-Elements zerlegen. Nennt man jetzt die Spannung in der richtigen Kette σ, so kommt auf die falsche Kette die Spannung $\frac{\sigma}{\cos\varphi}$ und auf die Richtung des Bahn-Elements die Spannung $\sigma \operatorname{tang} \varphi$. Denkt man sich also statt der richtigen Kette die falsche, und an ihrem Angriffspunkte eine Kraft, die in der Richtung des Bahn-Elements wirkt und gleich $-\sigma \operatorname{tang} \varphi$ ist, so bleibt die Spannung in der Hub-Kette ungeändert. Lässt man nun noch drei senkrechte Kräfte auf dem Brücken-Körper wirken, nämlich auf die Schneide der betrachteten Leitungs-Kette $+\sigma \operatorname{tang} \varphi$ und auf die Schneide der Hub-Kette $+\sigma \operatorname{tang} \varphi$ und $-\sigma \operatorname{tang} \varphi$, so wird die erste und dritte Kraft ein Kräfte-Paar bilden und die zweite wird die Spannung der Hub-Kette um $\sigma \operatorname{tang} \varphi$ vermehren. Da nun in der That die Schneide der Leitungs-Kette durch keine vorhandene Kraft $-\sigma \operatorname{tang} \varphi$ gehalten wird, so geschieht durch das Wegfallen dieser Kraft dasselbe, als wenn jene drei Kräfte hinzugefügt würden. Das erwähnte Kräfte-Paar zerlege man nach den richtigen fünf Leitungs-Ketten und nach der Hub-Kette, so erhält letztere, wie aus der früheren Darlegung folgt, hierdurch keine Spannung. Die Spannung, welche die richtige Leitungs-Kette erhält, welche durch eine falsche ersetzt werden soll, mag σ_1 heissen; diese Kraft σ_1 zerlege man wieder in $\frac{\sigma_1}{\cos\varphi}$ und $\sigma_1 \operatorname{tang} \varphi$ und gebe der Hub-Kette die Spannung $\sigma_1 \operatorname{tang} \varphi$ mehr wie vorher, so ist jetzt die falsche Kette gespannt durch $\frac{\sigma+\sigma_1}{\cos\varphi}$ und die Hub-Kette durch $P + (\sigma + \sigma_1) \operatorname{tang} \varphi$. Es wirkt aber noch auf den Brücken-Körper an den Angriffspunkten der betrachteten Leitungs-Kette und der Hub-

Kette das senkrechte Kräfte-Paar $+\sigma_1$ *tang* $\varphi - \sigma_1$ *tang* φ. Verfährt man nun mit diesem Kräfte-Paar wie mit dem vorigen, so kann auch dies in der Hub-Kette keine Spannung erzeugen, wird aber in der falschen Kette eine Zunahme an Spannung $= \frac{\sigma_2}{cos\ \varphi}$ hervorbringen. Es wird aber $\sigma : \sigma_1 = \sigma_1 : \sigma_2$ sein; denn, wenn das Kräfte-Paar $+\sigma_1$ *tang* $\varphi - \sigma_1$ *tang* φ durch gewisse Kräfte, die in den Leitungs-Ketten wirken, ersetzt werden kann und die in Betracht gezogene Leitungs-Kette hierbei die Spannung σ_2 erhält, so wird das Kräfte-Paar $+\sigma$ *tang* $\varphi - \sigma$ *tang* φ, welches auf dieselben Angriffspunkte wirkt, durch Kräfte in den Leitungs-Ketten zu ersetzen sein, die sich zu den vorigen wie $\sigma_1 : \sigma$ verhalten. In Bezug auf die betrachtete Leitungs-Kette folgt also $\sigma : \sigma_1 = \sigma_1 : \sigma_2$.

Diese Operationen kann man im Gedanken so lange fortsetzen, wie man will, und wenn man auf diese Weise die Spannung σ_m erzeugt, so wird die Hub-Kette belastet sein mit $P + (\sigma + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots . \sigma_m)$. *tang* φ und die falsche Leitungs-Kette wird gespannt sein durch $(\sigma + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots . \sigma_m)\frac{1}{cos\ \varphi}$; ausserdem wird aber an den Angriffspunkten der Hub-Kette und der falschen Leitungs-Kette noch das Kräfte-Paar $+\sigma_m$ *tang* $\varphi - \sigma_m$ *tang* φ wirken. Da nun aber das Kräfte-Paar $+\sigma$ *tang* $\varphi - \sigma$ *tang* φ nach den richtigen fünf Leitungs-Ketten zerlegt wurde, und hierbei in der Kette, welche durch die falsche ersetzt werden sollte, die Spannung σ_1 hervorbrachte, so kann man $\sigma_1 = \tau$ *tang* φ setzen, wo τ eine constante Grösse ist, welche von den Massen abhängt, die der Construction zu Grunde gelegt sind. Man kann mithin *tang* φ immer klein genug annehmen, dass $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ oder $\frac{\tau\ tang\ \varphi}{\sigma} < 1$ werde. Setzt man nun $m = \infty$, so ist das zuletzt übrig bleibende Kräfte-Paar $+\sigma_m$. *tang* $\varphi - \sigma_m$. *tang* φ unendlich klein, und kann daher ausser Acht gelassen werden. Die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $\sigma + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots .$ in inf.; ist dann aber $\sigma \left\{\frac{1}{1 - \frac{\tau\ tang\ \varphi}{\sigma}}\right\}$, und es ist mithin die Hub-Kette belastet mit $P + \sigma$ *tang* $\varphi . \left\{\frac{1}{1 - \frac{\tau\ tang\ \varphi}{\sigma}}\right\}$.

