6. Ueber die Bedeutung der Mathematik für die Naturgeschichte.

Von Rechtsconsulent Schübler in Hall.

I. Das Allgemeine.

Mit Zeichnungen auf Tafel IV. 1.

Die Bedeutung der höhern Geometrie für die Naturgeschichte wurde schon vor einigen Jahren in der Zeitschrift Isis von mir ausgesprochen, und in einer besondern Schrift die Formen der Natur bei Haspel in Hall näher ausgeführt. Diese Ansicht fand auch da und dort Anerkennung. Je mehr man in dieser Richtung fortschreitet, desto mehr zeigt sich dieselbe begründet. Nur der Mangel an mathematischen Kenntnissen scheint der allgemeinen Verbreitung derselben im Wege zu stehen, bei Vielen aber auch nur die ungegründete Scheu vor Untersuchungen dieser Art. Denn dieselben sind nicht so schwierig, als sie zu sein scheinen, so weit sie für diesen Zweck nöthig sind.

Jedenfalls ist aber Mathematik für den Fortschritt der Naturgeschichte unentbehrlich. Man findet in der Naturgeschichte zu Bezeichnung der Formen und zu ihrer Unterscheidung höchst unbestimmte, schwankende Ausdrücke, wie rund, rundlicht, spizig, eckigt, oder ebenso unsichere Vergleichungen, wie eiförmig, blattähnlich, linsenartig. Die höhere Geometrie zeigt uns dagegen für eine unermessliche Menge von Formen Ausdrücke, die viel bestimmter sind, welche die allmähligen Uebergänge von einer

Form zur andern auf's genaueste angeben, und die auch meistens viel kürzer sich fassen lassen, als die bisher gewöhnlichen. Eine der bekanntesten Linien der dritten Ordnung ist zum Beispiel die, welche Newton in seiner Aufzählung der Linien der dritten Ordnung als die 70. und 71. Art bezeichnet, die zuerst auf beiden Seiten einer geraden Linie sich hinwindet, dann aber bei ganz geringer Aenderung ihres algebraischen Werths sich zurückbiegt zu der Form einer Glocke, hierauf mit weiterer Aenderung des Werths eine Spitze bildet, wie die Figuren 1 bis 4 der Taf. IV. 1. zeigen. Die algebraischen Werthe, welche diesen Figuren entsprechen, sind nun sich sehr nahe verwandt, so gross auch der Unterschied der Figuren ist. Die Gleichungen gehen fast unmerklich in einander über. Auf gleiche Art lassen sich noch eine viel grössere Zahl von Unterschieden finden und auf's genaueste bestimmen. Statt zu sagen, schlangenförmig sich windend, glockenförmig gebogen, spitzig, knotig, kann man viel sicherer und kürzer die Aenderungen, in der kurzen, allen diesen Linien gemeinschaftlichen Gleichung angeben und ebenso unzählige Zwischenformen, die den Unterschied zwischen den knotigen und spitzigen vermitteln, für welche man bei der jetzigen unbestimmten Bezeichnungsweise gar keine Worte hat und die nicht einmal durch Zeichnungen leicht dargestellt werden können.

Ebenso verhält es sich mit der Linie der vierten Ordnung, welche Euler in seiner Einleitung zur Analysis des Unendlichen entwickelt und in Tafel IV. Fig. 51—53 darstellt. Auch hier findet man ein unermessliches Heer von Formen durch eine einzige Grundgleichung und kleine Aenderungen derselben gegeben, die für die Bestimmung organischer Formen von Wichtigkeit sind. Denn wie viele Unterschiede liegen zwischen der sich anfangs krümmenden, dann sich zuspitzenden Linie enthalten, dann wieder zwischen dieser und der einen Knoten bildenden und am Ende zwischen dieser und der, welche ein Ei ablöst. Siehe Tafel IV. 1. Fig. 5, 6, 7.

