Monatlich erscheint eine Nummer und die Pränumeration beträgt jährlich 2 fl. 70 kr. Oesterreichischer Währung.

LOTOS.

Man pränumerirt in der Redaction (Carlsplatz Nr. 556—2.) oder in der J. G. Calve'schen k. k. Univ.-Buchhandlung in Prag.

Zeitschrift für Naturwissenschaften.

Redacteur:

Dr. Wilh. Rud. Weitenweber in Prag.

XV. Jahrgang. September. 1865.

Einfache Beweise einiger Lehrsätze der Physik.

Von *Joseph Weselý*, Assistenten am k. Polytechnicum in Prag.

I. *Der Druck, den irgend eine Flüssigkeit auf die Seitenwand eines Gefässes ausübt, ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Basis die gedrückte Fläche und zur Höhe die lothrechte Tiefe des Schwerpunktes dieser Fläche unter dem Flüssigkeitsspiegel hat.*

Um den Druck einer Flüssigkeit auf die ganze Seitenwand des Gefässes, in dem sie sich befindet, berechnen zu können, muss die Grösse des Druckes auf ein Element derselben als bekannt vorausgesetzt werden.

Der Druck auf ein Element der Seitenwand ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Basis das gedrückte Element und zur Höhe die lothrechte Tiefe des Elements unter dem Niveau der Flüssigkeit hat. — Jedes der gleichgrossen Flächenelemente der Seitenwand wird demnach einen anderen Druck erleiden, der um so grösser ist, je tiefer dieses Element unter dem Flüssigkeitsspiegel liegt, und der ganze oder Totaldruck auf die Seitenwand muss daher gleich sein der Summe aller auf die Flächenelemente wirkenden partiellen Drücke (indem ja die Richtungen aller drückenden Kräfte zu einander parallel sind, daher der gesammtresultirende Druck gleich der Summe der einzelnen partiellen Drücke ist).

α) Ist der Druck, den die Flüssigkeit in dem Gefässe (Fig. 1) $ABCDEFGH$ auf die Seitenwand desselben $NOBD$, welche senkrecht zur Bodenfläche $ABCD$ ist, zu berechnen, und sei $MA = H$ die Höhe bis zu welcher das Gefäss mit Flüssigkeit gefüllt ist, so zerlegen wir H in eine grosse Anzahl (n) kleiner unter sich gleicher Theile (h) also $H = nh$, ziehen durch die in NB erhaltenen Theilpunkte zu BD parallele Linien, d. h. zerlegen die Seitenwand $BDNO$ in sehr schmale parallele Streifen, deren Flächen unter einander gleich sind, so sind die Drücke auf die einzelnen unter sich gleichen Flächenelemente in demselben Streifen gleichgross und ihre Summen (p_1 p_2 p_3 p_4 p_n) bilden die Drücke in den einzelnen Streifen, die wir uns in der Geraden KL, welche die Mittelpunkte aller Streifen verbindet, wirkend denken können.

Sei k das Gewicht einer Kubikeinheit der Flüssigkeit und bedeute f die Fläche jedes einzelnen Streifens, so ist

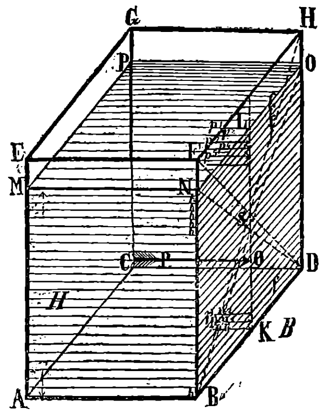
$p_1 = f.\ 1\ h.\ k.$

$p_2 = f.\ 2\ h.\ k.$

$p_3 = f.\ 3\ h.\ k.$

$p_n = f.\ nh.\ k.$; daher d. Gesammtdruck

Fig. 1.



$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n = f.\ h.\ k.\ [1 + 2 + 3 + \ldots\ldots n]$$

Bilden wir die Summe dieser Reihe nach der allgemeinen Summenformel:

$$S_n = \binom{n}{1} u_0 + \binom{n}{2} \Delta u_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 u_0 + \ldots\ldots \binom{n}{r} \Delta^{r-1} u_0 + \binom{n}{r+1} \Delta^r u_0$$

$$\text{so: } (1 + 2 + 3 \ldots n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{1\ 2}, \text{ mithin}$$

$$P = f.\ h.\ k. \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right); \text{ da } f. = BD.\ \mathrm{h}. = B.\ h. \text{ ist, erhält man:}$$

$$P = B.\ h^2\ k.\ \frac{n^2}{2} + B.\ h^2\ k.\ \frac{n}{2} \text{ und } n^2\ h^2 = H^2 \text{ substitutirt, sonach}$$

$$P = B.\ H.\ \frac{H}{2}\ k. + B. \frac{H}{2}\ h.\ k., \text{ endlich } F. = B.\ H \text{ gesetzt ist:}$$

$$P = F.\ \frac{H}{2}\ k. + \frac{F}{2}\ h.\ k.$$

Je mehr wir uns dem wahren Werthe von P nähern wollen, desto kleiner muss h im Vergleich zu H angenommen werden; ist h unendlich klein, so kann das 2. Glied weggelassen werden und man erhält demnach:

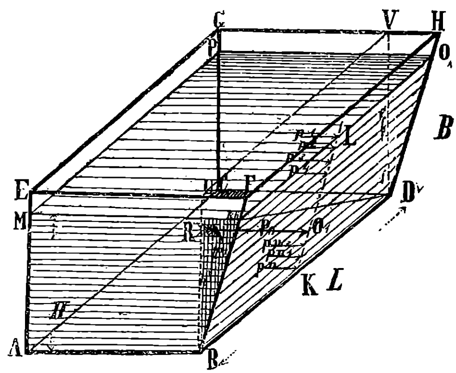
$\mathrm{P} = F.\ \frac{H}{2}\ k.$ 1) In dieser Gleichung bedeutet $F.$ die gedrückte Seitenfläche, $\frac{H.}{2}$ die halbe Tiefe des Niveaus der Flüssigkeit von der Bodenfläche oder (da der Schwerpunkt des Rechteckes in der halben Höhe desselben liegt) die Höhe des Schwerpunktes des unter dem Flüssigkeitsspiegel sich befindlichen Theil der Seitenfläche vom Niveau der Flüssigkeit. Legt man *BDNO* um die Gerade *BD* um, bis sie mit der Ebene *ABCD* zusammenfällt, so ist der Druck bei derselben lothrechten Höhe der Flüssigkeit (*H*) gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Basis die horizontale Grundfläche und zur Höhe die lothrechte Entfernung derselben vom Flüssigkeitsspiegel hat, demnach:

$P_1 = F.\ H.\ k.$ und

$P : P_1 = 1 \quad 2$ mithin $\underline{P_1 = 2P}$, d. h. der Druck auf eine horizontale Grundfläche ist bei derselben Flüssigkeitshöhe doppelt so gross, als auf eine gleichgrosse vertikal stehende Seitenfläche.

β) Ist der hydrostatische Druck zu bestimmen, den eine Flüssigkeit auf die Seitenwand *BDNO* eines Gefässes (Fig. 2) ausübt, dessen Wand einen kleineren Winkel als 90^0 mit der Horizontalen bildet, verfahre man auf dieselbe Weise wie früher.

Fig 2.



Man theile $BN = B$ in n unter sich gleiche sehr kleine Theile, ziehe durch die erhaltenen Theilpunkte parallele Linien zu *BD*, so wird *NBDO* in n gleiche Streifen getheilt, berechne die Drücke auf die einzelnen Streifen, summire sie, so erhält man den Gesammtdruck P_2, der auf die Seitenwand ausgeübt wird.

Construirt man die Höhen der einzelnen Streifen vom Flüssigkeitsspiegel und bezeichnet diese lothrechten Höhen mit $h_1\ h_2\ h_3 \qquad h_n$ und setzt $h_n = BR = H$, so muss $h_2 = 2h_1$, $h_3 = 3h_1$, $\qquad h_n = nh_1$ mithin sind die Drücke auf die einzelnen Streifen:

$$p_1 = f.\ h_1\ k = f.\ 1h_1\ k$$
$$p_2 = f.\ h_2\ k = f.\ 2h_1\ k$$
$$p_3 = f.\ h_3\ k = f.\ 3h_1\ k$$
$$\underline{p_n = f.\ h_n\ k = f.\ nh_1\ k} \text{ und}$$
$$P_2 = p_1 + p_2 + p_3 + \quad .\ p_n = f.\ h_1\ k.\ [1 + 2 + 3 + \qquad n]$$

demnach $P_2 = f.\ h_1\ k.\ \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)$; es ist $f = L.\ \frac{B}{n}$ u. $h_1 = \frac{H}{n}$

also $P_2 = L.\ B\ \frac{H\ n^2}{n^2\ 2}\ k. = L.\ B.\ \frac{H}{2}\ k.$ wenn man das 2. Glied als unendlich klein gleich weglässt, indem ja n unendlich gross angenommen wurde.

Setzt man endlich $L\ B = F$ so:

$$P_2 = F.\ \frac{H.}{2}\ k. \quad 2)$$

Nun ist F die gedrückte Seitenfläche, $\frac{H}{2}$ die Entfernung des Schwerpunktes dieser Fläche vom Flüssigkeitsspiegel, daher die allgemeine Regel zur Bestimmung der Grösse des Druckes dieselbe wie früher.

II. Bis jetzt haben wir bloss die Grösse des Gesammtdruckes betrachtet; da aber zur Bestimmung einer Kraft auch *deren Richtung und Angriffspunkt* gehört, so mögen noch diese Aufgaben gelöst werden.

