XVII.

Neue Methode beobachtete Azimuthe zu reduciren.

Von

J. Soldner.

Bey der Beobachtung des Azimuths eines irdischen Objectes kommt es im allgemeinen auf folgendes an: Man mifst den horizontalen Winkel zwischen dem Objecte und einem Gestirne, und bemerkt zugleich an einer Uhr den Zeitmoment, in welchem der Winkel gemessen worden ist; berechnet man nun für diesen Moment das Azimuth des Gestirns, d. h. den horizontalen Winkel zwischen dem Meridiane und dem Gestirn: so wird die Summe oder Unterschied dieser zwey Winkel das Azimuth des Objectes seyn.

Bedient man sich zu den Beobachtungen eines Repetitions-Instruments, so wird der Winkel, während eines gewissen Zeitraums, öfter wiederholt, und auch mit einem Instrumente, welches nicht repetirt, mufs der Winkel, wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, öfter gemessen werden; man mufs also das Azimuth des

des Gestirns, da es für jeden Zeitmoment anderst ist, eben so oft berechnen, was, wie bekannt, eine abschreckend mühsame Arbeit ist. Wenn sich das Azimuth des Gestirns gleichförmig änderte, d. h. seine Aenderung der Zeit proportional wäre, so würde das Mittel des gemessenen Bogens auch dem Mittel der Beobachtungszeiten entsprechen, und man könnte eine beliebige Anzahl Beobachtungen zusammen und das Mittel daraus nehmen; aber das ist nicht der Fall. Delambre klagt in seinen, im Fache der höhern Geodäsie, classischen Werken über diesen Umstand, der die Berechnung der Azimuthe so sehr erschwert, und giebt ein Paar indirecte Mittel an, wodurch man bey der Berechnung mehrere Beobachtungen zusammen fassen könnte; bemerkt aber selbst, dafs sie, wegen ihrer Weitläuftigkeit, in der Ausübung nicht anwendbar wären, und beschränkt sich am Ende darauf, dafs er nur vier Winkel zusammen nimmt, so dafs also die Rechnung noch äufserst mühsam bleibt, wenn man viele Beobachtungen gemacht hat. (S. Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien und Base du système métrique, Tome II. page 120.)

Da nun bisher kein Mittel gefunden worden ist die Sache zu vereinfachen, so hat der Freyherr v. Zach vorgeschlagen, man soll das Azimuth messen, während das Gestirn in der Nähe des Meridians ist, anstatt bey dessen Auf- oder Untergange; weil dann die Veränderung des Azimuths viel gleichförmiger ist, und daher mehr Beobachtungen ohne Gefahr zusammengenommen werden können. (Monatl. Correspondenz, Band 25 Seite 544.)

Diese Idee ist an sich sehr richtig; aber die Beobachtung des Azimuths, während das Gestirn im Meridiane ist, steht der, während seines Auf- oder Unterganges, in Beziehung auf die erreichbare Genauigkeit, welche doch der Hauptzweck ist, bedeutend nach. Denn 1stens weifs jeder, der mit Horizontalkreisen oder Theodoliten beobachtet hat, wie schwer es hält dem Fernrohre eine genaue Vertical-

cal-Bewegung zu geben, und dafs daher die Winkel etwas unsicher werden, so bald die Objecte sehr hoch stehen, welches bey der Methode des Hrn. v. Zach fast immer der Fall ist, da man gewöhnlich die Sonne beobachten mufs. Und dann hat 2tens, und was die Hauptsache ist, ein Fehler in der Zeitbestimmung im Meridiane viel gröfsern Einflufs auf das Azimuth als am Horizonte. Man findet leicht, dafs ein Fehler von einer Zeitsecunde einen Fehler im Azimuthe verursacht, am Horizonte von

$$15''.\ \sin.\ (\text{Polhöhe})$$

und im Meridiane

$$15''.\ \frac{\cos.\ (\text{Declination})}{\sin.\ (\text{Zenitdistanz})};$$

woraus sich ergiebt, dafs, wenn das Gestirn im Aequator ist, unter einer Polhöhe von 45° der Fehler im ersten Falle 10″,6, im zweyten 21″,2 beträgt und also noch einmal so grofs ist.