So wie man die Mischungsverhältnisse der Stoffe in der Stöchiometrie nun mathematisch zu bestimmen gelernt hat, so ist auch nöthig, dass die Formen der natürlichen Dinge eine solche Bestimmung erhalten. Was in der Crystallographie durch

Hauy in dieser Beziehung geschah, zeigt nur den Anfang der Lösung dieser Aufgabe. Es gibt nicht nur eine organische Chemie, sondern auch eine organische Formenlehre, welche nur durch die Mathematik ihre Ausbildung erhalten kann. Die Welt ist nicht nur durch Zahlen gebaut, wie Pythagoras sagt, sondern auch durch Figuren, die der räumliche Ausdruck der Zahlen sind.

Die Geometrie kann aber der Naturgeschichte noch mehr nützen, als blos durch die genaue Bestimmung der vorhandenen organischen Formen. Denn die Formen, welche aus ihr hervorgehen, übertreffen die in der Natur vorhandenen weit, unendlichemale. Dicht neben Formen, die unverkennbare Aehnlichkeit mit Linien der jetzt existirenden Wesen haben, findet man wieder ganz diesen fremde, bis wieder unerwartet bei der Entwicklung uns bekannte Figuren zum Vorschein kommen.

Da diese Verschiedenheit bekannter und unbekannter Formen oft nur durch die Veränderung der Constanten bei der Entwicklung derselben Gleichung sich ergibt, so ist nicht unwahrscheinlich, durch genaue Vergleichung der Zahlenverhältnisse dieser Constanten zu den Constanten, welche unbekannte Formen anzeigen, auch noch die Typen vorweltlicher oder gar kosmischer Organismen aufzufinden.

Beispiele werden dieses deutlicher machen. Es werde die Conchoide zum Grund gelegt, eine Linie der vierten Ordnung, welche durch die Gleichung $aa\,(xx + yy) = 4\,(xx + yy - bx)^2$ und $aaxx = (xx + yy)\,(2x - 2b)^2$ ausgedrückt wird, und die sich ganz leicht graphisch nach der Anleitung Euler's in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen Band II. S. 414 darstellen lässt. Statt der geraden Linie, von der Euler ausgeht, nehme man aber die zwei entgegenstehenden Arme einer Hyperbel. Man nehme den Pol zwischen dem Scheitel der Hyperbel und dem Brennpunkt in der Mitte, die Grösse der Linie, welche an diesem Pole läuft und durch den Lauf der Hyperbel bestimmt wird, aber noch einmal so gross als die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt, so erhält man die auffallende Figur, welche mit einem Schmetterling, der fliegt, auffallende Aehnlichkeit hat, Fig. 8. Der eine Zweig der Hyperbel gibt den Leib und die Fühlhörner, der andere die Flügel, mit ihrer Abtheilung zwischen obern und untern Flügeln. Nun erhält man aber auch die Grundform eines Schmetterlings bei der Aenderung der vier Constanten der bestimmenden Gleichung bis auf eine gewisse Gränze.