Da dieser Ausdruck streng richtig ist, wenn $\frac{\tau\ tang\ \varphi}{\sigma} < 1$ ist, so muss er überhaupt richtig sein, weil, wie bemerkt wurde, ein analytischer Ausdruck für die Spannung der Hub-Kette existirt.

Hat mithin die Hub-Kette eine verticale Richtung, die Leitungs-Ketten ausser einer, eine horizontale Richtung, bildet ferner diese eine Leitungs-Kette mit dem Horizonte den Winkel $+\varphi$, so ist die Spannung in der verticalen Hub-Kette $P + \sigma$ *tang* $\varphi . \left\{\frac{1}{1 - \frac{\tau\ tang\ \varphi}{\sigma}}\right\}$, wo P die Last auf der Brücke angibt, und σ die Spannung, die in einer horizontalen Kette erzeugt werden würde, welche an die Stelle der falschen Kette gesetzt werden könnte und mit ihr denselben Angriffspunkt hätte, auch in derselben Vertical-Ebene läge; τ aber eine Constante bedeutet, die von den Abmessungen der Construction abhängt. Liegt die falsche Kette unter der Horizontal-Ebene, die durch ihren Angriffspunkt an den Brücken-Körper geht, so ist der Winkel φ positiv zu nehmen; die Spannung σ ist in den Ketten positiv, in der Strebe negativ zu setzen.

Berücksichtigt man nur die erste Potenz von *tang* φ, so kann man die Spannung in der Hub-Kette einfach $= P + \sigma$ *tang* φ setzen: Weichen mehrere oder alle Leitungs-Ketten von der horizontalen Richtung ab, so kann man die Spannung in der verticalen Hub-Kette als Function der Richtung der Leitungs-Ketten ansehen, und mithin, wenn man nur die ersten Potenzen der Abweichungs-Winkel berücksichtigt, $= P + \sigma_1 \varphi_1 + \sigma_2 \varphi_2 + \sigma_3 \varphi_3 + \sigma_4 \varphi_4 + \sigma_5 \varphi_5$ setzen, wo $\sigma_1\ \sigma_2$ etc. die Spannungen in den richtigen fünf Ketten, die mit je einer falschen Kette in derselben Vertical-Ebene liegen, $\varphi_1\ \varphi_2$ etc. die Abweichungen der falschen Kette vom Horizonte bedeuten.

Nimmt man an, die Leitungs-Ketten hätten alle eine richtige Lage und die Brücke hübe sich um die sehr kleine Höhe δ, so kann man, wenn man die Länge der Ketten, deren Spannung durch σ_1, σ_2, σ_3 etc. angegeben sind, durch λ_1, λ_2, λ_3 etc. bezeichnet, $\varphi_1 = \frac{\delta}{\lambda_1}$, $\varphi_2 = \frac{\delta}{\lambda_2}$ etc. setzen. Da nun aber bei vollständiger Parallel-Bewegung, wie sie der obigen Construction zu Grunde liegt, nach der Hebung der

Brücke um δ, die senkrechte Hub-Kette immer noch mit P gespannt sein muss, so erlangt man die Gleichung: $\frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\sigma_3}{\lambda_3} + \frac{\sigma_4}{\lambda_4} + \frac{\sigma_5}{\lambda_5} = 0$, das heisst also, die Summe der Quotienten der Spannungen der Leitungs-Ketten durch ihre respectiven Längen ist 0, wo sich auch die Last befinden möge. Durch Einsetzung der oben für σ_1, σ_2, σ_3 etc. entwickelten Ausdrücke kann man sich leicht auf andere Weise von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugen.

