Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope.

Von

Dr. Max Brückner.

Einleitung.

Der Theorie der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten oder der Geometrie von n Dimensionen hat sich die mathematische Forschung besonders in der jüngsten Vergangenheit mit grosser Energie zugewandt, und das Interesse an diesen Untersuchungen ist von Jahr zu Jahr gewachsen, so dass heute die Litteratur über diesen Gegenstand bereits eine sehr umfangreiche geworden ist Wenn ich im folgenden es unternehme, die Elemente dieser Theorie in allgemein verständlicher Weise, auf die vierdimensionale Geometrie beschränkt, in kurzen Zügen darzustellen, so sind hierfür in erster Linie die Interessen des Vereins, in dessem Jahresberichte die Arbeit erscheint, massgebend.[1]) Es handelt sich darum, eine im grossen und ganzen für Diejenigen, denen mathematische Spezialstudien aus verschiedenen Gründen fern liegen müssen, doch ziemlich schwierige Materie, die aber einen interessanten Ausblick auf die neueste Entwickelung der Geometrie gestattet, in möglichst übersichtlicher, und, so weit es angängig ist, elementarer Weise dem Verständnis des Nicht-Fachmanns näher zu bringen. Hierzu ist zuförderst nöthig, auf einen Begriff, wie den des „vierdimensionalen Raumes", der zu so mannigfachen falschen Auffassungen seitens derer, die nicht inmitten mathematischer Wissenschaft stehen, Veranlassung gegeben hat, immer von neuem hinzuweisen[2]). Aber es ist auch lohnend, allen denen, die geometrischen Dingen ein gewisses Interesse entgegenbringen, ohne doch das Studium der Geometrie sich gerade zur Aufgabe zu machen, zu zeigen, wie die

[1]) Diese Einleitung, einige Abschnitte des § 3, und der Schlussparagraph, welcher sich mit den regulären Polytopen befasst, geben im wesentlichen den Inhalt eines am 6. Februar 1894 vom Verf. im Verein gehaltenen Vortrages wieder. Die Projektionsmodelle der reg. Polytope, nach den bei L. Brill in Darmstadt erschienenen Schlegel'schen Netzen (Verlagskatalog S. 89. No. 208 bis 210) gefertigt, wurden dabei vorgeführt.

[2]) S. auch: V. Schlegel, Ueber den sog. vierdimensionalen Raum. Allgem. verständl. naturwissensch. Abhandlungen, Heft 1, Berlin 1889; und C. Cranz, Gemeinverständliches über die sog. vierte Dimension, Hamburg 1890. (Sammlung gemeinv. wissensch. Vorträge von Virchow und Holtzendorff Heft 112/113.)

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/33

ihnen in den Elementen bekannte Wissenschaft in neuester Zeit eine eigenartige Ausbildung gefunden und früher nicht geahnte Wege eingeschlagen hat. Wenn also die folgende Arbeit im wesentlichen ein zusammenhängendes Referat über die in der Ueberschrift angezeigte Materie darstellt, so bringt dieselbe doch hoffentlich auch denjenigen, die bereits mit den Resultaten der mehrdimensionalen Geometrie vertraut sind, eine nicht überflüssig erscheinende Uebersicht des Geleisteten, und in dem sich bes. auf die Klassifikation der Polytope beziehenden vorletzten Paragraphen einige, wie mir scheint, nicht uninteressante Ausführungen. — Wenn es dabei nöthig wird, einige Sätze der Geometrie des dreidimensionalen Raumes, besonders aus der Lehre von den Polyedern, anzuführen, so mag diese Abschweifung vom Thema entschuldigt werden durch das Streben nach möglichster Verständlichkeit, und die wohl berechtigte Annahme, dass auf einem so schwierigen Gebiete dem nicht zünftigen Mathematiker Klarheit am sichersten durch Anlehnung an die ihm geläufige Stereometrie gewährleistet wird. Dabei ist, wie später des weiteren ausgeführt wird, allerdings zu beachten, dass gerade dasjenige, was der gemeinen Geometrie so wesentlich ist, die fortwährende Kontrolle ihrer Resultate in den anschaulichen Figuren, hier bei Seite zu lassen ist, und dass die Geometrie einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, als eine rein logische Wissenschaft, mit der Anschauung nichts zu thun hat. Doch lassen sich die Resultate, wenigstens der Geometrie des vierdimensionalen Raumes noch in gewisser Weise und in einigen Fällen anschaulich interpretiren, und hierin liegt die Beschränkung auf einen solchen Raum begründet, wenn auch nicht verschwiegen werden darf, dass andrerseits eben diese Beschränkung leicht dazu verführt, falschen Auffassungen wieder Eingang zu verschaffen. Es muss daher, wie schon bemerkt, die erste Aufgabe sein, in den folgenden einleitenden Worten Klarheit über den Begriff der in Rede stehenden Geometrie mehrfacher Ausdehnungen zu verbreiten, besonders zu zeigen, wie die Geometer der jüngsten Vergangenheit mit Nothwendigkeit dazu geführt wurden, eine solche „ausserräumliche Geometrie“ zu erfinden, und dadurch über die seit 2 Jahrtausenden, seit den Zeiten Euklid's geläufigen Anschauungen hinauszugehen.

Gegen die erste wissenschaftliche Darstellung der Geometrie, wie sie bekanntlich Euklid gegeben hat, sind, soviel Bewunderung ihr auch von allen Seiten gezollt wurde, doch schwerwiegende Bedenken erhoben worden. Lassen wir solche über die rein dogmatische Darstellungsweise hier bei Seite, so sind es besonders die gegen die Fundamente, auf denen Euklid das stolze Gebäude der Geometrie aufgebaut hatte, gerichteten Vorwürfe, welche von einschneidendster Bedeutung für die Weiterentwickelung der Raumwissenschaft geworden sind. Euklid basirt bekanntlich seine Darstellung auf die Nominaldefinitionen der einfachsten Konstruktionsbegriffe im Raume, auf welche dann die sog. Axiome bezogen werden. Verlangt man aber von den Fundamenten einer Wissenschaft, dass sie die nothwendigen und hinreichenden Grundlagen für dieselbe sind, und dass sie mit einander zu

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/34

einem einheitlichen systematischen Ganzen verbunden erscheinen[3]), so zeigt sich, dass die Zusammenstellung der Axiome der Geometrie bei Euklid gerade die Erfüllung dieser zwei wesentlichen Erfordernisse vermissen lässt. Diese Grundsätze sagen nicht, wie sie thun sollten, die Grundeigenschaften des Raumes aus, wie sie unsrer ursprünglichen Vorstellung mitgegeben sind, sondern vielmehr nur die Eigenschaften ganz bestimmter einzelner Gebilde, wie der geraden Linie und des Winkels, und treten so in Verbindung mit den Definitionen der einfachsten Konstruktionen[4]). Dahingegen sind Grundsätze über Prädikate, die der Raumvorstellung spezifisch eigenthümlich sind, von Euklid übergangen, später aber stillschweigend gebraucht worden, so die Ausgedehntheit des Raumes nach 3 Dimensionen. Andrerseits sind ferner Lehrsätze aufgestellt worden, die in Wirklichkeit keine sind, wie sich sofort zeigen wird. Es lässt sich als Entschuldigung Euklids sagen, dass er nicht im geringsten im Raume selbst ein Objekt geometrischer Forschung gesehen hat, sondern nur das nöthige Gebiet für alle Konstruktionen; während sich gerade aus einem scharf festgestellten Begriffe des Raumes die Axiome entwickeln lassen. Der Vorwurf, dass die Axiome Euklids in keinem systematischen Zusammenhange stehen, ist schon in sehr früher Zeit gemacht worden, und man glaubte, ihm vorbeugen zu können, indem man sie auf die einfachsten und elementarsten Anschauungsverhältnisse zurückzuführen suchte, wobei sich ergeben musste, ob diese Sätze wirkliche Grundsätze seien, d. h. keines Beweises weder bedürftig, noch fähig.

Besonders richteten sich die Bemühungen auf das vielgenannte elfte Axiom[5]), da schon Proklus, der Kommentator Euklids bemerkt hatte, dass dasselbe identisch sei mit dem Satze, wonach die Winkelsumme im Dreieck 2 Rechte betrage. Man versuchte dieses Axiom zurückzuführen auf die andern, es auf andre einfachere Sätze zu reduciren; aber die Bemühungen dieser Art, es zu beweisen, blieben

---

[3]) A. Donath, Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome. Dissertation. Leipzig 1881. pag. 7 und f.

[4]) B. Erdmann, Die Axiome der Geometrie; eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. Leipzig 1877. pag. 33 u. 34.

[5]) „Wenn eine gerade Linie, die zwei Gerade schneidet, bewirkt, dass die innern auf derselben Seite liegenden Winkel kleiner als 2 Rechte sind, so treffen sich die beiden Geraden, hinreichend verlängert, auf der Seite, wo die beiden Winkel sind, die zusammen kleiner sind als 2 Rechte.“ — Neuere historische Untersuchungen (s. Hankel, Vorlesungen über complexe Zahlen und ihre Funktionen, S. 52) neigen zu der Ansicht, dass der fragliche Satz irrthümlicher Weise von den Abschreibern zu den Axiomen geschrieben sei, während er im Originale unter den Postulaten gestanden hatte. — „Der Grund, weshalb er von jeher anstössig gewesen, liegt einfach darin, dass er nicht logisch wie die (arithmetischen) Axiome 1—7 ist, und nicht anschaulich, wie die andern, denn das Schneiden kann bei einiger Annäherung an 2 Rechte nicht beobachtet werden und das Nichtschneiden nie.“ s. M. Simon, Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. Strassburg 1891. S. 5.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/35

erfolglos. Seine Ersetzung durch das andere: „Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu derselben nur eine einzige Parallele ziehen“ führte nicht vorwärts. Am scharfsinnigsten befasste sich mit der Frage der französische Mathematiker Legendre, der den Zusammenhang des Parallelenaxioms mit dem Satze über die Winkelsumme im Dreiecke klar nachwies, und zeigte, dass erstens die Winkelsumme im Dreiecke, wenn man die gerade Linie unendlich lang voraussetzt, nicht grösser sein kann, als 2 Rechte, und dass zweitens diese Summe in jedem Dreiecke 2 Rechte betrage, wenn sie in einem diesen Werth hat. Dagegen gelang es auch ihm nicht, den Grundsatz in befriedigender Weise zu demonstriren, wenn es auch keinem Mathematiker einfiel, deshalb an seiner Richtigkeit zu zweifeln. Und doch war es, wie Rosanes[6]) sich ausdrückt, eine störende, ja beschämende Thatsache, dass in der Geometrie, so weit sie sich seit 2000 Jahren entwickelt und glänzende Resultate gezeitigt hatte, dieser einfachste Satz der Fundamente unbewiesen, und doch, wie es schien, nicht unbeweisbar, dastand. Ja d'Alembert nennt ihn unmuthig „l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie“.

Es war zuerst Gauss, dessen mathematischer Scharfsinn erkannte, dass das sogen. 11. Axiom unbeweisbar sei, dass alle Bemühungen, es auf die anderen zurückzuführen, daran scheitern mussten, dass durch dieses Axiom den übrigen in der That eine neue Voraussetzung hinzugefügt wurde, die mit ihnen nicht nothwendiger Weise verbunden sein musste. Er schloss daraus „dass es nur eine ungerechtfertigte Gewöhnung sei, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten“, und dass es möglich sei, mit Fallenlassen dieses Axioms und unter der Annahme, dass die Winkelsumme im Dreieck kleiner sei als 2 Rechte[7]), eine in sich widerspruchslose und somit vom rein logisch-mathematischen Standpunkte aus einwandsfreie sog. Nicht-Euklidische Geometrie zu begründen. Obgleich Gauss bei Lebzeiten über diese die ganze Raumwissenschaft umwälzenden Ideen nichts veröffentlichte, weiss man doch aus seinem später herausgegebenen Briefwechsel mit Schumacher, wie sehr ihn diese Dinge bewegten und wie vollkommen er das fragliche Gebiet beherrschte.[8]) Wie weit er sich übrigens dabei, wenn er im Raume nichts sieht als einen von der Empirie abstrahirten Begriff[9]), von der geläufigen, durch

[6]) J. Rosanes, Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume, Breslau 1881. S. 8.

[7]) Die Annahme des Grösserseins war vorläufig durch den Beweis von Legendre unmöglich gemacht worden.

[8]) S. Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schuhmacher, herausgegeben von Peters. Altona 1860—63. Bd. II p. 268 und 431. Bd. V p. 246.

[9]) „Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre zu unserem Wissen der selbstverständlichen Wahrheiten eine ganz andere Stellung als die reine Grössenlehre; es geht unsrer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, welche der letzteren eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben,

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/36

Kant begründeten Lehre, dass der Raum kein empirischer Begriff sei, sondern eine nothwendige Vorstellung a priori, die allen äusseren Anschauungen als Form zu Grunde liegt, entfernte, soll hier nur angedeutet werden.

Die Ausführung einer Nicht-Euklidischeu Geometrie, in welcher die Winkelsumme des Dreiecks kleiner ist als 2 Rechte, und zwar um so kleiner, je grösser das Dreieck ist, rührt von Lobatschewsky[10]) und den beiden Bolyai[11]) her. Der ältere, Wolfgang Bolyai, kannte als Jugendfreund von Gauss dessen Ansichten über die Nicht-Euklidische Geometrie und hat ohne Zweifel Einfluss auf Joh. Bolyai in dieser Richtung gehabt.[12]) Lobatschewsky aber berechnete sogar, in der Meinung, die Frage, ob die Euklidische oder Nicht-Euklidische Geometrie für den Erfahrungsraum gelte, in dieser Weise entscheiden zu können, die Winkelsumme der grösstmöglichen auf astronomischen Messungen beruhenden Dreiecke, wobei sich natürlich herausstellte, dass eine Abweichung von 180° (welche sich nicht durch Beobachtungsfehler erklären liess) nicht stattfand. Er bemerkt hierzu sofort: „L'hypothèse de la somme des angles d'un triangle moindre que deux angles droites ne peut avoir d'application que dans l'analyse, puisque les mesures directes ne nous montrent pas dans la somme des angles d'un triangle la moindre déviation de deux angles droites."

Man kann nicht sagen, dass die Ideen von Gauss, Bolyai und Lobatschewsky sofort von nachhaltigem Einfluss auf die Geometrie gewesen seien; denn es lag doch nun zunächst die Aufgabe vor, die Vermuthung (oder sagen wir Ueberzeugung) von Gauss, dass, wie vorher bemerkt, durch das Parallelenaxiom den übrigen eine neue Voraussetzung hinzugefügt sei, zu bestätigen, und besonders klar zu legen, welcher Art denn diese Voraussetzung sei. Diesen ganz wesentlichen Schritt verdankt die Raumwissenschaft erst Bernhard Riemann, in dessen Habilitationsvorlesung[13]) am 10. Juni 1854, welche

---

dass, wenn die Zahl bloss unsres Geistes Produkt ist, der Raum auch ausser unsrem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können." (Brief an Bessel, 9. April 1830.) Der Standpunkt von Gauss lässt sich wohl als empirisch bezeichnen. S. Simon, Zu den Grundlagen etc. p. 3 und Simon, Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. 1890.

[10]) Neue Anfangsgründe der Geom. mit einer vollst. Theorie der Parallelen (Kasanscher Bote 1829, und Schriften d. Univ. Kasan 1836—38). Géométrie imaginaire 1837. (Crelles J. 17. p. 295.) Geom. Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840. Pangéometrie, Kasan 1855.

[11]) Appendix zu dem Werke W. Bolyai's: Tentamen in elementa matheseos etc. Maros Vasarhely 1832, in franz. Uebers. La science absolue de l'espace etc. Paris 1868.

[12]) Bolyai nennt diese Art der Geometrie „absolute", Lobatschewsky „imaginaire", F. Klein später „hyperbolische". S. Frischauf, Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig 1876. S. 33.

[13]) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Bernh. Riemanns Ges. Math. Werke. 2. Aufl. 1829. S. 272.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/37

Gauss in das grösste Erstaunen versetzte. Wie Dedekind in Riemann's Lebenslauf[14]) berichtet, sprach er sich gegen Weber mit höchster Anerkennung und mit einer bei ihm seltenen Erregung über die Tiefe der vorgetragenen Gedanken aus. Es ist bemerkt worden[15]), dass es wohl hauptsächlich die Hypothese, dafs die Winkelsumme im Dreieck auch grösser als 2 Rechte sein könne, oder, was dasselbe sagen will, dafs der Raum endlich sei, gewesen ist, was Gauss als neu und überraschend in Riemann's Vortrag gefunden habe; denn die Erweiterung und Verallgemeinerung des Raumbegriffes über die Dreidimensionalität hinaus kann für ihn nicht frappirend gewesen sein, da er, wie Sartorius von Waltershausen berichtet, eine Anschauung mit beliebig viel Dimensionen, wenn auch nicht für uns Menschen, für möglich hielt.[16])

Geben wir aller Kürze den Gedankengang Riemann's, für unsere Zwecke in möglichster Einfachheit, wieder. Es handelt sich darum, alle Eigenschaften des Raumes aus der Erkenntniss seines Wesens, d. h. den zu seiner Definition geeigneten Merkmalen, herzuleiten. Es ist also eine Hypothese aufzustellen, welche gestattet, aus möglichst wenig Voraussetzungen solche Folgerungen zusammenzusetzen, welche mit unserer eigenthümlichen Anschauung im Einklang stehen. Diese Hypothese ist die Ebenheit des Raumes. Um dahin zu gelangen ist es nöthig, den Raum als besonderen Fall unter einem allgemeinen Begriff zu subsummiren, und dies ist der Begriff der „Mannigfaltigkeit", und zwar der (mehrfach, n-fach) ausgedehnten, als deren wesentliches Kennzeichen gefunden wird, dass die Ortsbestimmung in derselben auf n Grössenbestimmungen sich zurückführen lässt.[17]) Wodurch unterscheiden sich nun die Mannigfaltigkeiten der-

[14]) Ebendas. S. 549.

[15]) Simon, Zu den Grundlagen etc. S. 4.

[16]) S. v. Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis, 1856 S. 81: „Gauss, nach seiner öfters ausgesprochenen innersten Ansicht betrachtete die 3 Dimensionen des Raumes als eine spezifische Eigenthümlichkeit der menschlichen Seele; Leute, welche dieses nicht einsehen könnten bezeichnete er ein Mal in seiner humoristischen Laune mit dem Namen Böotier. Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewusst sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier zur Seite gelegt, die er in einem höhern Zustande später geometrisch zu behandeln gedächte."

[17]) S. Rosanes, a. a. O. S. 13: „Zieht man in einer Ebene eine Gerade, so bildet diese eine (stetige) einfache Mannigfaltigkeit, deren Elemente die Punkte in ihr sind. Denkt man sich in der Ebene parallele Geraden zu der ersten gezogen, so bilden sie eine (stetige) einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren Elemente die Geraden sind. In Bezug auf das Element der ersten Mannigfaltigkeit bildet das jetzige Feld eine (stetige) zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Das Element (der Punkt) ist zweifacher Bestimmungsart fähig; es kann erstens auf einer Geraden variiren, und dann von einer Geraden

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/38

selben Vielheit von einander, besonders der Raum von anderen Mannigfaltigkeiten dritter Stufe? „Welche Merkmale zeichnen den Raum aus, wenn er dadurch, dass er sich uns ganz ursprünglich als eine Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen erweist, noch nicht derart charakterisirt ist, dass alles, was wir ihm zuzuschreiben gewohnt sind, mit Nothwendigkeit daraus hervorgeht?“ Dieses Merkmal des Raumes, welches sich nicht aus dem Begriffe der dreifachen Ausdehnung allein folgern lässt, also als eine der Erfahrung entlehnte Thatsache angesehen werden muss, ist die Eigenthümlichkeit unserer Anschauung, dass sie jede Figur überall hin transportiren kann, d. h. die einfache Thatsache der Kongruenz des Raumes in sich. Erläutern wir dies an zweidimensionalen Gebilden. Man kann aus einer Kugelfläche ein beliebiges Stück irgendwo ausschneiden und an einer anderen Stelle derselben Fläche auflegen; ebenso verhält es sich mit der Ebene. Bei einer beliebigen Fläche jedoch, z. B. einem Ellipsoid, ist dies nicht möglich. Ebensowenig kann man beliebige Flächen auf einander abwickeln. Der hier in Frage kommende Begriff der Krümmung der Fläche ist von Gauss in der berühmten Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ eingehend behandelt worden.[18]) Das „Krümmungsmaass“ einer Fläche ist nach ihm eine von Punkt zu Punkt variirende Zahl, derart, dass Flächen und Flächenstücke, welche sich auf einander abwickeln lassen, in den Punkten, welche dabei zur Deckung kommen müssen, denselben Werth des Krümmungsmaasses haben. Soll also irgend ein Stück einer Fläche an irgend einer Stelle aufgelegt werden können (sich, wie bei der Kugel, dorthin verschieben lassen) so muss ihr Krümmungsmaass einen konstanten Werth haben. Solche Flächen konstanten Krümmungsmaasses sind also z. B. Kugel und Ebene. Bei letzterer ist der Werth der Konstanten Null. Riemann gelangte zu dem analytischen Ausdruck des Krümmungsmaasses, indem er zunächst von der Annahme ausging, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge haben — d. h. durch einander messbar sein sollen — und daraus nachwies, dass das Differential der Länge durch eine Quadratwurzel aus einem Differential-Ausdruck zweiten Grades in den Coordinaten darstellbar sei. Für eine höhere als die zweite Mannigfaltigkeit lässt sich der Begriff des Krümmungsmaasses entsprechend erweitern, indem ein analoger Ausdruck des Längendifferentiales zu Grunde gelegt wird.[19]) Im all-

zur andern. Doch darf dieses Beispiel, sowie die Ausdrucksweise „mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit“, nicht verleiten, bei dem allgemeinen Begriffe immer an Gegenstände der Anschauung zu denken; vielmehr ist die äusserste Abstraktion von der letzteren die Hauptsache bei der allgemeinen Untersuchung. Ueberhaupt repräsentirt jede beliebige Linie eine einfach, jede bel. Fläche eine zweifach, der Raum eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.“

[18]) Riemann ist seiner eignen Aussage nach (a. a. O. S. 276) hiervon ausgegangen.

[19]) S. jedoch hierüber: Kronecker, Monatsber. der Berliner Akad. vom Jahre 1869. Beez Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Math. Ann. VII. S. 381. Donath, a. a. O. S. 34.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/39

gemeinen wird dann das Krümmungsmaass wieder eine von Element zu Element variable Zahl sein. Die Hypothese, dass die Theile des dreidimensionalen Raumes in diesem ohne Aenderung verschiebbar seien, d. h. dass der Raum von derselben Art sei, wie etwa die Kugelfläche, formulirt sich dann analytisch dahin, dass das Krümmungsmaass des Raumes eine Konstante ist. Welchen Werth diese Konstante hat, ist zunächst vollständig offen gelassen. Es lässt sich nun zeigen, dass der Inhalt des Euklid'schen 11. Axioms, wonach die Winkelsumme im Dreieck 2 Rechte beträgt, auf die Annahme hinauskommt, dass das konstante Krümmungsmaass des Raumes Null ist, d. h. dass der Raum ein sog. ebener ist. Ueber die Richtigkeit dieser Annahme ist aber darum volle Gewissheit nicht zu erlangen, weil ihre Prüfung nicht durch die Theorie, sondern durch die Erfahrung geschehen muss. Es leuchtet aber ferner ein, dass das 11. Axiom nicht eine Folge der andern ist, denn es gilt in der Form Euklid's eben nur für einen ebenen Raum.

In ausführlicherer Weise noch als Riemann diskutirt v. Helmholtz diese Fragen in seinen 3 berühmten Abhandlungen: „Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie" (Heidelberger Jahrbücher für 1868, No. 46 und 47), „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" (Göttinger Nachr. für 1868, No. 9) und „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" (Popul. Vorträge, Heft III. S. 21). Wir wollen aber auf die Abhängigkeit der einzelnen Arten möglicher Geometrien von den verschiedenen Werthen des Krümmungsmaasses des Raumes und auf die Parallelentheorien hier nicht weiter eingehen, verweisen vielmehr auf die ebengenannten Originalarbeiten, sowie auf Anm. 20 und die daselbst angeführten Schriften.

Es ist gezeigt worden, wie Riemann dazu gelangte, den Begriff der vielfachen Mannigfaltigkeit aufzustellen, indem er zum dreidimensionalen Raum den allgem. Begriff suchte, dem er sich subsummiren

---

[20]) Ist das Krümmungsmaass positiv, der Raum endlich, so hat die Gerade, als Linie endlicher Länge, 2 nicht reelle unendlich ferne Punkte; es giebt keine Parallelen. (Riemann'scher Raum.) Bei negativem Krümmungsmaasse ergiebt sich die absolute Geometrie Bolyai's, in welcher die Gerade 2 unendlich ferne reelle Punkte hat, und in welcher es durch einen Punkt zu einer Geraden 2 Parallelen giebt. (Gauss'scher Raum, nach Schering. Göttinger Nachr. 1880 No. 15.) Fallen die beiden unendlich fernen reellen Punkte in einen zusammen, so ergiebt sich die Euklidische Geometrie mit einer Parallelen. (Euklidscher Raum.) S. Baltzer, Elemente der Math. II. S. 13 u. s. w. Frischauf, Elemente der absoluten Geometrie, Leipzig 1876. F. Klein, Ueber die Nicht-Euklidische Geometrie, Göttinger Nachrichten. 1871. No. 17. Math. Ann. 4. Pasch, Neuere Geometrie, 1882. § 20. Beez, Ueber Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie, Progr. Plauen 1888. H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts, Bd. I. Leipzig 1890. S. 117 u. s. w. Simon. S. Anm. 5. Donath. S. Anm. 3. U. A. m. In recht allgemein verständlicher Weise bes. bei C. Cranz a. a. O. S. 5—14.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/40

liesse. Es ist aber selbstverständlich, dass man eine 4-fache Mannigfaltigkeit nicht als Raum in dem gebräuchlichen Sinne mehr bezeichnen darf. Man kann also wohl von einem vierdimensionalen Raum sprechen[21]), aber nicht von einer vierten Dimension des Raumes, denn dieser unser Weltraum („Der Raum, welchen unser lieber Herrgott für uns erschaffen hat.“ Kummer in einer Vorlesung. S. Cranz a. a. O. S. 15) ist für uns eben dreidimensional. Das Haupthinderniss für jeden Fortschritt in der Richtung, zu einer Erweiterung des Raumbegriffes zu gelangen, lag gerade, wie Schlegel sehr treffend bemerkt, in dem Umstande, dass man von jeher den rein mathematischen Begriff des krümmungslosen dreidimensionalen Raumes mit dem empirischen des Weltraumes identificirte. „Nun war man freilich längst gewöhnt, mathematische Punkte, Gerade und Ebenen von den Ecken, Kanten und Flächen eines realen Körpers wohl zu unterscheiden, und als rein abstrakte Gebilde aufzufassen. Aber diese Abstraktion auch auf den Weltraum anzuwenden, und aus ihm den Begriff des rein geometrischen dreidimensionalen Raumes abzuleiten, dazu fehlte es an jeder Veranlassung, weil man den Raum nicht selbst als Objekt geometrischer Forschung, sondern nur als Gebiet für alle Konstruktionen und Bewegungen anzusehen gewohnt war. So lange aber der Begriff des geometrischen Raumes sich noch nicht von dem des Weltraumes geschieden hatte, war auch eine Erweiterung des Raumbegriffes auf das mehrdimensionale Gebiet unmöglich.“ [22])

In dem Augenblicke schon, wo man den Begriff des dreidimensionalen, endlichen Raumes, des Raumes positiver, wenn auch noch so kleiner Krümmung, einführte, war man übrigens genöthigt, sofort eine vierte Dimension mit in den Kauf zu nehmen, denn ein solcher, der zweidimensionalen Kugelfläche analog gebauter Raum braucht ein vierdimensionales ebenes Gebilde, in dem er sich befinden muss [22a]), ganz ebenso, wie die Kugel des dreidimensionalen ebenen Raumes bedarf, während für eine Ebene dazu kein zwingender Grund vorliegt. Alle diejenigen, welche der Meinung sind (wie Zöllner), dass dem realen Weltraum ein kleines positives Krümmungsmaass zukomme, sind also

---

[21]) Wenn man eben kein neues Wort einführen will, wie Lotze thut, der spottend dieses Gebilde der Mathematiker „Raumoid“ nennt. Lotze machte diesen Namen „seinen Gegnern zum Geschenk, als das Einzige, was er für ihre Sache thun könne.“ S. Cranz a. a. O. S. 53.

[22]) V. Schlegel, Ueber Entwickelung und Stand der n-dimensionalen Geometrie, mit bes. Berücksichtigung der vierdimensionalen. Leopoldina XXII. 1886. No. 9—18. Sonderdruck. S. 2.

[22a]) Dies würde auch für einen gekrümmten Weltraum gelten, nach Beez a. a. O. S. 31. Dagegen der Ref. in Ohrtmann's Jahrbuch 1888. S. 513: „In der Meinung, dass die sphärische Form des Weltraumes ein reales ebenes vierdimensionales Gebiet zur Voraussetzung habe, können wir dem Verf. nicht beipflichten; denn gedankliche Voraussetzungen und Konstruktionsmöglichkeiten brauchen nicht immer realisirt zu sein.“

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/41

genöthigt, auch eine reale vierte Dimension zuzulassen resp. zu fordern.[23]) Wir sind aber der Meinung, dass wir uns, so lange nicht zwingende Thatsachen[24]) vorliegen, eine neue Hypothese aufzustellen, mit der Annahme der Ebenheit unseres Weltraumes beruhigen können. Es verbietet uns aber unsere Erfahrung über die Existenz eines einzigen krümmungslosen Raumes nicht, in den gekrümmten und mehrdimensionalen Räumen abstrakte Produkte mathematischer Ueberlegung zu sehen, wie in so manchen Gebilden, die die Forschung aufgedeckt hat, z. B. den complexen Zahlen. Anschaulich sind diese Räume nicht mehr, es sind mathematische Begriffe.

