

2. Das Foucault'sche Pendel.

Von Professor Dr. Carl Holtzmann in Stuttgart.

Seit vor etwa vier Jahren Léon Foucault seinen berühmten Versuch anstellte, sind über die Erscheinungen, welche ein schwingendes Pendel zeigen muss, dessen Aufhängepunkt durch die Drehung der Erde in Bewegung ist, viele Theorien erschienen, von denen aber nur wenige, wie die sehr vollständigen von Clausen und von Hansen den dynamischen Hergang ins Auge fassen, und so wahrhaft die Sache erklären. Unter diesen Umständen wird es erlaubt sein, auch noch die folgende Betrachtung dieses Gegenstandes zu veröffentlichen, welche vielleicht noch offener als diess bisher geschehen ist, den Einfluss der Drehung der Erde auf die Bewegung des Pendels darlegt. Die zu lösende Aufgabe ist in folgendem ausgesprochen.

1. Ein einfaches Pendel macht Schwingungen von kleiner Weite um seine Gleichgewichtslage; man soll die hierbei stattfindende Bewegung untersuchen, indem man darauf Rücksicht nimmt, dass der mit der Erde fest verbundene Aufhängepunkt des Pendels an der Drehung der Erde um ihre Axe Theil nimmt.

Die Länge des Pendels sei 1;

die Masse des schweren Punktes am Ende desselben sei 1.

2. Durch den Aufhängepunkt des Pendels lege ich drei auf einander rechtwinkliche Coordinatenachsen; die der z vertical abwärts, d. h. in der Richtung, welche ein relativ gegen die Erde in Ruhe befindliches Senkel zeigt;

die Axe der x rechtwinklich auf die erste, also horizontal, und zwar in den Meridian gegen den Aequator hin, also auf der nördlichen Erdhälfte gegen Süden;

die Axe der y wird nun ebenfalls horizontal von Westen nach Osten gehend; ich rechne die positiven y nach Osten.

Sind x , y und z die Coordinaten des Pendelpunktes zur Zeit t , so ist

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

woraus

$$(2) \quad xdx + ydy + zdz = 0$$

folgt.

3. Das angenommene Axensystem nimmt an der Umdrehung der Erde Theil, und hat desshalb sowohl eine Translation, als eine Drehung. Aus beiden Bewegungen entstehen Führungskräfte, *) welche den am Pendel wirkenden Kräften zugesetzt werden müssen, wenn man die relative Bewegung gegen die oben festgestellten Coordinatenaxen direct bestimmen will. Dazu gehört die Kenntniss der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. Die Umdrehung der Erde erfolgt bekanntlich in 86164 Secunden mittlerer Zeit, und die Winkelgeschwindigkeit dieser von West nach Ost gehenden Drehung ist daher

$$\frac{2\pi}{86164} = 0,000073$$

Diese Winkelgeschwindigkeit soll im Nachfolgenden mit ω bezeichnet werden.

4. Der Anfangspunkt der Coordinaten beschreibt einen Kreis um die Erdaxe, welcher den Halbmesser des Parallelkreises durch den Aufhängepunkt zum Radius hat. Dieser Radius heisse R .

Aus dieser Translation der Coordinatenaxen ergibt sich eine Führungskraft gleich

$$R\omega^2$$

welche in der Verlängerung von R liegt.

Ist β die geographische Breite des Aufhängepunktes des Pendels, so erhält man aus dieser Kraft nach den drei Coordinatenaxen die Componenten:

*) Da die Sätze über diese Führungskräfte in den Lehrbüchern gewöhnlich nicht vorkommen, so werde ich sie, so weit ich sie hier gebrauche, in einer Note am Schlusse entwickeln.

$$\begin{array}{ll}
 \text{nach } x & R\omega^2 \sin\beta, \\
 \text{nach } y & 0, \\
 \text{nach } z & -R\omega^2 \cos\beta.
 \end{array}$$

5. Die Drehung der Coordinatenachsen erfolgt ebenso, wie die der zu denselben Parallelen durch den Mittelpunkt, d. h. um die Erdaxe mit der Winkelgeschwindigkeit ω .

