Figur 9—11. *Naetrocymbe fuliginea* Körber.

Fig. 9. Ein Stück des krustenförmigen Thallus mit einem Perithecium. Vertikal-Schnitt.

Fig. 10. Stück der Perithecien-Wand mit Hinweglassung der subhymenialen Schicht.

Fig. 11. Isolirte Hyphen aus dem schollenförmigen Thallus.

Bemerkungen über rationale und irrationale Divergenzen.

Von Julius Wiesner.

(Schluss.)

Dass die in den natürlichen Blattstellungen zum Ausdrucke kommenden, so oft angestaunten Symmetrieverhältnisse im Grunde nur auf der Constanz der Divergenzen und keineswegs auf der absoluten Grösse der letzteren beruhen, lässt sich durch Rechnung am überzeugendsten darlegen, aber auch schon durch die unmittelbare Anschauung klar machen. Man braucht nur auf eine Schraubenlinie, die man als Grundspirale annimmt, Puncte als Blattinsertionen in gleichen Entfernungen aufzutragen — die Grösse der Entfernung ist ganz gleichgültig — um sich zu überzeugen, dass man als Resultat ein „Stellungsverhältniss" mit allen seinen Eigenthümlichkeiten bekömmt.

Eine Stelle in Schimper's bekannter Schrift über *Symphytum Zeyheri* [1]), lässt mit Bestimmtheit annehmen, dass er bereits wusste, dass auf der Constanz der Divergenzen die Blattstellungsverhältnisse beruhen. Desshalb muss es befremden, dass die neueren Schriftsteller diese naheliegende, aber noch keineswegs selbstverständliche geometrische Ursache des Zustandekommens der Blattstellungsverhältnisse nicht hervorheben. —

Während Hofmeister in seiner Morphologie [2]) im Sinne A. Braun's den Werth der Kettenbrüche für das Verständniss des Zusammenhanges der den einzelnen Reihen angehörigen Divergenzen anerkennt, so lässt er doch die von den Brüdern Bravais erschlossenen irrationalen Divergenzen, die sich am einfachsten aus den Kettenbrüchen ableiten lassen, und eine Consequenz der Kettenbruchtheorie sind, nicht gelten.

Dass rationale Divergenzen in der Natur vorkommen, also z. B. die Werthe $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$ . . . . . ist gewiss und es sind ja selbst von L. und A. Bravais Fälle angeführt worden, welche

---

1) p. 52.

2) p. 457.

Universitätsbibliothek Regensburg urn:nbn:de:bvb:355-ubr03641-0141-5

diess ausser Zweifel stellen[1]). Allein ebenso gewiss ist es, dass in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle bei Aufsuchung der Stellungsverhältnisse präcise die Anwesenheit rationaler Divergenzen sich nicht erweisen lässt; so z. B. an den Zapfen der Coniferen, an reich beblätterten Hüllkelchen der Compositen etc. wo man immer in Zweifel ist, welches (rationale) Stellungsverhältniss hier wirklich stattfindet. Nie findet man, bei unbefangener Beurtheilung, in den bezeichneten Fällen ein Blatt genau über einem als Ausgangspunkt gewählten Anfangsblatt, immer erscheint es seitlich verschoben, was besonders deutlich hervortritt, wenn man den Versuch macht, den Abschluss eines zweiten, dritten etc. Cyclus ausfindig zu machen. Ist man in allen diesen ausserordentlich häufig vorkommenden Fällen nicht gezwungen anzunehmen, dass die Divergenz, die wie hier bloss approximativ abzuschätzen vermögen, eben nur eine Annäherung an den wahren Werth repräsentirt? Da nun z. B. für den Kettenbruch

$$\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

die aus demselben hervorgehenden Blattstellungsverhältnisse $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/8$, ... seine successiven Näherungswerthe bilden, die sich dem wahren Werthe dieses Kettenbruches, nämlich seiner Summe immer mehr und mehr nähern; was ist natürlicher als anzunehmen, dass die durch die Summe des Kettenbruches gegebene Divergenz die in jenen Fällen wirklich herrschende ist. Die Summe dieses Kettenbruches, also der volle Werth desselben ist nach der Berechnung der Brüder Bravais bekanntlich $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ also eine zum Stammumfange irrationale Grösse. Bei dieser Divergenz finden die Cyclen keine endliche Begrenzung, oder mit andern Worten: kein Blatt steht genau senkrecht über einem zur Beobachtung ausgewählten Anfangsblatt.