Man sieht hieraus, dafs für die Bestimmung der Azimuthe die Beobachtung der unter- und aufgehenden Sonne (wodurch etwanige Fehler in Polhöhe und Declination unwirksam gemacht werden) viel vortheilhafter ist als Meridian-Beobachtungen. Aber demungeachtet behält ein geringer Fehler in der Zeitbestimmung freylich immer noch einen bedeutenden Einflufs und ein Geodäte, der selten in der Lage ist eine so genaue Zeitbestimmung erhalten zu können, als man auf einer Sternwarte verlangen kann, thut wohl am besten sein Azimuth durch den Polarstern zu bestimmen, wo ungefähre Zeitangaben schon hinreichend sind, und die Bewegung des Fernrohrs nur allein ungünstig wirken kann.

Indessen, da man auch ohne Sternwarte und Passage-Instrument doch zuweilen in dem Fall ist eine genaue Zeitbestimmung zu erhalten, so würde es immer nicht gut seyn diese Methode gänzlich zu vernachlässigen; ich habe daher auf Mittel gedacht ihre Anwendung zu erleichtern und Folgendes am zweckmäfsigsten gefunden.

Das

Das Azimuth eines Gestirns ist Function der Polhöhe des Orts, der Declination und des Stundenwinkels, oder der Zeit. Nimmt man nun einen gewissen Zeitmoment willkührlich an (die Folge wird lehren, dafs es am vortheilhaftesten ist, dafür das Mittel aller Beobachtungszeiten zu nehmen), so lassen sich, durch analytische Ausdrücke, die aufser diesem Momente gemessenen Winkel auf denjenigen reduciren, welcher im Momente selbst Statt gefunden haben würde. Dadurch wird also die Reduction der gemessenen Azimuthe auf ein Verfahren gebracht, welches dem der Reduction gemessener Zenitdistanzen in der Nähe des Meridians ganz analog und daher jedem practischen Astronomen geläufig ist.

Wir zählen, wie gewöhnlich, die Stundenwinkel vom Meridiane an gegen Westen bis zu 360° oder 24 St., und die Azimuthe vom südlichen Meridiane über Westen, Norden etc., d. h. von der Linken zur Rechten, bis 360°. Heifst nun an dem gegebenen, oder vielmehr willkührlich angenommenen Zeitmomente der Stundenwinkel des Gestirns t, seine nördliche Declination δ, sein Azimuth α und Polhöhe des Orts φ, so ist bekanntlich

$$\cot.\alpha = \sin.\varphi \cot.t - \cos.\varphi \tang.\delta \operatorname{cosec}.t.$$

Wenn im Augenblicke einer Beobachtung der Stundenwinkel um Δt gröfser ist als t, so wird das Azimuth um eine Gröfse $\Delta\alpha$ gröfser seyn als α und man hat, da man die Declination constant annehmen kann, nach dem Taylor'schen Theoreme

$$\Delta\alpha = \Delta t \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2} \cdot \frac{dd\alpha}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \text{etc.}$$

Es kommt also nur darauf an die Differentialverhältnisse zu entwickeln. Durch den obigen Ausdruck für α erhält man

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin.^2\alpha}{\sin.^2 t} (\sin.\varphi - \cos.\varphi \tang.\delta \cos.t).$$

Da

Da hier auch α von t abhängt, so würden die fortgesetzten Differentiationen äufserst complicirt werden, und diefs würde nicht blofs eine mühsame Rechnung verursachen, sondern es würden auch die Endresultate so zusammengesetzt erscheinen, dafs es schwer hielte sie auf ihre einfachste Form zurück zu führen; wir müssen daher suchen diesen Ausdruck abzuändern. Wenn z die Zenitdistanz des Gestirns, so hat man bekanntlich

$$\frac{\sin.\alpha}{\sin.t} = \frac{\cos.\delta}{\sin.z}$$

und

$$\cos.z = \sin.\varphi \sin.\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.t.$$

Setzt man nun in unserm Differential-Verhältnisse für $\frac{\sin.\alpha}{\sin.t}$ seinen Werth und anstatt $\cos.t$ dessen Werth aus der letzten Formel, so wird

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin.\varphi - \sin.\delta \cos.z}{\sin.^2 z}.$$

Multiplicirt man hier $\sin.\varphi$ mit $\cos.^2 \frac{1}{2}z + \sin.^2 \frac{1}{2}z$ und setzt $\cos.^2 \frac{1}{2}z - \sin.^2 \frac{1}{2}z$ anstatt $\cos.z$, so wird