Schon vor Riemann war ein anderer, lange Zeit wenig gekannter und kaum gewürdigter Gelehrter, Hermann Grassmann, in seiner „Ausdehnungslehre“[25]) dazu gelangt, ebene Räume mit beliebig vielen Dimensionen zu diskutiren. Er stellte in diesem Werke eine vollkommen neue geometrische Analysis auf, die sich sofort auf höhere Gebiete verallgemeinern liess. Damit zeigte er, dass die gesammte reale Geometrie „die man als eine mit der Arithmetik auf gleicher Stufe stehende reine Geisteswissenschaft anzusehen gewohnt war, eine angewandte Wissenschaft sei, nämlich eben die Anwendung der rein abstrakten Ausdehnungslehre auf die anschaulichen Gebiete des Raumes und der Ebene. Er emancipirte also die geometrische Forschung von dem durch die Grenze des Anschaulichen ihr auferlegten Zwange.“[26]) Unerwähnt darf allerdings nicht bleiben, dass, bei der langen Zeit, die Grassmann's Werk brauchte, um zur Würdigung zu gelangen, die meisten Resultate der mehrdimensionalen Geometrie auf anderem, theils analytischem, theils synthetischem, Wege gefunden worden sind. Wir können auf die Geschichte der Geometrie von n Dimensionen hier unmöglich im Zusammenhange zurückkommen, verweisen vielmehr auf die mehrfach (S. Anm. 22) citirte Abhandlung von Schlegel, welche zugleich ausführliche Litteraturangaben enthält. Ueberdies wird sich in den folgenden §§ genügend Gelegenheit bieten, bei Anführung der Resultate beiläufig historische Daten zu berücksichtigen. Wohlbemerkt sei, dass wir überall, wo nicht gerade anderes bemerkt ist, nur von ebenen Mannigfaltigkeiten sprechen: Von Geraden, Ebenen, Räumen der Krümmung Null; das vierdimensionale in Rede stehende nur einfach vorhandene Gebiet ist in dem gedachten Sinne ebenfalls ein ebenes.

---

[23]) Unter der Annahme eines endlichen Raumes konstruirt Most die Elemente der Mechanik in „Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik, mit Berücksichtiguug der Frage nach den Grenzen des Weltenraumes.“ Progr. Coblenz 1883.

[24]) S. Riemann a. a. O. S. 286. — Der Spiritismus scheint uns jedenfalls eine solche Thatsache nicht zu sein.

[25]) Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. 2. Aufl. Leipzig 1878.

[26]) Schlegel a. a. O. (Anm. 22) S. 3. S. auch Schlegel, Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke, Leipzig 1878. S. 17 u. ff.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/42

Auf einen Punkt möchten wir jedoch zum Schlusse der Einleitung nochmals zurückkommen. Bezeichnet man alle geometrischen Theorien, die nicht mit der Euklidischen Geometrie übereinstimmen, wie es von Beez geschehen ist, als Metageometrie, so darf man sagen, dass diese die Mathematiker und Philosophen in getrennte Parteien gespalten hat. Die schaffenden Mathematiker stehen, wie Simon bemerkt, seit Gauss zum grossen Theile[27]) auf der Seite derer, die die Berechtigung der Metageometrie anerkennen, — wohlgemerkt in dem oben skizzirten Sinne — während die Philosophen von Fach zum guten Theil ihr feindselig gesinnt sind (so bes. Lotze und Dühring, aber auch Wundt), wiewohl allerdings einige, wie Erdmann, Liebmann, Kerry sie günstig beurtheilen. Den richtigsten Standpunkt scheint uns Kerry einzunehmen, wenn er sagt[28]): „Es lässt sich nicht leugnen, dass unter den Vertretern metageometrischer Untersuchungen, manche gesündigt haben, indem sie eine allzu grosse Geneigtheit bekundeten, den doch nur hypothetischen Ausgangspunkt ihrer Deduktionen auf die Wirklichkeit zu übertragen. Sie musterten den Raum . . . . in den die moderne Physik wenigstens jene abgeblassten Dinge hineinversetzt, von denen sie annimmt, dass sie als Reize erst in empfindenden Subjekten eine farbige und tönende Welt wachrufen; den uns so vertrauten Raum, der überdies mit unserem Phantasieraume genau übereinstimmt, argwöhnisch darauf hin, ob er nicht doch vielleicht Anwandlungen besitze, welche den Resultaten der Metageometrie alsbald eine praktisch physikalische Anwendbarkeit verschafft hätte.[29]) Diese Haltung fand heftige Gegner, welche ein Misstrauen der beschriebenen Art nicht nur darum für völlig unzeitgemäss erklärten, weil bisher nirgends ein ernst zu nehmender Anlass[30]) vorliege, bei physikalischen Erklärungsversuchen auch den Raumcharakter anzurühren, sondern hierüber weit hinausgehend den Euklidischen Raum als den einzig möglichen unparteiischen Hintergrund alles Geschehens ein für allemal in Permanenz erklärten.“ Und später: „Ich glaube nun

[27]) S. aber Schmitz-Dumont, die math. Elemente der Erkenntnisstheorie, Berlin 1878. Hier wird der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht nur die Anschaulichkeit, resp. die Vorstellbarkeit abgesprochen, sondern sogar jede Möglichkeit einer logischen Deutung. (Vergl. Schotten a. a. O. S. 157) — und J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. Zürich 1870. Abh. I u. II. (Vergl. Schotten a. a. O. S. 154.) Simon (Die Elemente der Geometrie. S. 46) sagt: „Es ist im Grunde traurig, dass 100 Jahre, nachdem Gauss die Resultate der absoluten Geometrie bis zu ihrer letzten Konsequenz gezogen, die absolute Geometrie noch als Verirrung bezeichnet werden kann . . .“

[28]) B. Kerry, System einer Theorie der Grenzbegriffe; Ein Beitrag zur Erkenntnisstheorie. Leipzig und Wien. 1890. S. 121 und S. 125.

[29]) S. Zöllner, Natur der Kometen.

[30]) Das Bestreben der Vertreter des Spiritismus, die 4. Dimension zu ihren Gunsten auszubeuten, beleuchtet in recht humoristischer Weise Schlegel (s. Anm. 2) S. 25 und auch Cranz a. a. O.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/43

allerdings, man solle die Frage, ob das Menschengeschlecht, ohne hierüber verrückt zu werden, jemals von dem Glauben, dass der Raum, in dem es lebt, ein Euklidischer sei, ablassen könnte, auf sich beruhen lassen, bis ihm einmal ein unzweifelbarer Anlass geboten sein wird, nach dieser Hinsicht seine geistige Elasticität zu erproben. Jedenfalls kann es doch auf Leute, die nicht nur sich, sondern auch ihre Kindeskinder bedenken, nur beruhigend wirken, wenn sie sich sagen dürfen, dass auch bei Verwirklichung jener immerhin recht unwahrscheinlichen Möglichkeit in den Systemen der Metageometrie Mittel niedergelegt sein werden, vermöge deren man auch des ungeberdigen „Raumoids", das dann zum Raum avancirt sein wird, wird Herr werden können. „Bereit sein" ist zwar nicht „Alles", wie Hamlet sagt, aber doch viel."

§ 1. Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie in synthetischer Behandlung.[31])

Es bedeute P einen Punkt, G eine Gerade, E eine Ebene, R_3 einen Raum. Die 4-fache Mannigfaltigkeit oder der vierdimensionale „Raum" sei R_4. Liegt ein Punkt oder eine Gerade in einer Ebene, so sagt man, die Ebene geht durch den Punkt oder die Gerade, oder ist durch sie gelegt. Liegt ein Punkt, Gerade oder Ebene in einem Raum, so sagt man, der Raum geht durch den Punkt, die Gerade oder Ebene, oder ist durch sie gelegt. Eine Gerade wird durch einen in ihr liegenden Punkt in 2 Halbgerade (Strahlen) getheilt, eine Ebene durch eine in ihr liegende Gerade in 2 Halbebenen, ein Raum durch eine in ihm liegende Ebene in zwei getrennte Theile und als weiteres Axiom wird hinzugefügt:

Axiom I: Ein Raum theilt die vierfache Mannigfaltigkeit in zwei getrennte Theile (congruente Hälften). Zu den bekannten Axiomen der dreidimensionalen Geometrie[32]) treten dann noch die folgenden: Axiom II: Durch 4 Punkte einer R_4, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, ist ein und nur ein Raum möglich. Axiom III: Eine Ebene, welche mit einem Raum 3 Punkte gemein hat, die nicht in derselben Geraden liegen, liegt ganz in ihm. Axiom IV: Eine Gerade, welche mit einem Raum nur einen Punkt gemein hat, wird durch

[31]) Siehe hierzu: K. Rudel, Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Bamberg 1877. S. 15 ff. — bes. M. Simon (S. Einleitung, Anm. 5) a. a. O. S. 23—26. — K. Rudel, Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension, Nürnberg 1837. Ders.: Sich kreuzende Ebenen zweier Räume. Bl. für das Bayr. Gymn.- u. Realschulwesen. 13. Bd. 7. Heft. S. 309. Weitere Litteratur auch in Gino Loria, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie etc. (Deutsch von F. Schütte.) Leipzig 1888. S. 115 ff.

[32]) Durch 2 Punkte ist nur eine Gerade möglich. Bestimmung der Ebene durch eine Gerade und einen ausser ihr liegenden Punkt: Die anderen Bestimmungsarten folgen hieraus.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/44

ihn in 2 getrennte Theile getheilt. Hat sie 2 Punkte mit dem Raum gemein, so liegt sie ganz in ihm. Es ergiebt sich ferner als Folgerung: Eine Ebene E, welche mit einem R_3 nur eine Gerade G gemein hat, wird durch diese Gerade in 2 getrennte Theile (zu beiden Seiten des Raumes) getheilt. Denn irgend eine zweite Gerade G' in E trifft G in einem Punkte P; (2 Gerade derselben Ebene haben stets einen Punkt gemein) durch diesen Punkt wird G' in 2 getrennte Theile getheilt (Axiom IV). Irgend 2 ihrer Punkte auf den beiden Theilen liegen auf verschiedenen Seiten von R_3 und da sie zugleich Punkte von E sind, so ist E durch R_3 in 2 Theile (Halbebenen) getheilt.

Lehrsatz I. Zwei Räume haben stets eine Ebene gemein (schneiden sich in einer Ebene).[33]) Beweis. R_3 und R'_3 seien die beiden Räume. Nehmen wir an, sie hätten nur den Punkt A gemein[34]), d. h. A liege sowohl in R_3 als in R'_3. Wir legen durch A in R_3 zwei Gerade G und G'. Diese werden nach Axiom IV durch R'_3 in 2 getrennte Theile getheilt, G in G_1 und G_2, G' in G'_1 und G'_2, wobei G_1 und G'_1 auf derselben Seite von R'_3 liegen mögen. Verbinden wir dann einen Punkt von G_1 mit einem Punkte von G_2 durch eine Gerade, so liegt diese ganz in R_3, denn G und G' liegen ganz in R_3, also auch die durch sie bestimmte Ebene, welche eben die Gerade enthält. Diese Gerade muss aber durch R'_3 gehen, da sie 2 Punkte auf verschiedenen Seiten desselben verbindet. Sie hat also mit R'_3 einen Punkt B gemeinsam, welcher, da er auch in R_3 liegt, ein weiterer gemeinsamer Punkt der beiden Räume ist. Mit A und B liegt aber auch die Gerade AB in beiden Räumen. (Axiom IV.) Es ist nun weiter zu zeigen: Haben 2 Räume eine Gerade G gemein, so haben sie auch eine Ebene gemein. Legen wir nämlich durch G zwei Ebenen in R_3, so liegen diese ganz in ihm, und werden nach Axiom IV (Folgerung) durch R'_3 in 2 getrennte Theile getheilt. Verbinden wir einen Punkt der einen Ebene mit einem Punkte des Theiles der andern Ebene, welcher von jenem durch R'_3 getrennt ist, durch eine Gerade, so liegt diese ganz in R_3 und geht durch R'_3 hindurch, d. h. hat mit R'_3 einen weitern Punkt gemeinsam. R_3 und R'_3 haben also 3 Punkte, somit eine Ebene, die sich durch diese legen lässt, gemeinsam. w. z. b. w.

Lehrsatz II. Ein Raum und eine Ebene haben stets eine Gerade gemein. Beweis. Die Ebene E liege in R_3. Die Räume R_3 und R'_3 haben eine Ebene E' gemein. (Lehrsatz I.) E' und E schneiden sich in einer Geraden G, da sie in demselben Raume R_3 liegen. Es liegt nun G in E', dieses in R'_3, also G in R'_3; d. h. E und R'_3 haben die Gerade G gemein.

---

[33]) Es werden im zunächst Folgenden die Gebilde immer in allgemeiner Lage vorausgesetzt. Zwei Ebenen eines Raumes schneiden sich dann stets in einer Geraden. Unendlich ferne gemeinsame reelle Elemente (sog. uneigentliche Elemente) bei parallelen Lagen bleiben zunächst unberücksichtigt. (Zwei parallele Gerade haben einen unendlich fernen Punkt, etc.: Euklidische Geometrie.)

[34]) Dass sie nicht „Nichts“ gemein haben können, folgt aus Axiom I.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/45

Lehrsatz III. Ein Raum und irgend eine Gerade (die nicht ganz in ihm liegt) haben stets einen Punkt gemeinsam. Beweis. Es liege G in R_3 und es ist zu zeigen, dass irgend ein Raum R'_3 von G in einem Punkte A geschnitten wird. R_3 und R'_3 haben die Ebene E gemeinsam. (Lehrsatz I.) Dann liegen E und G in demselben Raum R_3, haben also einen Punkt A gemein. Dieser Punkt liegt auf E, also auch in R'_3. Er ist das einzige gemeinschaftliche von G und R'_3. Denn hätte G mit E zwei Punkte gemein, so läge sie ganz in E, und also auch in R'_3, was gegen die Voraussetzung ist.

Lehrsatz IV. Zwei Ebenen zweier verschiedener Räume haben stets einen Punkt gemeinsam. Beweis. E liege in R_3, E' in R'_3. Die Schnittebene beider Räume sei E''. Dann schneiden sich E und E'' in einer Geraden, da sie in demselben Raume R_3 liegen, ebenso E' und E'', als Ebenen desselben Raumes R'_3. D. h. E und E' schneiden E'' in Geraden, welche, da sie beide auf E'' liegen, sich in einem Punkte auf E'' schneiden. Dieser Punkt gehört beiden Ebenen E und E' gemeinsam an, und ist das einzige gemeinsame beider Ebenen. Der Schnittpunkt zweier Ebenen zweier verschiedener Räume liegt also in der Schnittebene beider Räume. In diesem Punkte geht die Ebene des einen Raumes durch die, sie nicht in einer Geraden schneidenden, Ebene des andern Raumes.

Schneiden sich 2 Ebenen in einer Geraden, so lässt sich durch sie ein Raum R_3 legen. 2 Ebenen, durch die sich kein Raum R_3 legen lässt, welche also nur einen Punkt gemeinsam haben, kann man als sich kreuzende[35]) bezeichnen.

Lehrsatz V. Eine Ebene und eine Gerade, welche nicht in demselben Raume liegen, haben (im allgemeinen) nichts gemein. Beweis. E liege in R_3, G in R'_3. G schneidet die gemeinsame Ebene E' von R_3 und R'_3 in einem Punkte. (Lehrsatz III.) E schneidet E' in einer Geraden G', weil beide im Raume R_3 liegen. Da G durch E' in 2 getrennte Teile getheilt ist, so trifft es G' nicht, denn es hat eben mit E' nur einen (im allgemeinen) ausserhalb von

---

[35]) Doch muss man den Begriff des Kreuzens der Stereometrie dann dahin erweitern, dass man 2 Gebilde sich kreuzende nennt, wenn sie kein Gebilde nächst niederer Stufe gemeinsam haben. S. G. Veronese, Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, Math. Anm. XIX (1881) Daselbst S. 163 der Satz: Ein R_m und ein $R_{m'}$ haben in R_n einen R_a gemeinsam, wenn $a = m + m' - n$. Ist $a = o$, so haben sie den Punkt R_o gemeinsam. (Dieser Punkt kann natürlich eigentlich oder uneigentlich sein, ebenso wie jeder andere R_a.) Ist a negativ, so haben sie kein Element gemeinsam — Denselben Satz spricht Grassmann (Ausdehnungslehre, S. 278) so aus: Ein Gebiet von a-ter und eins von b-ter Stufe, wenn sie in einem Gebiete von c-ter Stufe, aber auch in keinem Gebiete von niederer Stufe vereinigt sind, haben ein Gebiet $(a + b - c)$-ter Stufe gemeinschaftlich. S. auch Rudel a. a. O. (Anm. 31. Bayr. Bl.)

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/46

G' liegenden Punkt gemein; d. h. aber, es trifft auch E nicht; denn ein gemeinsamer Punkt von G und E könnte nur auf G' liegen, weil er zugleich auf E und E' liegen muss. D. h. eine Ebene und eine Gerade in R_4 von ganz allgemeiner Lage kreuzen sich. (S. den Satz von Veronese, Anm. 5.)

Lehrsatz VI. Zwei Gerade in R_4 haben im allgemeinen nichts gemeinsam. Beweis. E und E' seien 2 Ebenen in 2 verschiedenen Räumen, welche nach Lehrsatz V nur einen Punkt A gemein haben. Lege in jeder Ebene eine Gerade, welche nicht durch A geht. (G in E und G' in E'.) Diese Geraden haben dann nichts gemein. Nennen wir 2 solche Gerade sich kreuzende, so fragt es sich, ob diese Art der Kreuzung zweier Geraden eine andre ist, als die zweier Geraden in demselben Raume. Hierüber giebt Lehrsatz VII Auskunft: Durch 2 sich kreuzende Gerade zweier verschiedenen Räume ist stets ein Raum möglich. Beweis. Die sich kreuzenden Geraden G und G' mögen in R'_3 bez. R'_3 liegen. Es ist durch G und G' ein Raum R''_3 zu legen. Die gemeinsame Ebene E von R_3 und R'_3 wird sowohl von G als G' in je einem Punkte, P und P', geschnitten, weil die Ebene und je eine Gerade in demselben Raume liegen. Legen wir in R'_3 durch G' und P eine Ebene E', so hat diese also mit G nur den Punkt P gemein. Durch eine Ebene und eine sie schneidende Gerade ist aber ein R''_3 bestimmt. In diesem Raume R''_3 liegt also G und die Ebene E', und mit dieser die Gerade G', d. h. der Raum R''_3 ist der gesuchte. — Legen wir ebenso in R_3 durch G und P' eine Ebene E'', so hat diese mit G' nur den Punkt P' gemein, also ist durch E'' und G' ein Raum R'''_3 bestimmt, in welchem beide Gerade G und G' liegen. Dieser Raum R'''_3 ist aber identisch mit R''_3, denn sie haben 4 Punkte gemeinsam, d. h. durch 2 sich kreuzende Gerade in R_4 ist ein und nur ein Raum bestimmt.[36])

Ein Raum R_3 ist also in R_4 bestimmt a) durch 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte. b) Durch eine Ebene und einen ausser ihr liegenden Punkt. c) Durch eine Ebene und eine sie schneidende Gerade. d) Durch 2 sich schneidende Ebenen. e) Durch 2 sich kreuzende Gerade, oder, was dasselbe ist, durch eine Gerade und 2 ausser ihr liegende Punkte (doch darf der 2. Punkt nicht in der Ebene durch die Gerade und den ersten Punkt liegen.)

Schneiden sich 2 Gerade G und G' zweier verschiedener Räume, so kann dies nur in einem Punkte P ihrer Schnittebene E geschehen[37]). Durch diese beiden Geraden ist nicht nur ein Raum, sondern eine

---

[36]) Eine Ebene E und eine sie kreuzende Gerade G seien gegeben. Diese können nie in demselben Raume liegen. Gleichwohl ist durch jede Gerade G' in E und durch G ein Raum legbar. Dieser Raum hat eben mit E nur die Gerade G' gemein. Die Ebene E scheidet die ∞^2 Räume durch G in je einer der ∞^2 Geraden G' von E.

[37]) „Schneiden sich 2 Gerade zweier verschiedenen Ebenen eines R_3, so kann dies nur in einem Punkte ihrer Schnittgeraden geschehen."

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/47

Ebene E' bestimmt. Diese Ebene E' hat mit R_3 die Gerade G, mit R'_3 die Gerade G' gemein, mit E nur den Punkt P. Durch G und G', d. h. durch die Ebene E' geht dann ein ganzes Büschel von Räumen R''_3, welche R_3 in einem Büschel von Ebenen durch G schneiden u. s. w.

Lehrsatz VIII. Drei Räume schneiden sich zu je 2 in einer Ebene und diese 3 Ebenen gehen durch eine Gerade. Beweis. Eine Ebene E und eine Gerade G zweier verschiedener Räume R_3 und R'_3 haben im allgemeinen Nichts gemein. (Lehrsatz V.) Haben sie einen Punkt P gemein, so liegt dieser in der Schnittebene E' beider Räume. Durch E und G ist dann ein dritter Raum R''_3 bestimmt. Dieser schneidet R_3 in E, und R'_3 in einer Ebene E'', welche die Gerade G enthält. E und E'' liegen in demselben Raume R''_3 und haben also einen Schnittstrahl G'' gemein. Dieser Strahl G'' liegt also in den 3 Räumen, er liegt in der Schnittebene von R_3 und R'_3 und enthält den Punkt P. Die 3 Räume gehen also durch den gefundenen Schnittstrahl G'' und schneiden sich in 3 Ebenen (R_3 und R'_3 in E', R_3 und R''_3 in E, R'_3 und R''_3 in E''), welche diesen Strahl G'' gemeinsam haben.[38])

Lehrsatz IX. Vier Räume haben stets einen Punkt gemeinsam. Beweis. Nennen wir die Räume $R\ R'\ R''\ R'''$, so haben z. B. R und R' eine Ebene E gemeinsam. (Lehrsatz I.) E und R'' haben eine Gerade G gemein (Lehrsatz II.) G und R''' haben einen Punkt P gemeinsam. Dieser Punkt P ist das einzige gemeinsame aller 4 Räume. Diese haben also als Schnittgebilde: a) Die 6 Ebenen: RR', RR'', RR''', $R'R''$, $R'R'''$, $R''R'''$. b) Die 4 Geraden: $RR'R''$, $RR'R'''$, $RR''R'''$, $R'R''R'''$. c) Den Punkt: $RR'R''R'''$. Oder in Worten: 4 Räume haben 6 Ebenen desselben Punktes gemeinsam, von denen je 3 durch denselben Strahl gehen. — Da ein Punkt in einem Raume R_3 liegen kann, oder auf einer oder der andern Seite desselben in R_4, (welche durch diesen Raum nach Axiom I in 2 getrennte Theile getheilt wird) so haben wir also an jedem Raume 2 Seiten zu unterscheiden, (ebenso wie 2 Ufer einer Geraden, oder die 2, in bek. Weise durch Färbung unterschiedenen Seiten einer Fläche), welche der Kürze wegen durch + (plus) und — (minus) bezeichnet seien. Ein Punkt in R_4 wird dann gegen die 4 sich in einem Punkte schneidenden Räume im ganzen 16 Möglichkeiten der Lage darbieten. (Da sich die 4 Doppelzeichen $\pm$, $\pm$, $\pm$, $\pm$, in 16 Fälle combiniren lassen). Das ganze 4-dimensionale Punktgebiet wird also durch die 4 durch einen Punkt gehenden Räume in 16 Gebiete getheilt, von denen jedes ein 4-dehniger Winkel heisst. Die 4 Räume, welche, vom Scheitel des 4-dehnigen Winkels ausgehend, ihn im gewissen Sinne begrenzen, heissen seine Seiten oder Schenkelräume.[39]) —

[38]) „Von 3 Ebenen eines R_3 schneiden sich je 2 in einer Geraden; diese 3 Geraden gehen durch einen Punkt."

[39]) In der Ebene das entsprechende der Winkel mit seinen 2 Schenkeln (Geraden). Im Raum die körperliche Ecke (3-dehniger Winkel) mit 3 Seiten (Schenkelebenen), die sich in 3 Geraden schneiden.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/48

Wir wollen nun uneigentliche Elemente mit einführen, und wiederholen zu dem Zwecke einige Erklärungen.[40]) Zwei Gerade, welche in derselben Ebene E liegen, ohne sich im endlichen zu schneiden, heissen parallel. Ihr unendlich weites Element (der Punkt) heisst ein uneigentliches. Man sagt, die Geraden haben die Richtung gemein. Man nennt eine Richtung (die Richtung einer Geraden) in einem Gebilde enthalten, wenn irgend eine Gerade dieses Gebildes diese Richtung hat, d. h. jener Geraden parallel ist. Zwei sich schneidende Ebenen eines Raumes enthalten also nur eine gemeinsame Richtung, nämlich die ihrer Schnittgeraden. 2 Ebenen heissen parallel, wenn sie 2 Richtungen gemeinschaftlich haben; sie haben dann alle Richtungen gemeinschaftlich, und man sagt: sie haben die Stellung gemein. Eine Stellung ist also durch 2 Richtungen bestimmt (und durch 2 Stellungen eine Richtung). Zwei parallele Ebenen haben als unendlich fernes Element eine uneigentliche Gerade gemein. Man definirt nun weiter: Eine Stellung (die Stellung einer Ebene) ist in einem Gebilde enthalten, wenn irgend eine Ebene dieses Gebildes diese Stellung hat, d. h. jener Ebene parallel geht. Zwei beliebige Räume R_3 und R'_3 stimmen in einer Stellung überein, nämlich in der der Schnittebene. Sind 2 Ebenen zweier verschiedener sich schneidender Räume der Schnittebene beider Räume parallel, so sind sie unter einander parallel. Die Schnittebene der Räume R'_3 und R''_3 sei E'''. Durch jeden Punkt von R'_3 geht eine Ebene parallel E'''; irgend eine derselben heisse E'. Ebenso geht durch jeden Punkt von R''_3 eine Ebene parallel E''', z. B. E''. Dann ist $E' \parallel E''$. Durch E' und E'' lässt sich ein Raum R'''_3 legen, welcher also R'_3 in E', R''_3 in E'' schneidet. Die 3 Räume schneiden sich somit in 3 Ebenen, welche zu je 2 parallel sind.[41])

Es mögen sich E_1 und E_2 ein und desselben Raumes in der Geraden G schneiden. Durch eine Ebene ist ein Raumbüschel möglich. Legt man durch E_1 einen Raum, welcher E_2 nicht enthält, so schneidet E_2 diesen Raum in der Geraden G. — Legt man durch E_1 einen Raum, welcher E_2 nicht enthält, durch E_2 einen Raum, welcher E_1 nicht enthält, so geht die gemeinsame Ebene dieser beiden Räume durch den Schnittstrahl G von E_1 und E_2. Daraus folgt: Sind 2 Ebenen E_1 und E_2 parallel, d. h. schneiden sich in einem uneigentlichen Strahl, so bestimmen sie Räume, deren Schnittebenen sämmtlich durch diesen uneigentlichen Strahl gehen, d. h. den Ebenen E_1 und E_2 parallel sind.

Zwei Räume sind parallel, wenn sie in 2 Stellungen übereinstimmen, d. h. wenn sie in 3 Richtungen übereinstimmen, die nicht alle 3 derselben Stellung angehören. Lehrsatz X. Stimmen 2 Räume in 3 Richtungen überein, die nicht derselben Stellung angehören, so stimmen sie in allen Richtungen überein. Beweis. Es enthalte R_3 die Richtungen G_1, G_2, G_3 (durch einen

[40]) S. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847.

[41]) S. den entsprechenden Beweis in der Stereometrie.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/49

Punkt gelegt), die nicht derselben Stellung angehören (in einer Ebene liegen) und R'_3 die Richtungen G'_1, G'_2, G'_3, so dass $G'_1 \parallel G_1$, $G'_2 \parallel G_2$, $G'_3 \parallel G_3$. Es ist zu zeigen, dass eine beliebige Richtung G_4 von R_3 auch in R'_3 enthalten ist, (wobei G_4 in keiner der Stellungen $[G_1\ G_2]$, $[G_2\ G_3]$, $[G_3\ G_1]$ liegt.) Die Ebene $[G_3\ G_4]$ in R_3 schneidet die Ebene $[G_1\ G_2]$ in einer Geraden G_5. Die Richtung G_5 ist also in der Stellung $[G_1\ G_2]$, also auch in $[G'_1\ G'_2]$ enthalten, denn 2 Ebenen, die in 2 Richtungen übereinstimmen, stimmen in allen Richtungen überein. Hier heisse diese Richtung G'_5. Die Ebene $[G'_3\ G'_5]$ stimmt also mit $[G_3\ G_5]$ in 2 Richtungen, d. h. in allen Richtungen überein, d. h. sie enthält die Richtung G_4. Jede Richtung G_4 in R_3 ist also auch in R'_3 enthalten.

Lehrsatz XI. Eine Gerade, welche auf 3 Geraden eines Raumes, die sich in einem Punkte schneiden (und nicht einer Stellung angehören) senkrecht steht, steht auf allen durch diesen Punkt gehenden Geraden des Raumes senkrecht. Beweis: Es seien G_1, G_2, G_3 drei beliebige sich in Punkt A schneidende Gerade des Raumes R_3. Es sei $G \perp G_1$, G_2, G_3 und G_4 sei irgend eine andere Gerade durch A in R_3. Dann bestimmen G, G_2 und G_3 einen Raum R'_3, (dessen Schnittebene mit R_3 die Ebene $[G_2\ G_3]$ ist). In diesem Raum steht G senkreht auf der Ebene $[G_2\ G_3]$, weil sie auf G_2 und G_3 senkrecht steht (nach bek. stereometr. Satze). Die Ebene $[G_2\ G_3]$ schneidet die Ebene $[G_1\ G_4]$ in einer Geraden G_5. Da G senkrecht steht auf der Ebene $[G_2\ G_3]$, steht sie senkrecht auf der in ihr liegenden Geraden G_5, d. h. G steht senkrecht auf den beiden Geraden G_5 und G_1 der Ebene $[G_1\ G_4]$; sie steht somit senkrecht auf allen Geraden dieser Ebene, auch auf G_4. w. z. b. w. Man nennt eine solche Gerade, welche auf allen Geraden eines Raumes die durch einen Punkt gehen, in diesem Punkte senkrecht steht, die Senkrechte (Normale) zu dem Raum. In einem Punkte giebt es auf einen Raum nur eine Senkrechte.[42])

Aus Lehrsatz XI folgt: Eine Ebene ausserhalb eines Raumes, welche auf 2 sich schneidenden Ebenen des Raumes senkrecht steht, steht auf allen Ebenen des Raumes senkrecht.

Lehrsatz XII. Zwei Räume, welche auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind parallel. Denn ist $G \perp R_3$, so heisst dies, es steht senkrecht auf allen Stellungen dieses Raumes.