Es ist hier ein solches Verhältniss der zwei Constanten, welche die Grundlinie, die Hyperbel bestimmen, angenommen, dass die Querachse kleiner ist als die Längenachse. Die Hyperbeln, welche man hier erhält, nähern sich den Parabeln. Kehrt man aber das Verhältniss um, so erhält man eine andere Art Hyperbeln, welche den geraden Linien ähnlicher werden. In allen diesen unendlich vielen Fällen erhält man bei gleichen Constanten wieder Schmetterlingsformen, die sich jedoch wesentlich von einander unterscheiden. Während man aus den Hyperbeln, deren Längenachsen grösser sind als die Querachsen, Schmetterlinge erhält, wie die Figur 8 zeigt, bei denen die Flügel weit über den Kopf sich ausbreiten und deren Leiber schmal sind, bekommt man aus den andern Schmetterlinge, deren Flügel weniger oder nicht über den Kopf sich erheben, deren Leib breit ist, wie Fig. 9 zeigt. Es ist hier auch nicht schwer, viele Formen zu finden, die mit den vorhandenen Arten von Schmetterlingen überraschende Aehnlichkeit haben, dagegen aber auch noch mehr andere von solcher Ausdehnung der Flügel und solcher Kleinheit des Leibs und umgekehrt von solcher Schwerfälligkeit des Leibs und begränzten Flügeln, die in der jetzigen Welt sich nicht vorfinden. Aendert man nun aber auch die zwei andere Constanten, so erhält man wieder ganz andere Figuren, die jedoch auch mit der Schmetterlingsform in überraschendem Zusammenhang stehen. Wird der Pol noch näher dem Scheitel angenommen, so werden die Flügel noch weiter ausgebreitet und entfaltet, und wird der Leib noch länger und vollkommener. Man erhält auf diese Art die vollkommenste Entwicklung der Schmetterlingsform jeder in ihrer Art. Aber setzt man dann den Pol in den Scheitel selbst oder gar über denselben, zwischen den Scheitel und den Mittelpunkt, so entsteht eine andere Form, wie sie Figur 10 zeigt. Die Linien, welche bisher Flügel bildeten, schliessen nicht mehr und werden Insektenfüssen ähnlich. Der Leib, den die andern Linien geben, wird aber breiter, einem Kopf ähnlich. Die Fig. 10 zeigt solche Linien, wie sie nach und nach entstehen, je mehr man den Pol vom Scheitel der Hyperbel enfernt. Die Füsse, die zuerst armartig sich ausbreiten, ziehen sich mehr und mehr zusammen, so wie man es bei dem Unterschied der vordern und hintern Füsse von Insekten bemerken kann. Getrennt davon entstehen dagegen Kopf- und Rumpf ähnliche Formen. Man sieht daher hier zwei getrennt äusserste Theile, so wie man den Pol über den Scheitel erhebt, die man früher nicht bemerken konnte.

Setzt man hierauf den Pol unter den Brennpunkt, so verschwinden die Flügel, der Leib, ebenso die Füsse und der Kopf. Es kommen dagegen ganz andere Formen zum Vorschein, die auch mit Schmetterlingen Verwandtschaft haben.

Die Veränderung der vierten Constante gibt wieder ganz andere Formen, die gleichfalls mit den bisherigen in Verbindung stehen, wovon vielleicht ein anderesmal. Aber aus diesem Beispiel wird sich schon ergeben, dass die mathematischen Formen viel zahlreicher sind, als die natürlichen.

II. Ein Beispiel von den Seitenprojektionen der dem menschlichen Leib ähnlichen Linien.

Wenn man die in meiner Schrift: „die Formen der Natur bei Haspel“ beschriebenen Pole schief gegen den Parameter der Curve stellt, so dass eine durch diese gehende Linie nicht mehr parallel mit dem Parameter ist, sondern einen Winkel mit demselben bildet, so verändern sich die 7 Lebenslinien der Parabel und der Ellipse und die 10 der Hyperbel. Sie verzerren sich immer mehr, je weiter die Verrückung der Polarachse geht. Zugleich bekommt aber eine der Linien nach der andern die Form eines Glieds des Organismus von der Seite gesehen. Dann verzerrt sie sich wieder, während eine andere Linie eine Seitenprojektion darstellt, und so geht es fort, bis die Verschiebung ihren Kreislauf vollendet hat und die Frontachse in den Parameter zurückfällt oder eine parallele Lage mit diesem bekommt. Man erhält dadurch eine Linie, welche vor der Verschiebung die Grundlinie des Kopfs gab, zugleich die Fähigkeit, die Linie des Halses, sogar des Leibs und der Füsse zu werden. Ebenso kann die Fusslinie bei der Seitenprojektion die Linie der andern Theile des Leibs werden.

Es bilden daher die sieben Lebenslinien der Parabel nicht blos ein innig verbundenes Ganzes, sondern jede einzelne Linie hat die Kraft, alle Linien darzustellen. Alle sieben Linien sind Eins und jede Linie ist zugleich der Anfang zum Ganzen.

Diese Eigenschaft ist der Prüf- und Schlussstein der ganzen Darstellung. Sie ist so wichtig, dass ihre Nachweisung in einzelnen Fällen der Leser gerne hier finden wird.

