Monatlich erscheint eine Nummer und die Pränumeration beträgt jährlich 2 fl. 70 kr. Oesterreichischer Währung.

LOTOS.

Man pränumerirt in der Redaction (Carlsplatz Nr. 556—2.) oder in der J. G. Calve'schen k. k. Univ.-Buchhandlung in Prag.

Zeitschrift für Naturwissenschaften.

Redacteur:

Dr. Wilh. Rud. Weitenweber in Prag.

XV. Jahrgang. October. 1865.

Einfache Beweise einiger Lehrsätze der Physik.

Von *Joseph Wesely*, Assistenten am k. Polytechnicum in Prag.

(Schluss von Seite 133.)

III. Gleichförmig abgeänderte Bewegung.

Eine gleichförmig abgeänderte Bewegung ist — wie bekannt — jene, wobei die Veränderung der Geschwindigkeit während der Bewegung in den nach einander folgenden Zeittheilchen eine und dieselbe ist, mag sie im Zu- oder Abnehmen bestehen. Wenn nun die Geschwindigkeit des Körpers in den gleich grossen, beliebig kleinen nach einander folgenden Zeittheilchen um gleich viel wächst, so heisst diese gleichförmig abgeänderte Bewegung eine *gleichförmig beschleunigte*, im Gegensatze zur gleichförmig verzögerten Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit um gleich viel abnimmt. Ein Körper kann eine gleichförmig beschleunigte Bewegung nur dann annehmen, wenn die Kraft in jedem aufeinanderfolgenden gleichen Zeittheilchen ununterbrochen auf ihn einwirkt und dem Körper denselben Impuls mittheilt; die Kraft muss daher von unveränderlicher Stärke (d. h. constant) sein und nur in der Richtung der Bewegung auf den Körper einwirken. Ist die Bewegung gleichförmig verzögert, so setzt sie ebenfalls die Einwirkung einer constanten Kraft voraus, nur wirkt dieselbe hier im direct entgegengesetzten Sinne der Richtung der Bewegung. Jede gleichförmig abgeänderte Bewegung setzt demnach die Einwirkung einer constanten Kraft voraus. Wir wollen nun als Beispiele von gleichförmig abgeänderten Bewegungen: 1. den freien Fall eines Körpers und 2. den lothrechten Wurf nach aufwärts betrachten, u. z. für den Fall, wenn vom Luftwiderstande abstrahirt wird.

Die constante unveränderliche, auf den Körper einwirkende Kraft ist in diesem Falle die allgemeine Anziehungskraft der Erde. Da man bei jeder Art der Bewegung die *Zeit*, d. h. die Dauer, die verflossen ist, zwischen den zwei Momenten, wo man die Bewegung des Körpers betrachtet, den *Raum* (Weg), d. h. die Länge der Linie, die der Körper beschreibt, indem er von einem Orte zum anderen übergeht, die *Geschwindigkeit*, als solche pflegt man den in der Zeiteinheit zurückgelegten Raum zu nehmen und die *Richtung*, d. h. die gerade Linie, in der sich der Körper bewegt, angibt, so wollen wir Relationen zwischen diessen Grössen auffinden.

Sei c die Geschwindigkeit, welche der Körper hat, wenn man die Bewegung zu betrachten anfängt, so ist die Geschwindigkeit nach dem ersten Zeittheilchen T $c \pm a$ wenn a die Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit in der Zeit T bedeutet,

nach zwei Zeittheilchen also $2\ T$ $c \pm 2\ a$
„ 3 „ $3\ T$ $c \pm 3\ a$
„ 4 „ „ $4\ T$. $c \pm 4\ a$
nach n Zeittheilchen also $n\ T$ $c \pm n\ a$, wenn wir nämlich die Zeit t, während welcher wir die Bewegung betrachten, in eine sehr grosse Anzahl (n) gleicher Zeittheilchen T eintheilen, daher $t = n\ T$ machen.