---

[42]) In einem Punkte einer Geraden giebt es in einer Ebene nur eine Senkrechte. Durch die Gerade geht in demselben R_3 ein Büschel von Ebenen, von denen jede eine andere Senkrechte der Geraden (in dems. Punkt) enthält. Auf einer Ebene giebt es in einem R_3 nur eine Senkrechte. Durch diese Ebene ist ein Büschel von Räumen legbar. und jeder Raum enthält eine Senkrechte in dem betr. Punkte auf der Ebene d. h. in einem Punkte einer Ebene ist ein Bündel von Senkrechten möglich, von denen je eine einem der Räume angehört, welche die Ebene als gemeinsames Schnittgebilde haben. Von allen Geraden der R_4, die mit einem R_3 einen bestimmten Punkt gemein haben, ist nur eine senkrecht zu dem R_3.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/50

Ebenso steht G senkrecht auf allen Stellungen von R'_3. Dann kommt jede Stellung von R_3 auch in R'_3 vor, d. h. die Räume sind parallel. (Die Ebenen zweier Winkel mit parallelen Schenkeln sind parallel. Winkel mit parallelen, gleichgerichteten, Schenkeln sind gleich.)

Lehrsatz XIII. Ist von 2 parallelen Geraden die eine eine Senkrechte auf einen Raum, so ist es auch die andre. Beweis. Es sei $G \perp G_1, G_2, G_3$ durch A in R_3. G' gehe durch B und sei parallel G. Ziehe durch B $G'_1 \parallel G_1$, $G'_2 \parallel G_2$, $G'_3 \parallel G_3$, Dann ist $\sphericalangle G'_1 G' = \sphericalangle G_1 G$, weil sie parallele Schenkel haben, d. h. $G' \perp G'_1$. Ebenso ist $G' \perp G'_2$ und G'_3 d. h. senkrecht auf 3 Geraden in R_3, also auf R_3 selbst. Umgekehrt sind alle Senkrechten auf einen Raum parallel. Da sich in einem Raume ∞^3 Punkte befinden, so giebt es auf ihm ∞^3 Senkrechte (in jedem Punkte eine, s. Anm. 42) durch welche R_4 eindeutig erfüllt wird. Ein Punkt in R_4 ist also zweideutig bestimmt durch einen Punkt im R_3 und durch die Senkrechte in diesem Punkte auf R_3, denn er kann noch auf den beiden Strahlen liegen, in welche die Senkrechte in diesem Punkte durch den R_3 getheilt wird. Er ist eindeutig bestimmt, wenn die Richtung auf diesem Strahle angegeben ist und die Strecke zwischen ihm und dem Durchstosspunkte durch den Raum. Von einem Punkte ausserhalb eines R_3 giebt es auf diesen nur ein Loth, welches bis zum Durchstosspunkte mit dem Raume eine bestimmte Länge hat. Es heisst der Abstand des Punktes von dem Raume. Alle Punkte, welche von einem Raume R_3 denselben Abstand a haben, liegen in einem dem ersteren Raume parallelen Raume.

Wir betrachten nun 5 (dreidimensionale) Räume, welche nicht durch denselben Punkt gehen und von denen keiner einem andern parallel ist; es seien diese Räume R_{I}, R_{II}, R_{III}, R_{IV}, R_{V}. Je 4 Räume schneiden sich in einem Punkte. Diese Punkte seien $a \equiv R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{IV}} R_{\mathrm{V}}$, $b \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{IV}} R_{\mathrm{V}}$, $c \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{IV}} R_{\mathrm{V}}$, $d \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{V}}$ und $e \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{IV}}$. Je 3 Räume gehen durch denselben Strahl. Bezeichnen wir den Strahl zwischen den Punkten a und b durch ab, so lesen wir leicht aus den vorstehenden Ausdrücken für die Punkte die Räume ab, welche durch ab gehen: ab wird gebildet von den 3 Räumen, welche in a und b gemeinschaftlich enthalten sind. Es ergeben sich als Schnittstrahlen der 5 Räume die 10 Geraden: $ab \equiv R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{IV}} R_{\mathrm{V}}$, $ac \equiv R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{IV}} R_{\mathrm{V}}$, $ad \equiv R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{V}}$, $ae \equiv R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{IV}}$, $bc \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{IV}} R_{\mathrm{V}}$, $bd \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{V}}$, $be \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{IV}}$, $cd \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{V}}$, $ce \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{IV}}$, $de \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}}$. Jeder Raum schneidet jeden andern in einer Ebene. Es ergeben sich also die 10 Ebenen, welche durch je 3 der Punkte a, b, c, d, e bestimmt sind, die in ihnen liegen, und durch welche wir sie bezeichnen. Es ist dann $abc \equiv R_{\mathrm{IV}} R_{\mathrm{V}}$, $abd \equiv R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{V}}$, $abe \equiv R_{\mathrm{III}} R_{\mathrm{IV}}$, $acd \equiv R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{V}}$, $ace \equiv R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{IV}}$, $ade \equiv R_{\mathrm{II}} R_{\mathrm{III}}$, $bcd \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{V}}$, $bce \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{IV}}$, $bde \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{III}}$, $cde \equiv R_{\mathrm{I}} R_{\mathrm{II}}$. Je 4 der Punkte a, b, c, d, e liegen in einem der 5 Räume, und wir können schreiben: $abcd \equiv R_{\mathrm{V}}$, $abce \equiv R_{\mathrm{IV}}$, $abde \equiv R_{\mathrm{III}}$, $acde \equiv R_{\mathrm{II}}$, $bcde \equiv R_{\mathrm{I}}$.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/51

Durch die 4 Punkte a, b, c, d also z. B. geht der Raum R_V; in diesem Raume gehen durch die 4 Punkte 4 Ebenen (je 3 durch einen Punkt) und 6 Gerade (ebenfalls je 3 durch einen Punkt). Diese Gebilde stellen ein Tetraeder (im allgemeinsten Sinne) dar mit den Ecken a, b, c, d. Es wird also der Raum R_V durch die 4 andern Räume in einem Tetraeder geschnitten. Ebenso ergiebt sich in jedem der anderen Räume ein durch die übrigen Räume erzeugtes Tetraeder. Von diesen 5 Tetraedern hat jedes mit jedem andern eine Fläche gemeinsam. Wir können also aus jedem Tetraeder in jedes andre gelangen, indem wir eine der Grenzflächen überschreiten. (Natürlich nicht in gerader Linie, denn so bleiben wir in demselben Raum.) Die 5 Tetraeder bilden somit ein dreidimensionales Continuum in der vierfachen Mannigfaltigkeit R_4. Durch dieses dreidimensionale Continuum wird ein Theil der vierfachen Mannigfaltigkeit, in der es liegt, von der übrigen R_4 ausgeschnitten. Von keinem Punkte in R_4, welcher dem einen Theile angehört, können wir zu irgend einem Punkte des andern Theils gelangen, ohne das dreidimensionale Tetraedercontinuum zu durchbrechen. Verbinden wir irgend einen Punkt des einen Theiles von R_4 mit irgend einem Punkte im andern Theile durch eine Gerade, so durchstösst diese im allgemeinen einen Grenzraum (das darin liegende Tetraeder) in einem Punkte. Alle Punkte dieser Geraden, mit Ausnahme des einen, welcher im Grenzraum liegt, gehören dem Tetraedercontinuum nicht an. Das in R_4 liegende Gebilde, welches von den 5 Tetraedern begrenzt wird[43]) nennen wir ein Polytop (Vielraum, Vielzell) und bezeichnen nun mit Polytop jeden in R_4 durch ein Continuum von dreidimensionalen Polyedern von der übrigen R_4 ausgeschnittenen Theil. Das oben näher gezeichnete Polytop ist das einfachste aller möglichen, d. h. das von der Minimalzahl von Polyedern begrenzte, denn durch 4 Räume (also durch 4 Polyeder) ist kein geschlossener Theil von R_4 abgegrenzt.[44]) Wir kommen auf dieses einfachste Polytop später zurück und wenden uns zunächst zu einigen analytischen Betrachtungen.

§ 2. Analytische Geometrie.[45])

Wie die Lage eines Punktes A in einer Ebene bestimmt wird, indem wir ihn auf 2 in dieser Ebene gelegenen Coordinatenachsen Ox,

[43]) Ebenso wie das im dreidimensionalen Raume liegende Tetraeder von 4 Dreiecken begrenzt wird.

[44]) Dies folgt auch daraus, dass das Tetraeder das einfachste Polyeder ist; an jede seiner 4 Flächen muss dann ein weiteres Polyeder (Tetraeder) grenzen.

[45]) Die n-dimensionale analytische Geometrie, wie sie, beschränkt auf $n = 4$ in diesem § vorliegt, rührt (zum Theil) von Hoppe und ist in den folgenden Arbeiten niedergelegt: a) Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen. Hoppe's Archiv LXIV 189 (1879). b) Ueber den Winkel von n Dimensionen. ibid. LXVI 448. c) Berechnung einiger 4-dehniger Winkel. ibid. LXVII 269 (1881). d) Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionen-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/52

Oy beziehen[46]), ist bekannt. Ebenso wird als bekannt vorausgesetzt die Bestimmung eines beliebigen Punktes B im Raume, indem wir ihn auf 3, in O auf einander senkrechte, Coordinatenachsen Ox, Oy, Oz beziehen. Gehen wir in Ox von O aus um die Strecke $+x$ vorwärts[47]), von dem erhaltenen Punkte parallel der Achsə Oy (in der Ebene xy) um $+y$, so erhalten wir einen bestimmten Punkt A der xy-ebene. Gehen wir von A parallel der Oz-achse auf einer Geraden um die Länge $+z$ vorwärts, so erhalten wir einen bestimmten Punkt B des Raumes xyz. Es sei nun Ot eine 4. Achse, welche in O auf Ox, Oy, Oz senkrecht steht, d. h. senkrecht steht auf dem xyz-raume.[48]) Wir gehen auf einer Geraden parallel Ot durch B von B aus um die Länge $+t$ weiter. Diese Gerade ist senkrecht auf dem xyz-raume.[49]) Wir erhalten einen bestimmten Punkt C in R_4, bezogen auf das System x, y, z, t und wir bezeichnen die Längen x, y, z, t als seine Coordinaten.[50]) x, y, z, t sind nichts andres, als die Normalen aus C auf die 4 Räume yzt, xzt, xyt, xyz. Diese 4 Räume, welche durch den Punkt O gehen, und von denen jeder auf den 3 andern senkrecht steht, theilen R_4 in 16 gleiche 4-dehnige Winkel. In welchem dieser Theile ein Punkt, dessen Coordinaten die absoluten Werthe x, y, z, t haben, liegt, hängt von den Vorzeichen der 4 Grössen ab. Ist eine der Coordinaten Null, z. B. $x=o$, so heisst dies, der Abstand von dem Raume yzt verschwindet; der Punkt liegt in diesem Raume. Die Punkte $+x$ und $-x$ liegen zu verschiedenen Seiten des Raumes yzt. Ihre Verbindungsstrecke steht senkrecht auf diesem Raum und wird durch ihn halbirt. Es giebt also in R_4 16 Punkte, welche, absolut genommen, gleiche Coordinaten haben, und sich nur durch verschiedene Combination der Vorzeichen unterscheiden. Die weitere Erläuterung des Coordinatensystems in R_4 ist durch die Ausführungen zu Lehrsatz IX gegeben. Es ist gebildet von den 4 Coordinatenachsen x, y, z, t, von 6 Coordinatenebenen xy, xz, xt, yz, yt, zt und von 4 Coordinatenräumen xyz, xyt, xzt, yzt. Aus der Anfangs gegebenen Construktion des Punktes C in R_4 erhellt nun folgendes. Die gleichzeitigen Gleichungen $x=a$, $y=b$, $z=c$, welche das t unbestimmt lassen, geben irgend einen Punkt auf der Geraden

geometrie. ibid. LXVIII 378 (1882). e) Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der Mehrdimensionengeometrie. ibid. LXIX 385. f) Numerische Berechnung der Winkel von 4 Dimensionen. ibid. LXIX 278. U. a. m. S. ferner: Mehmke, Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig viel Dimensionen. Hoppe's Arch. LXX 210 (1883). Schlegel, Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions. Bull. Soc. Math. Fr. X 172 (1882).

[46]) Wir setzen stets senkrecht auf einander stehende Achsen voraus.

[47]) Die beiden möglichen Richtungen werden durch plus und minus unterschieden.

[48]) S. Lehrsatz XI.

[49]) S. Lehrsatz XIII.

[50]) In R_4 existiren ∞^4 Punkte und wegen des Gesetzes der Dualität auch ∞^4 Räume.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/53

an, welche auf dem xyz-raum im Punkte $|a, b, c|$ senkrecht steht, d. h. der t-achse parallel geht. Diese 3 Gleichungen sind also als Repräsentation der so bezeichneten Geraden zu betrachten. $x=a$, $y=b$, $z=c$ ist das gemeinsame der 3 Räume $x=a$ (y, z, t beliebig), $y=b$ (x z, t beliebig), $z=c$ (x, y, t beliebig), welche den 3 Coordinatenräumen durch die Achsen y, z, t; x, z, t; x, y, t in den bez. Abständen a, b, c parallel laufen. $x=o$, $y=o$, $z=o$ repräsentiren die t-achse selbst. Zwei gleichzeitige Gleichungen z. B. $x=a$, $y=b$ repräsentiren eine Ebene. Die eben bezeichnete Ebene ist das gemeinsame der beiden Räume $x=a$ und $y=b$, welche in den Abständen a und b parallel dem yzt- und xzt-Coordinatenraume laufen. Eine Gleichung allein giebt eben einen Raum.

Wenn wir ausser den 4 Coordinatenräumen mit ihren Schnittgebilden die 4 Räume $x=a$, $y=b$, $z=c$, $t=d$ konstruirt denken, so erhalten wir Folgendes. Schreiben wir die 8 Räume in 2 Reihen:

$$x=o,\ y=o,\ z=o,\ t=o,$$
$$x=a,\ y=b,\ z=c,\ t=d,$$

so schneidet jeder Raum der einen Reihe jeden in derselben Reihe stehenden Raum und aus der anderen Reihe jeden nicht mit ihm in derselben Kolonne befindlichen, der ihm parallel ist, in einer eigentlichen Ebene. Es ergeben sich in Summa 24 Ebenen, nämlich[51]: xy, xz, xt, yz, yt, zt, — xb, xc, xd, ya. yc, yd, za, zb, zd, ta, tb, tc, — ab, ac, ad, bc. bd, cd. Je 4 der Ebenen sind parallel. Wir erhalten z. B. die zu xy parallelen Ebenen, wenn wir einen der sie erzeugenden Räume, oder beide, durch den (die) ihm (ihr) parallelen ersetzen; es sind diese 4 parallelen Ebenen: xy, ay, xb, ab. Es sind nun die vorkommenden Geraden zu bestimmen. Parallel zur Achse xyz sind die Geraden, welche wir erhalten, wenn wir 1, 2, oder alle 3 der sie erzeugenden Räume durch den Parallelraum ersetzen. Es sind dies also die Geraden xyz, ayz, xbz, xyc, abz, ayc, xbc, abc. Ebenso ergeben sich je 7 Gerade parallel zu den 3 anderen Coordinatenachsen, in Summa also 32 Gerade. Jede von diesen Geraden liegt in den Ebenen und Räumen, deren Buchstaben ihr Ausdruck enthält, z. B. liegt die Gerade ayc in den Räumen $x=a$, $y=o$, $z=c$ und in den Ebenen ay, ac, yc. Die 8 Räume erzeugen schliesslich die 16 Schnittpunkte, deren Ausdrücke wir erhalten, indem wir in dem Schema $xyzt$ des ersten Schnittpunktes (Coordinatenanfangs) einen, 2, 3 oder alle 4 Buchstaben durch den Buchstaben des Parallelraumes ersetzen. Betrachten wir zum Schluss das Gebilde, welches aus einem Raum, z. B. dem Coordinatenraume $t=o$ durch die 6 übrigen, ihm nicht parallelen, Räume ausgeschnitten wird, so ergeben sich: 1) Die 6 Ebenen xt, yt, zt, at, bt, ct. (Die 3 ersten sind Coordinatenebenen, die 3 letzten hingegen Ebenen, welche je einer derselben parallel sind); 2) 12 Gerade; 3) 8 Schnittpunkte, welche im Raume $t=o$ enthalten sind. Sie sind leicht anzuschreiben. Die 6

[51]) Hier bedeutet der Buchstabe x den Coordinatenraum $x=o$, der Buchstabe a den ihm parallelen Raum.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/54

Räume schneiden also aus dem Raume $t = o$ ein rechtwinkliges Parallelepiped aus. Ein eben solches wird dann durch die bez. Räume aus jedem Raum ausgeschnitten und es ist also ein Theil der R_4 durch die 8 Parallelepipeda, welche ein dreidimensionales Continuum bilden, von der übrigen R_4 abgetrennt. Dieses erhaltene Polytop[52]) ist also das Gebilde in R_4, welches dem rechtwinkligen Parallelepiped in R_3, dem Rechteck in R_2 entspricht. Wir kommen später auf dieses Gebilde zurück und gehen jetzt in der oben begonnenen Diskussion der Bedeutung der Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z, t weiter.

Es gilt ganz allgemein: Eine Gleichung zwischen x, y, z und t repräsentirt einen Raum. Es sei $f(x, y, z, t) = o$ irgend eine Gleichung zwischen den 4 Coordinaten. Nehmen wir für x, y, z bestimmte Werthe, z. B. a, b, c, und setzen dieselben in die Gleichung $f = o$ ein, so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für t, d. h. für jeden beliebig angenommenen Punkt A im Raume der x, y, z erhalten wir in der Geraden $x = a$, $y = b$, $x = c$ eine bestimmte Anzahl von Punkten[53]), welche der Gleichung $f = o$ genügen. Die Vereinigung der so gefundenen Punkte ergiebt aber einen Raum, denn es liegen in dem Raume x, y, z ∞^3 Punkte, in welchen wir die Senkrechte errichten; es enthält also auch das Gebilde $f = o$ ∞^3 Punkte. Jede Gerade $x = a$, $y = b$, $z = c$, $t =$ bel. schneidet den Raum $f = o$ in so viel Punkten, als die Gleichung $f(a, b, c, t) = o$ für t Wurzeln (reell oder complex) giebt. Soll sich nur ein Werth für t ergeben, wie es sein muss, wenn der Raum ein ebener ist, so muss die Gleichung $f = o$ in t linear sein. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die anderen Variabeln (da man bei der Diskussion der Gleichung von jedem der 4 Coordinatenräume ausgehen kann) und es folgt daraus, dass die Gleichung

$$1) \ldots\ldots \alpha x + \beta y + \gamma c + \delta t + \varepsilon = o$$

die Gleichung eines ebenen Raumes ist. Die Schnittebenen dieses Raumes mit den 4 Coordinatenräumen werden erhalten, wenn man eine der Coordinaten Null setzt. Der Raum $t = o$ z. B. wird in der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon = o$ geschnitten u. s. w. Ein Punkt P liegt im Raume 1), wenn seine Coordinaten, in die Gleichung eingesetzt, dieselbe befriedigen. Da ε im allgemeinen nicht Null ist (nur wenn der Raum durch den Coordinatenanfang geht) so können wir Gl. 1) durch ε dividiren und die Gleichung des Raumes enthält somit 4 Konstante. Durch 4 Punkte, d. h. 4 Werthsysteme der x, y, z, t sind also die 4 Konstanten bestimmbar, und können wir leicht die Gleichung des durch 4 gegebene Punkte gehenden Raumes dann hinschreiben. Die Punkte x, y, z, t, welche, in Gl. 1) eingesetzt, der

---

[52]) S. Durège, Ueber Körper von 4 Dimensionen. Wiener Ber. LXXXIII 1110 (1881). Ferner: Scheffler, Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen. Braunschweig 1880. S. 148. K. Rudel, Vom Körper höherer Dimension. Kaiserslautern 1882.

[53]) Wir schneiden gewissermaassen das fragliche Gebilde $f = o$ durch die Gerade $x = a$, $y = b$, $z = c$, $t =$ beliebig.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/55

linken Seite Werthe entgegengesetzten Vorzeichens geben, liegen auf verschiedenen Seiten des Raumes, und zwar die Punkte, welche das positive Zeichen ergeben, auf der Seite, auf welcher sich der Coordinatenanfang befindet.

Schreiben wir, der Kürze wegen, Gleichung 1) $\Sigma = o$ und geben einen zweiten Raum durch die Gleichung $\Sigma' = o$[54]), so bedeutet das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen den geometrischen Ort derjenigen Punkte, welche beiden Räumen zugleich angehören, d. h. eine Ebene. In derselben Weise erhalten wir in den 3 Gleichungen $\Sigma = o$, $\Sigma' = o$, $\Sigma'' = o$ eine Gerade, und 4 simultane Gleichungen bestimmen den Punkt, dessen Coordinaten sich durch Auflösung der 4 Gleichungen nach den Unbekannten x, y, z, t ergeben. Irgend ein System von 2, 3, 4 Gleichungen bedeutet eine Ebene, Gerade oder Punkt, welche in jedem der Räume liegen, deren Gleichungen dem Systeme mit angehören. Sind $\Sigma = o$ und $\Sigma' = o$ irgend 2 Räume, so ist $\Sigma + \lambda\Sigma' = o$ (wo λ eine willkürliche Grösse ist) die Gleichung eines Raumes, welcher durch die Schnittebene der beiden Räume geht, denn alle Punkte der Schnittebene befriedigen die Gleichung, weil sie bereits ihre 2 Theile für sich befriedigen. Es bedeutet dementsprechend

$$\Sigma + \lambda\Sigma' + \mu\Sigma'' = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

die Gleichung irgend eines Raumes, welcher die Schnittgerade der 3 Räume $\Sigma = o$, $\Sigma' = o$, $\Sigma'' = o$ enthält. Es giebt also durch eine Ebene eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Räumen (λ von $-\infty$ bis $+\infty$), durch eine Gerade aber eine 2fach unendliche Mannigfaltigkeit. Sind nun x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2 die Coordinaten irgend zweier bestimmter Punkte in einem beliebigen anderen Raume (welche also die Gleichungen $\Sigma = o$, $\Sigma' = o$, $\Sigma'' = o$ einzeln nicht befriedigen) so bestimmen sie in ihrem Raum eine Gerade, welche in keinem jener 3 anderen Räume liegt, und zu deren Schnittgeraden kreuzend ist. Unter der 2fach unendlichen Mannigfaltigkeit 2) von Räumen befindet sich aber dann ein und nur ein Raum, welcher durch die Punkte x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2, d. h. durch ihre Verbindungsgerade geht. Denn setzen wir diese Werthe in Gl. 2) ein, so ergeben sich 2 Gleichungen zur Bestimmung von λ und μ, und die Substitution der für λ und μ gefundenen Werthe in 2) ergiebt die Gleichung des gesuchten Raumes, in welchem die beiden sich kreuzenden Geraden liegen, womit Lehrsatz VII auch analytisch bewiesen ist.

Es sei A ein Punkt mit den Coordinaten x, y, z im Raume $t = o$. Ist ϱ seine Entfernung vom Coordinatenanfang O, so ist $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$. Errichten wir in A die Normale auf dem Raume, und gehen auf derselben um die Strecke t (also parallel der t-achse) vorwärts, verbinden den erhaltenen Endpunkt P mit O, so ist OAP ein rechtwinkliges Dreieck, mit dem rechten Winkel bei A, denn die Gerade AP, welche senkrecht auf dem Raume $t = o$ steht, steht senkrecht auf AO. Es ergiebt sich dann, nach dem Pythagoreischen Lehrsatze, mit r die Entfernung PO des Punktes x, y, z, t vom Coordinatenanfang

[54]) Wo also die α, β, γ, δ durch α' β' γ' δ' ersetzt sind.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/56

bezeichnet: $r^2 = \varrho^2 + t^2$, oder $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Das Quadrat der Entfernung zweier festen Punkte $x_1 y_1 z_1 t_1$, $x_2 y_2 z_2 t_2$ ist also:

$$3) \ldots\ldots r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2$$

wie durch Parallelverschiebung des Coordinatensystems nach einem der Punkte in Verbindung mit dem Ausdrucke für r^2 der vorhergehenden Gleichung sich ergiebt. Bedeutet u die Entfernung eines variabeln Punktes x, y, z, t von einem fest gegebenen Punkte x_1, y_1, z_1, t_1 so können wir eine Gerade durch x_1, y_1, z_1, t_1 in den 4 Gleichungen hinschreiben:

$$4) \ldots\ldots x = x_1 + \alpha u,\ y = y_1 + \beta u,\ z = z_1 + \gamma u,\ t = t_1 + \delta u.$$

Hier ist u, die Entfernung des variablen Punktes vom festen, die einzige unabhängige Variable. Dabei ist, wie sich aus den Gleichungen sofort ergiebt:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind die cosinus der Winkel, welche die Gerade mit den Coordinatenachsen bildet. Wir bezeichnen diese Grössen als Richtungscosinus der Geraden. Der Winkel zweier Geraden heisst die Grösse w, deren cosinus

$$\cos w = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'$$

ist, wo die Richtungscosinus der zweiten Geraden durch die Accente unterschieden sind. In den Coordinatenachsen sind die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, immer je mit Ausnahme einer, Null. Stehen 2 Gerade senkrecht auf einander, so ist somit für ihre Richtungscosinus die Bedingung erfüllt:

$$5) \ldots\ldots \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' = o.$$

Von der Aufstellung der Coordinatentransformationsformeln sehen wir ab, und verweisen hierüber auf Hoppe (s. Anm. 45 no. a). Es ist nun analytisch der Satz zu beweisen, dass eine Gerade normal ist zu einem Raume, wenn sie normal ist zu allen darin enthaltenen Geraden (durch den betr. Punkt). Die Gerade, deren Gleichungen in 4) hingeschrieben sind, ist senkrecht zu dem Raume

$$6) \ldots\ldots \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = \varepsilon.$$

Denn nimmt man in letzterem eine beliebige Gerade durch $x_1 y_1 z_1 t_1$:

$$7) \ldots\ldots x = x_1 + \alpha' v,\ y = y_1 + \beta' v,\ z = z_1 + \gamma' v,\ t = t_1 + \delta' v,$$

so muss diese die Gleichung 6) erfüllen für jedes beliebige v. Die Einsetzung von 7) in 6) ergiebt aber hierfür die Bedingung 5), d. h. die Gerade 4) ist normal zur Geraden 7), welches eine beliebige Gerade des Raumes 6) ist. Daraus folgt weiter, dass die Gerade 4) normal ist zu jeder Ebene, unter deren beiden Gleichungen die Gleichung 6) vorkommt.

Aufgabe 1. Es seien 2 Punkte, $x_1 y_1 z_1 t_1$ und $x_2 y_2 z_2 t_2$, gegeben. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, die von diesen Punkten gleichen Abstand haben? Ist x, y, z, t einer dieser Punkte, so gilt für ihn:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (t - t_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 + (t - t_2)^2.$$

Nach Weghebung der links und rechts gemeinschaftlichen quadratischen Glieder bleibt eine lineare Gleichung von der Form $ax + by +$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/57

$cz + dt = A$, d. h. ein Raum. Hiermit ist zugleich eine Definition für den ebenen Raum in R_4 gegeben, nämlich als geometrischer Ort aller Punkte, wslche von 2 festen Punkten gleichen Abstand haben.

Aufgabe 2. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte denselben Abstand r haben? Wir behandeln nur den Fall, wo der feste Punkt der Coordinatenanfang ist, denn im allgemeinen Falle können wir das Coordinatensystem durch Verschieben nach dem festen Punkte als Anfang bringen: durch Coordinatentransformation wird aber die Art des fraglichen Gebildes nicht geändert. Wir erhalten als geometrischen Ort:

$$8) \ldots\ldots x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2.$$

Diese eine Gleichung repräsentirt einen Raum R_3 in R_4, der nicht eben ist, vielmehr das Analogon der Kugelfläche im ebenen R_3 darstellt. Er wird von jedem ebenen Raum, der ihn überhaupt schneidet, in einer Kugel geschnitten (wie die Kugel von jeder Ebene in einem Kreise) z. B. von dem Raume $t = a$ in der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - a^2$. Soll also die Kugel einen reellen Radius haben, so muss $a < r$ sein, woraus folgt, dass jeder ebene Raum, der den Kugelraum 8) in einer reellen Kugel schneiden soll, einen Abstand $\leqq r$ vom Coordinatenanfang haben muss. Für $t = r$ ergiebt sich $x = y = z = o$, d. h. ein Punkt, nämlich einer der beiden Punkte, in welchem die Cordinatenachse $x = y = t = o$, $t = const.$ den Raum 8) schneidet. Der Kugelraum 8) wird durch 4 Räume durch den Coordinatenanfang, z. B. durch die 4 Coordinatenräume selbst, in 16 Theile getheilt, welche mit den vierdehnigen Winkeln wachsen und abnehmen, und also als deren Maass betrachtet werden können. Bezeichnen wir mit R den vierdehnigen Winkel zwischen 4 normalen Räumen, so ist die Summe aller vierdehnigen Winkel um einen Punkt herum 16 R. Die Summe der vierdehnigen Winkel auf einer Seite eines Raumes, die um einen Punkt desselben liegen, ist also 8 R. Bezüglich alles weiteren verweisen wir auf die Eingangs (Anm. 45) citirten Schriften von Hoppe, wo sich besonders über metrische Beziehungen höchst interessante Resultate niedergelegt finden. Anderem, besonders auf Polytope bezüglichem, begegnen wir in den folgenden Paragraphen.

§ 3. Projektionen der Polytope. Der erweiterte Eulersche Satz. Reciproke Polytope.

Wir verbinden einen Punkt P ausserhalb eines convexen[55]) Polyeders mit dessen sämmtlichen Ecken durch Gerade und nehmen an, dass diese Geraden die Ebene irgend einer Seitenfläche des Polyeders nur innerhalb der Kantencontour dieser Seitenfläche schneide.[56]) Wir er-

[55]) Die Oberfläche eines solchen wird von einer beliebigen durch das Polyeder gehenden Geraden in nie mehr als 2 Punkten geschnitten.