Was die Richtung anbelangt, so ist sie schon dem Begriffe „Druck" zu Folge senkrecht auf die betreffende gedrückte Fläche. Wie bekannt, nennt man den Angriffspunkt der Resultirenden der gegen eine Seitenwand wirkenden Druckkräfte den „Mittelpunkt des Druckes", und da derselbe wegen der Ungleichheit der einzelnen Druckkräfte mit dem Schwerpunkte der gedrückten Fläche nicht zusammenfallen kann, so muss die Lage desselben für jeden besonderen Fall ermittelt werden.

Aus der Lehre von der Bestimmung des Angriffspunktes der Resultirenden paralleler Kräfte weiss man, dass das statische Moment der Resultirenden in Beziehung auf irgend eine Coordinatenebene gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen wirkenden Kräfte in Beziehung auf dieselbe Coordinatenebene.

Ist daher Z die senkrechte Entfernung des Angriffspunktes der Resultirenden in Beziehung auf die Ebene des Niveaus $z_1\ z_2\ z_3\ \ldots z_n$ die senkrechten Entfernungen der Componenten in Beziehung auf dieselbe Ebene, so ist:

$$P\ Z = p_1\ z_1 + p_2\ z_2 + p_3\ z_3 + \ldots p_n\ z_n \text{ oder:}$$

$$P\ Z = \Sigma\ (p\ z); \quad \text{es ist aber: } \begin{aligned} p_1 &= f_1.\ z_1.\ k. \\ p_2 &= f_2\ z_2\ k. \\ p_3 &= f_3\ z_3.\ k. \\ p_n &= f_n.\ z_n\ k. \end{aligned}$$

wenn f und k die frühere Bedeutung haben, daher:

$$P\ Z = f_1.\ k.\ z_1^2 + f_2\ k.\ z_2^2 + \ldots f_n\ k.\ z_n^2 \text{ und}$$

$$Z = \frac{k}{P}\left[f_1\ z_1^2 + f_2\ z_2^2 + \ldots f_n\ z_n^2\right] = \frac{k}{P}\ \Sigma\ (fz^2) \quad 3)$$

Machen wir noch $f_1 = f_2 = f_3 = \quad = f_n$, so

$$Z = \frac{f.\ k}{P} \Sigma (z^2)$$

Wird der Mittelpunkt des Druckes für eine rechteckige lothrechte Seitenwand bestimmt, so:

$$\begin{aligned} \Sigma (z^2) &= h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \quad (nh)^2 \\ &= h^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \quad n^2) \\ &= h^2 \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \end{aligned}$$

$\Sigma (z^2) = h^2 \frac{n^3}{3}$, wenn man das 2. und 3. Glied aus demselben Grunde wie früher weglässt, mithin $\left(\text{weil } P = F \frac{H.}{2} k\right)$ ist

$$Z = \frac{2}{n\ H.} \cdot \frac{h^2\ n^3}{3} \text{ und } n^2\ h^2 = H^2$$

$Z = \frac{2}{3} H.$ d. h. der Mittelpunkt des Druckes in einer Entfernung gleich $^2/_3$ H vom Flüssigkeitsspiegel entfernt, mithin in O (Fig. 1).

Dieselbe Regel findet auch für den Fall statt, wo die Seitenwand gegen das Niveau der Flüssigkeit weniger als 90° geneigt ist.

$$\begin{aligned} \Sigma (z^2) &= h_1{}^2 + h_2{}^2 + h_3{}^2 + h_4{}^2 + \quad .\ h_n{}^2 \\ &= h_1{}^2 + (2\,h_1)^2 + (3\,h_1)^2 + \quad ..\ (nh_1)^2 \\ &= h_1{}^2\ [1^2 + 2^2 + 3^2 + \quad ..\ n^2] \end{aligned}$$

$$\Sigma (z^2) = h_1{}^2\ \frac{n^3}{3} \text{ und } Z_1 = \frac{f.\ k}{P_2} \cdot \frac{n^3\, h_1{}^2}{3} = \frac{2}{3}\ H$$

$Z_1 = \frac{2}{3} H$; die Regel daher dieselbe wie früher, und der Mittelpunkt des Druckes in O_1 (Fig. 2).

(Schluss folgt.)

Die unterirdischen Abflüsse des Oceans und aller grösseren Binnenseen.

Von Med. Dr. *Alois Nowak* in Prag.

(Fortsetzung von S. 125).

Dass ferner die Analogie mit dem Sunde für die Gibraltarstrasse nichts beweisen könne, darf schon darum behauptet werden, weil die Verhältnisse der Ostsee gegenüber der Nordsee ganz andere sind als jene des Mittelmeeres gegenüber dem Atlantischen Ocean; die Ostsee nämlich eine ver-