Da die irrationalen Divergenzen für das Studium der Blattstellung ihre Berechtigung beanspruchen und die Brüder Bravais die Ableitung derselben nicht gegeben haben, so scheint es mir eine nicht überflüssige Sache zu sein, die in Rede stehenden Werthe zu entwickeln, umsomehr, als aus jenem von mir aufgestellten allgemeinen Kettenbruche für die constanten Divergenzen die Ableitung sich in sehr einfacher und übersichtlicher Weise geben lässt.

---

3) Vergl. auch Hofmeister l. c. p. 455.

Universitätsbibliothek Regensburg
urn:nbn:de:bvb:355-ubr03641-0142-1

Setzt man den allgemeinen Ausdruck

$$1/z+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}=1/z+x$$

wobei also $x = 1/1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}$

ist; so ist doch, da ich in einem aus unendlich vielen gleichen Gliedern bestehenden Kettenbruche eines vernachlässigen darf, ohne den Werth der Summe zu stören

$$x = \frac{1}{1+x}$$

also auch $x+x^2=1$.

Aus dieser quadratischen Gleichung ergiebt sich

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Substituirt man diesen Werth von x in den Kettenbruch $1/z+x$ so erhält man $1/z+\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{2x+\sqrt{5}-1}$

Durch Rationalmachen dieses Bruches bekömmt man

$$\frac{2\,z - \sqrt{5}-1}{2\,(z^2 - z - 1)}$$

als den allgemeinen Ausdruck für die irrationalen Werthe der Blattstellungsverhältnisse mit constanten Divergenzen.

Substituirt man in diesen Ausdruck für z die Werthe 2, 3, 4 . . . . . , so bekömmt man die irrationalen Werthe für die einzelnen Divergenzreihen.

Für $z=2$ erhält man $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

„ $z=3$ „ „ $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$

„ $z=4$ „ „ $\frac{7-\sqrt{5}}{22}$

Die aus dem oben angeführten allgemeinen Kettenbruch ableitbaren Divergenzreihen sind also die folgenden:

Für $z=2$; $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/8$, $5/13$, $8/21$ . . . . . $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ I)

„ $z=3$; $1/3$, $1/4$, $2/7$, $3/11$, $5/18$, $8/29$ . . . . . $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ II)

„ $z=4$; $1/4$, $1/5$, $2/9$, $3/14$, $5/23$, $8/37$ . . . . . $\frac{7-\sqrt{5}}{22}$ III)

Universitätsbibliothek Regensburg urn:nbn:de:bvb:355-ubr03641-0143-7

Schon oben wurde dargethan, dass die Stellungsverhältnisse einfach dadurch zu Stande kommen, dass die aufeinanderfolgenden Blätter in gleichen Abständen von einander angebracht sind.

So weit ist also an den Stellungsverhältnissen mit constanten Divergenzen nichts merkwürdiges. Das aber ist im hohen Grade merkwürdig, dass der denkbar einfachste Werth von z in dem mehrfach angeführten allgemeinen Kettenbruche nämlich $z=2$ [1]) derjenige ist, welcher in der Natur am häufigsten vorkömmt, indem die Glieder der Reihe I als Divergenzwerthe am häufigsten im Pflanzenreiche auftreten. Die Stellungsverhältnisse welche aus den Kettenbrüchen

$$\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots\cdots}}} \qquad \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots\cdots}}} \qquad \frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots\cdots}}}$$

abzuleiten sind treten in dem Maasse seltener in der Natur auf, je höher der Werth des ersten Nenners (z) ist. Der Zweck, den die Natur erreicht, indem sie für z die einfachsten Werthe wählt, ist leicht einzusehen: es wird mit der möglichst kleinsten Zahl der Blätter bei gleichmässiger Anordnung eine möglichst vielseitige Vertheilung der Blätter um die Axe herum erreicht. —