[56]) Der Punkt P lässt sich stets so wählen, dass für jede beliebige Seitenfläche des Polyeders diese Bedingung erfüllt wird; er muss nur möglichst nahe an die Oberfläche des Polyeders von Aussen rücken.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/58

halten darin die Projektion aller Ecken des Polyeders auf diese Grenzfläche und die Verbindungsstrecken dieser Projektionspunkte ergeben die Projektionen der Kanten des Polyeders, während die von diesen Strecken begrenzten Ebenenstücke als die Projektionen aller Seitenflächen des Polyeders auf diese eine Grenzfläche aufzufassen sind. Dieses Liniennetz bezeichnen wir als Diagramm des Polyeders.[57]) (S. Fig. 1. Das Diagramm des regulären Pentagondodekaeders.) Die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen des Polyeders stimmen überein mit den Anzahlen der Ecken (Punkte), Kanten (Strecken) und Flächen seines Diagrammes; die Flächen natürlich nur, wenn wir die Gesammtfläche des Diagrammes zur Zahl seiner Einzelflächen hinzufügen, wie aus der Konstruktion desselben einleuchtet.

Unter 2 isomorphen Polyedern verstehen wir solche Polyeder, welche gleichviel Ecken, Kanten und Flächen enthalten, und in ihrem gestaltlichen Charakter vollständig übereinstimmen, so dass z. B. zu jeder Fläche und Ecke des einen sich eine gleichartig begrenzte Fläche und Ecke des andern angeben lässt. Die Anordnung der Flächen und Ecken des einen ist dieselbe wie im andern; auf die Grösse der Flächen und Kanten kommt es dabei nicht an, sondern nur auf ihr Lagenverhältniss in der Gesammtoberfläche des Polyeders.[58]) Es lässt sich beweisen[59]), dass 2 isomorphe Polyeder durch allmäliche stetige Variation der Lage der bildenden Grenzebenen in einander übergeführt werden können. Es ist somit völlig gleichgültig, welches Individuum aus einer Reihe isomorpher Polyeder morphologischen (rein gestaltlichen) Betrachtungen, wo es nur auf die eben näher bezeichnete gegenseitige Lage und Zahl der Grenzgebilde ankommt, zu Grunde gelegt wird. Wir können also z. B. ein solches Individuum wählen, bei welchem die eine, als Projektionsebene zu benutzende, Fläche alle andern derart an Grösse übertrifft, dass auch noch bei orthogonaler Projektion (wo der Augenpunkt P unendlich weit rückt) die Projektion des ganzen Polyeders innerhalb dieser einen Grenzfläche zu liegen kommt. In diesem Sinne geben die Figuren 2 und 3 die Diagramme sämmtlicher Typen möglicher Fünf- und Sechsflächner. (Die Schraffirung, welche die Figuren körperlich erscheinen lässt, ist hier wegzudenken.) Auch ist der Satz einleuchtend: Die Diagramme isomorpher Polyeder sind isomorph. Statt das Polyeder zu untersuchen, genügt für rein morphologische Fragen die Betrachtung des Diagramms, wenn wir, hier ohne Beweis, die Richtigkeit des Satzes gelten lassen: Zu jedem in der Zeichnung vorliegenden Diagramme

[57]) Denken wir uns in P ein Auge, und die fragliche Fläche des Polyeders durchsichtig, so giebt das Diagramm das Bild des Polyeders von Innen, wie es dem in P befindlichen Auge erscheint.

[58]) S. Eberhard, Zur Morphologie der Polyeder, Leipzig 1891. S. 10 ff. Es sind z. B. alle, geraden oder schiefen, Pyramiden über beliebigen Vielecken derselben Seitenzahl isomorph; ebenso ein Würfel und ein Rhomboeder, etc.

[59]) S. Eberhard a. a. O. S. 26.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/59

existirt auch wirklich ein Polyeder. — Es sei nun in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit irgend ein Polytop gegeben, d. h. ein von 3-dimensionalen Polyedern (Räumen) ringsum begrenzter Theil der Mannigfaltigkeit. Jedes Polyeder liegt in einem andern Raume, und hat mit jedem andern angrenzenden Körper eine Fläche gemein. (Die Schnittebene der beiden Räume, in denen die Polyeder liegen.) Wir nehmen jetzt, der Kürze wegen, gleich an, dass das eine Grenzpolyeder, p, die übrigen so an Grösse übertrifft, dass die Normalen aus allen Eckpunkten des Polytops (die nicht bereits diesem ersten Grenzpolyeder angehören) auf den dieses Grenzpolyeder enthaltenden Raum diesen innerhalb des Grenzpolyeders p schneiden. Es geschieht dies für jede Normale in einem Punkte, und es entstehen also in dem Projektionspolyeder p soviel in seinem Innenraum liegende Punkte, als das Polytop ausser den Ecken des Projektionspolyeders noch Ecken enthält. Ebenso erscheinen die Kanten und Flächen des Polytops, an Zahl unverändert, als Kanten und Flächen innerhalb des Polyeders, und jedes Grenzpolyeder des Polytops erscheint als Polyeder innerhalb des von p eingeschlossenen dreidimensionalen Raumes. Das Polytop projicirt sich also in das eine Grenzpolyeder als ein Netz (Zellgewebe) von Polyedern, welches wir, dem früheren analog, als Diagramm des Polytops bezeichnen. In jedem Eckpunkte des Diagramms, innerem wie äusserem, d. h. in seiner polyedrischen Umhüllungsfläche gelegenem, stossen mindestens 4 Polyeder zusammen, und ebenso mindestens 4 Kanten und 6 Flächen, weil eine Ecke des Polytops erst von wenigstens 4 Räumen gebildet wird. Die Zahl der das Polytop begrenzenden Polyeder ist gleich der Zahl der Zellen des Diagramms, vermehrt um 1, weil das ganze umgrenzende Polyeder als solches mitzuzählen ist. Die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen stimmen in Polytop und Diagramm überein. Es seien die Anzahlen der das Polytop bildenden Ecken, Kanten, Flächen und Polyeder e, k, f und p, und es werde die dem Eulerschen Satze im Raume entsprechende Gleichung zwischen diesen 4 Grössen gesucht.[60]) Wir können diese Relation für das

[60]) Dieser Satz findet sich in mehreren fast gleichzeitig erschienenen Abhandlungen von Durège, Schlegel, Hoppe und Rudel. S. Durège, Ueber Körper von 4 Dimensionen (1881). S. 1120. Schlegel, Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. Nova Acta d. Ksl. Leop. Carol. deutschen Akad. d. Naturforscher. Bd. XLIV. No. 4 (1881). S. 386. Hoppe, Regelmässige linear begrenzte Figuren von 4 Dimensionen. Hoppe's Archiv LXVII. 1882. S. 29. Rudel, Vom Körper höherer Dimension. Kaiserslautern 1882. S. 11. (Nur an speziellen Polytopen nachgewiesen.) Die Ableitungen von Schlegel und Hoppe sind ziemlich dieselben, während der Beweis von Durège davon abweicht. Wir halten uns an die Arbeit von Schlegel, auf welche wir in § 5 zurückzukommen haben. Durège behandelt übrigens p. 1116 das von uns in § 1, p. 1117 das von uns in § 2 betrachtete Polytop; wiewohl, wie Rudel (a. a. O. S. 9) bemerkt, die Darstellung von Durège einer Richtigstellung bedarf. Führen wir statt der Bezeichnungen e, k, f, p die neuen a_0, a_1, a_2, a_3 ein, und

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/60

Diagramm des Polytops ableiten, da die Zahlen e, k, f und p in diesem dieselben sind, wie im Polytop selbst, wenn wir nur das Umhüllungspolyeder mit berücksichtigen. Für jedes Eulersche Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gelten nun die Gleichungen $e+f-k=2$; p (Polyeder) $=1$, also $e+f-k-p=1$.

Nehmen wir an, diese Gleichung gelte auch für einen n-theiligen polyedrischen Körper, d. h. für ein Polytop-Diagramm, dessen Umhüllungspolyeder nicht als solches mitgezählt ist. Lässt sich dann zeigen, dass sie auch nach Hinzufügung eines weiteren Polyeders noch gilt, so gilt sie nach dem Schlusse von n auf $n+1$ allgemein. Hat nun das hinzutretende Polyeder f' Flächen, von denen f'' mit Flächen des gegebenen Körpers zusammenfallen, so beträgt der Zuwachs an Körpern 1, der Zuwachs an Flächen $f'-f''$. Ferner habe der hinzutretende Körper k' Kanten, von denen k'' mit Kanten des gegebenen Körpers, und e' Ecken, von denen e'' mit Ecken des gegebenen Körpers zusammenfallen. Dann beträgt der Zuwachs an Kanten $k'-k''$, der Zuwachs an Ecken $e'-e''$. Demnach geht der Ausdruck

a) ..... $e+f-k-p$

über in:

b) ..... $e+e'-e''+f+f'-f''-(k+k'-k'')-(p+1)$

oder, da nach Annahme $e+f-k-(p+1)=o$ ist, in:

c) ..... $(e'-e'')+(f'-f'')-(k'-k'')$.

Nun ist für das neu hinzugetretene Polyeder $e'+f'-k'=2$ und für die polygonale Figur, welche diesem und dem gegebenen Körper gemeinsam ist, gilt[61]): $e''+f''-k''=1$. Es hat also der Ausdruck c) oder b), ebenso wie a) den Werth 1. Die Gleichung $e+f-k-p=1$ gilt also für jeden polyedrischen Körper (da sie für das ungetheilte Polyeder gilt) d. h. für jedes Diagramm eines Polytops. Für dieses gilt somit, da das Umhüllungspolyeder des Diagramms im Polytop als letzter Körper hinzutritt, die Gleichung zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten, Flächen und Polyeder:

d) ..... $e+f-k-p=o$.

D. h.: „Die Summe der Anzahlen der Ecken und Flächen eines Polytops ist ebenso gross wie die Summe der Anzahlen seiner Kanten und Körper.“ Indem wir die weitere Diskussion dieser Gleichung für den nächsten § aufsparen, wenden

setzen die Reihe entsprechend weiter fort, so gilt für ein Gebilde im n-dimensionalen Raume:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} = 1 - (-1)^n.$$

Dies ist die für den n-dimensionalen Raum erweiterte Euler'sche Gleichung, wie sie von Hoppe (a. a. O.), Stringham (Americ. Journ. of Math. vol. III. p. 3), Durège (a. a. O.) u. A. aufgestellt und bewiesen worden ist.

[61]) Es gilt diese Gleichung für jede polygonale Figur, welche man erhält, wenn man aus einem Polyeder einen einfach zusammenhängenden Complex von Flächen weglässt, S. Baltzer, Elemente II. S. 213. Schlegel a. a. O. S. 317. Camille Jordan, Recherches sur les polyèdres. Crelles J. Bd. 66 (1866) S. 35.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/61

wir uns zu einer ausführlicheren Behandlung der beiden bereits früher besprochenen Polytope, ihrer Diagramme und Netze und erläutern schliesslich das Gesetz der Reciprocität der Gebilde.

Stellen wir einen Würfel im R_3 mit seinen Ebenen parallel den 3 Coordinatenebenen, so ergeben sich als orthogonale Projektionen des Würfels auf diese 3 Quadrate. Von den 6 Flächen des Würfels projiciren sich je 2 gegenüberliegende in ein Quadrat. Betrachten wir nur eins der Quadrate als Projektion des Würfels, so zählt seine Fläche also doppelt; die 4 übrigen Flächen des Würfels projiciren sich in je eine Kante des Quadrates. Jede Quadratkante gilt als Projektion von Kanten des Würfels doppelt, während sich die 4 übrigen Würfelkanten als Eckpunkte des Quadrats projiciren. Jede Ecke des Quadrates ist die Projektion von 2 Ecken des Würfels. — Projiciren wir aber den Würfel (in der obigen Lage) auf eine seiner Seitenflächen, von einem im endlichen liegenden Augenpunkte aus, so erhalten wir als Diagramm die Figur 4, wo die Kanten des Würfels, welche den 3 Coordinatenachsen parallel laufen, im Diagramm die entsprechenden Buchstaben tragen. — Bewegen wir von einem Würfel, der im x, y, z-Coordinatenraume mit seinen Flächen den Coordinatenebenen parallel liegt, und dessen Kante die Länge a hat, die Ecken sämmtlich auf Geraden, die in ihnen senkrecht auf dem Raume des Würfels stehen, um die Strecke a fort (d. h. auf Geraden parallel der t-achse) so beschreibt jede Kante des Würfels ein Quadrat, jede seiner Flächen einen Würfel und es entsteht das in § 2 beschriebene Polytop mit 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Flächen und 8 Polyedern (hier speziell Würfeln). Umgekehrt ist der Ausgangswürfel die Projektion dieses Polytops (in geziemender Lage) auf den xyz-Coordinatenraum. Der Raum des Würfels ist doppelt zu denken: er ist die Projektion zweier gegenüberliegenden Grenzpolyeder des Polytops. Die übrigen 6 Polyeder projiciren sich je einfach in eine Seitenfläche des Würfels. Jede Fläche des Würfels ist das Bild von 2 Flächen des Polytops, während sich dessen übrige 12 Flächen zu je einer in eine Kante des Würfels projiciren. Die Kanten der beiden Grenzpolyeder, welche parallel dem xyz-Coordinatenraum laufen, bilden sich in die Kanten des Würfels ab, welche also doppelt zu zählen sind; die übrigen 8 Kanten des Polytops projiciren sich je eine in eine Ecke des Würfels. Die 8 Ecken des letzteren sind als Projektionen der 16 Polytopecken doppelt zu zählen.

Projiciren wir aber unser Polytop in einen seiner Grenzwürfel (welcher dem xyz-Coordinatenraum parallel liegt) in analoger Weise, wie vorher den Würfel in eines seiner Grenzquadrate, so erhalten wir das in Figur 5 gezeichnete Diagramm. Die Kanten, welche im Polytop der x-, y-, z-achse parallel laufen, sind auch in ihrer Projektion parallel, und nur die Kanten, welche der t-achse parallel sind, erscheinen in der Projektion verkürzt.[62]) Der innere, eingeschlossene Würfel (im Diagramm) ist der dem äussern gegenüberliegende. An jeden Würfel grenzt in jeder Fläche ein zweiter Würfel; in jeder

[62]) S. das entsprechende beim Würfel und seinem Diagramm.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/62

Ecke des Polytops stossen 4, in jeder Kante 3 Würfel zusammen. Jeder Punkt des Diagramms zählt natürlich doppelt: einmal als Punkt einer der Zellen des Gewebes und dann noch als Punkt des Umhüllungswürfels. Für das Polytop gilt folgendes: Aus jedem Würfel kann man in das Innere sowohl als das Aeussere der von dem ganzen Würfelkontinuum getheilten 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit gelangen, ohne eine Fläche oder Kante eines Würfels zu durchbrechen. Keiner der Würfel nimmt irgend einen Theil der R_4 in Anspruch.[63]) Ein in einem Würfel wandernder Punkt berührt (wenn wir uns so ausdrücken dürfen) zugleich die Aussen- und Innenseite von R_4 (wie ein, in einer Würfeloberfläche im R_3 wandernder Punkt zugleich dem Aussenraum und Innenraum des Würfels angehört). „Er kann sich unaufhörlich längs der Umgrenzung des inneren R_4 durch die verschiedenen Würfel, über deren gemeinsame Flächen, Kanten und Ecken hinweg, von einem zum andern fortschreitend, hindurch bewegen, und kann doch auch wieder in jedem Momente seiner unbeschränkten Bewegung, ohne jede Ueberschreitung irgend einer Grenze, ohne jede Durchdringung irgend welchen Raumgebildes, lediglich durch die geringfügigste Seitenbewegung in einer Richtung, welche nicht im betreffenden Grenzkörper enthalten ist[64]), sofort im Innern oder im Aeussern der R_4 seinen Weg fortsetzen.“ Das Innere jedes der Grenzwürfel, Flächen oder Kanten ist daher von einem in R_4 wandernden Punkte sowohl von Aussen als von Innen zugänglich, ohne dass der Punkt nöthig hätte, eines der betreffenden Grenzgebilde jener Würfel, Flächen oder Kanten zu durchsetzen.[65]) Der Punkt kann z. B. aus dem Innern eines Grenzwürfels in das Innere eines benachbarten Grenzwürfels (oder auch in das Innere des 1. Würfels zurück) unbehindert gelangen, weil er aus dem Raum R_3 des betr. Würfels heraustreten kann und doch in der die Kanten und Flächen des Würfels als Elemente enthaltenden R_4 bleibt. Nach Umgehung der Grenzen des Würfels tritt er dann aus R_4 wieder in diesen ein, oder aber in einen Nachbarwürfel.

Gelangt ein Punkt in einem Grenzwürfel an die Grenzfläche mit einem Nachbarwürfel, so kann er, diese Fläche überschreitend, in den Nachbarwürfel übertreten; nur darf man dieses Ueberschreiten der Grenzfläche nicht als ein Schneiden im eigentlichen Sinne des Wortes nehmen. Denn der Punkt darf nicht geradlinig weitergehen, weil die Richtung, die er eben vor dem Ueberschreiten hat, die also dem ersten Würfel und dem Raume, in dem er sich befindet, angehört, nicht im

---

[63]) Ebensowenig wie eine Fläche eines Würfels ein Theil des dreidimensionalen Würfels ist.

[64]) Und solcher giebt es an jeder Stelle unzählig viele; eine davon ist die Coordinatenrichtung, auf welcher der betr. Grenzkörper senkrecht steht.

[65]) Aus dem Innern einer Fläche des Würfels in R_3 gelangt ein Punkt, ohne Durchbrechung einer Kante, in die benachbarte Würfelfläche, wenn er zunächst aus der ersten Fläche in den R_3 hinaustritt, die Kante umgeht, und dann in die andere Fläche eintritt.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/63

Nachbarraum und dem in ihm liegenden Würfel vorkommt.[66]). Der Punkt muss, im Augenblicke, wo er sich in der Grenzfläche befindet, etwa eine Richtung einschlagen, welche normal ist zu allen Geraden im ersten Würfel. Behält er seine Richtung bei, so bleibt er in demselben Raume, von welchem der erste Würfel ein abgegrenzter Theil ist; da er aber ausserhalb des Würfels ist, so gehört er der Umgrenzung des Polytops nicht mehr an und liegt ausserhalb desselben. Der Punkt kann jedoch, auch wenn er bereits in der Grenzfläche ist, noch auf unzählig vielen Wegen ins Aeussere der R_4 gelangen, ohne auf die andere Seite der Grenzfläche gehen zu müssen.

Stellen wir über die gegenseitige Lage der Geraden und Ebenen am Polytop, bez. seinem Diagramm noch einige Betrachtungen an. Jede Richtung einer Ebene, z. B. der xy-ebene lässt sich aus den Richtungen zweier Geraden der Ebene, z. B. der x und y-achse, zusammensetzen; jede Richtung des xyz-raumes aus den zu einander senkrechten 3 Richtungen der Coordinatenachsen. Eine Richtung die sich nur aus 3 und nicht weniger auf einander senkrechten Richtungen zusammensetzen lässt, kann also einer Ebene nicht angehören, die durch 2 dieser Richtungen bestimmt ist. — Die 3 Richtungen, welche jede Richtung in einem der Räume bestimmen, in welchem ein Grenzwürfel eines Polytops liegt, lassen sich an den Kanten dieses Würfels ablesen. So stimmen die Würfel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 in allen Richtungen überein, denn sie enthalten beide die Richtungen x, y, z; diese Würfel sind parallel. 2 benachbarte Würfel stimmen nur in den Richtungen ihrer gemeinsamen Grenzfläche überein, z. B. der innerste im Diagramm und der obere in den Richtungen x und y, während der erstere als dritte Richtung z, der zweite t enthält. Betrachten wir die Ebenen. Alle Ebenen (Quadrate), welche in 2 Richtungen übereinstimmen, sind parallel, z. B. die 4 horizontalen Ebenen (im Diagramm) oder die Ebenen 1, 4, 9, 10; 2, 3, 12, 11; 6, 7, 15, 14; 5, 8, 16, 13. Zwei Ebenen, welche sich im Diagramm in einer ausgezogenen Geraden schneiden, thun dies auch im Polytop. Sie liegen, wie ein Blick auf die Figur zeigt, in der That in demselben Raum; z. B. die Ebenen 1, 2, 11, 10 und 2, 11, 12, 3 liegen im Raume des untersten Würfels. Sie haben die Stellungen x, t und y, t, stimmen also in der Richtung t überein und stehen auf einander senkrecht. Die beiden Ebenen 5, 6, 7, 8 und 5, 1, 13, 10 stimmen in keiner Richtung überein, denn die erstere hat die Stellung x, y, die zweite die Stellung z, t. Diese beiden Ebenen gehören verschiedenen Räumen an, (erstere dem Raum, in welchem der Würfel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 liegt, letztere dem Raume des Würfels 1, 10, 13, 5, 4, 9, 16, 8) und haben nur den Punkt 5 gemeinsam. In diesem Punkte kreuzen sich die beiden Ebenen. — Betrachten wir schliesslich noch einige Kanten. Diejenigen, welche denselben Achsenbuchstaben tragen, sind parallel. Je 4 von einem Punkte ausgehende sind senkrecht auf

[66]) Denn die beiden Würfel (Räume) stimmen nur in den Richtungen ihrer Schnittebene überein (s. § 1).

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/64

einander, und liegen, wie die Figur zeigt, immer zu 3 in einem Raume. Die beiden Geraden 5, 8 und 2, 6 kreuzen sich und liegen im Raume des innersten Würfels. Die beiden Geraden 5, 8 (Richtung y) und 11, 14 (Richtung z) kreuzen sich ebenfalls, während sie zunächst nur (je eine) in den benachbarten Räumen 5, 6, 7, 8, 14, 15, 16, 13 und 2, 6, 14, 11, 7, 15, 12, 3 liegen. Die Schnittebene dieser beiden Räume ist 6, 7, 15, 14 und enthält die Richtungen y und t. Also ist die erste der beiden obigen Geraden parallel dieser Schnittebene, die zweite steht senkrecht auf derselben im Punkte 14. Durch beide sich kreuzende Gerade lässt sich aber sofort ein Raum legen. 11, 14 (parallel z) steht senkrecht auf allen Ebenen des zuerst hingeschriebenen Raumes, denn sie steht senkrecht auf den Stellungen ty, xy, tx, welche diesem Raume angehören. Also steht sie auch senkrecht auf der Ebene 5, 18, 14 dieses Raumes. Durch diese Ebene und die sie schneidende Gerade 11, 14 ist aber ein R_3 bestimmt, welcher den vorigen Raum in eben dieser Ebene schneidet und sonst nichts mit ihm gemein hat. Dann liegen aber die Geraden 5, 8 und 11, 14 in diesem R_3, denn 5, 8 gehört der Ebene 5, 8, 14 an. —

Die Netze der Polytope. Zerschneiden wir die Oberfläche eines Polyeders längs seiner Kanten in die f einzelnen Flächen und setzen an eine derselben in ihrer Ebene sämmtliche $f-1$ übrigen mit je einer Kante in geziemender Weise wieder an, so erhalten wir in dieser Ebene das sog. Netz des Polyeders. So zeigt Fig. 6 das bekannte Netz des Würfels. Um das Polyeder (Würfel) aus diesem Netze wieder herzustellen, drehen wir die Flächen II bis V um ihre mit I gemeinsame Kante bis sie auf der Ebene von I senkrecht stehen. Sie verschwinden dann alle, bis auf ihre Schnittkante mit I aus dessen Ebene und bilden die noch freie Berandung 5, 6, 7, 8, welche durch das letzte, sechste, Quadrat geschlossen wird. — In analoger Weise haben wir in Fig. 7 das Netz des oben betrachteten Polytops zu erblicken, wo die Zahlen in Uebereinstimmung mit denen des Diagramms (Fig. 5) gewählt sind.[67]) Es wird erhalten, indem wir das Polytop längs der Flächen in seine sämmtlichen Polyeder zerschnitten denken, und $p-1$ derselben in geziemender Weise successive mit je einer Fläche in dem Raume des ersten aneinanderfügen. Das erste Polyeder, in dessen Raum das Netz liegt, sei hier der innerste Würfel; auf jeder Fläche desselben sitzt ein weiterer Würfel. Um das Polytop aus dem Netze zu erhalten, drehen wir jeden dieser Würfel um sein gemeinsames Quadrat mit dem ersten Würfel aus dessen Raum heraus, bis die Kanten, welche im Netze als Verlängerungen der Kanten des innersten Würfels erscheinen, auf dessen Raum senkrecht stehen. Die im Netze gleichbezeichneten Punkte (9 bis 16)

[67]) Selbstverständlich sind Fig. 5 und 7 nur Abbildungen der räumlich zu konstruirenden Modelle. Beide Figuren s. A. Puchta, Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raum von 4 Dimensionen etc. LXXXIX. Bd. d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien. 1884. Figur 8 u. 9 der Tafel.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/65

fallen dann zu je 3 in einander und bilden in R_4 einen Würfel, der in einem, dem Ausgangswürfel parallelen Raume liegt. Durch Einfügen dieses achten Würfels wird schliesslich das Polytop geschlossen. Wir geben endlich in Fig. 8 und 9 noch Diagramm und Netz des in § 1 besprochenen einfachsten Polytopes, welches von 5 Tetraedern gebildet wird, und entsteht, wenn irgend 4 sich in einem Punkte schneidende Räume durch einen beliebigen, nicht durch diesen gemeinsamen Punkt gehenden Raum durchsetzt werden. Wir projiciren dann die 4, in jenen ersten Räumen liegenden Tetraeder in das Tetraeder des fünften Raumes, und erhalten in diesem das Diagramm, Fig. 8. Um jeden Punkt liegen in demselben 4, um jede Kante 3 Tetraeder. Das Netz dieses Polytopes in einem seiner 3-dimensionalen Grenzräume besteht aus einem Tetraeder, auf dessen 4 Seitenflächen je ein weiteres Tetraeder aufgesetzt ist. (Fig. 9.) Um aus dem Netze das Polytop zu erhalten, drehen wir die 4 äussern Tetraeder um die Grenzflächen, welche sie mit dem innern Tetraeder gemein haben, aus dessen Raume heraus, bis die 4 Spitzen 1 zusammenfallen. Jedes Tetraeder liegt dann in einem andern Raume.[68])

Reciprocität der Gebilde. Es sei P ein beliebiges Polyeder mit e Ecken, k Kanten, f Flächen, und D sein Diagramm. Es werde das Diagramm D' eines andern Polyeders P' aus D dadurch abgeleitet, dass wir Punkte (etwa) in der Mitte der f Flächen von D durch Gerade verbinden (Fig. 11). Das neue Diagramm D' hat dann die gleiche Zahl Kanten: die Zahl der Flächen von D' ist gleich der Zahl der Ecken von D und umgekehrt.[69]) Die Zahlen e' k' f' von D' sind mit denen von D durch die Gleichungen verbunden:

$$e' = f,\ k' = k,\ f' = e.$$

---

[68]) Dieses Herausdrehen aus dem Raume scheint auf den ersten Anblick ohne Zerstörung der 4 Tetraeder unmöglich zu sein. Dies scheint aber in der That nur so, da wir, befangen in der Anschauung, uns ein Drehen eines Raumes um eine seiner Ebenen absolut nicht vorstellen können. Wir können das Tetraeder nicht aus seinem Raume herausdrehen und innerhalb desselben ist es bei Festhaltung einer seiner Flächen vollkommen unbeweglich. Das Analoge haben wir aber beim Netze des Tetraeders in der Ebene (Figur 10). Die 3 Punkte 1 lassen sich in der Ebene des Dreiecks 2, 3, 4 nicht vereinigen, ohne die Kanten 2, 1 etc. zu zerreissen (oder zu dehnen), dagegen kommen sie leicht zur Deckung, wenn sich die äusseren Dreiecke um ihre, mit dem inneren Dreiecke gemeinsamen, Kanten so lange in den dreidimensionalen Raum herausdrehen, bis gleichbenannte Kanten (z. B. 1, 2) ihrer ganzen Länge nach zusammenfallen. Analog ist der Prozess beim Polytopnetz zu denken. Soll sich ein geschlossenes Polytop ergeben, so müssen natürlich die gleichbenannten Kanten gleiche Länge haben; die gleichbenannten Dreiecke müssen kongruent sein. Dies lässt sich hier stets erreichen, wenn wir z. B. nur reguläre Tetraeder nehmen. Auf derartige metrische Fragen gehen wir bei Betrachtung weiterer Polytope (§ 4) nicht ein.

[69]) Das Diagramm D' ist noch nicht in der gewöhnten Lage, denn der Basisebene von D entspricht in D' eine ebensovielseitige Ecke, deren Seitenflächen das Umgrenzungsvieleck des Gesammtdiagramms ausfüllen (s. Figur 11).

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/66

Wir nennen 2 solche Diagramme reciprok und bezeichnen die zugehörigen Polyeder P und P' ebenso als reciproke Polyeder.[70]) Zwei reciproke Polyeder befriedigen aber, wie ihre Konstruktion, bez. die ihrer Diagramme zeigt, nicht nur die obigen Gleichungen, sondern die Kantenzahl in entsprechenden Ecken und Flächen ist die gleiche: einem n-eck in P entspricht eine n-seitige Ecke in P', und umgekehrt. Die obigen Gleichungen sind somit für die Reciprocität zweier Polyeder nur nothwendig, aber noch nicht hinreichend. Wir halten uns daher an die geometrische Konstruktion, so dass P und P' als reciprok zu bezeichnen sind, wenn eins aus dem andern mittels der gegebenen Konstruktion erhalten werden kann.[71]) Ist P' isomorph mit P, so nennen wir P sich selbst reciprok oder, nach Kirkman[72]), autopolar. (Diese Bezeichnung erklärt sich durch Anm. 71.) Die nothwendige (wenn auch noch nicht hinreichende) Bedingung für die Autopolarität eines Polyeders ist also: $e = f$, woraus mit $e + f = k + 2$ folgt: $k = 2e - 2 = 2f - 2$. — Die Durchführung der Konstruktion, mittels der wir das reciproke Polyeder aus dem ursprünglichen erhalten haben, an Polygonen der Ebene zeigt sofort die Richtigkeit des Satzes: Jedes Vieleck der Ebene ist sich selbst reciprok (autopolar). Weitere Bemerkungen über Polyeder verweisen wir in die am Ende zugefügte Note, welche vor dem folgenden zu berücksichtigen ist.

Die reciproken Polytope in R_4 erhalten wir durch eine der vorhergehenden in R_3 analoge Konstruktion.[73]) Verbinden wir die Mittelpunkte[74]) aller Grenzpolyeder eines Polytops P mit einander durch Gerade, so entsteht ein neues Polytop P', dessen Eckenzahl e' gleich der Zahl p der Polyeder des ursprünglichen Polytopes ist. Die Zahl f' der Flächen in P' ist gleich der Zahl k der Kanten von P.

---

[70]) S. schon Meister, Comment. soc. reg. scient. Gotting. T. VII 1785. Commentatio de solidis geometricis etc. S. 39: „Corpora reciproca voco, quorum utrumque tot habet angulos solidos, quot alterum latera; hinc et tota latera, quot alterum angulos solidos."

