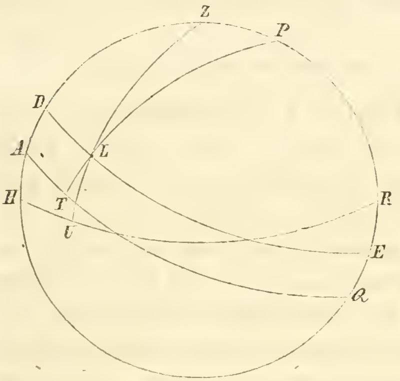
7. Ueber die astronomische Wärme und Lichtvertheilung auf der Erdoberfläche.

Von Schullehrer Brenner in Tuttlingen.

Die freie Wärme, welche, nebst dem Lichte, hauptsächlich die Existenz der organischen Körperwelt bedingt, wird der Erdoberfläche aus zwei Hauptquellen zugeführt. Die eine ist der Wärmevorrath, den die Erde in ihrem Innern birgt, die andere die Sonne. Da wir nun von der Wärmemenge des Erdkerns, sowie von der Wärmeströmung gegen die Oberfläche noch keine genaue Kenntniss haben, übrigens aber von einzelnen Gegenden (Island, Grönland) wissen, dass sie aus der Erde selbst eine weit grössere Quantität Wärme beziehen als andere Gegenden, so lässt sich über den Ausfluss dieser Wärmequelle wohl keine allgemeine Regel angeben. Weit mehr Hoffnung scheint vorhanden zu sein zur Bestimmung der von der Erde ausfliessenden Wärmemenge für jede besondere Gegend, besonders wenn man sie mit der von der Sonne gespendeten (Wärmemenge) vergleicht. Die letztere aber, die Sonne, verbreitet ihre Wärme auf solche Weise, dass sich die Verhältnisse der Wärmemengen für verschiedene Gegenden genau bestimmen lassen, — Verhältnisse, denen auch die Lichtverbreitung derselben unterworfen ist, und die sich von den Hypothesen der Emanation und Vibration ganz unabhängig zeigen. — Die von der Sonne herrührende Wärme- und Lichtvertheilung auf der Erdoberfläche nennen wir die astronomische, und diese astronomische Wärme- und Lichtvertheilung zu bestimmen, sei der Gegenstand unserer Beschäftigung.

Es ist bekannt, dass sich die auf gleiche ebene Flächen geworfenen Wärme- und Lichtmengen verhalten, wie die Sinus der Neigungswinkel der auffallenden Strahlen. Nehmen wir daher die in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit in Empfang genommene Wärme- oder Lichtmenge zur Einheit an, so ist dieselbe bei einer Neigung N der Sonnenstrahlen gegen den Horizont

$$= \sin N.$$



Diese Neigung der Sonnenstrahlen ist aber nichts anderes, als die Höhe der Sonne. Es sei daher HR der Horizont des Ortes, Z dessen Zenit, AQ der Aequator, P der Nordpol, DE der an einem beliebigen Tage beschriebene Parallelkreis der Sonne, L der Standpunkt derselben zu einer beliebigen Nachmittagsstunde. Ziehe ich durch L den Vertikalkreis ZU, so wie den Meridian PT, so ist im sphärischen Dreieck ZPL

$$\cos ZL = \cos ZP \cdot \cos PL + \sin ZP \cdot \sin PL \cdot \cos ZPL.$$

Setze ich nun die Breite des Ortes $= \beta$, die statthabende Deklination der Sonne $= \delta$, den Stundenwinkel $=$ S, so wie die Höhe der Sonne $=$ H, so ist

$$ZL = \frac{\pi}{2} - H;\ ZP = \frac{\pi}{2} - \beta;\ PL = \frac{\pi}{2} - \delta \text{ und } ZPL = S,$$

folglich

$$1)\quad \sin H = \sin\delta \cdot \sin\beta + \cos\delta \cdot \cos\beta \cdot \cos S.$$

Bezeichnet man die Zeit mit t und den Zeitmoment mit dt, so ist die in einem Augenblick von der Flächeneinheit empfangene Wärme- oder Lichtmenge

$$= dt \cdot \sin H,$$

folglich hat man, wenn man die Wärmemasse eines Tages mit M bezeichnet

$$M = \int dt\,(\sin\delta\,.\,\sin\beta + \cos\delta\,.\,\cos\beta\,.\,\cos S),$$

wofern dieses Integral zwischen den gehörigen Grenzen genommen wird.

Zur Zeiteinheit nehmen wir die bürgerliche Stunde, und dann ist

$$S : t = 2\pi : 24,$$

folglich $t = \frac{12\,S}{\pi}$ und $dt = \frac{12\,.\,dS}{\pi}$. Diess gibt

$$M = \frac{12}{\pi}\int dS\,(\sin\delta\,.\,\sin\beta + \cos\delta\,.\,\cos\beta\,.\,\cos S).$$

Zwar ist auch die Deklination δ eine Funktion von t und folglich auch von S, allein sie variirt in einem Tage so wenig, dass das tägliche Wachsthum derselben nur einen äusserst kleinen Einfluss auf das Integral ausübt. Nehmen wir aber für den Tag, dessen Wärme- und Lichtmenge bestimmt werden soll, die Mittags 12 Uhr stattfindende Deklination der Sonne als constant an, so wird man für den einen halben Tag etwas zu viel, und für den andern etwas zu wenig Wärme- und Lichtmenge haben, doch so, dass beide Fehler sich beinahe neutralisiren werden. Somit bekommen wir

$$2)\qquad M = \frac{12}{\pi}(\sin\delta\,.\,\sin\beta\,.\,S + \cos\delta\,.\,\cos\beta\,.\,\sin S) + C.$$

Nehmen wir vorerst die Wärme- und Lichtmenge des halben Tages, so ergibt sich die eine Grenze für $S = 0$ und die andere für $H = 0$, d. h. für den aus der Gleichung

$$0 = \sin\delta\,.\,\sin\beta + \cos\delta\,.\,\cos\beta\,.\,\cos S$$

hergeholten Werth für S, nämlich für $\cos S = -\,tg\delta\,.\,tg\beta$.