Legt man nun durch den Aufhängungspunkt eine Axe parallel der Erdaxe — sie sei die der z' — und senkrecht auf diese im Meridiane die Axe der x' , so ist $x'y$ die Drehebene, und parallel mit dieser gehen die der Drehung wegen einzubringenden Führungskräfte. Diese sind in der Richtung der Projection l' des Pendels auf die Ebene $x'y$ die Kraft

$$l'\omega^2,$$

deren Componenten nach x' und y

$$x'\omega^2 \quad \text{und} \quad y\omega^2$$

sind;

dann rechtwinklich auf die Bahn des Mobils eine Kraft deren Componenten nach x' und y

$$2\omega \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad -2\omega \frac{dx'}{dt}$$

sind.

Um diese Kräfte auf die Richtungen der angenommenen Coordinaten zurückzuführen bemerke man, dass

$$x' = x \sin\beta - z \cos\beta$$

ist. Damit erhält man für die Führungskräfte der Drehung die Componenten

$$\text{nach } x \quad (x \sin\beta - z \cos\beta) \omega^2 \sin\beta + 2\omega \frac{dy}{dt} \sin\beta$$

$$\text{nach } y \quad y\omega^2 - 2\omega \left(\frac{dx}{dt} \sin\beta - \frac{dz}{dt} \cos\beta \right)$$

$$\text{nach } z \quad - (x \sin\beta - z \cos\beta) \omega^2 \cos\beta - 2\omega \frac{dy}{dt} \cos\beta.$$

6. Ausser diesen Kräften haben wir noch auf den Massenpunkt des Pendels als thätig

die Anziehung der Erde; sie sei nach den drei Coordinaten zerlegt

$$A_x, A_y \quad \text{und} \quad A_z;$$

ferner die Spannung der Verbindungslinie mit dem Aufhängepunkte; ist diese Spannung S , so sind ihre Componenten

$$\begin{array}{ccc} \text{nach} & x, & y, & z \\ & - S \frac{x}{l}; & - S \frac{y}{l}; & - S \frac{z}{l}. \end{array}$$

7. Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich für die Bewegung des Pendels die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= A_x - S \frac{x}{l} + \omega^2 \sin\beta (R + x \sin\beta - z \cos\beta) + 2\omega \frac{dy}{dt} \sin\beta, \\ (3) \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= A_y - S \frac{y}{l} + \omega^2 y - 2\omega \left(\frac{dx}{dt} \sin\beta - \frac{dz}{dt} \cos\beta \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= A_z - S \frac{z}{l} - \omega^2 \cos\beta (R + x \sin\beta - z \cos\beta) - 2\omega \frac{dy}{dt} \cos\beta. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen bestimmen mit der Gleichung (1) die hier vorkommenden Unbekannten

$$x, y, z \text{ und } S.$$

8. Fürs Gleichgewicht und Ruhe soll das Pendel in der Axe der z sich befinden, also x und y gleich Null und $z = l$ sein. Diess gibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= A_x + \omega^2 \sin\beta (R - l \cos\beta) \\ 0 &= A_y \\ 0 &= A_z - S - \omega^2 \cos\beta (R - l \cos\beta). \end{aligned}$$

Vernachlässigt man hier gegen den Halbmesser R des Parallelkreises den Werth von $l \cos\beta$, was ohne merkbaren Fehler immer geschehen kann, wenn man sich den Polen nicht ganz nahe befindet, so wird

$$\begin{aligned} A_x &= - R\omega^2 \sin\beta \\ A_y &= 0 \\ A_z &= S' + R\omega^2 \cos\beta. \end{aligned}$$

In der Lage der Ruhe ist aber die Spannung des Pendels gleich seinem Gewichte, also

$$S = g$$

und

$$A_z = g + R\omega^2 \cos\beta.$$

9. Während der Schwingungen des Pendels erleiden diese Kräfte A_x , A_y , A_z Aenderungen, welche, weil ganz unbedeu-

tend hier vernachlässigt werden, und damit hat man die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -S \frac{x}{l} + 2\omega \frac{dy}{dt} \sin\beta + \omega^2 \sin\beta (x \sin\beta - z \cos\beta)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -S \frac{y}{l} - 2\omega \left(\frac{dx}{dt} \sin\beta - \frac{dz}{dt} \cos\beta \right) + y\omega^2$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - S \frac{z}{l} - 2\omega \frac{dy}{dt} \cos\beta - \omega^2 \cos\beta (x \sin\beta - z \cos\beta).$$