§. 7. **Lehrsatz: Eine sehr kleine Verlängerung oder Verkürzung einer Quer-Kette hat auf die Spannung der Hub-Kette keinen Einfluss.**

Da die Strebe, Streben-Kette und Seiten-Kette in der Normal-Stellung senkrecht auf der Brücken-Wand stehen, und eine kleine Drehung dieser Ketten, insofern sie gespannt bleiben, nur Annäherungen der Angriffspunkte derselben an die Gestell-Wand zur Folge haben kann, welche kleine Grössen der zweiten Ordnung sind, wenn man die Bogen, welche von den Endpunkten jener Leitungs-Ketten beschrieben werden, als kleine Grössen der ersten Ordnung ansieht, so kann man jede Veränderung, welche die Brücken-Wand erfährt, indem Strebe, Streben-Kette und Seiten-Kette gespannt bleiben, und kleine Bogen beschreiben, als eine Drehung derselben um eine auf ihr senkrechte Axe ansehen. Gesetzt nun, die obere Quer-Kette verlängerte sich ein wenig, so nehme man zunächst an, die Schneide der unteren Quer-Kette *d* Fig. VIII bleibe unbeweglich; die vorausgesetzte Verlängerung wird nun eine Drehung der Wage nach dem Pfeil $x\, y$ zur Folge haben. Die Senkungen, welche die Punkte b, a, e, c hierdurch erhalten, werden sich verhalten wie ihre Horizontal-Abstände an dem Drehungs-Punkte d, nämlich wie $U : U : U + Z : U + O$ (§. 5).

Man kann diese Senkungen mit $U\varepsilon$, $U\varepsilon$, $(U + Z)\varepsilon$ und $(U + O)\varepsilon$ bezeichnen, wo ε einen kleinen Bruch bedeutet. Da Strebe und Streben-Kette gleiche Senkung erfahren, und durch die Kraft k gleich gespannt werden, so wird die Hub-Kette durch die gleichzeitige Senkung dieser Leitungs-Ketten in ihrer Spannung unverändert bleiben, weil sie durch die eine verliert, was sie durch die andere gewinnt. Da aber sämmtliche Leitungs-Ketten auch noch durch das Kräfte-Paar $+ Q - Q$ (§. 5) gespannt werden, so ist noch zu untersuchen, welchen Einfluss die Senkung bei dem Theile der Spannung, der durch die Kraft Q hervorgebracht wird, auf die Hub-Kette haben muss. In der oberen Quer-Kette verursacht nun das Kräfte-Paar $+ Q - Q$ die Spannung $\frac{Q}{\cos\varphi}$, in der unteren die Spannung $\frac{Q}{\cos\psi}$, in der Seiten-Kette $\frac{Q \operatorname{tang}\psi \,.\, U - Q \operatorname{tang}\varphi \,.\, o}{Z}$ und ausserdem wird die Vertical-Axe, auf welcher der Schwerpunkt der Kräfte $Q \operatorname{tang}\psi$, $Q \operatorname{tang}\varphi$ und $\frac{Q \operatorname{tang}\psi \,.\, U - Q \operatorname{tang}\varphi \,.\, o}{Z}$ liegt, mit der Summe dieser Kräfte nach der Richtung der Strebe gedrückt. Obgleich sich diese letzte Druckkraft in der That der Strebe und Streben-Kette mittheilt, so lässt sich doch leicht übersehen, dass es für das Resultat keinen Unterschied machen kann, wenn man annimmt, dass diese ganze Druckkraft auf die Strebe kommt. Durch die Senkung des Angriffspunktes der oberen Quer-Kette entsteht die Mehr-Belastung der Hub-Kette $- \frac{Q}{\cos\varphi}\left(\frac{U+O}{\lambda}\right)\varepsilon$, wo λ die Länge der oberen Quer-Kette bedeutet; durch die Senkung des Angriffspunktes der Seiten-Kette entsteht die Mehr-Belastung $- \left(\frac{Q \operatorname{tang}\,.\,\psi\; U - Q \operatorname{tang}\varphi \,.\, O}{Z}\right)\left(\frac{U+Z}{\gamma}\right)\varepsilon$ wo γ die Länge der Seiten-Kette bedeutet, und durch die Senkung der Vertical-Axe mit der in derselben befindlichen Strebe entsteht die Mehr-Belastung der Hub-Kette

$$+ \left(Q \operatorname{tang}\varphi + Q \operatorname{tang}\psi + \frac{Q \operatorname{tang}\psi \,.\, U - Q \operatorname{tang}\varphi \,.\, O}{Z}\right\} \frac{U}{\gamma} \,.\, \varepsilon.$$