Verdoppeln wir hierauf das Integral, setzen $\frac{\pi\,.\,M}{24} = u$ und behalten S als Hilfsgrösse bei, so haben wir

$$3)\qquad u = \sin\delta\,.\,\sin\beta\,.\,S + \cos\delta\,.\,\cos\beta\,.\,\sin S.$$

In Betreff derjenigen Gegenden aber, wo die Sonne gar nicht mehr untergeht, hat man das Integral 2) für einen ganzen Tag, oder vielmehr für die zwischen zwei auf einander folgende tiefste Standpunkte der Sonne fallende Zeit von 24 Stunden,

d. h. zwischen den Grenzen $S = 0$ und $S = \pi$ zu nehmen und hernach zu verdoppeln. Diess gibt

4) $M = 24 \sin\delta \,.\, \sin\beta$.

Man kann nun die Frage aufwerfen: In welcher Breite findet, bei gegebener Deklination, ein Maximum oder Minimum der in einem Tage von der Sonne gelieferten Wärme- und Lichtmasse statt? Zu diesem Zwecke setzen wir die in Beziehung auf β genommenen Differentiale von 3) und 4) gleich Null und entwickeln β. 3) gibt zuerst

$$\partial u_\beta = \sin\delta.\cos\beta.S + \sin\delta.\sin\beta \partial S_\beta - \cos\delta \sin\beta.\sin S + \cos\delta.\cos\beta.\cos S.\partial S_\beta.$$

Substituiren wir für $\cos S$ dessen Werth $-\operatorname{tg}\delta \,.\, \operatorname{tg}\beta$, so heben sich auf der rechten Seite dieser Gleichung das zweite und vierte Glied gegenseitig auf und es ist alsdann

$$\partial u_\beta = \sin\delta \,.\, \cos\beta \,.\, S - \cos\delta \sin\beta \sin S.$$

Setzen wir nun $\partial u_\beta = 0$, so kommt, wenn wir $\operatorname{tg}\delta = a$ setzen,

5) $2S \,.\, a^2 + \sin 2S = 0$.

Eliminirt man aus 3) und 5) S, so ergibt sich das M.M selbst

$$u = \frac{\cos\delta}{\cos\beta} \cdot \sin S.$$

Ist $\partial^2 u_\beta$ negativ, so findet ein Maximum und ist es positiv, ein Minimum statt. Es ist aber

$$\partial^2 u_\beta = -u + \partial S_\beta (\sin\delta \,.\, \cos\beta - \cos\delta \,.\, \sin\beta \,.\, \cos S) \text{ oder}$$

$$\partial^2 u_\beta = \frac{\sin\delta^2 - \cos\delta^2 \,.\, \sin S^2 \,.\, \cos\beta^2}{\cos\delta \,.\, \sin S \,.\, \cos\beta^3}.$$

Ist daher $\operatorname{tg}\delta < \sin S \,.\, \cos\beta$, so hat man ein Maximum, und ist

$\operatorname{tg}\delta > \sin S \,.\, \cos\beta$, ein Minimum.

Wenn nun S' ein Werth ist, der die Gleichung 5) beinahe befriedigt, so hat man die Korrektion

$$c = -\frac{2S'a^2 + \sin 2S'}{2a^2 + 2\cos 2S'}.$$

Setzen wir

$y = 2Sa^2 + \sin 2S$, so ist

für $S = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, y = 0$,

$$\text{für } S = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots y = \pi a^2.$$

$$\text{für } S = \frac{3\pi}{4} \ldots\ldots y = \frac{3}{2}\pi a^2 - 1,$$

$$\text{für } S = \pi \ldots\ldots y = 2\pi a^2.$$

Im Uebrigen bemerkt man

1) dass für alle Werthe von S zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ jede der Grössen $2\,Sa^2$ und $\sin 2\,S$ positiv bleibt, so dass auch y stets positiv ist.

2) Dass zwischen $S = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ die Grösse $2\,Sa^2$ zwar immer noch stetig wächst, allein $\sin 2S$ von Null an stetig abnimmt, so dass, wenn einmal y negativ geworden ist, dasselbe auch negativ bleibt bis auf den Werth $S = \frac{3\pi}{4}$. In der That ist auch für letztern Werth von $S \ldots\ldots y = \frac{3}{2}\pi a^2 - 1$ negativ, selbst für den grössten Werth, den man a beilegen kann, nämlich für $tg 23^0\ 28' = 0{,}434$.

3) Dass gleicherweise zwischen $S = \frac{3\pi}{4}$ und π wieder jede Grösse wächst, und dass demnach auch y positiv bleibt, wenn es solches einmal geworden ist. Wirklich geht es in diesen Grenzen auch von der Negativität in die Positivität über. Da wir nun dem Stundenwinkel S keinen grössern Werth beilegen dürfen als π, so folgt daraus, dass y, ausser für $S = 0$, noch zweimal durch Null gehen wird, nämlich

für einen Werth von S zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ und

„ „ „ $\frac{3\pi}{4}$ und π.

Sonach bietet die Gleichung 5) drei, aber auch nicht mehr als drei Werthe für S dar.

Die Gleichung 4) aber gibt

$$\partial M_\beta = 24 \,.\, \sin\delta \,.\, \cos\beta = 0,$$

also $$\beta = 90^0 \text{ und } M = 24 \,.\, \sin\delta.$$

Für $S = 0$, oder $\operatorname{tg}\delta \, . \, \operatorname{tg}\beta = -1$, d. h. für den Fall, wo die Breite β und die Deklination δ (der Sonne) entgegengesetzt sind und sich zu einem Rechten ergänzen, ist aber

$$\partial^2 u_\beta = + \infty, \text{ also } u = 0 \text{ ein Minimum.}$$

Da aber die Maxima und Minima nur abwechslungsweise auf einander folgen, so ist der Werth von u, der dem zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ liegenden von S entspricht, ein Maximum, so wie der nächstfolgende, der dem zwischen $\frac{3\pi}{4}$ und π liegenden S zukommt, ein Minimum. Endlich ist für $\beta = 90^0$ oder den Pol $\partial^2 M_\beta = -24 \sin\delta$, also M ein Maximum.