In diesen Gleichungen wird nun S' für kleine Schwingungen sehr nahe gleich g , daher $\frac{S}{l}$ multiplicirt mit x , y , z ausserordentlich vielmal grösser als ω^2 multiplicirt mit diesen Grössen, und man wird daher eine sehr weit gehende Annäherung erhalten, wenn man nun schreibt

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -S \frac{x}{l} + 2\omega \sin\beta \frac{dy}{dt} \\ (4) \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= -S \frac{y}{l} - 2\omega \left(\frac{dx}{dt} \sin\beta - \frac{dz}{dt} \cos\beta \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - S \frac{z}{l} - 2\omega \cos\beta \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

10. Eliminirt man aus den beiden ersten dieser Gleichungen S , so erhält man

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \left[\left(y \frac{dy}{dt} + x \frac{dx}{dt} \right) \sin\beta - x \frac{dz}{dt} \cos\beta \right]$$

was mit dem aus Gleichung (2) folgenden

$$x dx + y dy = -z dz$$

in

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega (z \sin\beta + x \cos\beta) \frac{dz}{dt} \text{ oder in}$$

$$\frac{d \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right)}{dt} = -2\omega (z \sin\beta + x \cos\beta) \frac{dz}{dt}$$

übergeht.

Setzt man diese Gleichung

$$\begin{aligned} z &= l \cos\theta, \\ y &= l \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ x &= l \sin\theta \cdot \cos\varphi, \end{aligned}$$

wo also θ den Winkel bedeutet den zur Zeit t das Pendel mit der Verticalen macht und

φ den Winkel der Horizontalprojection des Pendels mit der Axe der x , diesen Winkel gegen Osten gemessen, so wird oben stehende Gleichung

$$(5) \quad \frac{d\left(\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = -2\omega (\cos\theta \sin\beta + \sin\theta \cos\varphi \cos\beta) \sin\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

11. Nimmt man nun an die Schwingungen seien sehr klein, also θ immer sehr klein, so dass man die höheren Potenzen von θ gegen die niedern nicht zu beachten hat, so wird die Gleichung (5)

$$\frac{d\left(\theta^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = -2\omega \sin\beta \cdot \theta \frac{d\theta}{dt},$$

welche als Integral

$$\theta^2 \frac{d\varphi}{dt} = -\omega \sin\beta \cdot \theta^2 + \text{Const.}$$

gibt.

Nennt man die Winkelgeschwindigkeit der Horizontalprojection des Pendels zur Zeit Null gleich A und θ_0 den Werth, den zu jener Zeit θ hat, so erhält man

$$\theta^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} + \omega \sin\beta \right) = \theta_0^2 (A + \omega \sin\beta)$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega \sin\beta + (A + \omega \sin\beta) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^2. \quad (6).$$

$\frac{d\varphi}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Horizontalprojection des Pendels, oder die Verticalebene, in welcher es sich befindet, von Süden nach Osten vorrückt. Sie ist, wie man sieht aus einem constanten Theile,

$$-\omega \sin\beta$$

und einem veränderlichen

$$(A + \omega \sin\beta) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^2$$

zusammengesetzt.

Trennt man diese Theile in dem man

$$\varphi = \varphi' + \varphi''$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi'}{dt} &= -\omega \sin\beta; \quad \frac{d\varphi''}{dt} = (A + \omega \sin\beta) \frac{\theta_0^2}{\theta^2} \end{aligned} \right\} (7)$$

setzt, so gibt der erste die gleichförmige Drehung einer Verticalebene an, während die zweite Gleichung sagt, wenn man sie in die Form

$$\theta^2 d\varphi'' = (A + \omega \sin\beta) \theta_0^2 dt$$

bringt, dass die Horizontalprojection des Pendels von dieser beweglichen Verticalebene an Räume beschreibt, welche der Zeit proportional sind; also wie diess bei dem ruhig aufgehängten conisch schwingenden Pendel stattfindet für eine unbewegliche Ebene. Ist

$$A = -\omega \sin\beta$$

so wird

$$d\varphi'' = 0$$

und in diesem Falle bleibt das Pendel immer in der Verticalebene, welche durch die Gleichung

$$\frac{d\varphi'}{dt} = -\omega \sin\beta$$

gegeben ist. Diese Ebene ist dann die eigentliche Schwingungsebene, und sie dreht sich wie man sieht mit der Geschwindigkeit

$$\omega \sin\beta$$

von Ost nach Süd, der Bewegung der Erde entgegen.