Denken wir uns, der Körper habe zu Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit Null, es sei also ein freifallender Körper, auf den ausser der Schwerkraft keine momentane Kraft wirkt, mithin $c = \Theta$, so ist die Geschwindigkeit:

nach der Zeit T $1\ a$
„ „ „ $2\ T$ . . $2\ a$
„ „ „ $3\ T$ $3\ a$
nach der Zeit $n\ T$ . . $n\ a$; bezeichnen wir die Geschwindigkeit,
nach der Zeit $n\ T = t$ . . mit v, so $v = n\ a$
„ „ „ $n_1 T = t_1$ ist $v_1 = n_1\ a$, sonach:

$t\ \ t_1 = n : n_1$ und
$v : v_1 = n : n_1$ folglich
$t : t_1 = v : v_1$ d. h. es nimmt die Geschwindigkeit des Körpers mit fortdauernder Zeit im geraden Verhältnisse zu. Heissen wir die Geschwindigkeit nach Verlauf der ersten Zeiteinheit

g, sei also $v_1 = g$ und $t_1 = 1$ so:

$t\ \ 1 = v : g$ und daraus $tg = v$ oder
$v = g\ t$ die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t oder

zu Anfang des nächstfolgenden Zeittheilchens; v heisst — wie bekannt — die Endgeschwindigkeit des Körpers nach der Zeit t oder die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper nach Verlauf der Zeit t fortbewegen würde, wenn in diesem Momente die Schwerkraft auf ihn einzuwirken aufhörte und er sich blos vermöge seines Beharrungsvermögens weiter fortbewegen würde. Die Zunahme an Geschwindigkeit in der Zeiteinheit (als solche nimmt man gewöhnlich 1 Secunde) wird Acceleration (Beschleunigung) und die Abnahme „Retardation" (Verzögerung) genannt (g); es ist demnach die Endgeschwindigkeit gleich dem Producte aus der „Acceleration" in die während der Bewegung verflossene Zeit. Hat der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit c, so ist seine Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t

$$\underline{V = c \pm g\,t} \qquad 1)$$

wobei $+$ für die gleichförmig beschleunigte und

$-$ „ „ verzögerte Bewegung genommen werden muss.

Soll der in der Zeit $t = n\,T$ zurückgelegte Raum berechnet werden, so hat man nur die einzelnen, während der aufeinander folgenden Zeittheilchen T zurückgelegten Räume zu finden und dieselben zu summiren.

Heisse S der in der Zeit t zurückgelegte Raum

s_1 der Raum nach dem 1. Zeittheilchen T

s_2 „ 2. T

s_3 3. T

sn n T, so ist

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots\; s_n$$

Die Geschwindigkeit nach der Zeit $1\;T \dots\; v_1 = c \pm gT$

„ „ $2\;T \dots\; v_2 = c \pm 2gT$

„ „ „ „ „ $3\;T \dots\; v_3 = c \pm 3gT$

die Geschwindigkeit nach der Zeit $nT \dots\; v_n = c \pm ngT$

und wollen wir diese unter sich gleichen Zeittheilchen T so klein als möglich annehmen, so können wir ohne bedenklichen Fehler die Bewegung während eines jeden unendlich kleinen Zeittheilchens als gleichförmig betrachten, demnach die Geschwindigkeit zu Anfang und zu Ende eines jeden Zeittheilchens T als unendlich nahe identisch ansehen, und findet man daher den Raum, wenn man die Geschwindigkeit mit der Zeit multiplicirt

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1\, T \\ s_2 &= v_2\, T \\ s_3 &= v_3\, T \\ s_n &= v_n\, T \\ \hline S &= T\,(v_1 + v_2 + v_3 + \dots\; v_n);\ \text{nun ist:} \end{aligned}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots v_n = nc \pm gT\,(1 + 2 + 3 + \dots n), \text{ daher}$$

$$S = c\,n\,T \pm gT^2\,(1 + 2 + 3 + \dots n)$$

$$S = ct \pm gT^2 \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) = c\,t \pm \frac{gt^2}{2} \pm \frac{g\,t^2}{2n}$$

Die Rechnung wurde gemacht unter der Voraussetzung, es sei n unendlich gross, daher das 3. Glied als Null weggelassen werden kann, und man erhält endlich

$$S = ct \pm \frac{g\,t^2}{2} \quad 2)$$

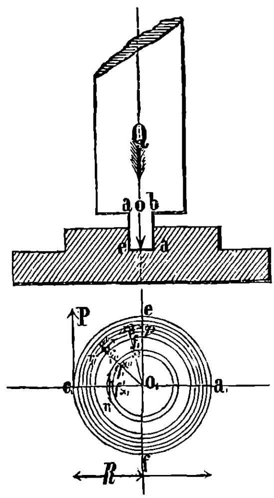
Das $+$ Zeichen gilt wieder für die gleichf. beschleunigte
„ $-$ „ für die gleichf. verzögerte Bewegung.