Man überzeugt sich daher, dass die tägliche Wärme- oder Lichtmasse 2 Maxima und 2 Minima darbietet. *)

Von besonderem Interesse ist die Bestimmung der Wärme- und Lichtmasse für einen grössern Theil des Jahres oder auch für das ganze Jahr. Allein es wäre sehr umständlich, dieselbe für jeden einzelnen Tag zu berechnen und zuletzt zu summiren. Diesen Zweck erreichen wir schneller vermittelst der Differenzenrechnung.

Es ist hier völlig genügend, wenn wir uns die Erdbahn kreisförmig und die Sonne im Mittelpunkt befindlich vorstellen, so dass die letztere in ihrer Länge täglich um denselben Bogen fortschreitet und alle bürgerlichen Tage einander gleich sind — eine Annahme, die wir um so eher machen können, als physikalische und örtliche Ursachen noch weit bedeutendere Modifikationen eintreten lassen.

Die Länge der Sonne bezeichnen wir mit λ und deren tägliches Wachsthum mit h, und wir können unsere Summationen in Beziehung auf den Variablen λ und dessen constantes Wachs-

*) Nimmt man z. B. die grösste Deklination der Sonne, $\delta = 23^0\,28'$, so ergibt sich ausser $S = 0$ auch noch $S = 1{,}997$ oder $S = 114^0\,25'$, so wie

$$S = 2{,}516 \text{ oder } S = 144^0\,11'.$$

$\operatorname{tg}\beta \, . \, \operatorname{tg}\delta = -\cos S$ gibt aber $\beta = 43^0\,36'$ und $\beta = 61^0\,51'$ und diess ferner $u = 1{,}1534$ und $u = 1{,}1372$. Die zwei Minima sind daher $u = 0$ und $u = 1{,}1372$ in den Breiten $-66^0\,32'$ und $+61^0\,50'$, so wie die 2 Maxima $u = 1{,}1534$ und $u = 1{,}251$ in den Breiten $43^0\,36'$ und 90^0.

thum h durchführen, während λ an die Gleichung gebunden ist $\sin\delta = \sin\varepsilon \, . \, \sin\lambda$, wo ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet.

Wir sind nun genöthigt, die Formeln 3) und 4) so umzuformen, dass eine Integration in Beziehung auf λ möglich ist. Diess lässt sich in Beziehung auf 3) nur durch eine unendliche Reihe bewerkstelligen.

Setzen wir $\frac{u}{\sin\beta} = U$, und $\operatorname{tg}\beta = z$, so haben wir aus 3)

$$U = \sin\delta \, . \, S + \frac{\cos\delta \, . \, \sin S}{z}.$$

Differentiiren wir in Beziehung auf z, so kommt

$$\partial U_z = \sin\delta \, . \, \partial S_z - \frac{\cos\delta \, . \, \sin S}{z^2} + \frac{\cos\delta \, . \, \cos S \, . \, \partial S_z}{z}.$$

Eliminiren wir $\cos S$ vermittelst des Werthes $-z\operatorname{tg}\delta$, so ist

$$\partial U_z = -\frac{\cos\delta \, . \, \sin S}{z^2} = -\frac{1}{z^2}\sqrt{1-\sin\delta^2\,(1+z^2)} \text{ oder}$$

$$\partial U_z = -\frac{1}{z^2}\,(1-c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ wenn wir}$$

$$\sin\varepsilon^2\,(1+z^2) = c \text{ setzen.}$$

Nun könnten wir die Wurzelgrösse $(1-c \, . \, \sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln, und hierauf die Potenzen von $\sin\lambda$ in die Sinus und Cosinus von λ und dessen Vielfachen verwandeln. Diesen Zweck können wir jedoch unmittelbar erreichen, und da nur gerade Potenzen von $\sin\lambda$ zum Vorschein kommen, und diese keine Sinus, sondern nur Cosinus, als Vielfache erzeugen, so setzen wir

$$(1-c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}} = a_0 + a_1\cos\lambda + a_2\cos 2\lambda + a_3\cos 3\lambda \, \ldots\ldots + a_n\cos n\lambda.$$

Nimmt man die Differentiale der Logarithmen beider Seiten in Beziehung auf λ, so kommt

$$\frac{c \, . \, \sin 2\lambda}{(2-c)+c.\cos 2\lambda} = \frac{a_1\sin\lambda + 2a_2 \, .\sin 2\lambda + 3a_3 \, . \sin 3\lambda \ldots . + na_n \sin . n\lambda}{a_0 + a_1.\cos\lambda + a_2.\cos 2\lambda + a_3.\cos 3\lambda \ldots .. + a_n.\cos n\lambda}.$$

Da im Allgemeinen ist

$$\sin A \, . \, \cos B = \frac{1}{2}\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin(A-B),$$

so hat man, wenn man die Nenner wegschafft, als Coefficienten von $\sin n\lambda$

$$\frac{1}{2}c \, . \, a_{n-2} - \frac{1}{2}c.a_{n+2} - (2-c)n.a_n - \frac{1}{2}(n-2)\,c.a_{n-2} - \frac{1}{2}\,(n+2)c.a_{n+2}.$$

Setzen wir diesen Coefficienten gleich Null und ersetzen n durch n—2, so entwickelt sich

$$6)\qquad a_n = \frac{5-n}{1+n}\, a_{n-4} + \frac{2\,(n-2)}{1+n}\left(1-\frac{2}{c}\right) a_{n-2}.$$