In jedem Falle aber, wo

$$A + \omega \sin\beta$$

nicht gleich Null ist, tritt das Pendel aus der eben genannten Schwingungsebene. Wir wollen nun untersuchen, welchen Einfluss auf die Erscheinungen diese Bewegung hat.

12. Hierzu wird es nothwendig sein zuerst θ durch t zu bestimmen, was wieder geschehen kann, wenn man zuerst die Geschwindigkeit des Pendels bestimmt. Multiplicirt man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit

$$2 \frac{dx}{dt}, \quad 2 \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad 2 \frac{dz}{dt}$$

und addirt hierauf alle drei, so findet man mit Hülfe der Gleichung

$$\begin{aligned} x \, dx + y \, dy + z \, dz &= 0 \\ \frac{d(v^2)}{dt} &= 2 \, g \, \frac{dz}{dt} \quad \text{oder} \\ (8) \quad v^2 - v_0^2 &= 2 \, g \, (z - z_0) \end{aligned}$$

wo v und v_0 die Geschwindigkeiten des Mobils zur Zeit t und Null bezeichnen und z_0 der Werth von z für $t = 0$ ist.

Diese Gleichung hätte man auch unmittelbar, als aus dem Principe der lebendigen Kräfte folgend hinschreiben können.

Mit den in Nr. 10 angenommenen Coordinaten wird

$$v^2 = l^2 \left[\sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

und

$$v_0^2 = l^2 [\sin^2 \theta_0 \cdot A^2 + B^2]$$

wenn unter B die anfängliche Winkelgeschwindigkeit in der durch das Pendel gehenden Verticalebene verstanden ist; und hiermit wird nun die Gleichung (8)

$$\sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - A^2 \sin^2 \theta_0 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - B^2 = 2 \, \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

in welche Gleichung noch der Werth von $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)$ aus (6) zu setzen ist, wenn man zuvor wie dort die höheren Potenzen von θ und θ_0 gegen die niederen weggelassen hat.

Man erhält so

$$\theta^2 \left[-\omega \sin \beta + (A + \omega \sin \beta) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^2 \right]^2 - A^2 \theta_0^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - B^2 = \frac{g}{l} (\theta_0^2 - \theta^2)$$

oder

$$\theta^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - B^2 \right] + (\theta_0^2 - \theta^2) \left[\theta_0^2 (A + \omega \sin \beta)^2 - \theta^2 \left(\frac{g}{l} + \omega^2 \sin^2 \beta \right) \right] = 0$$

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{d\theta}{dt} = 0$, so findet man zwei

Werthe von θ^2 für welche die verticale Bewegung aufhört, und zwischen denen also alle andern Werthe von θ^2 liegen. Zählt man nun die Zeit von dem Augenblicke, wo das Pendel den

einen dieser beiden Winkel erreicht, so wird B gleich Null sein und man hat daher dann für

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\theta^2 = \theta_0^2 \text{ oder } \theta^2 = \frac{(A + \omega \sin \beta)^2}{\frac{g}{l} + \omega^2 \sin^2 \beta} \theta_0^2 \quad (9)$$

Den letzten Werth von θ will ich mit θ_1 bezeichnen; er wird für kleine A der kleinere der beiden Werthe von θ^2 sein.