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin.\varphi + \sin.\delta}{2(1+\cos.z)} + \frac{\sin.\varphi - \sin.\delta}{2(1-\cos.z)}.$$

Hieraus erhält man ferner

$$\frac{dd\alpha}{dt^2} = \left\{\frac{\sin.\varphi + \sin.\delta}{(1+\cos.z)^2} - \frac{\sin.\varphi - \sin.\delta}{(1-\cos.z)^2}\right\} \cdot \frac{\sin.z \,.\, dz}{2\,dt}.$$

Nun ergiebt sich aber durch den Ausdruck für $\cos.z$

$$\frac{\sin.z \,.\, dz}{dt} = \cos.\varphi \cos.\delta \sin.t$$

und

und diefs substituirt, wird

$$\frac{dd\alpha}{dt^2} = \tfrac{1}{2}\cos.\varphi\cos.\delta\sin.t\left\{\frac{\sin.\varphi+\sin.\delta}{(1+\cos.z)^2} - \frac{\sin.\varphi-\sin.\delta}{(1-\cos.z)^2}\right\}.$$

Durch nochmaliges Differentiiren, und indem man wieder für $\sin.z.dz$ seinen Werth setzt, erhält man

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \cos.^2\varphi\cos.^2\delta\sin.^2t\left\{\frac{\sin.\varphi+\sin.\delta}{(1+\cos.z)^3} + \frac{\sin.\varphi-\sin.\delta}{(1-\cos.z)^3}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}.\cos.\varphi\cos.\delta\cos.t\left\{\frac{\sin.\varphi+\sin.\delta}{(1+\cos.z)^2} - \frac{\sin.\varphi-\sin.\delta}{(1-\cos.z)^2}\right\}.$$

Bekanntlich ist $1+\cos.z = \sin.z\cot.\frac{1}{2}z$ und $1-\cos.z = \sin.z\tang.\frac{1}{2}z$ und man erhält endlich:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta t}{2\sin.z}\cdot\left\{(\sin.\varphi+\sin.\delta)\tang.\tfrac{1}{2}z + (\sin.\varphi-\sin.\delta)\cot.\tfrac{1}{2}z\right\}$$

$$+\frac{\Delta t^2}{4}\cdot\frac{\cos.\varphi\cos.\delta\sin.t}{\sin.^2z}\left\{(\sin.\varphi+\sin.\delta)\tang.^2\tfrac{1}{2}z-(\sin.\varphi-\sin.\delta)\cot.^2\tfrac{1}{2}z\right\}$$

$$+\frac{\Delta t^3}{6}\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\cos.^2\varphi\cos.^2\delta\sin.^2t}{\sin.^3z}\left\{(\sin.\varphi+\sin.\delta)\tang.^3\tfrac{1}{2}z+(\sin\varphi-\sin\delta)\cot^3\tfrac{1}{2}z\right\}\\ \dfrac{\cos.\varphi\cos.\delta\cos.t}{2\sin.^2z}\left\{(\sin.\varphi+\sin.\delta)\tang.^2\tfrac{1}{2}z-(\sin.\varphi-\sin.\delta)\cot.^2\tfrac{1}{2}z\right\}\end{array}\right\}$$

Wenn man für den Augenblick einer Beobachtung, in welchem der Stundenwinkel um Δt gröfser war als t, für welchen man α berechnet hat, den hieraus erhaltenen Werth von $\Delta\alpha$ zu α addirt, so erhält man das Azimuth des Gestirns für den Augenblick der Beobachtung; oder wenn man $\Delta\alpha$ von dem beobachteten Winkel abzieht, erhält man ihn so wie er zur Zeit des Stundenwinkels t Statt gefunden haben würde. Da mir das erstere für die Folge einfacher zu seyn scheint, so werde ich es dabey lassen. Es folgt also, dafs wenn man für jede Beobachtungszeit $\Delta\alpha$ berechnet und

das

das Mittel aller $\Delta\alpha$ zu α addirt, so wird man dasjenige Azimuth des Gestirns erhalten, welches dem gemessenen Mittelbogen entspricht. Der Werth von t, oder der Zeitpunct, von welchem man ausgehen will, ist willkührlich; nimmt man aber dafür das Mittel aller Beobachtungszeiten, so wird, weil die Δt vor dem angenommenen Zeitpuncte negativ sind, die Summe aller positiven Δt der Summe aller negativen gleich seyn, und daher das erste Glied der obigen Reihe, welches natürlich immer das gröfste ist, sich beständig aufheben.