Setzt man

$$(1 - c\,.\,\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{c}{4}\cdot(e^{\lambda\sqrt{-1}} - e^{-\lambda\sqrt{-1}})^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

so überzeugt man sich, dass bei der binomischen Entwicklung λ in der Potenz $e^{\pm\lambda\sqrt{-1}}$ stets nur in Begleitung eines geraden Coefficienten erscheint, so dass sich die Coefficienten a_n mit ungeradem Stellenzeiger als Null ausweisen. Alle Coefficienten a_n bestimmen sich daher in a_0 und a_2, welch letztere unmittelbar zu entwickeln sind.

a_0 ist, nebst 1, der Inbegriff aller der Grössen, welche in den Potenzen $(e^{\lambda\sqrt{-1}} - e^{-\lambda\sqrt{-1}})^{2m}$ das mittlere Glied ausmachen; und eben so ist $\frac{1}{2}\, a_2$ die Summe aller derjenigen Coefficienten, die jenem mittleren Gliede unmittelbar vorangehen oder auch nachfolgen, d. h. der Coefficienten der Grösse $e^{2\lambda\sqrt{-1}} + e^{-2\lambda\sqrt{-1}}$. Auf diese Weise findet sich

$$a_0 = 1 - 2\cdot\frac{c}{8} - 4.3\cdot\frac{1\,.\,1}{(1\,.\,2)^2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 - 6.5.4.\frac{1.1.3}{(1.2.3)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^3$$
$$-\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,\frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^4 \ldots\ldots$$
$$-\,2m\,(2m-1)\,(2m-2)\ldots\ldots(m+1)\cdot\frac{1.1.3.5\ldots.(2m-3)}{(1\,.\,2\,.\,3\ldots.m)^2}\left(\frac{c}{8}\right)^m.$$

$$\frac{1}{2}a_2 = \frac{c}{8} + 4\cdot\frac{1.1}{1.2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{1.1.3}{1.2.3}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{c}{8}\right)^4\ldots.$$
$$+\,\frac{2m(2m-1)\,(2m-2)\ldots.(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.(m-1)}\cdot\frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots.(2m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.m}\left(\frac{c}{8}\right)^m.$$

Vermehre ich jede dieser Reihen um ein Glied, indem ich das neue Glied aus dem letzten durch Verwandlung des m in m + 1 gewinne, und dividire hierauf das letzte durch das uneinsletzte, so finde ich für die Verhältnisse zweier auf einander folgenden Glieder

$$c\cdot\frac{4\,m^2-1}{4(m+1)^2}\ \text{und}$$
$$c\cdot\frac{4\,m^2-1}{4m\,(m+2)}.$$

Beide Verhältnisse sind kleiner als c, nähern sich aber dieser Grösse desto mehr, je grösser m wird und gehen nur für $m = \infty$ in c über. Die Convergenz beider Reihen ist daher gesichert, sobald $c < 1$, d. h. wenn

$\sin \varepsilon^2 (1 + \operatorname{tg}\beta^2) < 1$ oder $\sin \varepsilon < \cos\beta$, mit Worten, wenn die Breite des Ortes den Polarkreis nicht erreicht. Um jedoch auf u zurückzukommen, muss ∂U_z in Beziehung auf z integrirt werden, und es fragt sich, ob obige Reihen auch bei dieser Sachlage noch als brauchbar sich zeigen. Wir haben daher zu vergleichen

$\frac{c^m}{z^2}$ mit $\int \frac{c^m\, dz}{z^2}$, oder bei Vernachlässigung des gemeinschaftlichen Coefficienten $\sin \varepsilon^{2m}$

$$\left(\frac{1 + z^2}{z^2}\right)^m \text{ mit } \int \frac{(1 + z^2)^m}{z^2}\, dz.$$

Es ist aber

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} = \frac{1}{z^2} + m + \frac{m\,(m+1)}{1\,.\,2} z^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} z^4 + \ldots.$$

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2} dz = -\frac{1}{z} + mz + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \frac{z^3}{3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{z^5}{5} + ..$$

z mag positiv oder negativ sein, so ist für alle Werthe, von $z \leqq 1$ jedes Glied der obern Reihe grösser, als jedes Glied von derselben Ordnung in der untern Reihe, ausgenommen die zwei ersten Glieder für den Fall $z = 1$, wo ihre absoluten Werthe einander gleich und $= 1$ sind. Es ist daher um so mehr

$$\int \frac{c^m\, dz}{z^2} < \frac{c^m}{z^2},$$

als das Integral eine Differenz kleinerer Grössen vorstellt, während $\frac{c^m}{z^2}$ eine Summe grösserer Glieder ist.

Für z positiv und > 1 ist

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\, dz$$

stets positiv, und für z negativ und > 1, stets negativ mit dem einzigen Ausnahmsfall, $m = 0$. Es ist aber

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \mp \int \frac{(1+z^2)^m}{z^2} dz = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + m(1-z) + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} z^2 \left(1 - \frac{z}{3}\right)$$
$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot z^4 \left(1 - \frac{z}{5}\right) + \ldots..$$

wo das negative Zeichen für das positive z und das positive für das negative z gilt.

z mag so gross sein, als es will, so kann man doch stets m einen Werth beilegen, der diese Differenz positiv macht, so dass jedenfalls in der Entwicklung von U_z die später folgenden Glieder bewirken, dass

$$\int \frac{c^m \, dz}{z^2} < \frac{c^m}{z^2} \text{ wird.}$$

Um diesen Umstand herbeizuführen, hat man nicht einmal nöthig, auf einen hohen Werth von m anzusteigen, denn wir haben uns bereits überzeugt, dass Convergenz nur dann erreicht wird, wenn

$$\cos\beta > \sin\varepsilon, \text{ welches gleich ist mit}$$
$$z < \operatorname{cotg}\varepsilon.$$

Nun ist $\operatorname{cotg}\varepsilon = 2{,}3035 \ldots$ und da z nicht einmal diese Grösse erreichen darf, so zeigt sich in der Reihe für

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \mp \int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}$$

nur das dritte Glied als negativ, so dass schon der Werth $m=3$ diese Differenz positiv macht. Die Reihe für U oder u zeigt sich daher noch brauchbarer, als die für ∂U_z.