Mit dieser Bezeichnung wird nun

$$\frac{1}{\left(\frac{g}{l} + \omega^2 \sin^2 \beta\right)} \theta^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (\theta_0^2 - \theta^2)(\theta^2 - \theta_1^2) \text{ und wenn man}$$

$\omega^2 \sin^2 \beta$ gegen $\frac{g}{l}$, wie früher weglässt

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot dt = \pm \frac{\theta d\theta}{\sqrt{(\theta_0^2 - \theta^2)(\theta^2 - \theta_1^2)}}$$

Setzt man hier

$$\theta^2 = q + \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{2}, \text{ so wird}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot dt &= \pm \frac{1}{2} \frac{dq}{\sqrt{\left(\frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{2} - q\right)\left(q + \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{2}\right)}} \\ &= \pm \frac{1}{2} \frac{dq}{\sqrt{\left(\frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{2}\right)^2 - q^2}} \end{aligned}$$

woraus

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{2q}{\theta_0^2 - \theta_1^2} + C = \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\theta^2 - \theta_0^2 - \theta_1^2}{\theta_0^2 - \theta_1^2} + C.$$

Die Constante bestimmt sich durch $\theta^2 = \theta_0^2$ für $t = 0$; man findet damit

$$\begin{aligned}
 t \sqrt{\frac{g}{l}} &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\theta^2 - \theta_0^2 - \theta_1^2}{\theta_0^2 - \theta_1^2} \\
 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{2\theta^2 - \theta_0^2 - \theta_1^2}{\theta_0^2 - \theta_1^2}
 \end{aligned}
 \quad (10)$$

Für die Dauer einer einfachen Schwingung erhält man die Zeit die verfliesst von da wo $\theta^2 = \theta_0^2$ bis dort wo diess das nächste Mal der Fall ist. Diess gibt, wenn $\frac{T}{2}$ diese Dauer ist

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

und

$$(11) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

wie diess beim Pendel mit ruhendem Aufhängepunkt auch der Fall ist; die Formeln sind nachdem $\omega^2 \sin^2 \beta$ gegen $\frac{g}{l}$ weggelassen wurde ohne alle Beziehung zur Umdrehung der Erde.

13. Die Gleichung (10) gibt

$$\begin{aligned}
 \frac{2\theta^2 - \theta_0^2 - \theta_1^2}{\theta_0^2 - \theta_1^2} &= \cos 2t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \\
 \frac{\theta^2}{\theta_0^2} &= \frac{1}{2} \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{\theta_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{\theta_0^2} \cos 2t \sqrt{\frac{g}{l}}
 \end{aligned}$$

was mit (9) gibt

$$\frac{\theta^2}{\theta_0^2} = 1 + \frac{1}{g} (A + \omega \sin \beta)^2 + \left(1 - \frac{1}{g} (A + \omega \sin \beta)^2\right) \cos 2t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Ich bezeichne nun den Ausdruck

$$\frac{1}{g} (A + \omega \sin \beta)^2 \text{ mit } b; \text{ dann ist} \quad (12)$$

$$\frac{\theta^2}{\theta_0^2} = \frac{1+b}{2} + \frac{1-b}{2} \cos 2t \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (13)$$

Hiermit wird aus (7)

$$d\varphi'' = \frac{(A + \omega \sin \beta) dt}{\frac{1+b}{2} + \frac{1-b}{2} \cos 2t \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

und für den ganzen Umlauf

$$\varphi_1'' = (A + \omega \sin \beta) \int_0^T \frac{dt}{\left(\frac{1+b}{2}\right) + \left(\frac{1-b}{2}\right) \cos 2t \sqrt{\frac{1}{g}}}$$

$$\varphi_1'' = (A + \omega \sin \beta) \cdot \sqrt{\frac{1}{bg}} \cdot 2\pi = 2\pi.$$

Für eine ganze Schwingung durchläuft also φ'' 360° und die grössten Elongationen finden immer in der Ebene

$$\varphi' = -(\omega \sin \beta) t + \varphi'_0$$

statt, wo φ'_0 der anfängliche Werth von φ' ist. Diese Ebene nennt man desshalb auch jetzt noch die Schwingungsebene; und sie dreht sich mit der Geschwindigkeit

$$\omega \sin \beta$$

der Erde entgegen von Osten nach Süden.