Fassen wir zuerst die sieben Linien der Parabel in's Auge, wie sie in meiner Schrift die Tafel 8 darstellt, wo die Linie, welche durch die zwei Pole geht, nicht blos parallel mit dem Parameter ist, sondern ganz mit demselben zusammenfällt. Wenn wir nun die Polarachse schief stellen, zuerst nur wenig, wie in Fig. 11. der beil. Tafel, so verziehen sich alle Linien bis zur Unkenntlichkeit bis auf die mittlere Linie, welche in Tafel 8 meiner Schrift die drei obern Linien von den drei untern trennte. Der mittlere Theil dieser Linie nimmt die Gestalt einer Nase bis zum Hirn an.

In der Zeichnung Fig. 11. folgen zugleich ober und unter dieser Nasenlinie mehrere andere, welche man als Degenerationen der Menschennase ansehen kann und die dadurch entstehen, dass die Pole den Parameter ganz verlassen und ihre Axe nur parallel mit der liegt, welche die Menschennase bildete. Diese Degenerationen der Menschennase haben nun auffallende Aehnlichkeit mit Thiernasen oder dem vordersten Theil eines Thierkopfs.

Betrachten wir diese Linien genauer, so finden wir die vierte Linie erzeugt durch die zwei Pole in a und b, eine im Parameter selbst und den andern in geringer Entfernung von demselben, sie hat eine auffallende Aehnlichkeit mit der Menschennase.

Die Linie 5 entsteht dadurch, dass beide Pole unterhalb der Pole a und b genommen werden, in gleicher Entfernung von diesen in c und d.

Hier ist das Auffallende, dass die obere Erhöhung ober der Menschennase sich in eine hornähnliche Spitze verwandelt hat. Die Linie 6 ist wieder auf dieselbe Weise entstanden, auch wieder durch Pole, die in gleicher Entfernung von a b sind, nur noch mehr entfernt. Hier hat sich der untere Theil der Nase in eine Spitze oder einen Zahn verwandelt. Die Linie 7 entstand aus noch grösserer Entfernung von a und b, hat Aehnlichkeit mit der 6ten.

Eine zweite Art der Degeneration der Menschennase zeigen die Linien 1, 2, 3, welche entstanden sind durch Pole, die oberhalb a und b auch wieder in gleichen Entfernungen von diesem liegen und die wieder ganz eigenthümliche Bildungen darstellen. Es lassen sich aber ausser diesen sechs Linien noch unzählig viele andere auf dieselbe Art finden.

Auch muss hier bemerkt werden, wie es leicht seyn kann, dass eine andere Verrückung der Polarachse in einem andern Winkel noch viel genauer diese Bildung darstellt. Denn es gibt unendlich viele Stellungen. Jede hat einen bestimmten Charakter, gibt die Projektion eines bestimmten Theils am vollkommensten. Die hier gewählte nähert sich vielleicht nur der besten. Es ist nun aber nicht unwahrscheinlich, dass bei einer geringen Verrückung wie bei der hier angegebenen, der am meisten hervorstehende Theil sich zuerst nach der Seite darstellte. Betrachten wir die Fig. 12. Hier ist der Winkel, welchen die Polarachse mit dem Parameter bildet, noch einmal so gross, als der vorige in Fig. 11. angenommene. Hier hat sich dieselbe mittlere Linie verwandelt zu Curven, welche den Formen des Bauches zu entsprechen scheinen. Die Linie 4 entsteht aus den Polen a und b, von denen die eine im Parameter selbst liegt. Diese Linie ist dem vorderen Theil des Menschenleibs auffallend ähnlich. Die Linien 1, 2, 3, 5, 6, 7, sind entstanden aus Polen, die in verschiedenen Stufen aber immer gleich weit von denselben entfernt sind und zwar nach oben und unten. In Fig. 13. ist die Polarachse noch schiefer gegen den Parameter gestellt, so dass der Winkel, den sie mit diesem bildet, fast dreimal so gross ist, als der in Fig. 11. angenommene.