Wir wollen nun suchen den Formeln eine solche Einrichtung zu geben, dafs sie für den Gebrauch leicht zu übersehen und bequemer werden. Setzt man

$$M = \frac{\cos.\varphi \cos.\delta \sin.t}{2 \sin.^2 z} \cdot \left\{ (\sin.\varphi + \sin.\delta) \operatorname{tang.}^2 \tfrac{1}{2} z - (\sin.\varphi - \sin.\delta) \cot.^2 \tfrac{1}{2} z \right\}$$

$$N = \frac{\cos.^2\varphi \cos.^2\delta \sin^2 t}{\sin.^3 z} \cdot \left\{ (\sin.\varphi + \sin.\delta) \operatorname{tang.}^3 \tfrac{1}{2} z + (\sin.\varphi - \sin.\delta) \cot.^3 \tfrac{1}{2} z \right\}$$

$+ M \cot.t$, so wird, in Secunden,

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta t^2}{2 \sin.1''} \cdot M + \frac{\Delta t^3}{6 \sin.1''} \cdot N .$$

Δt ist hier in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, durch die Beobachtungen aber ist es immer in Zeit gegeben; der Ausdruck mufs daher so abgeändert werden, dafs man die gegebenen Δt unmittelbar gebrauchen kann. Anstatt $\frac{1}{2}\Delta t^2$ kann man setzen $2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta t$; der daraus entstehende Fehler wird nur von der Ordnung Δt^4 und daher unmerklich. Es wird also das erste Glied

$$\frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin.1''} \cdot M ,$$

wovon der mit M multiplicirte Theil, für die verschiedenen Δt in Zeit, durch Delambre's Reductions-Tafeln der Zenitdistanzen

 schon

schon gegeben ist *). Für den zweyten Theil, oder Δt^3, hat man noch keine Tafel; dieser Theil ist aber immer sehr klein, so dafs es dabey nicht nöthig ist weiter als auf ganze, höchstens zehentel Zeit-Minuten zu gehen. Bedeutet daher $\Delta t'$ Zeit-Minuten, so ist

$$\Delta t^3 = (900 \,.\, \sin.1'')^3 \,.\, \Delta t'^3,$$

oder, um zu grofse Zahlen zu vermeiden,

$$\Delta t^3 = (9000 \,.\, \sin.1'')^3 \,.\, \left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3.$$

Wir erhalten also, in Secunden,

$$\Delta\alpha = M.\frac{2\sin.^2\frac{1}{2}\Delta t}{\sin.1''} + 2,856\,.\,N.\left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3.$$

Man wird nun bey der vollständigen Berechnung eines beobachteten Azimuths auf folgende Weise zu verfahren haben: Man sucht erst das Mittel aller Beobachtungszeiten und dafür den Stundenwinkel t und Declination δ. Damit berechnet man die Hilfswinkel β und γ durch

$$\text{tang.}\beta = \frac{\sin.\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\cos.\frac{1}{2}(\varphi+\delta)} \cdot \cot.\tfrac{1}{2}t$$

$$\text{tang.}\gamma = \frac{\cos.\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\sin.\frac{1}{2}(\varphi+\delta)} \cdot \cot.\tfrac{1}{2}t,$$

wo nachher, wie bekannt, $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$. Dann

$$\sin.z = \frac{\cos.\delta \sin.t}{\sin.(\beta+\gamma)}$$

und

*) Man findet diese sehr nützlichen Tafeln auch in meiner Abhandlung: Bestimmung des Azimuths von Altomünster etc., wo ich sie erweitert habe abdrucken lassen. Das hier in Rede stehende ist dort in der ersten Tafel, von Seite 50 an, enthalten.