14. Es bleibt nun noch zu untersuchen, welchen Einfluss die Grösse θ_0 des Ausschlagswinkels hat, wenn er zwar klein aber nicht wie bisher angenommen, unendlich klein ist. Es ist aus andern Untersuchungen bekannt, dass die grosse Axe der Ellipse, welche die Horizontalprojection der Bahn bildet, vorschreitet oder dass die Apsidenlinie sich dreht. Diese Drehung beträgt für eine ganze Oscillation

$$\frac{3}{4} \pi \theta_0 \theta_1$$

und geht in der Richtung in welcher

$$A + \omega \sin \beta$$

fortgeht. Substituirt man für θ_1 seinen Werth (9), so erhält man für die Präcession der Apsiden

$$\frac{3}{4} \pi (A + \omega \sin \beta) \cdot \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \theta_0^2.$$

Die Zeit, in welcher dieses Fortschreiten geschieht, ist

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{1}{g}}.$$

Daher die Geschwindigkeit der Präcession

$$\frac{3}{8} (A + \omega \sin \beta) \cdot \theta_0^2$$

und die Drehung der Schwingungsebene, d. h. der Ebene, welche durch die grössten Ausweichungen geht, ist jetzt

$$- \omega \sin \beta + \frac{3}{8} (A + \omega \sin \beta) \theta_0^2.$$

Damit also der erste Theil deutlich hervortritt, muss $A + \omega \sin \beta$ klein sein; und damit ein zufälliger Werth von A , eine zufällige Anfangsgeschwindigkeit, wenig Einfluss hat, muss

$$\theta_0$$

sehr klein sein. Diess erlangt man aber ohne dass die Ausweichung

$$l \sin \theta_0$$

sehr klein zu sein braucht, durch einen sehr grossen Werth von l , der Länge des Pendels.

Note. Die Führungskräfte.

Ein Coordinatensystem x_1, y_1, z_1 , sei unbeweglich, ein anderes, das der x, y, z , dagegen sei beweglich, so dass der Anfangspunkt zur Zeit t die Coordinaten a, b, c habe, bezogen auf das erste System, während die Axe der z der Axe der z_1 parallel bleibt und die Axe der x mit der Axe der x_1 zur Zeit t den Winkel φ bildet, diesen von x_1 gegen y_1 gemessen.

Sind nun zur Zeit t die Coordinaten eines Punktes bezüglich der festen Coordinatenachsen

$$z_1, y_1 \text{ und } x_1;$$

dagegen bezüglich der beweglichen Coordinaten

$$z, y, x$$

so sind die Effectivkräfte der Bewegung zerlegt nach den drei festen Coordinatenachsen, wenn 1 die Masse des Mobils ist

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2}.$$

Diese zerlege ich in je zwei, nämlich in

$$\frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{d^2(z_1 - c)}{dt^2}; \quad \frac{d^2 b}{dt^2} + \frac{d^2(y_1 - b)}{dt^2}; \quad \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{d^2(x_1 - a)}{dt^2}.$$

Für die z Axe hat man

$$z_1 = z + c,$$

daher die Effectivkraft parallel mit der z_1 Axe auch

$$\frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Für die beiden andern Effectivkräfte drücke ich nun zuerst die beiden letzten Theile durch y und x aus. Hier hat man

$$y_1 - b = y \cos \varphi + x \sin \varphi$$

$$x_1 - a = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

und daraus die Ableitungen nach t

$$\frac{d(y_1 - b)}{dt} = \frac{dy}{dt} \cos \varphi - y \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dx}{dt} \sin \varphi + x \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{d(x_1 - a)}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos \varphi - x \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{dy}{dt} \sin \varphi - y \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt};$$

dann

$$\begin{aligned} \frac{d^2(y_1 - b)}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \cos \varphi - 2 \frac{dy}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - y \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - y \sin \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \\ &+ \frac{d^2x}{dt^2} \sin \varphi + 2 \frac{dx}{dt} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} - x \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + x \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \\ \frac{d^2(x_1 - a)}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} \cos \varphi - 2 \frac{dx}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - x \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - x \sin \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \\ &- \frac{d^2y}{dt^2} \sin \varphi - 2 \frac{dy}{dt} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + y \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - y \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{aligned}$$

Es ist $\frac{d\varphi}{dt}$ wofür ich ω setzen will, die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die x Axe von der x_1 Axe entfernt.