Bildet man nun die Summe dieser Mehr-Belastungen, so erhält man

$$- \frac{Q}{\cos\varphi}\left(\frac{U+O}{\lambda}\right)\varepsilon - \left(\frac{Q \operatorname{tang}\psi \,.\, U - Q \operatorname{tang}\varphi \,.\, O}{\gamma}\right)\varepsilon + \left(Q \operatorname{tang}\varphi + Q \operatorname{tang}\psi\right)\frac{U}{\gamma}\,\varepsilon =$$

$$-\frac{Q}{cos\ \varphi}\left(\frac{U+O}{\lambda}\right)\varepsilon+\frac{Q\ tang\ \varphi\ .\ O+Q\ tang\ \varphi\ .\ U}{\gamma}\varepsilon=Q\ (U+O)\left\{\frac{1}{\lambda\ cos\ \varphi}-\frac{tang\ \varphi}{\gamma}\right\}\varepsilon=o,$$

da $\lambda\ cos\ \varphi\ .\ tang\ \varphi$ offenbar $= \gamma$ ist, und mithin der Factor $\frac{1}{\lambda\ cos\ \varphi}-\frac{tang\ \varphi}{\gamma}$ verschwindet. Es ist nun nachzuweisen, dass keine Mehr-Belastung der senkrechten Hub-Kette eintritt, wenn der Punkt *d* nicht festgehalten wird, sondern zugleich, wie es in der Wirklichkeit geschieht, eine kleine Senkung erfährt. Hält man zunächst den Punkt *d* fest, so werden nach Verlängerung der oberen Quer-Kette und Drehung des Brücken-Körpers um *d* sämmtliche Leitungs-Ketten wieder gespannt sein. (Diese Spannungen werden aber mit den ersten bis auf die kleinen Grössen der zweiten Ordnung, welche die Senkung der Angriffs-Punkte der Leitungs-Ketten angeben, übereinstimmen (§ 6), ihnen also gleichgesetzt werden können.) Da nun die Spannung der Hub-Kette wieder bis auf die hier betrachteten Grenzen unabhängig von der Belastung der Brücke wird, so sind die virtuellen Geschwindigkeiten aller Punkte des Brücken-Körpers, welche bei einer erfolgenden Bewegung eintreten, gleich zu setzen. Da ferner die Spannungen in den Leitungs-Ketten mit denen in der ersten Lage innerhalb der hier betrachteten Grenzen auch übereinstimmen müssen, so erhält man wieder, wenn man diese Spannungen durch σ_1, σ_2 etc. bezeichnet, $\frac{\sigma_1}{\lambda_1}+\frac{\sigma_2}{\lambda_2}+\frac{\sigma_3}{\lambda_3}+\frac{\sigma_4}{\lambda_4}+\frac{\sigma_5}{\lambda_5}=o$. Bedeutet nun λ_5 die Länge der unveränderten oberen Quer-Kette und $\lambda_5+\xi$ die verlängerte obere Quer-Kette, so wird nach einer Senkung des Brücken-Körpers um die Grösse δ die Zunahme der Spannung der Hub-Kette: $\delta\left(\frac{\sigma_1}{\lambda_1}+\frac{\sigma_2}{\lambda_2}+\frac{\sigma_3}{\lambda_3}+\frac{\sigma_4}{\lambda_4}+\frac{\sigma_5}{\lambda_5+\xi}\right)$ betragen. Da man aber $\frac{\sigma_5}{\lambda_5+\xi}=\frac{\sigma_5}{\lambda_5}-\frac{\sigma_5}{\lambda_5}\ .\ \frac{\xi}{\lambda_5}$ setzen kann, so wird die Zunahme der Hub-Kette $\sigma_5\ .\ \frac{\delta}{\lambda_5}\ .\ \frac{\xi}{\lambda_5}$ mithin wieder eine kleine Grösse der zweiten Ordnung sein, weil $\frac{\delta}{\lambda_5}$ und $\frac{\xi}{\lambda_5}$ kleine Grössen der ersten Ordnung sind. Mithin kann diese Zunahme ausser Acht gelassen werden.

§. 8. Es lässt sich auch nachweisen, dass kleine Veränderungen in der Länge der Strebe und Streben-Kette, sowie der Seiten-Kette keinen Einfluss auf die Spannung der senkrechten Hub-Kette haben können. Da nämlich Strebe und Streben-Kette die gegenüberstehenden Seiten eines Rechteckes bilden, so folgt, dass die durch kleine Veränderungen in der Länge von Strebe und Streben-Kette nothwendigerweise erfolgende Divergenz derselben eine kleine Grösse der zweiten Ordnung ist, wenn man die Veränderungen selbst als keine Grössen der ersten Ordnung einführt. Die anderen hierdurch hervorgehenden kleinen Veränderungen gehen auf ähnliche Weise vor sich, wie es im vorigen Paragraphen beschrieben ist, und können desshalb keinen Einfluss haben, der hier in Betracht kommt. Es folgt mithin der Satz: dass kleine Veränderungen in den Leitungs-Ketten auf die Spannung der senkrechten Hub-Kette keinen Einfluss haben. Da nun aber bei den kleinen Drehungen des Brücken-Körpers der Angriffspunkt der Hub-Kette eine kleine seitliche Verschiebung erleiden kann, die senkrecht auf der Hub-Kette steht, so entsteht noch die Frage, ob hierdurch ein Fehler im Resultate der Wägung entstehen könne. Um diese Frage beantworten zu können, denke man die senkrechte Kraft, welche die Hub-Kette spannt, in zwei andere zerlegt, von welchen die eine durch die wirkliche Hub-Kette geht, die andere in die Normal-Ebene des Bahn-Elements fällt, das der Angriffspunkt der-Hub-Kette beschreibt und mithin vernichtet wird. Auf gleiche Weise kann auch wieder die Zugkraft der Hub-Kette auf die Schneide des Wage-Balkens in die ursprünglich senkrechte Kraft und in eine Kraft, welche der in der Normal-Ebene des Bahn-Elements wirkenden parallel ist, aufgelöst werden. Da diese zweite Kraft, an sich schon sehr klein, sehr nahe bei der Schwingungs-Axe des Wage-Balkens vorbeigehen muss, so kann das Moment derselben nur ein sehr kleiner Bruch sein, der aus zwei sehr kleinen Factoren zusammengesetzt ist und mithin unbeachtet bleiben kann.