und damit

$$M = \frac{\cos.\varphi \cos.\delta \sin.t}{2 \sin.^2 z} \cdot \left\{ (\sin.\varphi + \sin.\delta) \operatorname{tang.}^2 \tfrac{1}{2} z - (\sin.\varphi - \sin.\delta) \cot.^2 \tfrac{1}{2} z \right\}$$

$$N = \frac{\cos.^2\varphi \cos.^2\delta \sin.^2 t}{\sin.^3 z} \cdot \left\{ (\sin.\varphi + \sin.\delta) \operatorname{tang.}^3 \tfrac{1}{2} z + (\sin.\varphi - \sin.\delta) \cot.^3 \tfrac{1}{2} z \right\}$$

$$+ M \cot.t .$$

Bedeutet nun Σ die Summe aller Zahlen, welche, nach Anleitung des vorhergehenden, den verschiedenen Δt entsprechen und n die Anzahl der Beobachtungen, so ist

$$\Delta a = \frac{M}{n} \cdot \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin.1''} + \frac{2,856 \,.\, N}{n} \cdot \Sigma \left(\frac{\Delta t'}{10} \right)^3 .$$

Und wenn endlich noch A der Mittelbogen des gemessenen Winkels, unter der Voraussetzung, dafs während der Messung das terrestrische Object links vom Gestirne war, so hat man, vom südlichen Meridiane gezählt, das gesuchte

$$\text{Azimuth} = 180^\circ - \beta - \gamma - A + \Delta a .$$

Ueber diese Formeln ist zu bemerken, dafs blofs die Winkel β, γ und etwan z scharf berechnet werden müssen; in den Ausdrücken für M und N braucht man die trigonometrischen Functionen, $\operatorname{tang.}\frac{1}{2} z$ ausgenommen wegen der höhern Potenzen, nur auf ganze Minuten, und rechnet, so wie in dem Werthe von Δa, mit kleinen Logarithmen-Tafeln von fünf Decimalstellen. In den Werthen für M und N lassen sich bekanntlich, wenn man es bequemer findet, die Summen $\sin.\varphi + \sin.\delta$ und $\sin.\varphi - \sin.\delta$ in Producte verwandeln; auch die schon gegebenen Hilfswinkel β und γ liefsen sich dabey benutzen, aber durch letzteres könnte leicht Verwechslung entstehen. Auf die Zeichen hat der Rechner sorgfältig zu sehen; aber auch durch sie allein giebt sich alles von selbst, so dafs er nicht nöthig hat eine Figur zu entwerfen. Im allgemeinen sieht man, dafs bey Beobachtungen in der östlichen Halbkugel β und γ

nc-

negativ werden, weil t im dritten oder vierten Quadranten ist. M wird dann auch negativ, aber nicht N. Wenn δ gröſser als φ und z bedeutend kleiner als 90°, gehen auch Verwechslungen von Zeichen vor, welche nicht übersehen werden dürfen. Wenn das terrestrische Object rechts von dem Gestirne steht, ist das Zeichen von A umzukehren. In dem Werthe von $\Delta\alpha$ richtet sich das Zeichen des ersten Theils nach dem von M, im zweyten Theile aber nach den Zeichen von N und dem der algebraischen Summe $\Sigma\left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3$.

Um die Rechnung zu erläutern, wollen wir ein fingirtes Beyspiel vornehmen; weil man ein solches erstens so einrichten kann, daſs es für die Methode besonders ungünstig wird, und weil dann dadurch, daſs die Winkel berechnet anstatt gemessen worden, sie vollkommen genau sind, und daher einen sichern Probierstein für die Methode geben.

Ich nehme an, man habe an einem Orte dessen Polhöhe $\varphi = 48°$ an folgenden Zeiten $6^u\ 55'$, $7^u\ 0'$, $7^u\ 5'$, $10'$, $20'$ und $30'$, Abends wahre Sonnenzeit, den Azimuthal-Winkel zwischen einem irdischen Objecte, dessen Azimuth 20°, und dem Mittelpuncte der Sonne gemessen. Indem ich nun $\delta = 16°$ und constant annahm, habe ich die sechs Azimuthe der Sonne, welche obigen Zeiten entsprechen, berechnet, von jedem 20° abgezogen, und so die sechs Winkel zwischen dem Objecte und der Sonne in Summa gefunden 561° 16′ 20″,4. Diese Summe würde man gefunden haben, wenn man den Winkel sechsmal repetirt hätte; folglich wäre der einfache gemessene Mittelbogen $A = 93°\ 32'\ 43'',4$. Dieſs also die Beobachtung.