Betrachtet man nun die Bewegung in dem Zeitpunkte, in welchem die x Axe der x_1 Axe parallel ist, so hat man den Winkel φ gleich Null, und damit die obigen Gleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{d^2(y_1 - b)}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} - y \omega^2 + 2 \frac{dx}{dt} \omega + x \frac{d\omega}{dt}; \\ \frac{d^2(x_1 - a)}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} - x \omega^2 - 2 \frac{dy}{dt} \omega - y \frac{d\omega}{dt}. \end{aligned}$$

Nimmt man jetzt bei einer ganz beliebigen Beweglichkeit eines Systems für die Zeit t als die z Axe die augenblickliche Umdrehungsaxe jenes Systems, so werden die obigen Voraussetzungen in diesem Momente erfüllt sein, und man hat daher allgemein folgendes:

Die Effectivkräfte eines Punktes, wie sie sich aus der auf unbewegliche Coordinatenaxen bezogenen absoluten Bewegung desselben ergeben, lassen sich zerlegen

1) in die Effectivkräfte, wie sie sich für die relative Bewegung gegen drei Coordinatenaxen ergeben

$$\frac{d^2z}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}.$$

2) in die Kräfte

$$\frac{d^2c}{dt^2}, \quad \frac{d^2b}{dt^2}, \quad \frac{d^2a}{dt^2}$$

welche für sich dem Punkte die Bewegung des Anfangspunktes der Coordinaten ertheilen würden,

3) in Kräfte

$$- y \omega^2 \text{ und } - x \omega^2$$

wofür man, wenn die Entfernung des Punktes von der z Axe mit r bezeichnet wird, die Resultirende

$$- r \omega^2$$

setzen kann. Diese Kraft liegt in der Ebene normal zur augenblicklichen Umdrehungsaxe, und ist der aus der Drehung der Axen sich ergebenden Centrifugalkraft gleich aber entgegengesetzt.

4) In die Kräfte

$$x \frac{d\omega}{dt} \text{ und } -y \frac{d\omega}{dt} \text{ nach } y \text{ und } x$$

Die Resultirende dieser Kräfte liegt in der Ebene normal auf der augenblicklichen Umdrehungsaxe, und ist gleich

$$r \frac{d\omega}{dt};$$

sie ertheilt dem Mobil die Rotationsbeschleunigung, welche das Axensystem hat, und geht senkrecht auf r in der Richtung des positiven ω wenn $\frac{d\omega}{dt}$ positiv, andernfalls dem entgegen.

5) Endlich hat man noch die Kräfte

$$2 \frac{dx}{dt} \cdot \omega \text{ und } -2 \frac{dy}{dt} \cdot \omega \text{ nach } y \text{ und } x$$

welche ebenfalls in der Normalebene zur augenblicklichen Rotationsaxe liegen; ihre Resultirende kann durch

$$2 v \sin \delta \cdot \omega$$

vorgestellt werden, wenn man unter v die Geschwindigkeit des Mobils, unter δ den Winkel dieser Geschwindigkeit mit der augenblicklichen Drehaxe (z) versteht. Diese Kraft steht rechtwinklich auf der Bahn des Mobils.

Um also die Effectivkräfte, wie sie sich aus der relativen Bewegung ergeben, d. h. um

$$\frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2x}{dt^2}$$

zu finden hat man daher, neben den äusseren Kräften, welche

$$\frac{d^2z_1}{dt^2}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

geben, noch die unter 2, 3, 4 und 5 hier aufgeführten Kräfte in Rechnung zu ziehen, indem man diese mit entgegengesetzten Zeichen den betreffenden Componenten in der Richtung der z , y , x addirt. Die in entgegengesetzter Richtung genommenen Kräfte 2, 3, 4 und 5 nennt man dann die Führungskräfte, und zwar die unter (2) die der Translation, während die drei andern die Führungskräfte der Drehung heissen.

Stuttgart, October 1854.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg](#)

Jahr/Year: 1855

Band/Volume: [11](#)

Autor(en)/Author(s): Holtzmann Carl

Artikel/Article: [2. Das Foucault'sche Pendel. 108-121](#)