Das Schluss-Resultat dieser Betrachtung enthält den, für die Anwendung sehr wichtigen Satz: dass kleine Veränderungen in der Länge der Leitungs-Ketten auf das Resultat der Wägung k e i n e n Einfluss haben.

Da die Ketten aus mehreren Gliedern bestehen, so bilden sie in der That eine Art Kettenlinie, und ihre Angriffspunkte sind, je nach der Spannung der Ketten, mehr oder weniger von einander entfernt. Diese Veränderungen, die an sich sehr klein sind, werden also keinen Fehler im Resultate hervorbringen, wenn die Ketten eine verhältnissmässige Stärke haben. Eben so wenig kann eine kleine Abnutzung der Schneiden die Wage falsch machen, weil hier die Wirkung dieselbe sein müsste, als wenn die Leitungs-Ketten in ihrer Länge etwas geändert würden.

Bei den aus Holz gefertigten Wagen wird die Längenfaser in der Richtung von Strebe und Streben-Kette genommen und beide Wände, sowohl des Brücken-Körpers als des Gestells, aus derselben Holzart gemacht. Das Schwinden des Holzes kann nur so wirken, als wenn die Quer-Ketten verlängert würden, und sonst keinen Einfluss üben. Durch die eisernen Schienen ist die mögliche Wirkung des Schwindens auf sehr geringe Grenzen reducirt, und kann daher wegen der auseinandergesetzten Eigenthümlichkeiten der Wage übersehen werden.

§. 9. Es ist bis jetzt vorausgesetzt worden, dass die Leitungs-Ketten genau wie starre Linien wirken. Da die Schneiden und Pfannen sich aber nicht genau in einem Punkte allein berühren, so wird diese Voraussetzung durch die Leitungs-Ketten nicht in aller Strenge erfüllt. Wenn nun die hieraus entspringenden Hemmungen des Mechanismus auch lange nicht die Grenzen erreichen, dass sie für die Bedürfnisse des praktischen Lebens von Einfluss wären, so machen dennoch wissenschaftliche Bedürfnisse es wünschenswerth, die Genauigkeit der kleinen Tafel-Wagen noch zu erhöhen. Durch die folgende Einrichtung ist mir dieses in einem Grade gelungen, dass ich noch nicht im Stande war, die Hemmungen, welche aus den Leitungs-Ketten entspringen, mit denen zu vergleichen, die in den Schneiden des Wage-Balkens selbst stattfinden.

Ich liess nämlich die Strebe durch drei Glieder einer dreigliedrigen Kette ersetzen, von denen das eine gewissermassen als Strebe, die beiden andern als Kette wirkten. Fig. IV *a* zeigt die gewöhnliche Einrichtung. Die Schneide a_1 wird an die Schneide a herangedrückt und diese Druckkraft setzt die Strebe $x\ y$ in Spannung. Fig. IV *b* zeigt die veränderte Einrichtung. Die dreigliedrige Kette besteht aus der Strebe $u\ v\ w\ z$ und der Kette $m\ n\ q$. Auf $n\ z$ und $v\ w$ befinden sich zwei Pfannen aus Stahl. Wird nun die Schneide a_1 gegen a gedrückt, so wird, wenn diese Druckkraft im Verhältniss zur Schwere der zweigliedrigen Kette sehr gross ist, die Entfernung $a\ a_1 = a_1\ m - m\ q$ gesetzt werden können. Macht man also $a_1\ m - m\ q$ gleich der Länge der Streben-Kette, so wird die Strebe durch diese dreigliedrige Kette ersetzt werden können; letztere wird aber dem System mehr freie Beweglichkeit gestatten als die erste, und man kann desshalb bei Anwendung derselben die Empfindlichkeit sehr gross machen, ehe eine Art von Indifferenz eintritt.