Nun ist das Mittel obiger Zeiten $7^u\ 10'$; das giebt $t = 107°\ 30'$ und damit

$\beta = 13^\circ\ 24'\ 16'',6$, $\gamma = 53^\circ\ 3'\ 45'',2$,
$z = 89^\circ\ 20'\ 40''$ und endlich
$\log. M = 9,20063 +$ $\log. 2,856 . N = 0,1570 +$

Nun steht die weitere Rechnung so:

Zeiten. $7^u\ 10'$	$\Delta t'$	$\frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin. 1''}$	$\left\{\frac{\Delta t'}{10}\right\}^3$
$6^u\ 55'$	$-15'$	$441'',6$	$-3,4$
$7\ \ 0$	-10	$196,3$	$-1,0$
$-\ 5$	-5	$49,1$	$-0,1$
$-\ 10$	0	$0,0$	$0,0$
$-\ 20$	$+10$	$196,3$	$+1,0$
$-\ 30$	$+20$	$784,9$	$+8,0$
		$1668,2$	$+4,5$
		$= \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin. 1''}$	$= \Sigma \left\{\frac{\Delta t'}{10}\right\}^3$

Hieraus erhält man:

$$\frac{M}{n} \cdot \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin. 1''} = + 44'',13$$

$$\frac{2,856\, N}{n} \cdot \Sigma \left\{\frac{\Delta t}{10}\right\}^3 = + \quad 1,08$$

$$\Delta \alpha = \quad 45,21,$$

und

$$180^\circ - \beta - \gamma = 113^\circ\ 31'\ 58'',2$$
$$- A = -93\ \ 32\ \ 43,4$$
$$19\ \ 59\ \ 14,8$$
$$+ \Delta \alpha = \quad + 45,2$$
$$\text{Azimuth} = 20\ \ 0\ \ 0,0$$

Folg-

Folglich vollkommen wie es seyn mufs; woraus hervorgeht, dafs die folgenden Glieder unserer Reihe, welche von höhern Ordnungen sind als die dritte, unmerklich sind, und dafs man also nach unserer Methode ohne Bedenken eine Reihe Beobachtungen zusammennehmen kann, welche während eines Zeitraums von 40 und mehr Minuten gemacht worden sind.

Das zweyte Glied von $\Delta\alpha$, welches von Δt^3 abhängt, ist hier sehr klein und wird bey wirklichen Beobachtungen fast immer vernachlässigt werden können. Denn es ist klar, dafs die algebraische Summe aller $\left\{\frac{\Delta t'}{10}\right\}^3$ null wird, wenn die Zwischenzeiten der Beobachtungen gleich sind; und das ist bey wirklichen Beobachtungen gewöhnlich nahe der Fall und nicht wie hier, wo sie absichtlich sehr ungleich und von 5′ und 10′ angenommen worden sind. Wenn man diefs Glied vernachlässigen kann, so kann man auch noch die Berechnung von z dadurch ersparen, dafs man M nach der Formel

$$M = \frac{\cos.\varphi \sin.^2(\beta+\gamma)}{\cos.\delta \sin.t}\left\{\frac{\cos.\varphi \sin.2(\beta+\gamma)}{\cos.\delta \sin.t} - \sin.\delta\right\}$$

berechnet, welche sich durch bekannte Verwandlungen und Substitutionen aus der vorigen ableiten läfst.

Zusätze.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern, dafs, wenn man mit einem Theodoliten oder Horizontal-Kreise nicht abwechselnd beyde Sonnenränder nimmt, wodurch man den Mittelpunct erhält, sondern immer den nämlichen und am Ende an den gemessenen Mittelbogen den Sonnenhalbmesser anbringt, man diesen nicht so nehmen dürfe, wie er in den Tafeln steht; sondern durch $\sin.z$ dividirt oder in dem Verhältnisse $\sin.z : 1$ vergröfsert, wovon sich der Grund leicht einsehen läfst.

Wir

Wir haben im vorhergehenden keine Rücksicht auf die Veränderung der Declination der Sonne während der Beobachtungen genommen. Da die Veränderung der Declination gegen die des Stundenwinkels sehr klein ist, indem sie im Maximo noch nicht $\frac{1}{900}$ von letzterer beträgt, so läfst sich in der That voraussehen, dafs sie auf die Veränderung des Azimuths keinen merklichen Einflufs haben wird. Um indessen in keiner Rücksicht einen Zweifel übrig zu lassen, wollen wir den Beweis hiervon noch nachholen.