In Beziehung auf die Anwendung der Formel 6) zur Bestimmung des Coefficienten a_4 ist zu bemerken, dass das erste Glied in der Entwicklung von $(1 - c \sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ den übrigen conform sein muss, d. h. es muss die Form haben $\gamma \cos 0\lambda$ oder $\gamma \cos 0$. Soll aber die Grösse $e^{n\sqrt{1}} + e^{-n\sqrt{-1}}$ einen Cosinus darstellen, so muss ihm ein Zweier als Nenner untersetzt werden, woraus folgt, dass der Coefficient a_n stets der gedoppelte Coefficient von $e^{n\lambda\sqrt{-1}} + e^{-n\lambda\sqrt{-1}}$ in der Entwicklung für $\left[1 + \frac{c}{4}\left(e^{n\lambda\sqrt{-1}} + e^{-n\lambda\sqrt{-1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ ist. Man sieht also, dass zur Bestimmung des Coefficienten a_4 vermittelst 6) für a_0 dessen doppelter Werth zu nehmen ist.

Die Grenze des Verlustes, bei beliebiger Abbrechung einer fallenden Reihe, lässt sich durch folgende Betrachtung leicht bestimmen:

Die Summe der geometrischen Progression

$$a + ae + ae^2 + \ldots . ae^{n+1} \text{ ist}$$

$$s = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Lässt man jedoch die Reihe mit dem Gliede e^m beginnen, so setze man nur $a = e^m$ und hat

$$s = e^m \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Ist e ein ächter Bruch und $= \frac{p}{q}$, so gibt diess für $n = \infty$

$$s = \frac{p}{q-p} \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1},$$

woraus folgt, dass die Summe der nachfolgenden Glieder gleich ist dem $\frac{p}{q-p}$ fachen des vorangegangenen Gliedes. Sind jedoch die Glieder der Progression noch mit fallenden Coefficienten begleitet, wie diess z. B. der Fall ist in den Entwicklungen von $\frac{1}{2}\, a_0$ und $\frac{1}{2}\, a_2$, wo c für $\frac{p}{q}$ steht, so erreicht die Summe der nachfolgenden Glieder nicht einmal das $\frac{p}{q-p}$ fache des vorangegangenen Gliedes.

Hat man sich daher über den Grad der beabsichtigten Schärfe der Rechnung entschieden, so wird man das Glied bestimmen, mit dem man abzubrechen hat. Ist es das Glied $c^n . \sin\lambda^{2n}$, so wird man auch nur die Coefficienten a bis a^{2n} berechnen und mit dem Gliede $a_2{}^m \cos 2m\lambda$ endigen, weil man weiss, dass $\sin\lambda^{2n}$ höchstens den Cosinus des 2n fachen Bogens erzeugt.

So wird man endlich haben

$$U = -\int \frac{a_0 + a_2 \cos 2\lambda + a_4 \cos 4\lambda \ldots\ldots + a_{2n} . \cos 2n\lambda}{z^2} dz + c,$$

wo die Constante c im Allgemeinen eine Funktion von λ sein wird. Um diese Constante zu bestimmen, gehen wir zurück auf die Gleichung

$$\partial U_z = -\frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z^2}, \text{ deren Integral}$$

$$U = -\int \frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z^2} \, dz + c$$

kein anderes ist, als das obige. Demnach ist

$$-\int \frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z^2} \, dz + c = \sin\delta \,.\, S + \frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z}.$$

Integriren wir par partes, so heben sich $\frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z}$ gegenseitig auf, und es ist

$$-\int \frac{dz}{z} \cos\delta \,.\, \cos S \,.\, \partial S_z + c = \sin\delta \,.\, S.$$

Ersetze ich $\cos S$ durch $- z \,.\, \mathrm{tg}\delta$, so ist

$$\int \sin\delta \,.\, \partial S_z \,.\, dz + c = \sin\delta \,.\, S \text{ oder}$$

$$\sin\delta \,.\, S + c = \sin\delta \,.\, S, \text{ folglich } c = 0.$$

Somit haben wir endlich

$$7) \quad u = -\sin\beta \int \frac{a_0 + a_2 \cos 2\lambda + a_4 \cos 4\lambda \ldots\ldots + a_{2n} . \cos 2n\lambda}{z^2} \, dz.$$

Setze ich nun

$$-\sin\beta \int \frac{a_0 \,.\, dz}{z^2} = A_0$$

$$-\sin\beta \int \frac{a_2 \,.\, dz}{z^2} = A_2$$

. . . .

$$-\sin\beta \int \frac{a_{2n} \,.\, dz}{z^2} = A_{2n}, \text{ so kommt}$$

$$8) \quad u = A_0 + A_2 \cos 2\lambda \ldots\ldots + A_{2n} \,.\, \cos 2n\lambda.$$

Von den Integralen

$$\int \frac{(1 + z^2)^m}{z^2} \cdot dz$$

lässt sich leicht das nachfolgende durch das vorhergehende bestimmen. Man hat nämlich zuerst

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2} \cdot dz = \int \frac{(1+z^2)^{m-1}}{z^2} \cdot dz + \int (1+z^2)^{m-1} \,.\, dz,$$

und hierauf

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2} \cdot dz = -\frac{(1+z^2)^m}{z} + 2m \int (1+z^2)^{m-1} \,.\, dz.$$

Eliminire ich nun $\int(1+z^2)^{m-1}\,.\,dz$, so kommt

$$2m-1)\int\frac{(1+z^2)^m}{z^2}dz=\frac{(1+z^2)^m}{z}+2m\int\frac{(1+z^2)^{m-1}}{z^2}\,dz.$$

Setze ich nun $\sin\beta\int\frac{dz}{z^2}=A_0$,

$$\sin\beta\int\frac{dz\,(1+z^2)}{z^2}=A_1$$

. . . .