[71]) Mittels der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ wird jedem Punkte (Pole) $x^1 y^1 z^1$ die durch die Gleichung $x^1 x + y^1 y + z^1 z = r^2$ definirte Ebene (Polarebene) zugeordnet: Gesetz der Polarität. Ordnen wir 2 Polyeder P und P' dadurch so zu, dass die Ebenen des einen als Polarebenen den Ecken des anderen als Polen entsprechen, und umgekehrt, so erhalten wir gerade die oben auf andere Weise definirten reciproken Polyeder. Dieser analytischen Ableitung zufolge werden die reciproken Polyeder auch polare genannt. Das Gesetz der Reciprocität auf reguläre Polyeder beschränkt s. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd. I, S. 142.

[72]) Kirkman, On autopolar Polyedra. Philos. Transactions. 1857. XI. S. 183 ff.

[73]) Analytisch gilt entsprechend: Mittels des Kugelraumes $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$ ist jedem Punkte x^1, y^1, z^1, t^1 der durch die Gleichung $x^1 x + y^1 y + z^1 z + t^1 t = r^2$ definirte Raum zuzuordnen, etc.

[74]) Im früheren Sinne.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/67

Es zeigt sich dies am einfachsten bei der Betrachtung der Diagramme, wo jede Kante von P' eine, und nur eine Fläche von P durchsetzt. Da die Reciprocität von P und P' eine gegenseitige ist, so erhalten wir für die reciproke Verwandtschaft der beiden Polytope die nothwendigen Bedingungsgleichungen:

$$e' = p,\ k' = f,\ f' = k,\ p' = e,$$

wobei bez. des Gesammtverhaltens noch hinzuzufügen ist, was folgt: Jedem Körper des einen Polytops ist zugeordnet eine Ecke des andern und umgekehrt; jeder Fläche des ersten Polytops entspricht eine bestimmte Kante des zweiten und umgekehrt. Bezeichnen wir eine bestimmte festgehaltene Ecke, Kante und Fläche in P mit e_i, k_i, f_i, das entsprechende Polyeder, Fläche und Kante von P' mit p'_i, f'_i, k'_i, so stimmen die Anzahlen in den gegenüberstehenden Zeilen der folgenden 2 Kolonnen überein:

a) Zahl der Körper in einer Ecke e_i.	Zahl der Ecken an dem Polyeder p'_i.
b) Zahl der Flächen durch die Ecke e_i.	Zahl der Kanten des Polyeders p'_i.
c) Zahl der Kanten durch die Ecke e_i.	Zahl der Flächen des Polyeders p'_i.
d) Zahl der Körper an der Kante k_i.	Zahl der Ecken der Fläche f'_i.
e) Zahl d. Flächen durch die Kante k_i.	Zahl der Kanten der Fläche f'_i.
f) Zahl d. Ecken in einer Kante k_i $(=2)$.	Zahl d. Körper an einer Fläche f'_i $(=2)$.

Das Entsprechen ist ein wechselseitiges derart, dass die beiden Kolonnen für die beiden Polytope vertauscht werden können. Entsteht durch Anwendung der beschriebenen Konstruktion ein Polytop P', welches mit dem ursprünglichen isomorph ist, so ist P ein autopolares (sich selbst reciprokes) Polytop, und es gelten zwischen den Anzahlen seiner Begrenzungsgebilde die Gleichungen $e = p$, $f = k$. Nennen wir ein Polytop allgemein, wenn in keiner Ecke mehr als 4 Polyeder zusammenstossen, so erhalten wir als reciproke Polytope der allgemeinen solche, bei denen kein Grenzpolyeder mehr als 4 Ecken hat. Sämmtliche Polyeder sind hier also Tetraeder, und wir bezeichnen das Polytop als Tetraederpolytop. Diese und die allgemeinen Polytope nehmen bei der Klassifikation der Polytope nach der Zahl p der Grenzpolyeder dieselbe Stellung als Anfangs- und Endglieder der Reihe allomorpher Gebilde ein, wie die allgemeinen und Trigonalpolyeder bei der Klassifikation der Körper im dreidimensionalen Raume. Wir bezeichnen alle Polytope, bei denen mindestens in einer Ecke 5 Polyeder zusammenstossen, zum Unterschiede von den allgemeinen als singuläre. Alle Tetraederpolytope, bis auf eins (das früher beschriebene) sind also singulär. Von der Klassifikation der Polytope und der Darstellung der einfachsten Typen derselben sei im folgenden berichtet.

§ 4. Die allgemeinen und singulären Polytope.

Ausser der Gleichung $e + f = k + p$ bestehen zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten, Flächen und Polyeder eines Polytopes noch einige Beziehungen, die in den folgenden Sätzen und Folgerungen ausgesprochen sind.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/68

Lehrsatz 1. In jedem Polytop ist die Zahl der Kanten grösser oder gleich der doppelten Eckenzahl. Denn in jeder Ecke stossen mindestens 4 Kanten zusammen. Es wäre also $k \geqq 4e$, wenn nicht jede Kante doppelt gezählt wäre, nämlich in ihren beiden Endpunkten. Es gilt somit $k \geqq 2e$. Da bei den allgemeinen Polytopen in jeder Ecke nur 4 Kanten zusammentreffen[75]), so gilt für diese besondere Art von Gebilden: $k = 2e$; d. h. von allen Polytopen derselben Eckenzahl haben die allgemeinen die Minimalzahl von Kanten.

Lehrsatz 2. In jedem Polytop ist die Zahl der Flächen grösser oder gleich der doppelten Polyederzahl. Denn jedes begrenzende Polyeder hat wenigstens 4 Flächen (ist ein Tetraeder). Also wäre $f \geqq 4p$, wenn nicht jede Fläche dabei doppelt gezählt wäre, da in ihr 2 benachbarte Polyeder an einander grenzen. Die richtige Beziehung ist somit $f \geqq 2p$. Für jedes Tetraederpolytop gilt demnach $f = 2p$, da hier keine Grenzpolyeder mit mehr als 4 Flächen existiren, d. h. von allen Polytopen derselben Anzahl Grenzpolyeder besitzt das Tetraederpolytop[76]) die Minimalzahl von Flächen.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgen mit Berücksichtigung der Gleichung $e + f = k + p$ noch die folgenden Beziehungen zwischen den in Frage kommenden Anzahlen der Grenzgebilde: In jedem Polytope ist sowohl die Zahl der Flächen wie die der Kanten grösser als die Summe der Anzahlen der Ecken und Polyeder, d. h. $f \geqq e + p$; $k \geqq e + p$. Für die allgemeinen Polytope ist $f = e + p$, für die Tetraederpolytope $k = e + p$.

Lehrsatz 3. In jedem allgemeinen Polytope ist die Zahl der Flächen kleiner als die Zahl der Kanten (oder höchstens gleich). Denn durch jede Kante gehen 3 Polyeder; jedes hat mit jedem andern eine Fläche (in der Schnittebene der betr. Räume) gemein, d. h. durch jede Kante gehen 3 Flächen. Es wäre also $f = 3k$, wenn nicht jede Fläche dabei so oft gezählt wäre, als sie Grenzkanten hat. Die Anzahl dieser ist aber mindestens 3, wenn nämlich die Fläche ein Dreieck ist; also ist die richtige Gleichung, wenn auch nur eine Grenzfläche mit mehr als 3 Kanten vorkommt: $f < k$. Nur für den Fall, dass sämmtliche Grenzflächen Dreiecke sind, ist $f = k$. Dann sind aber sämmtliche Grenzpolyeder Tetraeder, und wenn dann das Polytop allgemein sein soll, also in keiner Ecke mehr als 4 Tetraeder liegen dürfen, so ist es mit dem fünften Tetraeder bereits geschlossen, d. h. es ist das schon früher ausführlich beschriebene Tetraederpolytop mit 5 Ecken, 10 Kanten, 10 Flächen und

[75]) Ein allgemeines Polytop kann nur allgemeine Polyeder als Grenzkörper enthalten. Denn käme ein singuläres Polyeder vor, so hätte dieses mindestens eine vierkantige Ecke und es wären 4 angrenzende Polyeder nöthig, also in dieser Ecke 5 Polyeder vorhanden, somit das Polytop nicht allgemein. In jeder Ecke eines solchen haben wir demnach 4 Polyeder, 6 Flächen und 4 Kanten.

[76]) Vorausgesetzt, dass für die betr. Anzahl ein solches existirt (s. später).

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/69

5 Polyedern; das einzige Polytop, welches nur von Tetraedern begrenzt wird und zugleich allgemein, demgemäss autopolar ist.

Lehrsatz 4. In jedem Tetraederpolytope ist die Zahl der Flächen grösser als die Zahl der Kanten (mindestens gleich). Denn da jede Fläche eines solchen Polytops ein Dreieck ist, so wäre $k = 3f$, wenn nicht jede Kante so oft gezählt wäre, als Flächen durch sie gehen. Sie ist also mindestens 3mal gezählt, im allgemeinen öfter, d. h. es ist $f > k$. Die Gleichung $f = k$ gilt wiederum nur für das in Satz 3 erwähnte einfachste Tetraederpolytop. Unter den singulären Polytopen sind durch die Gleichung $f = k$, wie bereits früher besprochen, die autopolaren charakterisirt; das einfachste derselben ist eben das fünfeckige Tetraederpolytop; alle übrigen mit mehr als 5 Grenzpolyedern sind weder Tetraederpolytope, noch können sie allgemein sein. Aus Satz 3 und 4 folgt in Verbindung mit $e + f = k + p$, dass für ein Tetraederpolytop die Zahl der Ecken kleiner ist, als die der Polyeder, während für ein allgemeines Polytop die Zahl der Ecken die der Polyeder übertrifft.

Ordnen wir alle Polytope, welche von der gleichen Zahl p von Polyedern begrenzt werden, vom Minimum zum Maximum der Eckenzahl, so zeigt sich, dass das Maximum von den allgemeinen Polytopen erreicht wird. Denn aus einem allgemeinen Polytop ensteht ein singuläres, — in welchem mehr als 4 Polyeder in einer Ecke zusammentreffen —, wenn (analog dem Prozesse bei dem Singulärwerden der allgemeinen Polyeder in R_3) auch nur 2 Ecken des allgem. Polytopes, durch allmähliches Verschwinden der sie verbindenden Kante zusammenfallen. Es verschwinden also durch das Singulärwerden Ecken, während die Grenzpolyeder nur ihren Typus ändern, aber an Zahl erhalten bleiben.[77]) Ueber das Verhalten der Anzahlen der Kanten und Flächen lässt sich allerdings ganz allgemein dabei nichts aussagen.

Ein bedeutsamer Unterschied besteht aber nun zwischen der gegenseitigen Abhängigkeit der Anzahlen der Grenzgebilde der Polytope und der der Grenzgebilde der Polyeder in R_3. Während in R_3 für jedes allgemeine Polyeder von n Flächen die Zahlen der Ecken und Kanten durch die linearen Gleichungen $e = 2n - 4$, $k = 3n - 6$ aus der Zahl der Flächen eindeutig ableitbar sind, existiren in R_4 keine derartigen einfachen Relationen, welche aussagen würden, dass für ein bestimmtes p von Polyedern die Zahl der Ecken eines allgemeinen Polytops aus der Menge der Grenzkörper direkt ablesbar sei. Im Gegentheil, für dieselbe Zahl p von Grenzpolyedern existiren verschiedene allgemeine Polytope mit unterschiedener Zahl der Ecken, und somit auch der Flächen und Kanten, und es lässt sich nur behaupten, dass für ein gegebenes p von Polyedern das Maximum der Ecken von einem der allgemeinen Polytope erreicht wird; wenngleich,

[77]) Man verdeutliche sich dies an den Diagrammen. Aus Figur 15 a entsteht Figur 23 durch Zusammenrücken von b und d. Hieraus Figur 21, wenn noch c nach a fällt. Aus Figur 16 a entsteht Figur 25 durch Verschwinden von $a\,b$ etc.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/70

wie später sich zeigen wird, nicht alle allgemeinen Polytope desselben p dieses Maximum von Ecken zu haben brauchen, und andererseits ausser einem allgemeinen Polytop mit p Polyedern und e Ecken auch singuläre mit denselben Zahlen existiren können. Jedenfalls lässt sich, bezüglich der Flächenzahl der Grenzkörper eines beliebigen Polytops der Satz aussprechen: Ein Polyeder pn kann nur erst in einem von $n+1$ Polyedern gebildeten Polytop vorkommen. Denn da ein pn n Grenzflächen besitzt, so sind n weitere angrenzende Polyeder nothwendig, aber auch gerade hinreichend, um ein Polytop zu vollenden. — Auch für die Zahl e der Ecken eines allgemeinen Polytops lässt sich wenigstens ein absolutes Maximum angeben, welches sicher nicht überschritten werden kann; es bleibt freilich dahingestellt, ob es wirklich immer erreicht wird. Ist p die Zahl der Polyeder, so ist die Maximalzahl der Flächen eines derselben $p-1$. Dieses allgemeine Polyeder besitzt $2p-6$ Ecken. Im günstigsten Falle sind nun alle p Polyeder $(p-1)$ -flächner, und das Polytop besässe $p.(2p-6)$ Ecken, wenn nicht jede derselben in den 4 Polyedern gezählt wäre, welche in ihr zusammentreffen. Die Maximalzahl der Ecken eines allgemeinen Polytopes mit p Polyedern ist demnach $\frac{p(p-3)}{2}$. Wie die Polytope aus 5, 6 und 7 Polyedern zeigen, wird dieses absolute Maximum in einzelnen Fällen in der That erreicht.

Die Polytope für eine bestimmte Zahl p von Polyedern lassen sich, nach dem gesagten, nach wachsender Zahl der Ecken anordnen wie folgende Tabelle zeigt:

$p = const.$		e	k	f
Singuläre Polytope.	Tetraeder-polytope.	$e =$ Min. $e < p$	$k = e + p$ $(k > 2e)$	$f = 2p$ $(f > k)$
	Singuläre Polytope I.	$e < p$	$k < f$ $(k > 2e)$	$f > 2p$ $(f > k)$
	Autopolare Polytope.	$e = p$	$k = f$ $(k > 2e)$	$f = k$ $(f > 2p)$
	Singuläre Polytope II.	$e > p$	$k > f$ $(k > 2e)$	$f < k$ $(f > 2p)$
	Allgemeine Polytope.	$e > p$ $e =$ Max.	$k > f$ $k = 2e$	$f = e + p$ $(f > 2p$

Es handelt sich nun darum, die möglichen allomorphen Typen der Polytope einer bestimmten Anzahl p von Grenzpolyedern wirklich zu finden. Wie Eberhard gezeigt hat, lassen sich alle allgemeinen Polyeder durch sog. Fundamentalkonstruktionen successive aus dem Tetraeder ableiten, und andererseits haben Möbius und Cayley die Verfahren angegeben, mittels deren alle Trigonalpolyeder mit $e+1$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/71

Ecken aus denen mit e Ecken erhalten werden können. Es liegt nahe, diese Methoden, die übrigens sich reciprok entsprechen, für die Polytope zu verallgemeinern, und es lässt sich zeigen, dass in der That mittels analoger Prozesse an den Diagrammen der Polytope die Typen derselben sich successive auseinander ableiten lassen. Wir erläutern die fragliche Methode nur für die Tetraederpolytope, resp. ihre Diagramme, nachdem wir noch den Satz bewiesen haben: Nicht an allen, von einer Ecke eines Tetraederpolytops ausgehenden Kanten können 6 und mehr Tetraeder liegen. Beschreiben wir nämlich um irgend eine Ecke O des betr. Diagrammes eine Kugel, so, dass alle übrigen Ecken des Diagramms ausserhalb derselben liegen, so markiren die von O ausgehenden Kanten auf der Kugeloberfläche die Ecken eines Trigonalpolyeders; die durch O gehenden Flächen des Diagramms erzeugen die Kanten dieses Polyeders, dessen Flächenzahl gleich der Zahl der durch O gehenden Tetraeder ist. Die Zahl der Tetraeder in einer von O ausgehenden Kante des Diagramms ist somit gleich der Zahl der Flächen in der durch diese Kante auf der Kugelfläche erzeugten Ecke des Trigonalpolyeders. Nun können nicht durch alle Ecken eines solchen 6 und mehr Flächen gehen [78]), d. h. nicht an jeder von O ausgehenden Kante des Diagramms liegen 6 und mehr Tetraeder. [79])

Es sei nun ein T-(etraeder)polytop mit den Zahlen e, k, f, p gegeben, und es sollen aus demselben die T-polytope mit um 1 vermehrter Eckenzahl abgeleitet werden. Wir führen die Konstruktionen natürlich am Diagramm aus. 1. Konstruktion. Ist $ABCD$ irgend ein Tetraeder des Diagrammes, so werde ein Punkt P im Innern desselben mit den 4 Ecken verbunden. Die Zahlen e', k', f', p' des neuen Diagramms sind dann: $e' = e + 1$, $k' = k + 4$, $f' = f + 6$, $p' = p + 3$.

2. Konstruktion. Es sei AB eine Kante des Diagrammes, durch welche die beiden Tetraeder $ABCD$ und $ABDE$ gehen, welche die Fläche ABD gemein haben. Entfernen wir diese Fläche, so bilden die verbleibenden Grenzdreiecke der beiden Tetraeder ein Trigonalpolyeder, wie es Fig. 3 a zeigt. Verbinden wir einen Punkt P innerhalb desselben mit seinen 5 Ecken, so werden die ursprünglichen 2 Tetraeder durch 6 ersetzt, und es entsteht das Diagramm eines neuen T-polytops, dessen Zahlen e', k', f', p' mit e, k, f, p durch die Gleichungen verbunden sind: $e' = e + 1$, $k' = k + 5$, $f' = f + 8$, $p' = p + 4$.

Es möge nun AB eine Kante des Diagrammes sein, an welcher ν Tetraeder liegen, von denen also jedes mit dem vorhergehenden und folgenden ein durch AB gehendes Dreieck gemein hat. Entfernen wir zwischen μ aufeinanderfolgenden Tetraedern ($\mu \leqq \nu - 1$) die $\mu - 1$

[78]) S. Baltzer, Elemente II, S. 215.

[79]) Der reciproke Satz lautet: Nicht alle Flächen eines Grenzpolyeders eines allgemeinen Polytops können Vielecke mit 6 und mehr Ecken sein. Dieser Satz gilt bekanntlich auch für singuläre Polyeder, und somit der oben ausgesprochene für alle Polytope.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/72

durch AB gehenden Dreiecke, so begrenzen die von den μ Tetraedern übrig bleibenden $2\mu + 2$ Dreiecke ein Trigonalpolyeder mit $\mu + 3$ Ecken und $3\mu + 3$ Kanten. Durch Weglassen der μ Tetraeder sind aus dem ursprünglichen Diagramm verschwunden: $\mu - 1$ Flächen, Null Kanten und Null Ecken. Nehmen wir innerhalb des erhaltenen Trigonalpolyeders einen Punkt P an, und verbinden ihn mit sämmtlichen Ecken desselben, so treten an Stelle des Polyeders soviel Tetraeder, als es Flächen hat, d. h. $2\mu + 2$ Tetraeder. Es entstehen soviel neue Flächen im Diagramm, als das Trigonalpolyeder Kanten hat, d. h. $3\mu + 3$ und soviel neue Kanten, als das Polyeder Ecken hat, d. h. $\mu + 3$. Die Anzahlen e', k', f', p' des neuen Diagrammes sind also: $e' = e + 1$; $k' = k + \mu + 3$; $f' = f - (\mu - 1) + 3\mu + 3 = f + 2\mu + 4$; $p' = p - \mu + 2\mu + 2 = p + \mu + 2$.

Wir wenden nun die beschriebenen Konstruktionen[80]), so weit sie in diesem Falle verwendbar sind, auf das T-polytop $e = 5$ an, um die möglichen T-polytope mit 6 Ecken darzustellen. Verbinden wir einen Punkt F innerhalb des Tetraeders $ABCE$ (Fig. 8) mit den Ecken A, B, C und E, so erhalten wir das Diagramm Figur 13, welches wir kurz mit (6, 14, 16, 8) bezeichnen.[81]) — Wenden wir die zweite Konstruktion auf Fig. 8 an, indem wir das zwischen den Tetraedern $ABCE$ und $BCDE$ befindliche Dreieck BCE unterdrücken, so erhalten wir das neue Diagramm Fig. 14, mit der Formel (6, 15, 18, 9). — Eine dritte Konstruktion kann auf Fig. 8 nicht angewandt werden, weil durch keine Kante dieses Diagramms mehr als 3 Tetraeder gehen. Es existiren also nur die 2 angegebenen T-polytope mit 6 Ecken.

Wir wenden uns nun zur Ableitung der T-polytope mit 7 Ecken aus den eben erhaltenen 2 Typen. Die Anwendung der ersten Konstruktion auf Fig. 13 ergiebt, wenn wir den neuen Punkt G innerhalb des Tetraeders $BCDE$ annehmen, das Diagramm (7, 18, 22, 11), wie es Fig. 15 zeigt. Da, wie die Zahlen an den Ecken von Fig. 13 ersehen lassen, alle Tetraeder gleichartige Ecken besitzen, ist es gleichgiltig, welches Tetraeder wir zur Ausführung der ersten Konstruktion verwenden, und es ergiebt sich also mittels derselben nur[82]) das eine Diagramm Fig. 15. Die Anwendung der ersten Konstruktion auf

[80]) Wir bezeichnen die Konstruktion, bei welcher μ Tetraeder zu dem besprochenen Trigonalpolyeder zusammengefasst werden, als μ-te Konstruktion. Die zuerst beschriebenen sind die einfachsten Fälle $\mu = 1$ und $\mu = 2$.

[81]) Die aufeinander folgenden Zahlen in diesem Ausdruck sind die der Ecken, Kanten, Flächen und Tetraeder des Polytops. Die an den Ecken der Diagrammfigur befindlichen Zahlen geben die Anzahl der Kanten an, welche daselbst zusammentreffen; die an den Kanten befindlichen die Zahl der Flächen durch die betr. Kante.

[82]) Bei der 1. Konstruktion gelten Tetraeder als gleichwerthig, wenn in gleichviel ihrer Ecken sich dieselbe Kantenzahl befindet. Anders für die weiteren Konstruktionen; hier muss noch die Anzahl der Tetraeder beachtet werden, die durch eine Kante gehen.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/73

das 6-eckige Diagramm Fig. 14 erzeugt, wenn wir Punkt G innerhalb des Tetraeders $BDEF$ wählen, das neue Diagramm (7, 19, 24, 12) in Fig. 16 dargestellt. Da die Wahl des auszufüllenden Tetraeders hier nach der oben gemachteu Bemerkung wieder gleichgiltig ist, so erhalten wir mittels der ersten Konstruktion aus dem T-Diagramm $e = 6$ keine weiteren Typen. Es folgt die zweite Konstruktion. Lassen wir in Fig. 13 die Fläche BCE aus, so ergeben die beiden Tetraeder $BCEF$ und $BCED$ das Polyeder $FBCED$, und die Verbindung des innerhalb desselben liegenden Punktes G mit den 5 Ecken führt auf das neue Diagramm Fig. 17 mit der Formel (7, 19, 24, 12). Wie sich aber sofort an den, an die Ecken geschriebenen, Zahlen zeigt, ist es, trotz derselben Formel nicht isomorph mit Fig. 16. Dagegen ergiebt z. B. die Unterdrückung der Fläche BDE in Fig. 13 ein mit Fig. 16 isomorphes Diagramm. — Da in dem 6-eckigen Diagramm Fig. 14 alle Ecken und Kanten gleichartig sind, so kann für die Anwendung der zweiten Konstruktion eine beliebige Fläche, z. B. BCF zwischen den Tetraedern $BCFA$ und $BCFD$ unterdrückt werden. Es ergiebt sich Diagramm (7, 20, 26, 13) in Fig. 18. — Da nun in beiden 6-eckigen Diagrammen Kanten existiren, durch welche 4 Tetraeder gehen, so ist auch die Anwendung einer dritten Konstruktion noch statthaft. Wir unterlassen aber, um Raum zu sparen, dies im einzelnen auszuführen, so weit sich nur den schon besprochenen isomorphe Diagramme ergeben. Ein neues Diagramm wird nur aus Fig. 17 erzeugt. Durch die Kante DE gehen daselbst die 4 Tetraeder $ABED$, $BFED$, $CFED$ und $ACED$. Lassen wir die 3 ersteren und ihre Zwischenflächen BED und FED weg, so ergiebt sich nach Vollendung der weiteren Konstruktion in der früher allgemein skizzirten Weise das neue 7-eckige T-Diagramm Fig. 19 mit der Formel (7, 21, 28, 14), bei welchem in jeder Ecke 6 Kanten zusammentreffen. Hiermit sind, wie sich erweisen lässt, alle möglichen 7-eckigen Tetraederpolytope erschöpft, und es existiren also deren 5. Die zu den 6- und 7-eckigen T-polytopen reciproken allgemeinen Polytope aus $p = 6$ und $p = 7$ Polyedern sind dadurch zugleich mit abgeleitet und lassen sich aus den Diagrammen Fig. 13 bis 19 sofort ablesen: Die Zahl der Flächen eines Grenzpolyeders eines allgemeinen Polytopes ist gleich der Zahl der Kanten in der dem Polyeder entsprechenden Ecke des Tetraederpolytopes; die Art dieser Flächen wird gegeben durch die an den Kanten in dem Diagramm des Tetraederpolytopes stehenden Zahlen; denn soviel Flächen durch eine Kante des letzteren gehen, soviel Kanten besitzt eine Fläche des allgemeinen Polytopes. Die Figuren 13 a bis 19 a stellen diese 7 allgemeinen Polytope mit 6 resp. 7 Polyedern dar.[83]) Die Figuren 13 a—18 a sind leicht zu übersehen. Zu Fig. 19 a sei folgendes bemerkt. Sämmtliche 7 Grenzpolyeder sind p''_6 (Fig. 3a). Auf der Fläche $ABCDE$ des Umhüllungspolyeders $ABCDEFGH$ steht das zweite Polyeder $ABCDELKI$. Auf dessen Fläche $ABLKI$ steht das Polyeder $ABLKIFMN$,

[83]) S. überdies die später folgende Tabelle.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/74

welches mit dem Umhüllungspolyeder das Dreieck ABF gemein hat. Nehmen wir über diesem Polyeder innerhalb des Umhüllungspolyeders den Punkt O, und verbinden ihn mit M, N, G und H, so erhalten wir die 4 weiteren Polyeder: $AFMNIOGE$, $EINOGHDK$, $DHONKMLC$ und $BCHGFOML$.

Die Betrachtung der Konstruktionen, welche zur Ableitung der Tetraederpolytope mit $e+1$ Ecken aus denen mit e Ecken dienten, zeigt einen Unterschied dieser Gebilde der R_4 und der ihnen analogen Trigonalpolyeder in R_3. Während letztere, wenn wir die Polyeder nach der Zahl n der Flächen klassificiren, nur für gerades n existiren, giebt es bei Eintheilung der Polytope nach der Zahl p ihrer Grenzpolyeder für jedes p Tetraederpolytope, ausgenommen für $p=6$, 7 und 10. Denn das 5-eckige T-polytop besitzt 5 Grenzkörper, ein 6-eckiges aber deren mindestens 8, höchstens 9; da es 7-eckige erst von $p=11$ ab giebt, so sind die Werthe $p=6$, 7 und 10 in der That nicht brauchbar. Dass von da ab für jedes p T-polytope existiren, ergiebt sich sofort durch genauere Betrachtung der Anwendung der Konstruktion μ auf die jeweils schon abgeleiteten Diagramme. Da für die Konstruktion 1 von Anfang ab jedes Drittfolgende, für die Konstruktion 2 desgl. jedes Viertfolgende, für die Konstruktion 3 von $p=6$ ab jedes Fünftfolgende p Tetraederpolytope enthält; für die Konstruktion μ aber überdies die Periode $\mu+2$ beträgt, so ist leicht einzusehen, dass für kein grösseres p Tetraederpolytope fehlen können.

Ehe wir die einzelnen Typen der singulären Polytope für die einfachsten Fälle $p=6$ und 7 aufzählen, wollen wir einige besondere Klassen von Gebilden in R_4 näher betrachten.