§. 10. Wie die Wage einzurichten sei, damit die Stellung auf das Resultat der Wägung keinen Einfluss habe, ist bereits in meiner früheren Abhandlung über die Empfindlichkeit der Brücken-Wagen (§. 2) auseinandergesetzt worden. Hier bemerke ich nur, dass es nicht darauf ankommt, dass bei der Normal-Stellung der Wage die Hub-Kette physisch senkrecht sei. Diese Voraussetzung ist blos gemacht worden, um die Betrachtung zu vereinfachen. Durch eine Abweichung derselben von dieser Richtung, erleidet, bei richtiger Länge derselben, nur die Spannung der Leitungs-Ketten und Hub-Kette eine Veränderung, aber nicht das Gewicht, welches der Last das Gleichgewicht hält. Diese Veränderung bleibt in sehr kleinen Grenzen, wenn die Abweichung der Hub-Kette von der senkrechten Richtung nur so klein ist, als erforderlich ist, um das Gleichgewicht der Wage zu einem stabilen zu machen. In Bezug auf die Abhängigkeit der Empfindlichkeit der Waage von der Stellung derselben will ich hier nachträglich und schliesslich bemerken, welcher geometrische Sinn den Constructionen einer Brücken-Wage unterzulegen sei, deren Angaben unabhängig von der Stellung der Wage sind.

Bei den Schwingungen einer Wage wird der Schwerpunkt der Last und des Gewichts im Allgemeinen eine krumme Linie beschreiben, welche die Schwerpunkts-Curve heissen mag. Bei der stabilen Gleichgewichts-Lage muss dieser Schwerpunkt auf der krummen Linie einen tiefsten Punkt einnehmen. Soll nun das Gleichgewicht unabhängig von der Stellung sein, so muss auch der tiefste Punkt jener krummen Linie unabhängig von ihrer Stellung sein. Dieses scheinbare Paradoxon löst sich dadurch auf, dass man annimmt, die Schwerpunkts-Curve bestehe aus zwei Zweigen, die sich im tiefsten Punkte unter einem gewissen Winkel schneiden. In der That lässt sich aber nachweisen, dass die Schwerpunkts-Curve an dem bezeichneten Punkte einen Rückkehr-Punkt hat, und dass die beiden Zweige derselben eine gemeinschaftliche Tangente haben. Dieselbe ist mithin von der Gestalt $a\ b\ c$, Fig. V. Denkt man sich, ein materieller Punkt befinde sich zwischen den beiden Zweigen $a\ b$ und $b\ c$, so wird er stets die Lage bei b annehmen, so lange das Curven-Element bei b von b aus nach oben, in Bezug auf den Horizont, gerichtet ist. Wie also die Lage des materiellen Punktes in der Curve $a\ b\ c$ innerhalb gewisser Grenzen unabhängig von der Stellung der Curve ist, so kann auch das System einer Brücken-Wage, an welcher sich Last und Gewicht das Gleichgewicht halten, unabhängig von der Stellung der Wage sein. — Die Nachweisung dieses Verhaltens kann ohne Schwierigkeit durch die allgemeine Formel der Empfindlichkeit (§. 15) der angeführten Abhandlung geschehen.