$$\sin\beta\int\frac{dz\,(1+z^2)^r}{z^2}=A_r$$ u. s. w., so ist

$$A_0=-\cos\beta.$$
$$A_1=\sec\beta+2A_0.$$
$$A_2=\frac{1}{3}(\sec\beta^3+4A_1)$$
$$A_3=\frac{1}{5}(\sec\beta^5+6A_2)$$

. . . .

$$A_r=\frac{1}{2r-1}(\sec\beta^{2r-1}+2r\,A_{r-1}).$$

Um nun in den Entwicklungen von a_4, a_6, a_8 ..... die Coefficienten von $\frac{c}{8}$ zu bestimmen, setzen wir

$$a_0=1+\alpha_0^{(1)}\left(\frac{c}{8}\right)+\alpha_0^{(2)}\left(\frac{c}{8}\right)^2+\alpha_0^{(3)}\left(\frac{c}{8}\right)^3+\alpha_0^{(4)}\left(\frac{c}{8}\right)^4\ldots\ldots$$

$$a_2=\alpha_2^{(1)}\left(\frac{c}{8}\right)+\alpha_2^{(2)}\left(\frac{c}{8}\right)^2+\alpha_2^{(3)}\left(\frac{c}{8}\right)^3+\alpha_2^{(4)}\left(\frac{c}{8}\right)^4+\ldots\ldots$$

$$a_4=\alpha_4^{(2)}\left(\frac{c}{8}\right)^2+\alpha_4^{(3)}\left(\frac{c}{8}\right)^3+\alpha_4^{(4)}\left(\frac{c}{8}\right)^4+\ldots.$$

$$a_6=\alpha_6^{(3)}\left(\frac{c}{8}\right)^3+\alpha_6^{(4)}\left(\frac{c}{8}\right)^4+\ldots\ldots$$

und dann hat man

$$\mathrm{A}_0=-A_0-\alpha_0^{(1)}\mathrm{A}_1\frac{\sin\varepsilon^2}{8}-\alpha_0^{(2)}A_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2-\alpha_0^{(3)}A_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3-\ldots.$$

$$\mathrm{A}_2=-\alpha_2^{(1)}A_1\frac{\sin\varepsilon^2}{8}-\alpha_2^{(2)}A_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2-\alpha_2^{(3)}A_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3-\ldots.$$

$$\mathrm{A}_4=-\alpha_4^{(2)}A_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2-\alpha_4^{(3)}A_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3-\alpha_4^{(4)}A_4\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^4-\ldots.$$

Nun gibt die Formel

$$a_n = \frac{5-n}{1+n} a_{n-4} + \frac{2\,(n-2)}{1+n} \left(1 - \frac{2}{c}\right) a_{n-2} \text{ nach einander}$$

$$a_4 = \frac{1}{5}\left(a_0 + 4a_2 - \frac{8}{c}\, a_2\right).$$

$$a_6 = \frac{1}{7}\left(-a_2 + 8a_4 - 2 \cdot \frac{8}{c}\, a_4\right).$$

$$a_8 = \frac{1}{9}\left(-3a_4 + 12a_6 - 3 \cdot \frac{8}{c}\, a_6\right).$$

$$a_{10} = \frac{1}{11}\left(-5a_6 + 16a_8 - 4 \cdot \frac{8}{c}\, a_8\right).$$

. . . .

Macht man nun die gehörigen Substitutionen, und vergleicht die Coefficienten derselben Potenzen von $\frac{c}{8}$, so kommt

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_4^{(2)} &= \frac{1}{5}\left(\alpha_0^{(2)} + 4\alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(3)}\right)\\
\alpha_4^{(3)} &= \frac{1}{5}\left(\alpha_0^{(3)} + 4\alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(4)}\right)\\
\alpha_4^{(4)} &= \frac{1}{5}\left(\alpha_0^{(4)} + 4\alpha_2^{(4)} - \alpha_2^{(5)}\right)\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

wo nach einer obigen Bemerkung für alle α_0 ihr doppelter Werth zu nehmen ist.

$$\alpha_6^{(3)} = \frac{1}{7}\left(-\alpha_2^{(3)} + 8\alpha_4^{(3)} - 2\alpha_4^{(4)}\right)$$

$$\alpha_6^{(4)} = \frac{1}{7}\left(-\alpha_2^{(4)} + 8\alpha_4^{(4)} - 2\alpha_4^{(5)}\right)$$

$$\alpha_6^{(5)} = \frac{1}{7}\left(-\alpha_2^{(5)} + 8\alpha_4^{(5)} - 2\alpha_4^{(6)}\right)$$

. . . .

$$\alpha_8^{(4)} = \frac{1}{9}\left(-3\alpha_4^{(4)} + 12\alpha_6^{(4)} - 3\alpha_6^{(5)}\right)$$

$$\alpha_8^{(5)} = \frac{1}{9}\left(-3\alpha_4^{(5)} + 12\alpha_6^{(5)} - 3\alpha_6^{(6)}\right)$$

. . . .

$$\alpha_{10}^{(5)} = \frac{1}{11}\left(-5\alpha_6^{(5)} + 16\alpha_8^{(5)} - 4\alpha_8^{(6)}\right)$$

. . . .