Wenn man annimmt, dafs δ um $\Delta\delta$ zunimmt, während der Stundenwinkel um Δt zunimmt, so würden, bey einer vollständigen Entwicklung des Werthes von $\Delta\alpha$, die von $\Delta\delta$ abhängigen Glieder von folgenden Ordnungen gewesen seyn

$$\Delta\delta,\ \Delta t\,.\,\Delta\delta,\ \Delta\delta^2 \text{ etc.}$$

Das erste würde in jedem Falle null seyn. Denn da die Veränderung der Declination hier durchaus gleichförmig angenommen werden kann, und wir von dem Mittel der Beobachtungszeiten ausgehen, so würde, eben so wie beym Stundenwinkel, die algebraische Summe aller Glieder von der Ordnung $\Delta\delta$ nothwendig null werden. Das Glied von der Ordnung $\Delta\delta^2$ wird immer unmerklich seyn; es bleibt also nur noch $\Delta t\,.\,\Delta\delta$ übrig. Um dies Glied zu finden braucht es weiter nichts als den Ausdruck $\Delta t \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ nach δ zu differentiiren. Dieser Ausdruck ist, nach dem vorhergehenden,

$$\frac{\Delta t}{2}\left\{\frac{\sin.\varphi + \sin.\delta}{1 + \cos.z} + \frac{\sin\varphi - \sin.\delta}{1 - \cos.z}\right\}$$

und differentiirt wird man erhalten

$$\Delta t\,.\left\{\frac{M\,.\sin.z\,.\,dz}{\cos.\varphi\cos.\delta\sin.t} - \frac{\cos.\delta\cos.z\,.\,d\delta}{\sin.^2 z}\right\},$$

wo M die vorige Bedeutung hat. Nun erhält man durch den oben angegebenen Werth für $\cos.z$

$$\sin.z\,.\,dz = (\cos.\varphi\sin.\delta\sin.t - \sin.\varphi\cos.\delta)\,d\delta\,.$$

 Dies

Dies substituirt und anstatt $d\delta$ $\Delta\delta$ gesetzt, hat man

$$\Delta t . \Delta\delta \left\{ (\text{tang.}\delta \cos.t - \text{tang.}\varphi) \frac{M}{\sin.t} - \frac{\cos.\delta \cos.z}{\sin.^2 z} \right\} .$$

Δt ist hier in Theilen des Halbmessers zu nehmen; bedeutet daher wie oben $\Delta t'$ Zeitminuten, so wird seyn $\Delta t = 15 . \Delta t' . \sin.1'$, und wenn die Zunahme der Declination in einer Minute ε Secunden, so wird $\Delta\delta = \varepsilon . \Delta t'$ seyn und daher endlich das Gesuchte

$$- \varepsilon . \Delta t'^2 . \sin.15' . \left\{ (\text{tang.}\varphi - \text{tang.}\delta \cos.t) \frac{M}{\sin.t} + \frac{\cos.\delta \cos.z}{\sin.^2 z} \right\} .$$

Setzen wir nun unsere obigen Werthe und nehmen $\varepsilon = 0'',7$ an, welches ungefähr die Veränderung der Declination bey einem Werthe von $\delta = 16°$ ist, so finden wir

$$- 0'',000642 . \Delta t'^2$$

und indem man für $\Delta t'^2$ die Summe der Quadrate der in unserm Beyspiele angegebenen Δt, in Minuten, setzt und mit der Anzahl der Beobachtungen dividirt, erhält man $- 0'',09$; welches unmerklich ist. Wenn die Declination der Sonne sehr klein ist, wird zwar ε etwas gröfser und erreicht nahe eine Secunde; aber in diesem Falle wird der constante Factor sehr klein, wie man sich leicht überzeugen kann.

Wenn man die Azimuthe mit einem Borda'schen Kreise und daher die schiefen Winkel mifst, welche erst auf den Horizont gebracht werden müssen, so könnte man die Reduction auf eine ähnliche Art behandeln, wie ich hier für den Theodoliten gethan habe. Aber die Formeln würden weitläuftiger werden und, wie ich glaube, entbehrlich seyn; denn heut zu Tage, wo unser Reichenbach die Theodoliten so sehr vervollkommnet und zum Repetiren eingerichtet hat, wird wohl schwerlich mehr ein practischer Geodäte terrestrische Winkel, und mithin auch Azimuthe, mit einem Borda'schen Kreise messen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1813

Band/Volume: 04

Autor(en)/Author(s): Soldner Johann Georg von

Artikel/Article: XVII. Neue Methode beobachtete Azimuthe zu reduciren. 365-378