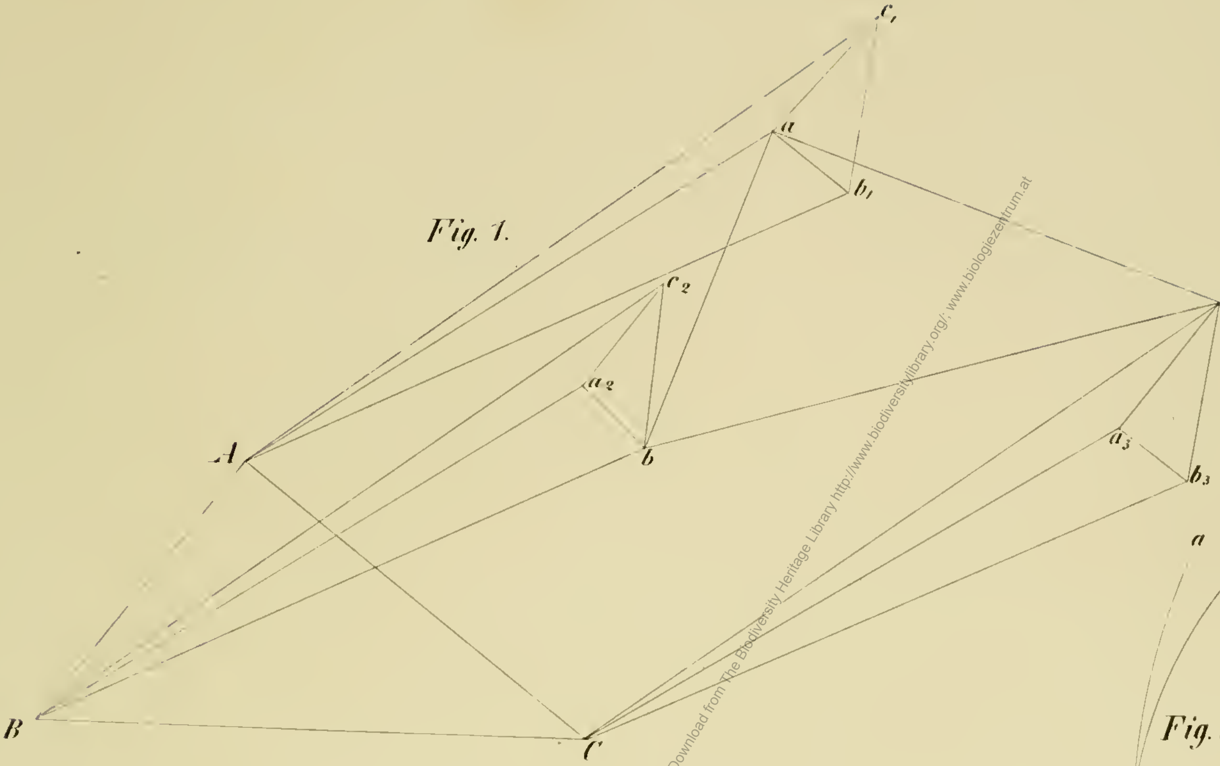

Fig. 1.

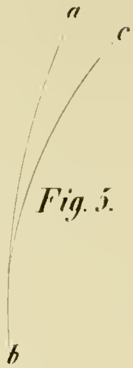

Fig. 5.

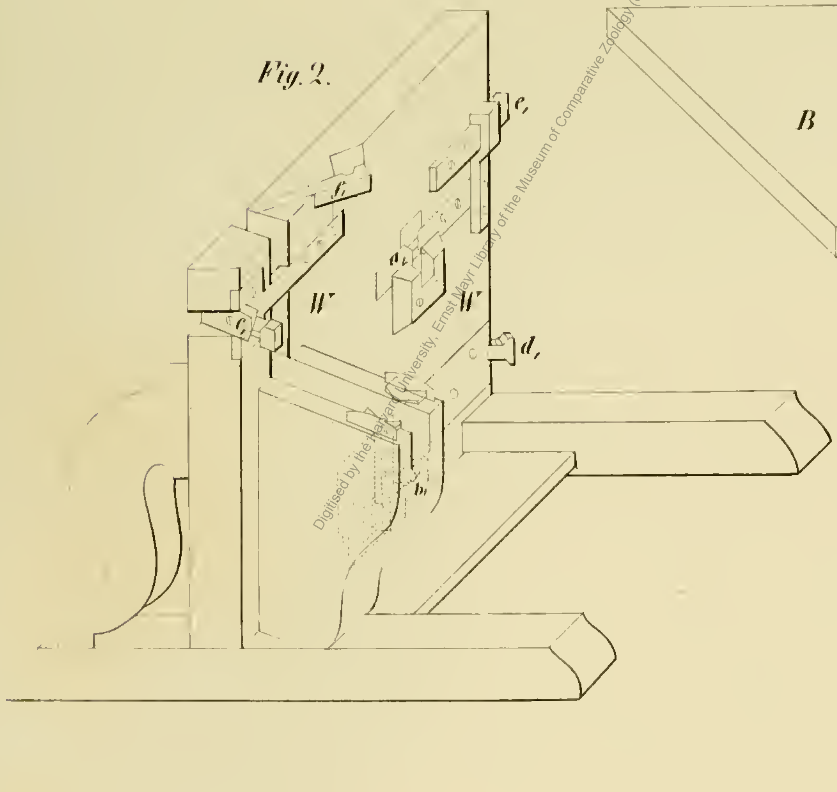

Fig. 2.

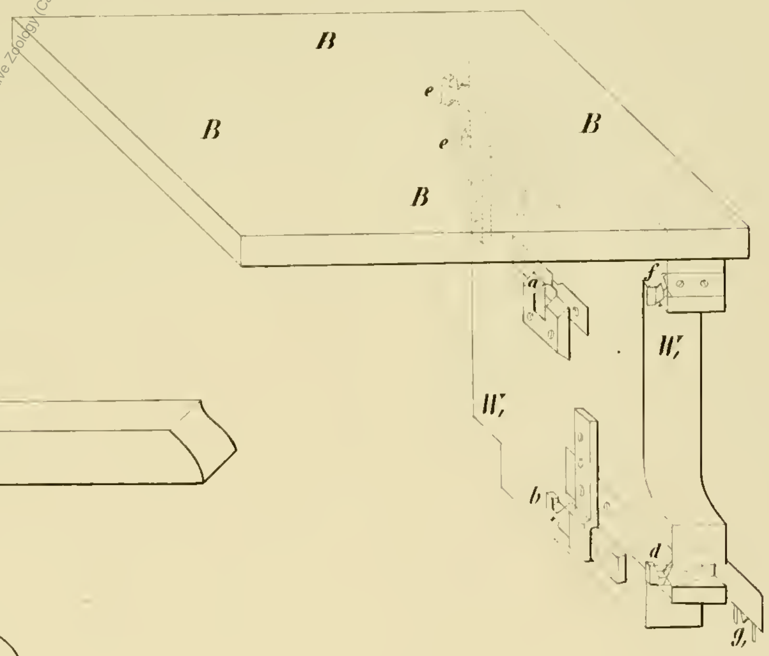

Fig. 3.