I. Die Pyramiden in R_4. Im R_3 entsteht eine Pyramide, wenn die n Ecken eines ebenen Vielecks mit einem Punkte ausserhalb seiner Ebene durch Gerade verbunden werden. Alle Pyramiden sind sich selbst reciprok, wie alle Polygone der Ebene autopolar sind. Bezeichnen wir auch das analoge Gebilde in R_4 als Pyramide, und kurz mit dem Zeichen Π, so können wir sagen: Eine Π in R_4 entsteht, wenn ein Punkt O ausserhalb des R_3, in welchem ein Basiskörper liegt, mit allen Ecken dieses Basiskörpers verbunden wird. Diese Π hat dann die um 1 vermehrte Eckenzahl des Basiskörpers. Die Zahl der Körper ist gleich der Flächenzahl des Basiskörpers vermehrt um 1. Die Zahl der Flächen ist gleich der Zahl derer des Basiskörpers, vermehrt um die Zahl seiner Kanten, da durch jede solche Kante und durch O ein Dreieck geht. Die Zahl der Kanten der Π ist gleich der Zahl der Kanten des Basiskörpers, vermehrt um die Zahl seiner Ecken, da von jeder solchen Ecke eine Kante nach O führt. Sind also e', k', f' die Zahlen für den Basiskörper, e, k, f, p die für das Polytop, so gelten die Beziehungen: $e=e'+1$, $k=k'+e'$, $f=f'+k'$, $p=f'+1$. Wir haben nun bezüglich der Eintheilung der Π die Basiskörper zu beachten. Zunächst sehen wir, dass nicht alle Π, wie die Pyramiden in R_3, autopolar sind. Denn dann muss sein: $e=p$, $k=f$, und dies zieht die Bedingung nach sich:

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/75

$e' = f'$; d. h.: Die Π können nur autopolar sein, wenn der Basiskörper bereits autopolar in R_3 ist. Nicht autopolare Π giebt es dann 3 Klassen, je nachdem der Basiskörper a) ein allgemeines Polyeder, b) ein Trigonalpolyeder, c) ein bel. singuläres Polyeder, ist. Das reciproke Polytop zu einem Typus c wird erhalten, wenn wir die Π über dem Körper konstruiren, der zu jenem singulären Basispolyeder reciprok ist. Beweis: e und p vertauschen sich, ebenso wie k und f, wenn sich e' und f' vertauschen. Daraus folgt, dass je ein Π der Klasse a) mit einem der Klasse b) reciprok ist.[84])

II. Die Prismen in R_4. Als gerades Prisma in R_3 bezeichnen wir bekanntlich ein Gebilde, welches dadurch entsteht, dass die n Ecken eines ebenen Polygons sich um gleiche Strecken senkrecht gegen die Ebene des Polygons fortbewegen, und als Prismen schlechthin alle diesem isomorphen Körper. Jedes Prisma ist also ein allgemeines Polyeder. Der reciproke Körper ist eine Doppelpyramide. Die gemeinsame Grundfläche der beiden Pyramiden („Kranz" der Doppelpyramide) ist mit der Grundfläche des Prismas isomorph. Sie wird erhalten durch Verbindung der „Mittelpunkte" der Seitenflächen des Prismas. Dieser „Kranz" begrenzt eine Diagonalfläche, über welcher die beiden Pyramiden stehen, ohne dass diese Diagonalfläche eine Grenzfläche der Doppelpyramide ist. — Bewegen sich die Ecken eines beliebigen Polyeders um gleiche Strecken senkrecht gegen den Raum, in welchem sich das Polyeder befindet, so entsteht das dem Prisma entsprechende Gebilde in R_4, welches von einem Grund- und (isomorphen) Deckkörper und soviel Prismen als Seitenkörpern begrenzt wird, als das Grundpolyeder Flächen hat. Wir bezeichnen alle diesem Polytop isomorphen kurz als Prismen P in R_4. Die Projektion anf das Grundpolyeder erhalten wir, indem wir bei 2 isomorphen Polyedern, das zweite innerhalb des ersten in ähnlicher Lage befindlich, die isomorphen Ecken durch Kanten, die isomorphen Kanten durch Flächen verbinden (Fig. 17 b). Daraus folgt: Die Flächen eines P, so weit sie den Seitenpolyedern angehören, sind sämmtlich Vierecke; die Seitenkörper von P sind sovielseitige Prismen, als die dem Grundkörper angehörende Grundfläche derselben Kanten hat; in einer Ecke stossen soviel Seitenkörper zusammen, als im Grundkörper (Deckkörper) daselbst Kanten zusammenkommmen. Sind e, k, f, p die Zahlen für P, $e' k' f'$ die für den Grundkörper, so gilt also: $e = 2e'$, $k = 2k' + e'$, $f = 2f' + k'$, $p = f' + 2$, und es ist, wie nothwendig, $e - k + f - p = o$, da der Grundkörper ein Eulersches Polyeder ist. Wir haben nun 2 Arten von P zu unterscheiden, da sie nicht alle, wie die Prismen in R_3, allgemein sind, sondern nur dann, wenn es der Grundkörper bereits ist. Wir haben:

a) **Allgemeine P.** Wir bezeichnen sie nach der Zahl der Seitenkörper als n-seitige P. Das erste ist ein P_4, dessen Grund- und Deck-

[84]) Man kann auch den Beweis, ebenso wie beim Prisma (s. d.) geometrisch führen.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/76

körper Tetraeder sind. (Fig. 13a.)[85]) Es giebt soviel allomorphe Typen Pn eines bestimmten n, als allgemeine Polyeder pn existiren. (S. die Note am Ende.) Die Zahlen e, k, f, p für ein P_n ergeben sich leicht zu $e = 4n - 8$, $k = 8n - 16$, $f = 5n - 6$, $p = n + 2$. —

Bestimmen wir zu einem Pn das reciproke Polytop aus dem Diagramm, welches wir in der Form, wie Fig. 17b gezeichnet, annehmen. Verbinden wir die „Mitten" aller Seitenkörper durch Kanten, so erhalten wir deren soviel, als zwischen den Seitenkörpern Flächen vorhanden sind. Da in jeder Ecke des Grundkörpers 3 Flächen zusammenstossen, so bilden je 3 dieser Kanten ein Dreieck, und es entstehen deren soviel, als der Grundkörper Ecken hat, d. h. diese Dreiecke bilden ein zusammenhängendes Netz, nämlich das dem Grundkörper reciproke Trigonalpolyeder. Verbinden wir ferner alle Mitten der Seitenkörper mit den 2 „Mittelpunkten" der beiden Basiskörper durch Kanten, so kommen in jedem dieser beiden Mittelpunkte soviel Kanten zusammen, als der Basiskörper Flächen hat, und es entstehen also als Grenzkörper des dem P reciproken Polytops soviel Tetraeder, als die doppelte Eckenzahl von P beträgt. Je 2 der Tetraeder grenzen in einem Dreieck an einander, welches dem oben erwähnten Trigonalpolyeder als Seitenfläche angehört, ohne dass aber dieses Trigonalpolyeder etwa ein Grenzkörper des Polytops wäre. Wir können es (dem „Kranz" bei der Doppelpyramide in R_3 entsprechend) als Diagonalkörper bezeichnen, und das ganze Polytop als eine Art „Doppelpyramide" in R_4. Das von dieser Doppelpyramide begrenzte Stück der R_4 kann durch einen Raum durch das Trigonalpolyeder ebenso in 2 Theile zerlegt werden, wie die Doppelpyramide in R_3 durch die Diagonalfläche. Jede Fläche, jede Kante und jede Ecke des Trigonalpolyeders gehört gleichzeitig beiden Pyramiden an, aber der vom Trigonalpolyeder begrenzte Raum ist kein Grenzraum des Polytops.

b) **Singuläre** P. Grund- und Deckkörper sind isomorphe singuläre Polyeder. Hier sind 3 Fälle möglich. α) Es sind Trigonalpolyeder. Die Seitenkörper von Pn sind dann durchweg dreiseitige Prismen. Die reciproken Polytope sind vierdimensionale Doppelpyramiden, deren Diagonalkörper allgemeine Polyeder sind. β) Grund- und Deckkörper in Pn sind autopolare Polyeder. Die Mitten der Seitenkörper bilden ein Polyeder, welches dem Grundpolyeder reciprok ist: da aber dieses autopolar ist, so gilt dies auch für das durch die Mitten der Seitenkörper gebildete Polyeder, d. h. das reciproke Polytop unseres Pn ist eine Doppelpyramide, deren Diagonalkörper ein autopolares Polyeder ist. γ) Grund- und Deckkörper von Pn sind

[85]) Hier sind alle Polyeder ausnahmsweise in ein Seitenpolyeder projicirt, wie das dreiseitige Prisma im R_3 (Fig. 2b) in eine Seitenfläche. Uebrigens lässt sich ein P_4 in R_4 in vier inhaltsgleiche 4-dimensionale Π_4 (Fig. 8) zerlegen, wie ein dreiseitiges Prisma in R_3 in 3 inhaltsgleiche Pyramiden. S. Schlegel, Sur un théorème de géometrie à quatre dimensions. C. r. de l'Association franç. pour l'avanc. des Sciences. 1885.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/77

bel. singuläre Polyeder. Das reciproke Polytop ist eine Doppelpyramide mit singulärem Diagonalkörper, welcher reciprok ist zum Grundkörper des Prismas Pn.

III. **Die Hufe in R_4.** Unter einem „Huf" in R_3 verstehen wir ein Polyeder, wie es Figur 2 b und Figur 3 g zeigt: Im ebenen Diagramm grenzen 2 isomorphe Polygone (n-ecke) mit einer Kante und 2 Ecken aneinander, während die übrigen entsprechenden $n-2$ Ecken durch Kanten verbunden sind. Jeder Huf ist ein allgemeines Polyeder, und die Wahl der Kante, welche die beiden n-ecke gemeinsam haben, ist natürlich ganz gleichgiltig, so dass für jedes n nur ein derartiges Polyeder existirt. Ein Huf H in R_4 entstehe dadurch, dass 2 (zunächst allgemeine) Polyeder pn eine Grenzfläche A, und damit deren Kanten und Ecken, gemeinsam haben; alle übrigen entsprechenden Ecken seien durch Kanten, alle entsprechenden Kanten durch Ebenen verbunden.[86]) Die beiden Ausgangspolyeder pn besitzen je n Flächen, $2n-4$ Ecken und $3n-6$ Kanten. Die gemeinsame Fläche A sei ein α-eck. Dann sind zunächst noch frei von jedem der Ausgangspolyeder: $n-1$ Flächen, $2n-4-\alpha$ Ecken, und $3n-6-\alpha$ Kanten. Nach Vollendung der oben angegebenen Konstruktion ergiebt sich somit ein Polytop mit $2+n-1$ Polyedern, $1+2(n-1)+3n-6-\alpha$ Flächen (weil zu den Flächen der beiden Polyeder pn noch soviel hinzukommen, als eins der Polyeder freie Kanten hat), $\alpha+2(3n-6-\alpha)+2n-4-\alpha$ Kanten (denn es sind zu den Kanten der beiden pn noch soviel hinzuzufügen, als ein pn freie Ecken hat) und $\alpha+2(2n-4-\alpha)$ Ecken, d. h. es ist:

$$e=4n-\alpha-8, \qquad k=8n-2\alpha-16,$$
$$f=5n-\alpha-7, \qquad p=n+1.$$

Es sind also die Zahlen e, k, f abhängig von der Zahl α, d. h. der Wahl der gemeinsamen Fläche A der beiden isomorphen Polyeder pn. Dasselbe pn als Umhüllungspolyeder eines Diagrammes lässt somit die Konstruktion verschiedener Hufe H in R_4 zu.[87]) Da bei einem allgemeinen pn die Minimalzahl $\alpha=3$ ist, die Maximalzahl $\alpha=n-1$, so giebt ein allgemeines Polyeder pn, welches ein $(n-1)$-eck, und dann sicher auch ein Dreieck, enthält, Veranlassung zu zwei H in R_4, die sich (die Rechnung ist leicht durchzuführen) um $n-4$ Ecken unterscheiden. —

Die bisher angeführten Sätze über allgemeine und Tetraederpolytope, sowie über die Erzeugung der singulären Gebilde durch Variation der Grenzkörper der allgemeinen, gestatten eine successive Aufstellung der einfachsten Typen der Polytope, resp. ihrer Diagramme. In der folgenden Tabelle (s. S. 47) giebt die erste Kolonne den Cha-

[86]) S. die Diagramme der allgemeinen Hufe Fig. 14 a und 17 a, und der singulären, Fig. 20 und 22.

[87]) Dies gilt natürlich ebenso, wenn die p_n singulär sind. Dass sich unter Umständen isomorphe H bei Wahl verschiedener Flächen A ergeben, ist selbstverständlich. Die in Frage kommende gemeinsame Fläche A ist in den später folgenden Beispielen immer speciell angegeben.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/78

I.	e	k	f	p	p_4	p_V	p_5	p_{VI}^{t}	p_{VI}'	p_{VI}''	p_{VI}'''	p_{VI}''''	p_6'	p_6''	Col. IV.
A(*Aut*).	5	10	10	5	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Fig. 8.
Aut.	6	13	13	6	4	2	—	—	—	—	—	—	—	—	Π über p_V.
S_2	7	15	14	6	2	3	1	—	—	—	—	—	—	—	Π über p_5. **1)**
A.	8	16	14	6	2	—	4	—	—	—	—	—	—	—	Fig. 13a.
A.	9	18	15	6	—	—	6	—	—	—	—	—	—	—	Fig. 14a.
S_1	6	14	15	7	6	—	—	1	—	—	—	—	—	—	Π über p_{VI}^{t}.
Aut.	7	16	16	7	5	—	—	—	2	—	—	—	—	—	Π über p_{VI}'.
Aut.	7	16	16	7	4	2	—	—	—	1	—	—	—	—	Π über p_{VI}''.
Aut.	7	17	17	7	3	2	—	2	—	—	—	—	—	—	H über p_{VI}^{t} Fig. 20.
S_2	8	18	17	7	2	4	—	—	—	—	—	1	—	—	Π über p_{VI}''''.
S_2	8	18	17	7	3	2	—	—	1	—	1	—	—	—	Π über p_{VI}'''.
S_2	8	18	17	7	3	1	1	—	—	2	—	—	—	—	H über p_{VI}'' (über α).
S_2	9	19	17	7	3	—	2	—	—	—	2	—	—	—	H über p_{VI}''' (über α). **2)**
S_2	9	20	18	7	—	6	—	—	—	—	—	—	1	—	Π über p_6'.
S_2	9	20	18	7	2	2	—	—	2	—	—	—	—	1	Π über p_6''.
S_2	9	20	18	7	2	1	1	—	—	2	—	1	—	—	H über p_{VI}'' (über β).
S_2	9	20	18	7	1	1	3	—	—	2	—	—	—	—	H über p_{VI}'' (über γ).
S_2	10	21	18	7	1	—	4	—	—	—	—	2	—	—	H über p_{VI}'''' (über α).
S_2	10	21	18	7	—	2	4	—	—	—	—	—	1	—	P über p_V.
S_2	10	21	18	7	2	1	1	—	—	—	2	—	—	1	H über p_{VI}''' (über β) Fig. 22.
S_2	10	21	18	7	2	—	2	—	—	—	—	3	—	—	H über p_{VI}'''' (über β). **3)**
S_2	10	21	18	7	2	1	1	—	—	—	2	—	—	1	Fig. 23.
A.	11	22	18	7	2	—	2	—	—	—	—	—	—	3	H über p_6'' (über α) oder Fig. 15a.
S_2	11	23	19	7	—	1	3	—	—	—	—	2	1	—	Fig. 24 und Fig. 24a. **4)**
S_2	11	23	19	7	1	—	2	—	—	—	2	1	—	1	Fig. 25. **5)**
S_2	11	23	19	7	—	—	4	—	—	—	2	—	—	1	H über p_{VI}''' (über γ).
S_2	11	23	19	7	1	—	2	—	—	—	2	1	—	—	H über p_{VI}''' (über δ).
A.	12	24	19	7	—	—	4	—	—	—	—	—	3	—	Fig. 17a und Fig. 17b. **6)**
A.	12	24	19	7	1	—	2	—	—	—	—	—	—	4	H über p_6'' (über β). Fig. 16a.
S_2	12	25	20	7	—	—	2	—	—	—	2	1	—	2	Fig. 26. **7)**
A.	13	26	20	7	—	—	2	—	—	—	—	—	1	4	H über p_6'' (über γ). Fig. 18a.
A.	14	28	21	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	Fig. 19a. **8)**

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/79

rakter des Polytopes (A = Allgemein, S_1 und S_2 singulär von der 1. und 2. Art, Aut = Autopolar); die zweite Kolonne enthält die Anzahlen der Grenzgebilde, e der Ecken, k der Kanten, f der Flächen und p der Polyeder; die dritte Kolonne den Typus der Grenzpolyeder, gemäss den Bezeichnungen der Schlussnote und der Figuren 2 a bis 3 g. Die letzte Kolonne endlich verweist auf die, die Diagramme der Polytope andeutenden Figuren der Tafeln II und III. Die Pyramiden, Prismen und Hufe sind, um Figuren zu sparen, meist nicht dargestellt, und nur der betr. Charakter durch Π, P und H angegeben. Für die Hufe ist, wie nothwendig, die früher mit A bezeichnete Fläche markirt, und beziehen sich dabei die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ auf die Figuren 2 a bis 3 g. Die Zahlen 1) bis 8) in Kolonne 4 verweisen überdies auf die nachfolgenden Bemerkungen.

1) Dieses Diagramm entsteht aus Fig. 13a durch Zusammenrücken der Ecken a und b.

2) Das Diagramm dieses Polytopes kann auch aus Fig. 15a dadurch erhalten werden, dass d mit b, c mit a zusammenfällt. S. Fig. 21.

3) Das Diagramm entsteht auch aus Fig. 15a durch Zusammenrücken von f und g.

4) Das Diagramm Fig. 24 entsteht aus Fig. 18a durch Zusammenfallen von a, b und c; Fig. 24a aus Fig. 17a durch Zusammenfallen von a und b, d. h. dasselbe singuläre Polytop wird als Grenzfall der Typen zweier allomorpher allgemeiner Polytope erhalten, ebenso wie ein singuläres Polyeder aus 2 verschiedenen allgemeinen Polyedern abgeleitet werden kann. Vergl. die Schlussnote.

5) Fig. 25 entsteht aus Fig. 16a durch Zusammenrücken von a und b.

6) Dieses Polytop kann sowohl als H über p'_6 (Fig. 17a) wie als P über p'_5 (Fig. 17b) betrachtet werden.

7) Fig. 26 entsteht aus Fig. 18a durch Zusammenrücken der Ecken f und g.

8) Ob sich durch Variation der Grenzkörper dieses Polytopes noch ein singuläres Gebilde ergeben könne, konnte nicht entschieden werden. Es wäre immerhin nicht unmöglich, dass die vorstehende Tabelle noch Lücken aufweist.

Zum Schlusse verweisen wir noch auf eine besondere Klasse einfacher Polytope. Es war bereits erwähnt, dass im R_3 über einem $(n-2)$-seitigen Polygon nur ein bestimmtes Prisma pn existirt, welches stets ein allgemeines Polyeder ist; die Prismen P in R_4 sind jedoch allgemein oder singulär, je nachdem ihr Basispolyeder pn ein allgemeines oder singuläres Polyeder ist, und es existiren allgemeine allomorphe Pn ebensoviel, wie allgemeine allomorphe Polyeder pn. Dabei war immer vorausgesetzt, dass Grund- und Deckpolyeder isomorph sind. Es liegt nun die Frage nahe, welcher Art diejenigen Polytope sind, die, wie die Pn gebaut, als Grund- und Deckkörper 2 allomorphe Typen der pn (von gleicher Flächenzahl n) besitzen. In der Note (s. am Ende) ist bemerkt worden, dass jedes allgemeine p_n aus jedem andern durch eine gewisse Zahl m von Kreuzungen erhalten

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/80

werden kann. Verfolgen wir diesen Prozess im Diagramm eines allgemeinen Pn und sprechen dann einen diesbezüglichen Satz aus. Aus dem Polyeder p_7 (Fig. 27a) z. B. entsteht durch einmalige Kreuzung ($m = 1$) der Flächen α und β das Polyeder p_7'. (Fig. 27b.) Es sei zunächst, den früheren Angaben gemäss, ein P_7 über p_7 konstruirt. Die Seitenpolyeder sind, laut Fig. 27a, ein sechsseitiges Prisma $[\vartheta\vartheta']$, drei fünfseitige Prismen $[\beta\beta']$, $[\gamma\gamma']$, $[\delta\delta']$, und drei dreiseitige Prismen $[\alpha\alpha']$, $[\varepsilon\varepsilon']$, $[\zeta\zeta']$ wobei wir die Prismen nur mit ihrer Grund- und Deckfläche bezeichnen. Wir projiciren das Polytop in das sechsseitige Prisma, und lassen nun in dem Deckpolyeder des Diagramms zunächst die beiden Ecken a und b zusammenrücken. (Fig. 28a.) Dann bleiben die dreiseitigen Prismen erhalten; das fünfseitige Prisma $[\beta\beta']$ wird ein ebensolches; an Stelle der beiden fünfseitigen Prismen $[\gamma\gamma']$ und $[\delta\delta']$ erscheinen aber 2 obeliskartige Körper, bei denen die Flächen δ und γ Fünfecke, die oberen Flächen δ' und γ' aber Vierecke sind. Trennen wir nun die Flächen δ' und γ' in ihrer gemeinsamen Ecke von einander und verbinden dann diese freien Ecken durch eine Kante cd, so haben wir als Deckkörper im Diagramm das Polyeder p_7' erhalten. Die 4 Geraden ac, ad, bc, bd im Diagramm repräsentiren dann ein Tetraeder und das nunmehr erhaltene Polytop, bez. dessen Diagramm Fig. 28b wird von den folgenden Polyedern gebildet: den dreiseitigen Prismen $[\zeta\zeta']$ und $[\varepsilon\varepsilon']$, dem Obelisken $[\alpha\alpha']$, (unten ein 3-eck, oben ein 4-eck), den Obelisken $[\gamma\gamma']$ und $[\delta\delta']$, (unten je ein 5-eck, oben ein 4-eck), dem Tetraeder $abcd$, und schliesslich von dem, bei dem ganzen Prozesse unberührt gebliebenen Umhüllungspolyeder, welches ein 6-seitiges Prisma ist. Durch einmalige Kreuzung ist also ein Diagramm entstanden, welches ein Polyeder, nämlich das Tetraeder, mehr enthält, als vorher das Diagramm des Prisma P_7. Es wird genügen, diese Konstruktion eines neuen Diagramms aus dem gegebenen mittels einer einzigen Kreuzung durchgeführt zu haben, um die Richtigkeit des Satzes einzusehen: „Ein (singuläres) Polytop, welches, analog einem Prisma Pn einen Grund- und Deckkörper besitzt, welche aber allomorphe Typen pn mit der morphologischen Distanz m sind, wird überdies von $n + m$ Seitenkörpern begrenzt, von denen m Tetraeder sind, unter den n übrigen sich aber neben ev. Prismen noch eine gewisse Anzahl obeliskartiger singulärer Polyeder befinden.“ Da die Zahl der Ecken nach der Kreuzung dieselbe ist, wie vorher, so ist für das skizzirte neue Polytop $e = 2(2n - 4)$. Die Zahl der Kanten ist $k = 2(3n - 6) + (2n - 4) + 2m$, wobei der erste Term die Kanten der Grundkörper enthält, der zweite die zunächst vorhandenen Verbindungskanten der Ecken von Grund- und Deckkörper, der dritte aber die bei der Kreuzung hinzugekommenen Kanten; und zwar ergiebt jedes entstehende Tetraeder 2 neue Kanten, da die andern beiden schon im zweiten Term gezählt sind. Die Zahl der Flächen ergiebt sich ebensoleicht zu $f = 2n + 3n - 6 + 3m$.

Wir unterlassen, ausführlich auf weitere Klassen von Polytopen einzugehen, welche z. B. ebenfalls aus den Pn, dadurch entstehen, dass eins der Grundpolyeder singulär wird, oder auf solche, welche

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/81

als Grund- und Deckkörper reciproke Polyeder besitzen. Jedenfalls wird ersichtlich, dass der Reichthum an Gestalten in R_4 weit bedeutender ist, wie in R_3. Ueberdies sind im vorstehenden weitere Konstruktionen angegeben, vermittels deren neue Typen singulärer Polytope aus allgemeinen abgeleitet werden können.[88])

§ 5. Die regulären Polytope.

Unter einem regulären Polytop in R_4 ist ein solches zu verstehen, welches von regulären Polyedern derselben Art so begrenzt wird, dass in jeder Ecke und ebenso in jeder Kante gleichviel solcher Körper zusammenstossen. Mit der Aufstellung dieser Gebilde haben sich eine Reihe Mathematiker fast zu gleicher Zeit beschäftigt, und sind, zum Theil auf verschiedenen Wegen, zu denselben Resultaten gelangt.[89]) Stringham[90]) gab 1880 die erste vollständige Behandlung des Problemes der regulären n-dimensionalen Gebilde, nachdem Hoppe[91]) 1879 und Scheffler[92]) 1880 die ersten Schritte gethan und denjenigen Polytopen eine Untersuchung gewidmet hatten, welche uns in § 1 und 2 beschäftigt haben. Mit ebendiesen Gebilden befasst sich auch K. Rudel in seiner schon öfters citirten Schrift[93]), wie er auch die übrigen 4 regulären Polytope angiebt, ohne die Theorie jedoch weiter zu verfolgen. Vollständige, wie schon bemerkt, mannigfach in der Methode von einander abweichende Untersuchungen sämmtlicher 6 regulären Gebilde im ebenen R_4 gaben sodann Hoppe[94]), Forch-

[88]) Erwähnenswerth ist noch folgende Diagrammkonstruktion. Ein allgemeines Polyeder p_n und sein reciprokes Trigonalpolyeder p^t befinden sich so in einander, dass jede Ecke des zweiten hinter der ihr entsprechenden Fläche des ersten liegt. Für p_n ist $e = 2n - 4$, $k = 3n - 6$, für p^t aber $e = n$, $k = 3n - 6$, $f = 2n - 4$. Verbinden wir die Endpunkte jeder Kante von p_n mit den Endpunkten der ihr entsprechenden Kante von p^t, so entstehen: 1) über jeder Fläche von p_n eine mehrseitige Pyramide mit der Spitze in der dieser Fläche entsprechenden Ecke von p^t, 2) über jedem Dreieck von p^t eine dreiseitige Pyramide mit der Spitze in der bez. Ecke von p_n, 3) soviel keilförmig eingeschobene Tetraeder, als einer der Körper p_n oder p^t Kanten hat. Es ist also für das Diagramm $p = 6n - 8$. Weitere Ueberlegung ergiebt: $e = 3n - 4$, $k = 12n - 24$, $f = 15n - 28$. Für den einfachsten Fall, wo p_n ein Tetraeder ist, ergiebt sich das T-Polytop (8, 24, 32, 16), Fig. 29, welches, wie schon hier bemerkt sein mag, reciprok ist zu Fig. 5.

[89]) S. auch die historische Uebersicht bei Schlegel a. a. O. S. 7 (s. Anm. 22 der Einl.) sowie ebenders. „Theorie . . . etc.“ (s. § 3, Anm. 60) S. 452 bis 456.

[90]) „Regular Figures in n-dimensional Space.“ American Journ. of. Math. vol. III. p. 1—14.

[91]) S. Anm. 45 zu § 2. Abhdlg a).

[92]) Die polydimensionalen Grössen etc. S. Anm. 52 zu § 2.

[93]) Rudel, Vom Körper höherer Dimension, Progr., Kaiserslautern 1882.

[94]) Hoppe, Regelmässige linear begrenzte Figuren von 4 Dimensionen. Hoppe's Arch. LXVII. 29 (1881).

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/82

hammer[95]), Schlegel[96]), Puchta[97]), Biermann[98]) u. A., wobei die Puchtaschen Arbeiten besonders dadurch interessant sind, dass die Resultate auf dem Wege der analytischen Geometrie gewonnen werden. Es ist also ersichtlich, dass es nur unsre Aufgabe sein kann, im folgenden die Resultate, und den Gedankengang der zu ihnen geführt hat, in übersichtlicher und zusammenfassender Weise zu rekapituliren, und werden wir uns (wenn auch durchgängig in anderen, unserem früheren angepassten Bezeichnungen) hierbei zunächst an die Abhandlungen von Biermann, Hoppe und Schlegel anschliessen, im weiteren Verlauf uns aber der von Puchta angegebenen Methoden bedienen.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein. Es sei $ke^{(i)}$ die Zahl der Kanten in einer Ecke eines i-dimensionalen regulären Gebildes, also $ke^{(2)} = 2$. Die Anzahlen der Flächen in einer Ecke resp. Kante des regulären i-dimensionalen Gebildes seien $fe^{(i)}$ und $fk^{(i)}$, somit $fk^{(3)} = 2$, und ferner seien $pe^{(i)}$, $pk^{(i)}$, $pf^{(i)}$, die Anzahlen der Polyeder in einer Ecke, Kante und Fläche desselben, also nach früherem $p_f^{(4)} = 2$. — $e^{(i)}$, $k^{(i)}$, $f^{(i)}$, $p^{(i)}$ seien endlich die Anzahlen der an dem regulären Gebilde im i-dimensionalen Raume im ganzen auftretenden Ecken, Kanten, Flächen und Polyeder.[99]) Für die dreidimensionalen regulären Polyeder gelten dann bekanntlich neben der Euler'schen Gleichung $e^{(3)} - k^{(3)} + f^{(3)} = 2$ noch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} fe^{(3)}.\ e^{(3)} &= e^{(2)}.\ f^{(3)} \\ fk^{(3)}.\ k^{(3)} &= k^{(2)}.\ f^{(3)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I},$$

welche übrigens leicht zu beweisen sind. Es handelt sich zunächst darum, ähnliche Gleichungen für die entsprechenden Anzahlen bei den regulären Polytopen abzuleiten. Das Wort „regulär" unterdrücken wir immer im folgenden als selbstverständlich. —

In jeder Ecke eines Polytops haben wir $pe^{(4)}$ Polyeder, also gäbe es in den $e^{(4)}$ Ecken $pe^{(4)}.\ e^{(4)}$ Polyeder, wenn nicht jedes in seinen $e^{(3)}$ Ecken gezählt wäre. Die wahre Anzahl der Polyeder ist somit:

$$p^{(4)} = \frac{pe^{(4)}.\ e^{(4)}}{e^{(3)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

In jeder Ecke des Polytopes stossen nun $pe^{(4)}.\ fe^{(3)}$ Flächen zusammen; denn in einem Polyeder haben wir in dieser Ecke bereits $fe^{(3)}$ Flächen, also in den $pe^{(4)}$ in dieser Ecke befindlichen Polyedern $pe^{(4)}.\ fe^{(3)}$ Flächen; somit in allen $e^{(4)}$ Ecken $pe^{(4)}.\ fe^{(3)}.\ e^{(4)}$ Flächen. Nun decken sich aber die Flächen paarweise, und überdies ist jede in

[95]) Forchhammer, Pröver paa geometri med fire dimensioner, Zeuthen T. (4). V, 157 (1881).

[96]) Schlegel, Theorie etc. . . . (S. § 3 Anm. 60) 1883.

[97]) Puchta, Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von 4 Dimensionen etc. Wien. Ber. LXXXIX (1884).

[98]) Biermann, Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimension Ebendas. Bd. XC (1884).