Dass bei irrationalen Divergenzen zur Axe parallele Zeilen (Orthostichen) ausgeschlossen sind, ist selbstverständlich, auch leuchtet ein, dass sich Irrationalität und Constanz der Divergenzen keineswegs ausschliessen; der von Sachs [2]) aufgestellte Satz: „sind bei einzeln gestellten Seitengliedern mit schraubiger oder spiraliger Anordnung die Divergenzen unter sich gleich, so stehen sie auch gleichzeitig in geraden Reihen" hat somit keine allgemeine Geltung.

Um etwaigen Missverständnissen vorzubeugen, betone ich, dass keineswegs alle in der Natur vorkommenden Stellungsverhältnisse, sondern bloss die mit constanten Divergenzen, sich dem allgemeinen Kettenbruche

$$\frac{1}{z+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots\cdots}}}$$

unterordnen; was aber wohl die naturgesetzliche Bedeutung dieses allgemeinen Ausdruckes nicht beeinträchtigt.

---

1) Setzt man $z=1$; so kömmt man auf die Reihe $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8} \cdots\cdots \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, deren Glieder, absolut genommen, identisch sind mit den Gliedern der Reihe I.

2) l. c. p. 179.

Universitätsbibliothek Regensburg urn:nbn:de:bvb:355-ubr03641-0144-3

Nicht nur vom morphologischen, sondern auch vom biologischen Standpuncte scheint es nothwendig, Stellungsverhältnisse mit constanten Divergenzen von jenen mit variablen oder irregulären zu unterscheiden, und zu untersuchen, ob die beiden letzteren, wenn sie an fertigen Zuständen beobachtet werden, schon ihrerAnlage nach variabel, beziehungsweise irregulär sind oder nicht. Dass wir gerade an Sprossen mit grünen Blättern fast ausnahmslos constante Divergenzen finden, und hier sog. Störungen nur selten vorkommen, dass constante, durch sog. Störungen bedingte Divergenzen an den Phyllomen der Blüthe häufig sind, und die Regellosigkeit in den Anordnungen der seitlichen Auszweigungen der Wurzel den gewöhnlichen Fall bildet; das sind durchwegs Dinge, welche auch biologisch interessant sind, auf die ich aber hier nicht näher eingehen kann.

Wien, im Februar 1875.

Schizopelte, novum Lichenum genus.

Describit Th. M. Fries.

Ab amico G. Eisen, ad Academiam Upsaliensem Zoologiae Docente, qui jam in Cälifornia peregrinatur, plantarum collectionem nuper accepi, in qua haud pauca adfuere specimina lichenis antea vix dubie ignoti. Novi generis typum praebet ejusdemque satis insignis, cujus descriptionem hic dare liceat. Nominandum est

Schizopelte nov. gen.

Thallus fructiculosus, teretiusculus, solidus, gonidia concatenata et progemmatione procreata fovens. Apothecia terminalia, margine thallode cincta, primitus rotundata, dein lobos elongatos varieqne crenatos expansa divisaque. Sporae normaliter 3-septatae, nigricantes.

Roccellae, etsi e longinquo, affinis; apotheciorum sporarumque indole abunde recedens. Illa *Thysanothecium Hookeri* Beck. et Mont. (Nyl. Syn. tab. VI. f. 1.) forma quodammodo referunt; sunt tamen multo majora, magis divisa lobataque. — Unica hactenus cognita species:

Sch. californica n. sp.

Habitat in Colifornia ad rupes, verisimiliter maritimas.

Thallus e pluribus podetiis e communi basi caespitose assurgentibus compositus, sat validis, fragilibus, rarius subsimplicibus,

Universitätsbibliothek Regensburg urn:nbn:de:bvb:355-ubr03641-0145-8

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Flora oder Allgemeine Botanische Zeitung

Jahr/Year: 1875

Band/Volume: 58

Autor(en)/Author(s): Wiesner Julius

Artikel/Article: Bemerkungen über rationale und irrationale Divergenzen 139-143