Berechnen wir nun α numerisch und stellen die ersten Werthe tabellarisch dar, so haben wir

α_0	α_2	α_4	α_6	α_8	α_{10}	α_{12}	α_{14}
$\alpha_0^{(1)}=-2$	$\alpha_2^{(1)}=2$						
$\alpha_0^{(2)}=-3$	$\alpha_2^{(2)}=4$	$\alpha_4^{(2)}=-1$					
$\alpha_0^{(3)}=-10$	$\alpha_2^{(3)}=15$	$\alpha_4^{(3)}=-6$	$\alpha_6^{(3)}=1$				
$\alpha_0^{(4)}=-\frac{175}{4}$	$\alpha_2^{(4)}=70$	$\alpha_4^{(4)}=-35$	$\alpha_6^{(4)}=10$	$\alpha_8^{(4)}=-\frac{5}{4}$			
$\alpha_0^{(5)}=-\frac{441}{2}$	$\alpha_2^{(5)}=\frac{735}{2}$	$\alpha_4^{(5)}=-210$	$\alpha_6^{(5)}=\frac{315}{4}$	$\alpha_8^{(5)}=-\frac{35}{2}$	$\alpha_{10}^{(5)}=\frac{7}{4}$		
$\alpha_0^{(6)}=-\frac{4851}{4}$	$\alpha_2^{(6)}=2079$	$\alpha_4^{(6)}=-\frac{10395}{8}$	$\alpha_6^{(6)}=\frac{1155}{2}$	$\alpha_8^{(6)}=-\frac{693}{4}$	$\alpha_{10}^{(6)}=\frac{63}{2}$	$\alpha_{12}^{(6)}=-\frac{21}{8}$	
$\alpha_0^{(7)}=-\frac{14157}{2}$	$\alpha_2^{(7)}=\frac{99099}{8}$	$\alpha_4^{(7)}=-\frac{33033}{4}$	$\alpha_6^{(7)}=\frac{33033}{8}$	$\alpha_8^{(7)}=-\frac{3003}{2}$	$\alpha_{10}^{(7)}=\frac{3003}{8}$	$\alpha_{12}^{(7)}=-\frac{231}{4}$	$\alpha_{14}^{(7)}=\frac{33}{8}$
$\alpha_0^{(8)}=-\frac{2760615}{64}$	$\alpha_2^{(8)}=\frac{306735}{4}$	$\alpha_4^{(8)}=-\frac{429429}{8}$	$\alpha_6^{(8)}=\frac{117117}{4}$	$\alpha_8^{(8)}=-\frac{195195}{16}$	$\alpha_{10}^{(8)}=\frac{15015}{4}$	$\alpha_{12}^{(8)}=-\frac{6435}{8}$	$\alpha_{14}^{(8)}=\frac{429}{4}$
$\alpha_0^{(9)}=-\frac{8890825}{32}$	$\alpha_2^{(9)}=\frac{15643485}{32}$	$\alpha_4^{(9)}=-\frac{1422135}{4}$	$\alpha_6^{(9)}=\frac{3318315}{16}$	$\alpha_8^{(9)}=-\frac{765765}{8}$	$\alpha_{10}^{(9)}=\frac{546975}{16}$	$\alpha_{12}^{(9)}=-\frac{36465}{4}$	$\alpha_{14}^{(9)}=\frac{109395}{64}$
$\alpha_0^{(10)}=-\frac{112285459}{64}$	$\alpha_2^{(10)}=\frac{51038845}{16}$	$\alpha_4^{(10)}=-\frac{153116535}{64}$	$\alpha_6^{(10)}=\frac{11778195}{8}$	$\alpha_8^{(10)}=-\frac{11778195}{16}$	$\alpha_{10}^{(10)}=\frac{2375639}{8}$	$\alpha_{12}^{(10)}=-\frac{11778195}{128}$	$\alpha_{14}^{(10)}=\frac{692835}{32}$

Die Gleichung 4) aber gibt

9) $M = 24 . \sin\beta . \sin\varepsilon . \sin\lambda.$

Nun ist bekanntlich, wenn man das constante Wachsthum von x durch h darstellt,

$$S \cos qx = \frac{\sin q (x + \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} qh} + \text{Const.}$$

$$S \sin qx = - \frac{\cos q (x + \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} qh} + \text{Const.}$$

Will man nun die Summen der $n + 1$ Glieder

$\sin qa + \sin q (a + h) + \sin q (a + 2h) \ldots\ldots + \sin q (a + nh)$ und

$\cos qa + \cos q (a + h) + \cos (a + 2h) \ldots\ldots + \cos q (a + nh)$,

so hat man obige Integrale zwischen den Grenzen $x = a - h$ und $x = a + nh$ zu nehmen, und diess gibt

$$S \sin qx = \frac{\sin q (a + \frac{1}{2} nh) . \sin \frac{1}{2} qh (n + 1)}{\sin \frac{1}{2} qh}.$$

$$S \cos qx = \frac{\cos q (a + \frac{1}{2} nh) . \sin \frac{1}{2} qh (n + 1)}{\sin \frac{1}{2} qh}.$$

Da das Wachsthum h in unserm vorliegenden Falle die Längenzunahme der Sonne in einem Tage, folglich kaum $= \frac{1}{58}$ ist, so könnten wir bei unserer beabsichtigten Summation in Beziehung auf 8) in den drei oder vier ersten Gliedern $\frac{1}{2} qh$, statt $\sin \frac{1}{2} qh$ setzen. Ist λ' die am ersten Tag, Mittags 12 Uhr stattfindende Sonnenlänge, so haben wir für $m + 1$ Tage

10) $\Sigma u = (m + 1) A_0$

$$+ A_2 \cdot \frac{\cos 2\left(\lambda' + \frac{1}{2}\,mh\right) . \sin h\,(m+1)}{\sin h}$$

$$+ A_4 \cdot \frac{\cos 4\left(\lambda' + \frac{1}{2}\,mh\right) . \sin 2h\,(m+1)}{\sin 2h}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ A_{2n} \cdot \frac{\cos 2n\left(\lambda' + \frac{1}{2}\,mh\right) . \sin nh\,(m+1)}{\sin nh}.$$

Ebenso liefert 9) für $m + 1$ Tage

$$11)\ \Sigma M = \frac{48 . \sin\beta . \sin\varepsilon}{h} \cdot \sin\left(\lambda' + \frac{1}{2}\,mh\right) . \sin\frac{1}{2}\,h\,(m+1).$$

Die Formel 10) reicht beinahe für die ganze bewohnte Erde aus, während 11) nur für die Polarländer anwendbar ist.

Bestimmen wir nun für die gemässigten und Tropenländer die Wärme- und Lichtmasse eines ganzen Jahres.