[99]) Für die Polytope lassen wir die Indices $i = 4$ später wieder weg.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/83

ihren $e^{(2)}$ Ecken gezählt, also ist die wirkliche Anzahl der Flächen, des Polytopes:

$$f^{(4)} = \frac{pe^{(4)}.\ fe^{(3)}.\ e^{(4)}}{2\ .\ e^{(2)}}.$$

Diese Gleichung lässt sich noch vereinfachen. Aus I) folgt $\frac{fe^{(3)}}{e^{(2)}} = \frac{f^{(3)}}{e^{(3)}}$ d. h. es wird:

$$f^{(4)} = \frac{pe^{(4)}\,.\,e^{(4)}\,.\,f^{(3)}}{2\,e^{(3)}}, \text{ oder mit Gleichung 1):}$$

$$f^{(4)} = \frac{f^{(3)}\,.\,p^{(4)}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2).$$

Fassen wir eine bestimmte Ecke des Polytopes ins Auge, so treffen daselbst in einem Polyeder $ke^{(3)}$ Kanten zusammen, in den $pe^{(4)}$ dort befindlichen Polyedern also $pe^{(4)}\,.\,ke^{(3)}$, und in allen Ecken des Polytopes somit $pe^{(4)}\,.\,ke^{(3)}\,.\,e^{(4)}$ Kanten. Dies wäre die wahre Anzahl der Kanten des Polytopes, wenn nicht jede zunächst $pk^{(4)}$-mal gezählt wäre, nämlich eben in jedem der durch die Kante gehenden $pk^{(4)}$ Polyedern, und überdies noch doppelt, nämlich in den beiden Endpunkten; also ist die richtige Zahl der Kanten des Polytopes:

$$k^{(4)} = \frac{pe^{(4)}\,.\,ke^{(3)}\,.\,e^{(4)}}{2\,.\,pk^{(4)}}.$$

Mit Hilfe der Gleichung 1) ergiebt sich hieraus

$$k^{(4)} = \frac{ke^{(3)}\,.\,p^{(4)}\,.\,e^{(3)}}{2\ pk^{(4)}} = \frac{fe^{(3)}\,.\,p^{(4)}\,.\,e^{(3)}}{2\ pk^{(4)}}$$

da $ke^{(3)} = fe^{(3)}$ ist. Mit Benutzung der Gleichungen I) erhalten wir schliesslich:

$$k^{(4)} = \frac{k^{(3)}\,.\,p^{(4)}}{pk^{(4)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3).$$

Wir haben hierdurch die Grössen e, k, f für die regulären Polytope ausgedrückt durch die Zahl p der Grenzpolyeder. Es läge nunmehr nahe, diese letzte Grösse p dadurch zu bestimmen, dass wir die Werthe für e, k, f in die noch disponible Gleichung $e - k + f - p = 0$ einführten, ein Verfahren, welches bei analoger Bestimmung der möglichen Typen regulärer Polyeder in R_3 zum Ziele führt. Hier aber zeigt sich, dass p aus der Gleichung herausfällt, und, da es nicht Null sein kann, so folgt, dass für endliche Werthe von p, und solche sollen nur in Frage kommen, der andere Faktor Null zu setzen ist; d. h. zwischen den Grössen, von welchen wir e, k, f laut Gleichungen 1), 2), 3) mit abhängig gemacht haben, besteht die Gleichung:

$$\frac{e^{(3)}}{pe^{(4)}} - \frac{k^{(3)}}{pk^{(4)}} + \frac{f^{(3)}}{pf^{(4)}} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 4).$$

Hierbei ist, ebenso wie in den Gleichungen 1)—3) sicher $pf^{(4)} = 2$, $pk^{(4)} \geqq 3$, $pe^{(4)} \geqq 4$, aber auch $pk^{(4)} < 6$, da, wie wir bereits früher bewiesen haben, nicht in jeder Kante eines Polytopes 6 und mehr Polyeder liegen können, hier aber, da in jeder Kante gleichviel sich befinden sollen, schon $pk^{(4)} = 6$ unmöglich ist.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/84

Nun sind als Grenzpolyeder der regulären Polytope nur die 5 regulären Polyeder — Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder, Dodekaeder — verfügbar, und zwar ist für sie in der angegebenen Reihenfolge:

$e^{(3)} = 4, 6, 12, 8, 20$; $k^{(3)} = 6, 12, 30, 12, 30$; $f^{(3)} = 4, 8, 20, 6, 12$.

Suchen wir nun, mit Benutzung der eben angeführten Zahlen, diejenigen möglichen Lösungen der Gleichung 4) (unter Berücksichtigung der hinter dieser Gl. 4) angeführten Bedingungen,) welche positive, ganzzahlige, endliche Werthe von $pe^{(4)}$ zulassen, so finden wir die Werthe der folgenden Tabelle:

	Tetraeder.			Okt.	Ikos.	Hexaeder.			Dodekaeder.		
$pf^{(4)}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$pk^{(4)}$	3	4	5	3	3	3	4	5	3	4	5
$pe^{(4)}$	4	8	20	6	12	4	8	20	4	8	20

Hiernach erscheint es also, als existirten in R_4 elf reguläre Polytope. Zunächst muss bemerkt werden, dass die vorstehende Diskussion von Anfang an, ebenso wie dies für die analogen Betrachtungen der Polyeder in R_3 gilt, nur gezeigt hat, dass überhaupt Polytope mit den gefundenen Anzahlen existiren können; es bleibt aber weiter noch der Beweis zu führen, dass sie auch regulär sein können, und dieser Beweis muss ebenso, wie dies von den regulären Polyedern her bekannt ist, auch geometrisch, d. h. mittels Betrachtung von Maassverhältnissen, geführt werden. Es wird sich überdies sofort ergeben, dass 5 der eben erhaltenen Polytope wieder auszuscheiden sind. Ueber die Anzahlen der e, k, f konnten wir zudem noch nichts aussagen, da p unbekannt geblieben ist. Wenden wir uns zunächst zur Untersuchung, welche von den genannten 11 Fällen möglich sind. Wir können hierzu die Anzahl der Polyeder betrachten, welche sich an einer Kante des Polytopes befinden, wie Biermann verfährt, oder die möglichen Anzahlen der um eine Ecke liegenden Polyeder bestimmen, ein Verfahren, welches Hoppe einschlägt. Bleiben wir beim letzteren stehen, und erläutern es zunächst durch die Bestimmung der möglichen regulären Polyeder im R_3. Denken wir uns ein solches mit einer Ecke in eine Ebene gelegt, so muss, da es ein convexes Gebilde ist, das ganze Polyeder sich auf einer Seite dieser Ebene befinden können; d. h. wenn in dieser Ecke α reguläre μ-ecke vorkommen, so muss, da der Winkel im regulären convexen μ-eck $(2\mu - 4) : \mu$ Rechte beträgt, $\alpha(2\mu - 4) : \mu$ Rechte kleiner sein, als 4 R., da 4 Rechte bereits die Winkelsumme um einen Punkt der Ebene ist. Soll, dem gesagten analog, ein „convexes" Polytop vorhanden sein, so muss, falls wir dasselbe mit einer Ecke in einen Raum legen, das ganze Polytop auf eine Seite dieses Raumes gelegt werden können. Die körperlichen Ecken um einen Punkt des Raumes herum betragen aber 8 R, wo unter R die körperliche Ecke zu verstehen ist, welche von 3 zu einander senkrechten Ebenen gebildet wird. Liegen also

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/85

an einer Ecke des Polytops $pe^{(4)}$ Polyeder, und beträgt die körperliche Ecke in einem derselben w (gemessen mit dem Maasse R), so darf $pe^{(4)} . w$ den Werth $8\,R$ nicht erreichen, weil sonst die $pe^{(4)}$ Polyeder in einen Raum R_3 fielen, also nicht in die R_4 hinausträten. Nun hat für die regulären Polyeder w die folgenden Werthe:

für das Tetraeder: $w = 0{,}35096 \ldots R$.
„ „ Oktaeder: $w = 0{,}86539 \ldots R$.
„ „ Ikosaeder: $w = 1{,}67720 \ldots R$.
„ „ Hexaeder: $w = R$.
„ „ Dodekaeder: $w = 1{,}88550 \ldots R$.

Untersuchen wir nun, welche Werthe $pe^{(4)}$ der früheren Tabelle jetzt noch zulässig sind, dass $pe^{(4)} . w < 8\,R$ bleibt, so ergeben sich nur die 6 Fälle, wo in einer Ecke 4, 8, 20 Tetraeder, 6 Oktaeder, 4 Hexaeder, und 4 Dodekaeder liegen. Wir wollen diese 6 Polytope kurz mit Ki bezeichnen, wo i die später zu beweisende Zahl der Grenzpolyeder ist. Die 6 Polytope sind dann in der genannten Reihenfolge: K_5, K_{16}, K_{600}, K_{24}, K_8, K_{120}. Es bleibt nun noch übrig, die Anzahlen der Grenzgebilde dieser Polytope zu bestimmen, und nachzuweisen, dass sie in der That regulär sind. Zur Lösung der ersten Aufgabe haben wir, wie dies auch in § 4 geschehen ist, die Diagramme der Polytope zu konstruiren, und dies kann auf mancherlei Weise geschehen. Verfahren wir gemäss § 4, so haben wir das Umhüllungspolyeder des Diagramms, welches hier ein, einem regulären isomorphes Polyeder ist, in ebensolche zu zerlegen (Polyedertheilung), so dass in jeder Ecke und jeder Kante je gleichviel Polyeder vorhanden sind. — Wir können aber auch umgekehrt um ein Polyeder neue solange gruppiren — immer beachtend, dass jede Kante, bez. jede Ecke immer gleichviel Körper erhält — bis die aussen bleibende begrenzende Oberfläche wieder dasselbe Polyeder wird. Oder aber schliesslich können wir auch, statt von einem innersten Polyeder auszugehen, die Körper um einen Punkt gruppiren, und dies solange fortsetzen, bis sich das Gebilde schliesst. Es sind von den verschiedenen Autoren auch diese verschiedenen Verfahren in der That gehandhabt worden. Hoppe gruppirt zur Erzeugung der Diagramme von K_5, K_{16}, K_{600} die Polyeder um einen Punkt herum; zur Erzeugung von K_{24}, K_8, K_{120} aber um ein Polyeder. Stringham gruppirt in allen Fällen, ausgenommen bei K_{120}, wo er von einem Dodekaeder ausgeht, die Polyeder um einen Punkt. Schlegel endlich konstruirt die Diagramme auf ganz originelle Weise durch Zerlegung des Umhüllungspolyeders in ein Zellgewebe von isomorphen Körpern. Wenden wir uns zu den einzelnen Polytopen, von denen wir die einfacheren näher erläutern.[100])

1) In einer Ecke liegen 4, in einer Kante 3 Tetraeder. Das Diagramm dieses Polytops K_5 ist das, schon wiederholt besprochene, in Fig. 8. dargestellte, und es ist $e = 5$, $k = 10$, $f = 10$, $p = 5$.

[100]) Die Figuren 30—32, Tafel III. sind mit gütiger Erlaubniss des Herrn Prof. Dr. Schlegel aus seinen bez. Arbeiten herübergenommen.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/86

2) Liegen in einer Ecke 8, in einer Kante 4 Tetraeder, so ergiebt sich das Polytop K_{16} mit dem Diagramm Fig. 29 (s. d. Anm. 88 in § 4). Es ist $e = 8$, $k = 24$, $f = 32$, $p = 16$. Wir kommen später auf dieses Gebilde zurück.

3) In einer Ecke liegen 20, in einer Kante 5 Tetraeder. Wir verweisen bez. dieses complicirtesten regulären Polytopes K_{600} auf das Werk von Schlegel (a. a. O. S. 405—420). Es ist $e = 120$, $k = 720$, $f = 1200$, $p = 600$.

4) Das Polytop K_{24} enthält in jeder Ecke 6, in jeder Kante 3 Oktaeder. Setzen wir auf jedes Dreieck eines gegebenen Oktaeders A ein weiteres Oktaeder, so dürfen an einer Kante von A immer nur 3 Oktaeder liegen, d. h. jedes der aufgesetzten 8 Oktaeder muss mit jedem der 3 benachbarten von den neu hinzugekommenen ein Dreieck gemein haben. Der erhaltene Gesammtkörper B wird also von folgenden Aussenflächen begrenzt: 8 Dreiecken der äusseren Oktaeder, welche in diesen je einer Fläche von A gegenüberliegen, und von 6 . 4 Dreiecken, welche die vierseitigen, pyramidenartigen verbleibenden Hohlräume in den Ecken von A begrenzen. (Denn in jeder Ecke fehlt noch ein Oktaeder, weil daselbst 6 zusammenkommen müssen.) Die Oberfläche von B hat also 32 Dreiecke. Setzen wir in die erwähnten 6 pyramidenartigen Hohlräume 6 weitere Oktaeder, so verschwinden die 6 . 4 Dreiecke im Innern, und es treten dafür 6 . 4 andere Dreiecke auf, so dass die Aussenfläche des nunmehr entstandenen Körpers C wiederum 32 Dreiecke enthält, und, wie man leicht sieht, mit der von B übereinstimmt. Konstruirt man über diesen 32 Flächen rückwärts 8 Oktaeder (von jedem liegen in dieser Oberfläche C vier Dreiecke, in der Anordnung etwa wie Figur 10 zeigt), von denen jedes mit jedem der 3 benachbarten eine Fläche gemein hat, so bleiben in Summa von diesen 8 Oktaedern noch 8 Flächen übrig, welche durch ein letztes Oktaeder in Anspruch genommen werden. Es ist also $p = 24$, und somit[101]) (schon nach den Formeln 1—3) $e = 24$, $k = 96$, $f = 96$.

5) Das Polytop K_8, in einer Ecke 4, in einer Kante 3 Hexaeder, ist das wiederholt besprochene, dessen Diagramm Fig. 5 zeigt. ($e = 16$, $k = 32$, $f = 24$, $p = 8$.) Fig. 5 a (Tafel III) zeigt die Projektion dieses Polytopes auf die Ebene nach der bei Stringham sich befindenden Figur. Die Eckenzahlen sind dieselben wie in Fig. 5.

6) In dem letzten Polytope K_{120} liegen in jeder Ecke 4, in jeder Kante 3 Dodekaeder, und es ist $e = 600$, $k = 1200$, $f = 720$, $p = 120$. Wir müssen uns auch hier versagen, eine ausführliche Darstellung der Ableitung des Diagramms zu geben, und wollen nur bei dieser Gelegenheit auf die Schlegel'schen Projektions-Modelle kurz zu sprechen kommen. Das Princip derselben besteht darin, das Diagramm des Polytopes successive von Aussen nach Innen in einzelne

[101]) Hiernach ist die irrthümliche Konstruktion bei Hoppe zu berichtigen. S. auch Schlegel (Homog. Raumgeb. S. 420).

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/87

Körperschichten zu zerlegen[102]), und den jeweils übrigbleibenden Kern als physischen Körper (Pappmodell) darzustellen.[103]) Die äusserste Umhüllung des Diagrammes von K_{120} ist natürlich eine Dodekaederoberfläche, welche von den Aussenflächen der ersten, aus 12 Dodekaedern bestehenden Schicht gebildet wird. Lassen wir diese 12 Dodekaeder weg, so zeigt der übrigbleibende Kern die Ansicht der Figur (des Modelles) 30 (s. Tafel III). Die äussere Oberfläche der zweiten Schicht besitzt somit 72 Fünfecke. Lösen wir nun die aus 32 Dodekaedern bestehende zweite Schicht los, so bleibt als neuer Kern ein Gebilde, wie es Figur 31 zeigt. Die äussere Oberfläche desselben besitzt 132 Fünfecke. Lösen wir weiter hiervon eine dritte, aus 42 Dodekaedern bestehende Schicht ab, so bleibt der Kern übrig, wie ihn Figur 32 anzeigt; die Oberfläche desselben besitzt wieder 132 Fünfecke und bildet die Aussenfläche einer vierten Schicht. Diese vierte Schicht besteht, wie die zweite Schicht, aus 32 Dodekaedern. Ihre innere Grenzoberfläche enthält nur noch 12 Fünfecke und es bleibt also nur das letzte Dodekaeder im Innern des Diagrammes hinzuzufügen. Rechnet man das Umhüllungspolyeder, wie nöthig, mit hinzu, so ergiebt sich in Summa die obengenannte Zahl von Dodekaedern.[104])

Es ist nun noch nachzuweisen, dass die behandelten Polytope reguläre sind, denn die bisherigen Betrachtungen ergaben nur, dass in jeder Ecke, bez. jeder Kante gleichviel solcher Polyeder zusammentrafen, die mit den 5 regulären Polyedern isomorph sind. Räumliche Diagramme („Zellgewebe") dieser Art nennt eben Schlegel „homogen zusammeugesetzte Raumgebilde". Den Beweis der Regelmässigkeit besagter Polytope finden wir bei Puchta a. a. O., insofern dieser die Gebilde mittels analytisch-geometrischer Methoden ableitet. Wir beschränken uns darauf, die betr. Untersuchung für die Polytope K_8 und K_{16} anzuführen. Das Coordinatensystem sei wie in § 2 vorausgesetzt. Dann erhalten wir das bekannte Polytop K_8, wenn wir z. B. für die 16 Ecken die folgenden Coordinatenwerthe nehmen:

$$x = \pm 1,\ y = \pm 1,\ z = \pm 1,\ t = \pm 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Wir bekommen in Summa 8 Würfel. Für einen ersten, im Raume $t = +1$ gelegenen, haben die 8 Ecken die Coordinaten:

$$x = \pm 1,\ y = \pm 1,\ z = \pm 1,\ t = +1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Seine Kantenlänge ist gleich 2. Die 7 anderen Würfel sind diesem kongruent, und, wie die Einsetzung der Coordinatenwerthe ergiebt, liegen sämmtliche Ecken des Polytopes in dem Kugelraume:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

---

[102]) Die Diagramme sind auch in sehr instruktiver Weise von Schlegel als Drahtnetze der Kanten hergestellt worden. (S. den Katalog der Brillschen Verlagsanstalt. S. 87.)

[103]) Lassen wir in der Ebene im Diagramm z. B. des Dodekaeders (Fig. 1) die 5 Fünfecke 7, 8, 9, 10, 11 als erste Schicht weg, so bleibt ein 10-eckiger Kern übrig; eine weitere Ablösung von Fünfecken hinterlässt nur das innerste Fünfeck 1.

[104]) Das gesagte kann natürlich nur zu einiger Erläuterung der Modelle dienen. Die ausführliche Ableitung s. Schlegel a. a. O. S. 424—430.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/88

d. h. gleichweit vom Coordinatenanfang entfernt. Damit ist bewiesen, dass das Polytop regulär ist. —

Wir betrachten nun das von 16 Tetraedern gebildete Polytop K_{16} mit 8 Ecken, indem wir, der Kürze wegen, nur das Resultat angeben; denn es kann nur unsere Aufgabe sein, auf die Arbeit von Puchta hinzuweisen. Von einem ersten Tetraeder ausgehend, dessen Ecken in 4 der Ecken des Würfels 6) in bekannter Weise liegen, berechnet Puchta successive die weiteren Ecken der an dieses erste grenzenden Tetraeder, und findet für die Ecken 1, 2, 3 . . . . . 8 des Polytops die folgenden Werthe der Coordinaten x, y, z, t:

Punkt 1): $+1, +1, +1, +1$. Punkt 2): $+1, -1, -1, +1$.
Punkt 3): $-1, -1, +1, +1$. Punkt 4): $-1, +1, -1, +1$.
Punkt 5): $+1, +1, -1, -1$. Punkt 6): $+1, -1, +1, -1$.
Punkt 7): $-1, +1, +1, -1$. Punkt 8): $-1, -1, -1, -1$.

Die 16 Tetraeder sind: (Vergl. hierzu Fig. 29):

1 2 3 4,	1 2 3 6,	1 2 4 5,	1 2 5 6,
1 3 4 7,	1 3 6 7,	1 4 5 7,	1 5 6 7,
2 3 4 8,	2 3 6 8,	2 4 5 8,	2 5 6 8,
3 4 7 8,	3 6 7 8,	4 5 7 8,	5 6 7 8.

Es lässt sich durch Rechnung leicht zeigen, dass jede Kante die Länge $2\sqrt{2}$ hat und sämmtliche Ecken liegen in dem Kugelraum 7), wie sich durch Einsetzen der Coordinaten sofort ergiebt.[105]) — In derselben Weise zeigt Puchta die Regelmässigkeit aller übrigen Polytope. Wir fügen zum Schlusse zur Uebersicht über die Zahl der Grenzgebilde und über die Anzahl der in einer Ecke und Kante liegenden Kanten, Flächen und Polyeder noch die folgende Tabelle bei, deren vorletzte und letzte Kolonne die den betr. Polytopen von Schlegel und Stringham gegebenen Namen zeigen:

Grenz — p	Bez.	ke	fe	fk	pe	pk	e	k	f	p	(Schlegel)	(Stringham)
Tetraeder	K_5	4	6	3	4	3	5	10	10	5	5-zell.	Pentaedroid.
	K_{16}	6	12	4	8	4	8	24	32	16	16-zell.	Hexadekaedroid.
	K_{600}	12	30	5	20	5	120	720	1200	600	600-zell.	Hexakosiedroid.
Oktaeder	K_{24}	8	12	3	6	3	24	96	96	24	24-zell.	Ikosatetraedroid.
Hexaeder	K_8	4	6	3	4	3	16	32	24	8	8-zell.	Oktaedroid.
Dodekaeder	K_{120}	4	6	3	4	3	600	1200	720	120	120-zell.	Hekatonikosa-edroid.

Es sind also die Tetraederpolytope K_{16} und K_{600} reciprok zu den allgemeinen K_8 und K_{120}, während K_5 und K_{24} sich selbst reci-

[105]) Uebrigens sind die 8 Ecken dieses Polytopes identisch mit 8 der Ecken des vorhergehenden. Zwei K_{16} lassen sich einem K_8 in ähnlicher Weise einschreiben, wie 2 Tetraeder einem Würfel.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/89

prok (autopolar) sind. Der bedeutende Werth dieser Untersuchungen über die regulären Polytope erhellt, wie hier nur beiläufig bemerkt sein mag, erst aus den Anwendungen ihrer Resultate in Algebra und Funktionentheorie. Es mag ferner noch historisch darauf hingewiesen werden, dass E. Hess[106]) auch diejenigen Polytope eingehend studirt hat, welche zu den oben genannten regulären Polytopen in ähnlichem Verhältniss stehen, wie die 4 (sog. Keppler'schen und Poinsot'schen) regulären Sternkörper zu den, gewöhnlich platonische genannten, fünf regelmässigen Polyedern. Schliesslich mag noch erwähnt sein, dass weitere Untersuchungen von Stringham[107]), Biermann[108]), Puchta[109]) u. A. über höhere Mannigfaltigkeiten gelehrt haben, dass in allen mehr als vierdimensionalen Räumen nur 3 regelmässige linear begrenzte Gebilde existiren die z. B. im fünfdimensionalen Raum bez. von 10 K_8, 6 K_5 und 32 K_5 gebildet werden, d. h. 10 K_8 bilden ein vierdimensionales Kontinuum in R_5 u. s. w.[110])

Wir sind am Ende unserer Darlegungen, so weit wir sie in der vorliegenden Arbeit zu geben beabsichtigten. Manches mussten wir, als den Rahmen der Abhandlung überschreitend, trotz des Interesses, das ihm entgegenzubringen ist, bei Seite lassen und verweisen für weitere Literatur bes. auf die einschlägigen Abschnitte in Ohrtmann's Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Andererseits ist Jedem, der tiefere Einblicke in das Wesen der mehrdimensionalen Geometrie gewinnen möchte, das Studium des grösseren Schlegel'schen Werkes dringend zu empfehlen, besonders wegen der vielfach eingeflochtenen historischen Hinweisungen. Ist das Studium dieser neuesten Entwickelung geometrischer Forschung auch keine leichte Arbeit, so ist der Lohn, in Anbetracht der vielfachen überraschenden Resultate, und wegen des weiten hoffnungsreichen Ausblickes auf noch der Bebauung harrende Gebiete, auch kein geringer. Unterschätzen wir

---

[106]) E. Hess, Ueber die regulären Polytope höherer Art, Sitzungsber. d. Gesellsch. z. Bef. der ges. Naturwissenschaften. Marburg. Mai 1885.

[107]) S. Stringham a. a. O.

[108]) Biermann a. a. O. S. 12 u. s. w.

[109]) Puchta, Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimension. Wien. Ber. Bd. XC. S. 168 (1884).

[110]) Die 3 Reihen von Gebilden, welche sich bis zur n-ten Dimension fortsetzen lassen, sind: a) Dreieck, Tetraeder, Fünfzell . . . b) Viereck, Hexaeder, Achtzell . . . c) Viereck, Oktaeder, Sechzehnzell . . . Die gleichdimensionalen Gebilde b) und c) sind reciprok, die a) autopolar. Die Anzahlen der r-dimensionalen Grenzgebilde sind dabei für a):

$$\binom{n+1}{r+1}, \text{ für b): } \binom{n}{r} \cdot 2^{n-r}, \text{ für c): } \binom{n}{r+1} \cdot 2^{r+1}, \text{ wo}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

s. hierüber u. A.: Schlegel, Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions. (Rendiconti del circolo mat. di Palermo. 1891. Tomo V).

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/90

überdies nicht — wir hatten in der Einleitung bereits darauf hinzudeuten — den Gewinn, den im Grunde alle wissenschaftliche Forschung, besonders aber Philosophie, speziell Erkenntnisstheorie von der Weiterentwickelung dieses Zweiges der Mathematik zu erwarten haben. Wir verstehen vollkommen die enthusiastischen Worte mit denen V. Schlegel sein Werk über homogene Raumgebilde schliesst und welche wir zum Ende anführen wollen: „Wenn hiernach der Geist durch rein logische Operationen mit Nothwendigkeit dazu geführt wird, die Schranken der Anschauung zu durchbrechen und die Existenz (dies Wort in demselben Sinne gebraucht, wie man von der Existenz von Punkten, Geraden und Ebenen spricht) von Gebilden anzuerkennen, von denen er sich, gefangen mittelst des Leibes in den Fesseln der dreidimensionalen Anschauung, zwar keine Vorstellung machen kann, deren genaue Abbildungen aber im dreidimensionalen Raume er ebenso gut wahrnimmt, wie andere Erscheinungen der Körperwelt, so scheint hieraus zu folgen, erstens, dass uns nur die Verbindung unseres Geistes mit der dreidimensionalen (oder, was genau dasselbe ist, materiellen) Körperwelt an der sinnlichen Wahrnehmung und geistigen Vorstellung höher dimensionirter Gebilde hindert, zweitens, dass unser Geist, da er eben vermöge innerer, von der Körperwelt unabhängiger Thätigkeit sich von den Fesseln des Dreidimensionalen emancipiren kann, seiner Natur nach wesentlich immateriell sein muss, und, für sich allein ohne den Leib gedacht, an kein Gebiet von bestimmter Dimensionenzahl gebunden ist.“

Note. (Ueber Polyeder). S. S. 35.

Bezüglich der elementarsten Sätze verweisen wir auf Baltzer's „Elemente der Math.“ 2. Bd. (6. Aufl.) S. 212. § 7. Zwischen den Zahlen e, k und f bestehen für jedes convexe Polyeder, dessen Oberfläche einfach zusammenhängend ist, neben der Euler'schen Gleichung $e - k + f = 2$ noch die Beziehungen $3f \leqq 2k$, $3e \leqq 2k$. Ein Polyeder heisst allgemein, wenn in jeder Ecke nur 3 Grenzflächen zusammenstossen; stossen auch nur in einer Ecke mehr als 3 Flächen zusammen, so nennt man das Polyeder singulär. (S. Eberhard a. a. O. S. 19.) Für jedes allgemeine Polyeder gilt $3e = 2k$. Die Ungleichung $3e < 2k$ charakterisirt die singulären Polyeder. Die den allgemeinen Polyedern reciproken Körper enthalten nur Dreiecke als Grenzflächen; man bezeichnet sie als Trigonalpolyeder. Für sie gilt $3f = 2k$. Klassificirt man die Polyeder nach der Zahl ihrer Flächen und bezeichnet diejenigen mit n Flächen als n-eder, so existiren in der Reihe der möglichen n-eder ($n = const.$) verschiedene allomorphe Typen, die man vom Minimum zum Maximum der Eckenzahl verfolgen kann. Das Minimum der Eckenzahl bei konstanter Flächenzahl n besitzen die Trigonalpolyeder, das Maximum die allgemeinen Polyeder, denn die bez. Gleichung giebt mit dem Euler'schen Satze verbunden für erstere $f = n$, $e = \frac{n}{2} + 2$, $k = \frac{3n}{2}$; für die

allgemeinen Polyeder: $f = n$, $e = 2n - 4$, $k = 3n - 6$. Es existiren also nur für gerades n Trigonalpolyeder, während es allgemeine Polyeder für jedes beliebige n giebt. Die sämmtlichen n-eder lassen sich dann anordnen, wie folgende Tafel zeigt:

		f	e	k
Singul. Polyeder.	Trigonalpolyeder.	n.	$\frac{n}{2} + 2$.	$\frac{3n}{2}$.
	Sing. Pol. 1. Art.	„	$e < n$.	$k < 2n - 2$.
	Autopolare Polyeder.	„	n.	$2n - 2$.
	Sing. Pol. 2. Art.	„	$e > n$.	$k > 2n - 2$.
	Allgemeine Polyeder.	„	$2n - 4$.	$3n - 6$.