Hier wird die mittlere Linie oben zweimal rückläufig und bildet mit einer der untern Linie, der durch die innern Pole erzeugten, eine Curve, welche einer Menschenhand oder einem vordern Thierfuss ähnlich ist. Es sind in der Fig. 12. drei solche

Curven gezeichnet, Nro. 1, 2, 3. Die mittlere (zweite) Curve ist aus zwei Polen a und b erzeugt, von denen auch wieder einer im Parameter selbst sitzt, die daher auch wieder der menschlichen Figur angehören. Das Bezeichnende ist hier die Hand mit dem Daumen. Die erste Linie ist aus zwei Polen c und f entstanden, die in gleicher Entfernung von a b nach oben liegen. Die dritte dagegen aus zwei Polen c und d unterhalb a und b.

Bei der Curve 1 ist der Daumen mit dem Fuss oder der Hand verwachsen. Bei der entgegengesetzten Degeneration geht der Fuss in zwei Theile auseinander, und bemerkt man rückwärts etwas einem Daumen Aehnliches. Die Menschenhand bildet hier auch wieder die Mitte zwischen zwei entgegengesetzten Degenerationen. Diese drei Figuren stellen nur einzelne Fälle von Projektionen vor, deren sich noch unzählige entwerfen lassen, sie enthalten weitere Beispiele der schon in meiner Schrift auf Tafel 11. 12. angegebenen. Der Uebergang einer Projektion in die andere bei der Aenderung der Neigung für die Pole bietet bei genauerer Betrachtung überraschende Erscheinungen dar. Denn eine bestimmte Stellung der Pole gibt zwar immer die Projektion eines Theils der Form von vorn angesehen. Es geschieht diess aber in vielen Uebergängen. Ehe die Projektion vollendet ist, hat sie schon bei annähernder Stellung der Polarachse sich zu bilden begonnen, auch verschwindet sie nicht auf einmal, sondern sie bleibt noch sichtbar, auch wenn die Neigung der Achse schon sehr verändert ist, bis sie ganz verschwindet. Wenn man daher alle sieben Linien vollständig bei einer bestimmten Neigung entwickelt, so bemerkt man neben der vollständigen Projektion eines Theils zugleich die Anfänge und die Ausgänge anderer. Ueberraschend ist auch oft, wie unvermuthet von einer Linie, die man wenig beachtete, bei einer bestimmten Neigung eine Form zum Vorschein kommt, die man von einer andern Seite erwartet hatte.

Man kann auf diese Art wahrscheinlich durch die Verrückung der Polarachse von der Richtung des Parameters nach beiden Seiten die Seitenprojektion aller Theile eines Organismus finden. Denkbar ist aber bei der unendlich grossen Zahl von Degenerationen, die sich auf beiden Seiten des Parameters einer Parabel bilden lassen, Organismen darzustellen, welche von den jetzt lebenden weit verschieden sind, dass man ein Reich von Organismen finden könnte, von so grosser Zahl, dass das Reich der jetzt lebenden nur ein kleiner Theil desselben wäre. Denkbar ist ferner, auf diese Art selbst die Formen urweltlicher Thiere, selbst der Thiere anderer Weltkörper vor die Augen zu stellen. Wenn man nämlich diejenigen Zahlen gefunden hat für die Achsenverhältnisse und für die Entfernung der Pole von dem Parameter, unter denen am besten die den jetzigen am meisten ähnliche Organismen sich darstellen, so wäre möglich, durch die Vergleichung dieser Zahlen mit den Zahlen, welche den Lauf der Erde bestimmen, die Grössen zu finden, welche die Erde in ihrer Urzeit oder andern Weltkörper angehören. Ebenso wäre möglich aus den fossilen Resten urweltlicher Thiere auf die astronomische Zahl zu schliessen, welche die Erde hatte, als sie solche Bildungen hervorrief. Alles dieses sollte nur eine Andeutung geben, von dem was geschehen könnte, eine Hoffnung aussprechen, von dem, was erst später sich entwickeln wird, sollte die Aufmerksamkeit Anderer darauf richten, welche die Mittel haben, diese Forschungen zu fördern und die Kenntniss, um den Werth und die Hindernisse zu würdigen.