Nehmen wir das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen an und wählen die Länge eines solchen Ortes, welcher um Mitternacht sein Frühlingsäquinoctium hat, so fällt dieses Aequinoctium nach einem Jahre auf Morgens 6 Uhr, wo die zweite Hälfte der Nacht weder Wärme noch Licht liefert. Fiele aber das erste Aequinoctium auf Morgens 6 Uhr, so kommt das zweite auf Mittags 12 Uhr, so dass hier $\frac{1}{2}$ Tag weiter in Rechnung zu bringen wäre und zwar für die Deklination $\delta = 0$. Man wird daher nur unbedeutend von der mittleren Wärme- und Lichtmasse abweichen, wenn man der Summe für 365 Tage, das erste Aequinoctium für Mitternacht angenommen, noch $\frac{1}{4}\,u$ — für $\delta = 0$ —, beisetzt, welches gibt $\frac{1}{4}\,u = \frac{1}{4}\cos\beta$.

Noch einfacher erreichen wir unsern Zweck, wenn wir zum Behuf einer Interpolation setzen

$$h\,(1 + m) = 2\pi.$$

Da wir nun haben $\lambda' = \frac{1}{2}\,h$, so ist

$$\lambda' + \frac{1}{2}\,mh = \pi \text{ und}$$

$\sin nh\,(m+1) = 0$, folglich die Wärme- und Lichtmasse eines Jahres $Su = \frac{2\pi A_0}{h} = 365{,}25\;A_0$ oder

$$12)\quad SM = \frac{48}{h} \cdot A_0 = 2790{,}3\;A_0.$$

Wollen wir die Wärme- und Lichtmasse eines Jahres für den Aequator bestimmen, so ist $\beta = 0$ und

$\varDelta_0 = \varDelta_1 = \varDelta_2 = \varDelta_3 = \ldots .\,\varDelta_n = -1$, folglich

$$A_0 = +1 - 2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right) - 3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2 - 10\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3 - \frac{175}{4}\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^4 - \frac{441}{2}\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^5 \ldots.$$

Nun ist $\log\frac{\sin\varepsilon^2}{8} = 0{,}2971462-2$ und diess gibt

$$A_0 = 0{,}9591 \text{ und endlich}$$
$$SM = 2676 \text{ für den Aequator.}$$

Wollen wir die Wärme- und Lichtmasse des Pols aufsuchen, wo $\beta = 90^0$, so haben wir es hier nur mit einem halben Jahre zu thun, so dass

$$\sin\left(\lambda' + \frac{1}{2}\,mh\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ und}$$

$$\sin\frac{1}{2}\,(h+m) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \text{ folglich aus 11)}$$

$$13)\quad SM = \frac{48\;.\;\sin\varepsilon}{h} = 1111 \text{ für den Pol.}$$

Die dem Aequator zugeführte Wärme- und Lichtmasse von einem Jahre ist also 2,4 mal grösser, als die dem Pole zugeführte.

Die Fruchtbarkeit eines Landes hängt, unter übrigens gleichen Umständen, hauptsächlich von der demselben zugeführten Wärme- und Lichtmasse ab, und wir dürfen bei den in den irdischen Temperaturen vorhandenen engen Grenzen annehmen, dass für dieselben Gewächse, z. B. für dieselbe Getreideart, die Summe der Wirkungen, um sie gedeihen zu lassen und zur Reife zu bringen, gleich sind. Wir setzen die in Stunden angegebene Zeit des Gedeihens derselben Fruchtgattung für die Breite β

gleich t, für die Breite $\beta' = t'$, die von der Sonne in diesen Zeiten gelieferten Wärme- und Lichtmassen gleich M und M', sowie die Wärmemasse, die der Erdboden selbst je in einer Stunde gibt, gleich w und w'. Setzen wir ferner die Wirkungen der Masseneinheit der Wärme gleich 1 und die Wirkung der Masseneinheit des Lichtes gleich c, so haben wir

$$M + wt + cM = M' + w't' + cM' \text{ oder}$$

$$M + \frac{w}{1+c} \cdot t = M' + \frac{w'}{1+c} \cdot t'.$$

Da M, M', t und t' bekannte Grössen sind, so gibt diese Gleichung die zwischen $\frac{w}{1+c}$ und $\frac{w'}{1+c}$ stattfindende Relation an. Wollte man für die Breite β und eine neue Breite β'' eine zweite Gleichung aufstellen, so könnte man $1 + c$ eliminiren, und dadurch würde sich eine Relation zwischen w, w' und w'' herstellen. Bei absichtlich angestellten Proben hat es der Mensch in seiner Macht, in Beziehung auf den Boden und dessen Befeuchtung für verschiedene Gegenden Gleichheit der Umstände herbeizuführen.

Wollen wir endlich die Wärme- und Lichtmasse bestimmen, die die Sonne in der Zeit T dem ganzen Erdball überhaupt zuführt, so können wir uns, da stets eine volle Halbkugel von derselben erleuchtet ist, vorstellen, die Sonne stehe im Zenith eines Pols, während die Erde ruht. Dann ist die dem Element $d\beta$ der Breite β in einer Stunde mitgetheilte Masse

$$= d\beta \,.\, \sin\beta,$$

und folglich die dem ganzen Breitenkreise mitgetheilte

$$= 2\pi \,.\, d\beta \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\beta = \pi d\beta \,.\, \sin 2\beta.$$

Die Integration gibt $\pi\left(-\frac{1}{2}\cos 2\beta + c\right)$,

und zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und 0

$$\pi,$$

folglich so viel, als ein grösster Durchschnitt der Erdkugel empfangen würde; und in der Zeit T

$$T\pi.$$

Diess liefert für ein Jahr die Masse

$$365{,}25 \,.\, 24 \,.\, \pi = 27539.$$

Zeitschrift/Journal: Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg

Jahr/Year: 1854

Band/Volume: 10

Autor(en)/Author(s): Brenner

Artikel/Article: 7. Ueber die astronomische Wärme und Lichtvertheilung auf der Erdoberfläche. 256-275