Die Polyeder der mittelsten Reihe sind sich selbst reciprok. Die reciproken Körper der übrigen in der Tafel enthaltenen Polyeder sind in einer andern Tabelle zu finden, in welcher die Zahl n der ersten Kolonne ersetzt ist durch die hier in der zweiten Kolonne stehende Zahl. Zu bemerken ist noch, dass alle Pyramiden autopolare Polyeder sind, alle Prismen aber allgemeine Polyeder, und dass bei den Trigonalpolyedern sowohl als bei den allgemeinen sich die Ecken- und Kantenzahlen als lineare Funktionen der Flächenzahl n darstellen. Theilt man alle möglichen Polyeder in Klassen nach dem Werthe der Zahl n der Flächen, so enthält jede Klasse eine bestimmte Anzahl Ordnungen nach der Zahl e der Ecken, von denen die erste (wenn sie überhaupt bei dem gegebenen n vorhanden ist) die Trigonalpolyeder repräsentirt, die letzte die allgemeinen Polyeder. Jeder Ordnung gehören eine Reihe allomorpher Typen an, welche allein in den 3 Zahlen e, f, k übereinstimmen, während Art und Anordnung der Grenzgebilde differirt, und für jeden Typus lassen sich, den früheren Erläuterungen gemäss, unzählige isomorphe Individuen herstellen. Bezeichnen wir ein Polyeder mit p, so deute ein Index unten die Klasse (Zahl n) an, und zwar eine arabische Ziffer ein allgemeines Polyeder, eine römische Ziffer ein singuläres Polyeder, während die verschiedenen Typen durch obere Indices ($'$) unterschieden seien. (Die Trigonalpolyeder durch t). Die Fig. 2 und 3 zeigen die 5- und 6-eder mit der gewählten Bezeichnung. Die 5 allgemeinen 7-Flächner s. bei Eberhard a. a. O. (Tafel 1). Die Trigonalpolyeder für $e = 4$ bis $e = 8$ gaben Möbius (Gesammelte Werke, 1887. Bd. II. S. 532) und Cayley (On the △-faced polyacrons. Mem. of the Literary and philos. soc. of Manchester. 3. s. vol. 1. 1862) gleichzeitig. Die sämmtlichen allomorphen Typen der allgemeinen 9- und 10-Flächner (an Zahl 50 bez. 230) sind vom Verf. gezeichnet und im Verein am 13./3. 1894 vorgelegt worden. Ueber die autopolaren Polyeder bis $n = 8$ s. Kirkman a. a. O. Nimmt schon die Zahl der allomorphen Typen der allgemeinen Polyeder mit wachsendem n rasch zu, ($n = 4$ bis 10: 1, 1, 2, 5. 14, 50, 230) so umsomehr die Zahl aller möglichen singu-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/92

lären Typen. Doch ist die Ableitung dieser erleichtert durch den Satz (s. Eberhard a. a. O. S. 19): „Jedes singuläre Polyeder pn stellt einen gemeinsamen Grenzfall mehrerer allomorphen allgemeinen Polyeder dar.“ Man braucht nur bei einem allgemeinen Polyeder (im Diagramm) irgend eine Kante, welche 2 Ecken e_1 und e_2 verbindet, durch Zusammenrücken von e_1 und e_2 zum Verschwinden zu bringen, um ein singuläres Polyeder von derselben Flächenzahl n und einer um 1 verminderten Ecken- und Kantenzahl zu erhalten. Dasselbe singuläre Polyeder wird unter Umständen in analoger Weise aus einem anderen Typus der Reihe allomorpher n-eder erhalten. Schliesslich ist für die weitere Untersuchung der Polytope noch ein Satz über allgemeine n-eder anzuführen. (S. Eberhard a. a. O. S. 21—26). Zur Einführung diene folgendes. Eine Kante eines allgemeinen Polyeders heisse Kreuzungskante, wenn ihre beiden Endpunkte die Eckpunkte von 2 Flächen des Polyeders sind, welche keine Ecke gemeinsam haben. Daraus folgt sofort, dass keine Kante eines Dreiecks eine Kreuzungskante sein kann, und dass ein Polyeder pn umsomehr Kreuzungskanten enthält, je weniger es Dreiecke als Flächen besitzt. Sind nun α und β (Fig. 12a) die Flächen, welche die Endpunkte der Kreuzungskante enthalten, γ und δ die Flächen zu beiden Seiten der letzteren, so kann man die Ebenen der α und β allmälig so im Raume variiren, dass sie zum Schnitt kommen (α' und β', Fig. 12b), während an Stelle von γ und δ die getrennt liegenden Flächen γ' und δ' erscheinen. Die Seitenzahlen der 4 Begrenzungsflächen sind natürlich dabei andere geworden, aber das Polyeder bleibt ein n-eder. Man sagt, das neue Polyeder sei aus dem ursprünglichen durch einmalige Kreuzung hervorgegangen. Der Satz von Eberhard sagt nun aus: „Jedes allgemeine n-eder kann aus jedem anderen durch eine gewisse Anzahl von Kreuzungen erhalten werden.“ Hält man also ein beliebiges allgemeines n-eder pn fest und definirt die kleinste Anzahl m von Kreuzungen, vermöge deren pn in $p'n$ übergehen kann, als das Maass der morphologischen Distanz von pn und $p'n$, so ordnen sich alle allomorphen Typen von pn gemäss dem Werthe von m in Gruppen. Bezüglich der weiteren Ausführungen müssen wir auf Eberhard's Werk verweisen; für das in § 4 Besprochene dürfte das Vorliegende gerade hinreichend sein.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/93

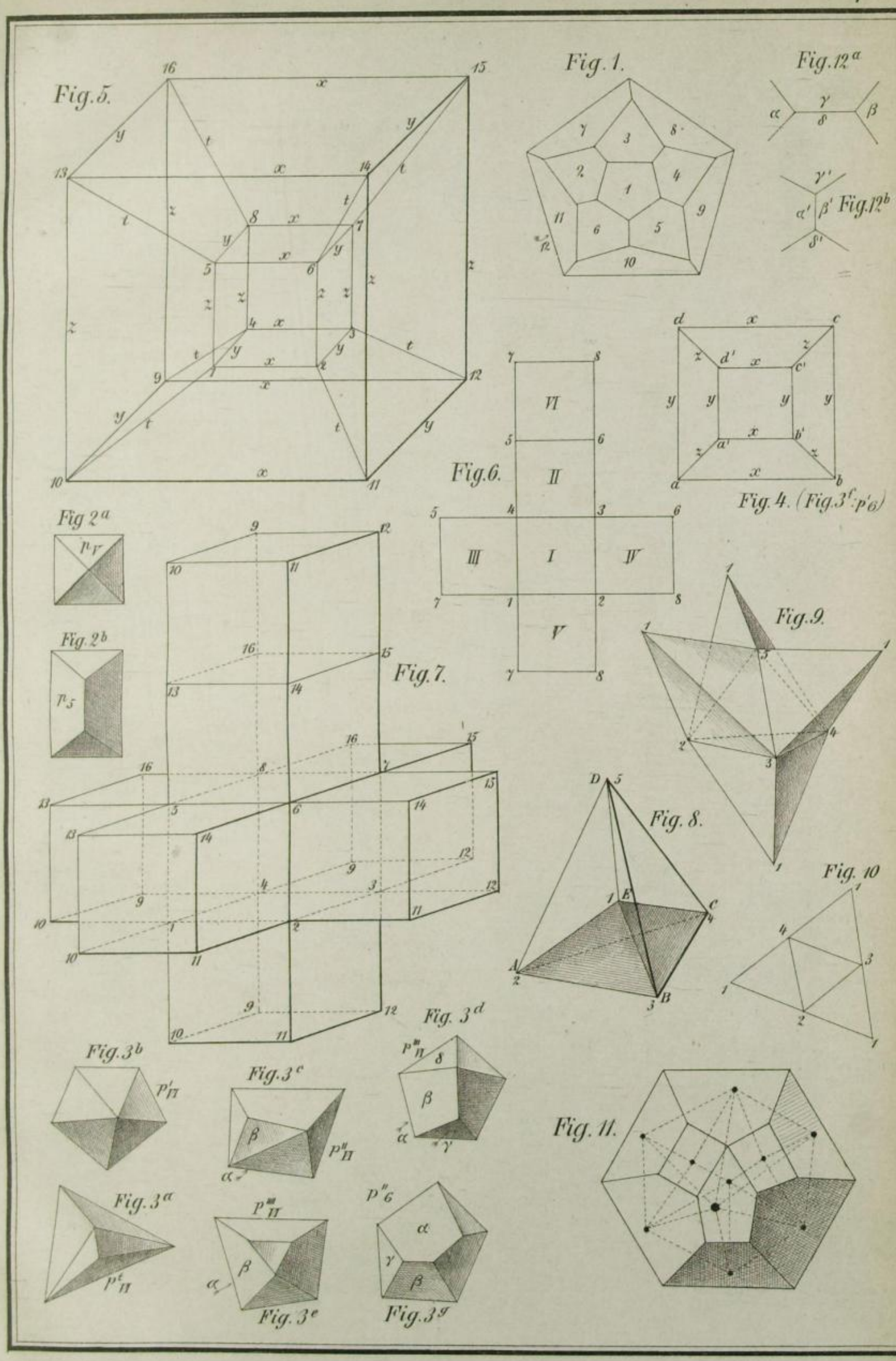
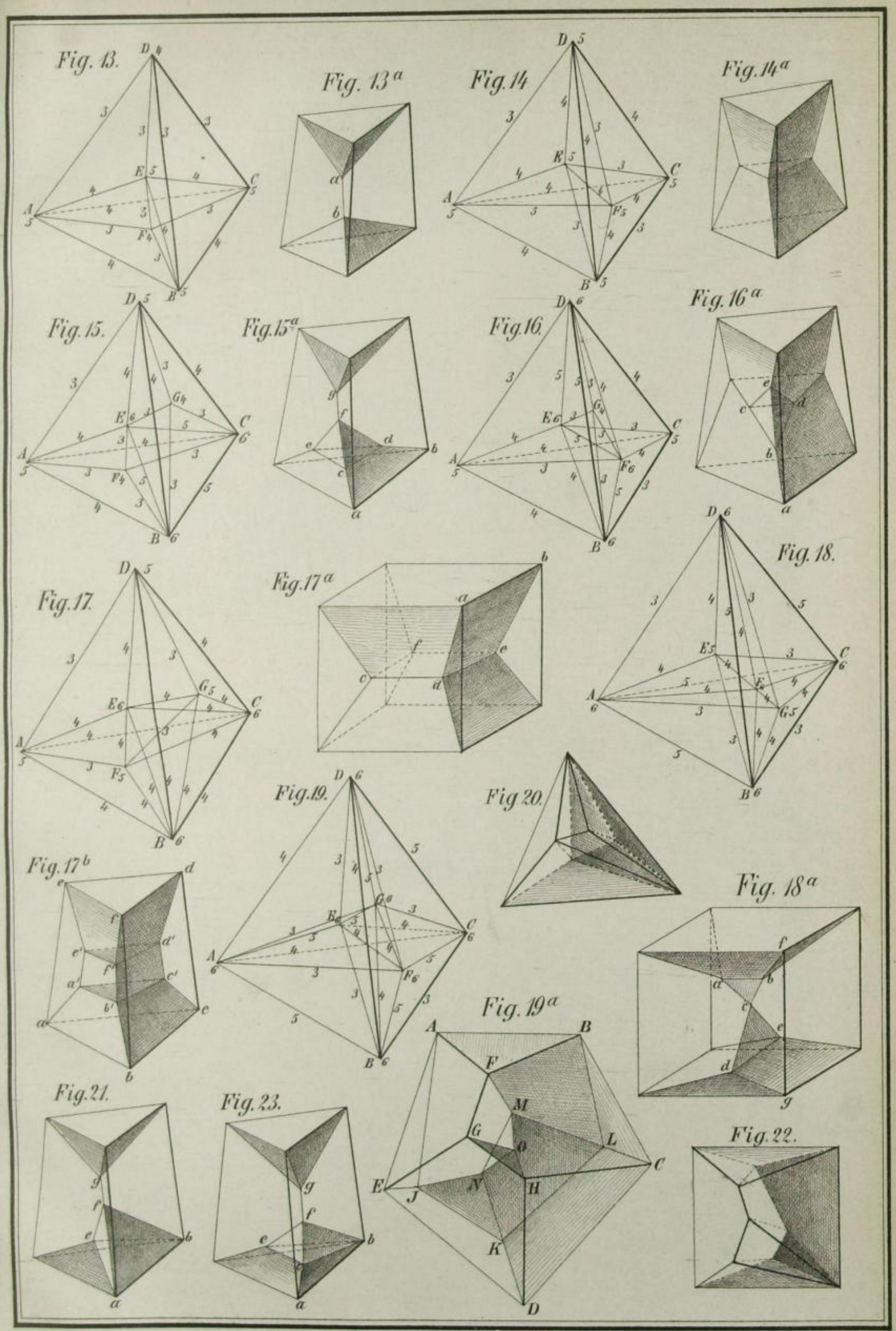


Fig. 5.
Fig. 1.
Fig. 12a
Fig. 12b
Fig. 6.
Fig. 4. (Fig. 3f: p'6)
Fig 2a
Fig. 2b
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 10
Fig. 3d
Fig. 3b
Fig. 3c
Fig. 11.
Fig. 3a
Fig. 3e
Fig. 3g

Sächsische Landesbibliothek –
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/102



Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/103

Sächsische Landesbibliothek –
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/104

Fig. 24.

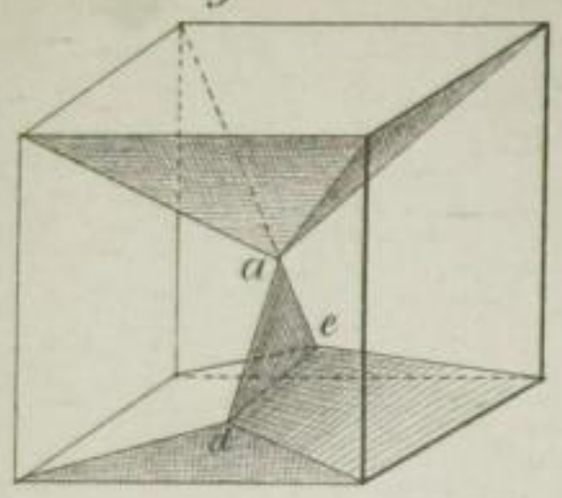


Fig. 25.

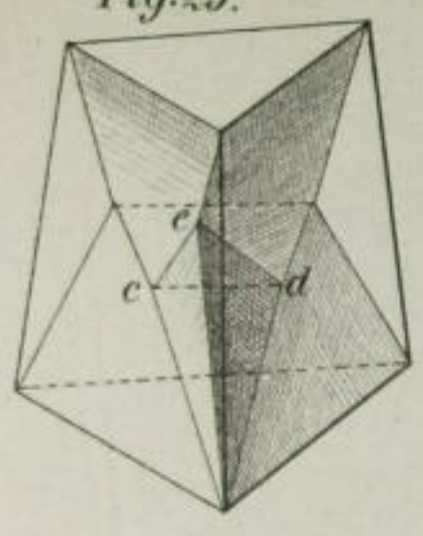


Fig. 24a

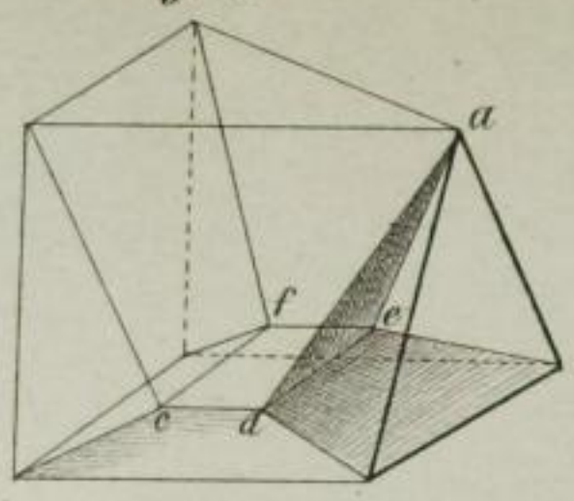


Fig. 27a

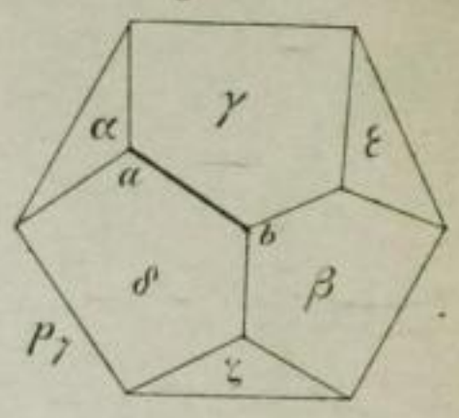


Fig. 30.

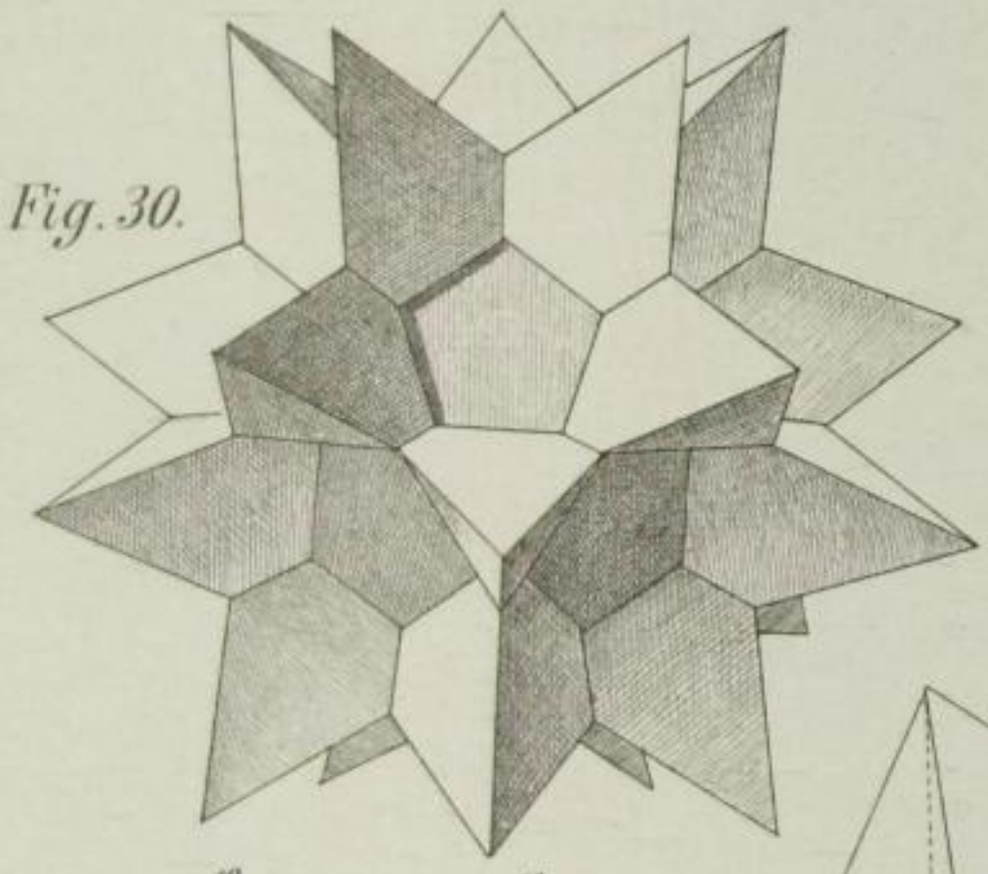


Fig. 31.

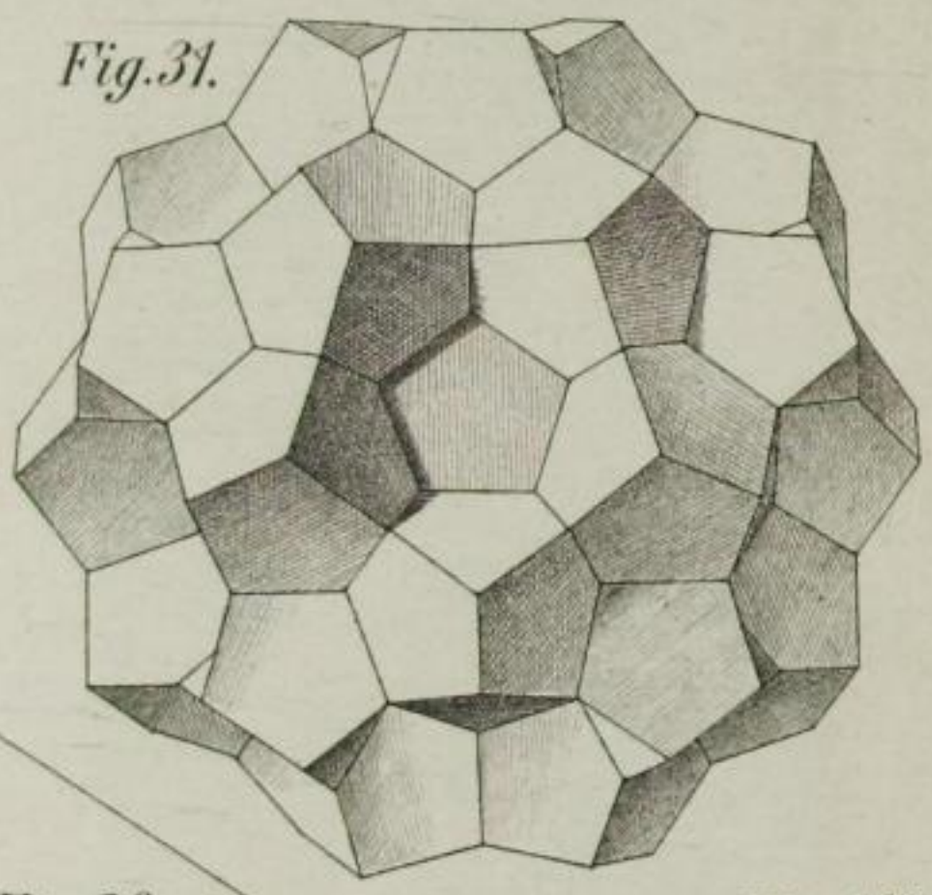


Fig. 5a

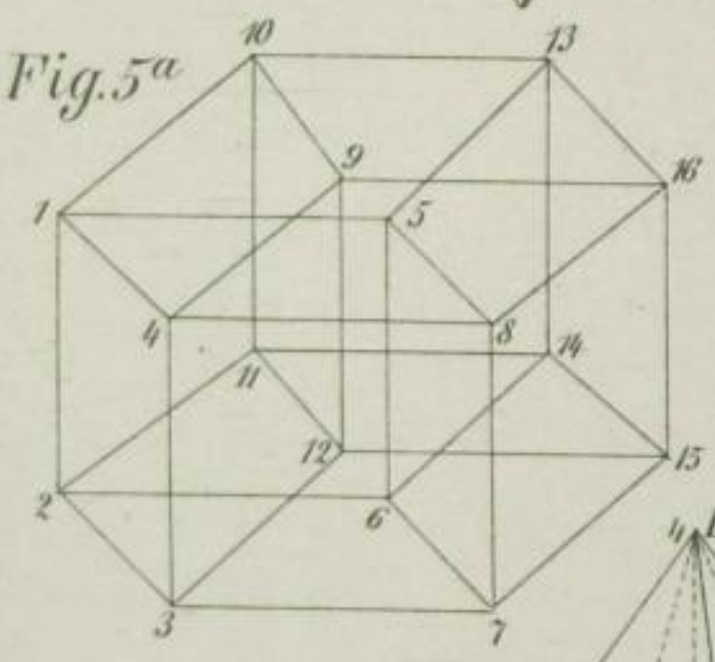


Fig. 26.

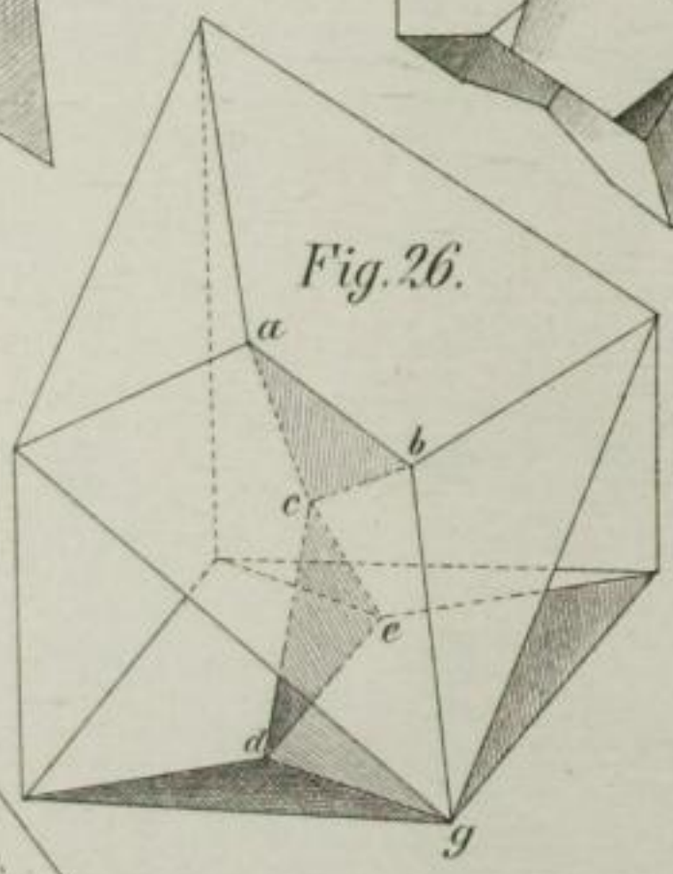


Fig. 28a

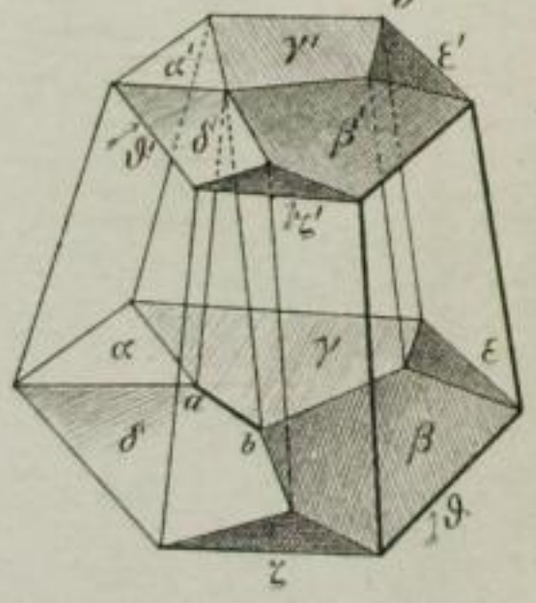


Fig. 29.

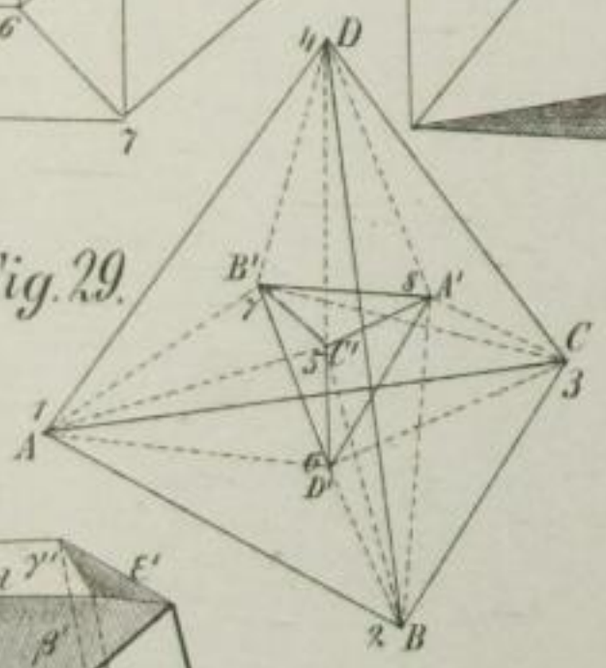


Fig. 32.

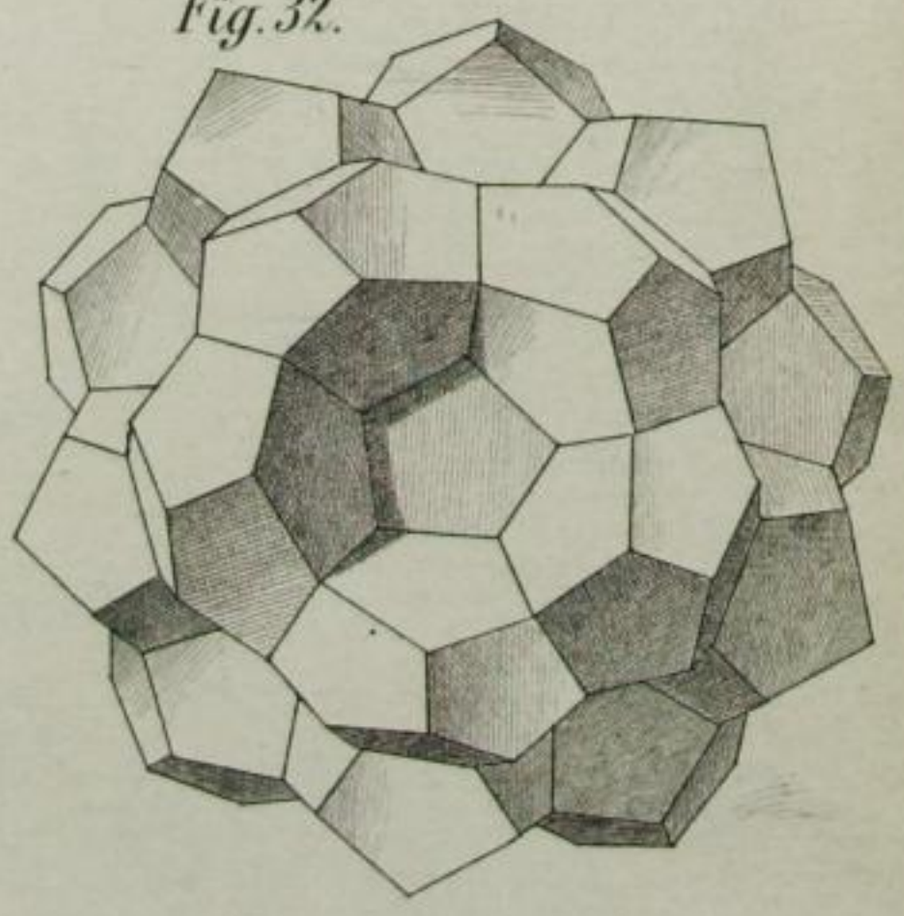


Fig. 28b

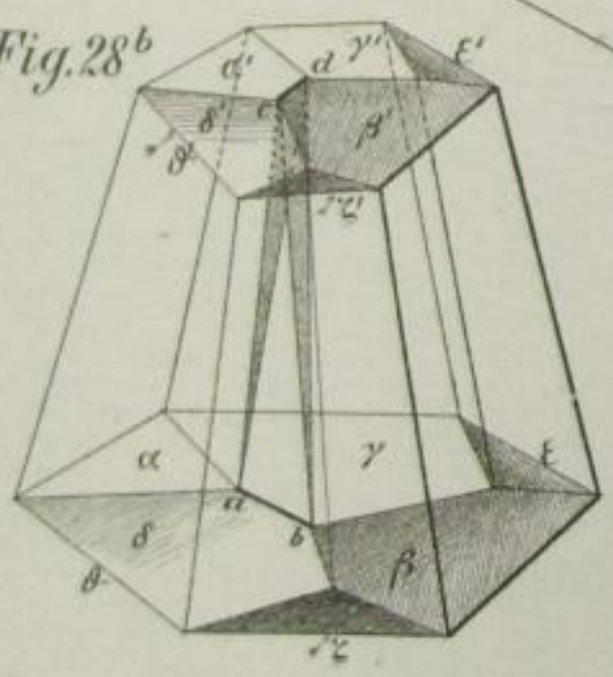
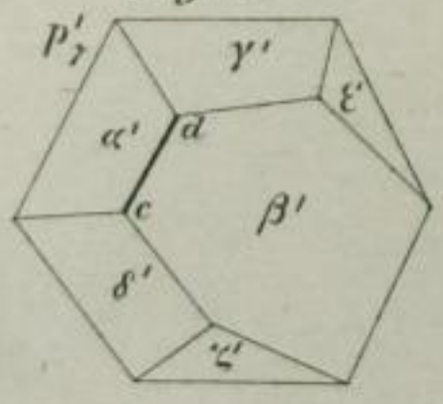


Fig. 27b



Lith. u. Druck v. R. Zückler, Zwickau.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18930000/105

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau i.S.

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 1893

Autor(en)/Author(s): Brückner Max

Artikel/Article: Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope 1-61