Lith. u. gedr. in d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei.

Fig. 8.

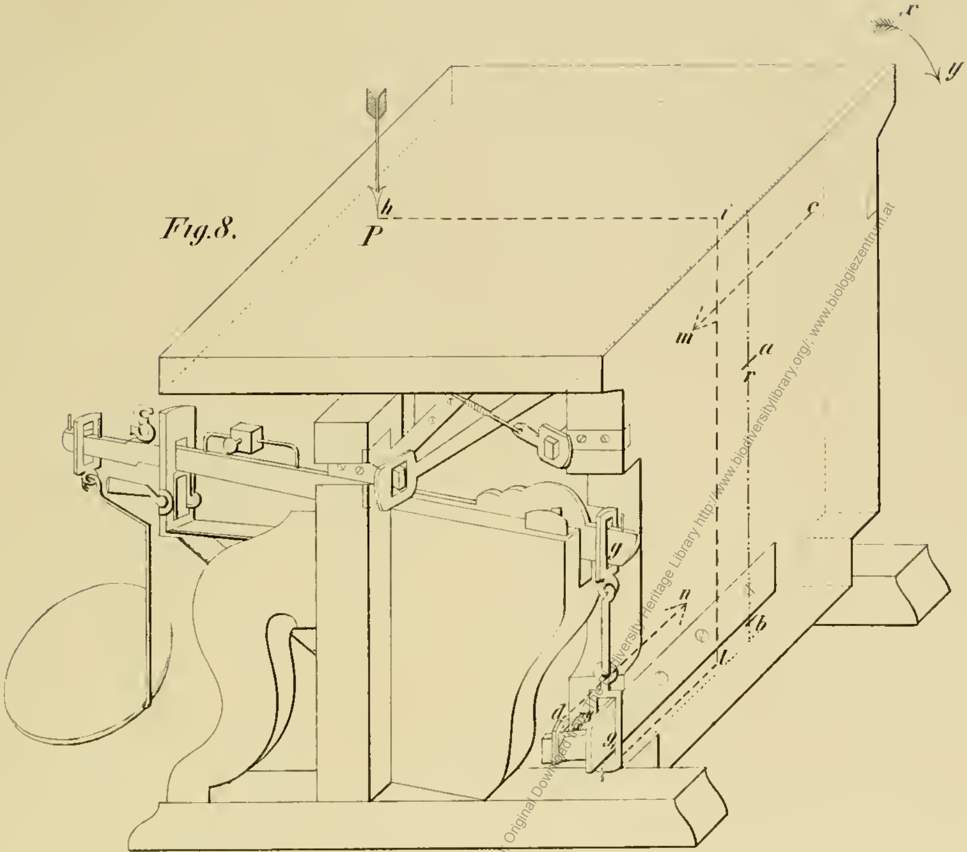

Fig. 6.

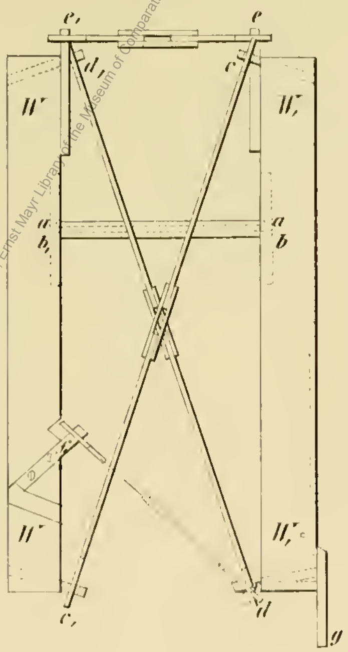

Fig. 7.

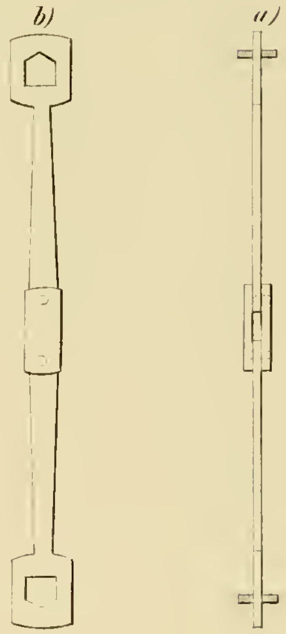

Fig. 1.