Eliminirt man aus den Gleichungen 1) und 2) die Zeit t so erhält man:

$V = \sqrt{c^2 \pm 2gS}$ 3), die Endgeschwindigkeit durch die Anfangsgeschwindigkeit und den zurückgelegten Raum ausgedrückt.

IV. Berechnung der Grösse der Reibung am stehenden Zapfen.

(Fig. 3.)



Bei stehenden Wellen (z. B. Göpelwellen) muss man einen Unterschied machen zwischen der Reibung an der Basis und jener an der Cylinderfläche des Zapfens.

Sei Q der Gesammtdruck, der auf den Zapfen ausgeübt wird, so vertheilt sich derselbe auf die ganze Basis desselben so, dass die Reibung auf die ganze Basisfläche wirken muss. Wird die Basisfläche cd (Fig. 3.), deren horizontale Projection $c_1\ d_1\ ef$ vergrössert dargestellt ist, in Flächenelemente $f_1\ f_2\ f_3 \dots f_n$ getheilt, so dass $F = f_1 + f_2 + f_3 + \dots f_n$ ist, und seien die den Flächenelementen zugehörigen Drücke $q_1\ q_2\ q_3\ \dots\ q_n$, so dass $Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots q_n = \Sigma\,(q)$, so beschreibt bei der Bewegung des Zapfens im Sinne cP jedes Element um den Mittelpunkt o_1 einen Kreis; die Reibung ist im entgegengesetzten Sinne der Bewegung und in der Richtung der an die Kreise, in denen die Flächenelemente liegen, gezogenen Tangenten wirksam; also

in f_1 die Reibung r_1

„ f_2 r_2

in f_3 die Reibung r_3
„ f_n „ „ r_n

Wenn wir die Basisfläche in gleich grosse Flächenelemente zertheilen, so ist die Grösse der Reibung in denselben doch verschieden; denn sie wächst vom Mittelpunkte o_1 bis zur Peripherie, weil ja die Hebelsarme der einzelnen Druckkräfte ebenfalls von der Entfernung vom Mittelpunkte wachsen

Denken wir uns an der Peripherie des Zapfens eine Kraft P angebracht, welche alle einzelnen Reibungen überwinden soll, so muss für den Zustand des Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der Kräfte, welche die Bewegung in einem Sinne bewirken, gleich sein der Summe der statischen Momente der Kräfte, welche die Bewegung im entgegengesetzten Sinne hervorrufen, also:

$PR = r_1\, x_1 + r_2\, x_2 + r_3\, x_3 + \ldots r_n\, x_n$, wo R den Halbmesser des Zapfens, $x_1\ x_2\ x_3 \quad x_n$ die Entfernungen der einzelnen Flächenelemente der Basis vom Mittelpunkte o_1 bedeuten. Nun wissen wir, dass der Reibungswiderstand bei der gleitenden Reibung dem Drucke direct proportional ist, da nach der Erfahrung die Grösse der Berührungsfläche auf die Grösse der Reibung keinen Einfluss hat; daher

$$r_1 = m\, q_1 \quad r_2 = m\, q_2 \quad r_3 = m\, q_3 \ldots \quad r_n = m\, q_n$$

wo m den Reibungscoëfficienten (d. h. das constante Verhältniss zwischen Reibung und Druck bedeutet, der für die ganze Basisfläche derselbe ist, weil Flächen von ungeänderter Beschaffenheit über einander gleiten. Die Weite substituirt, ist

$$PR = mq_1\, x_1 + mq_2\, x_2 + mq_3\, x_3 + \ldots mq_n\, x_n$$
$$= m\, [q_1\, x_1 + q_2\, x_2 + \ldots q_n\, x_n]$$

Nun verhält sich: $q_1 : Q = f_1 : F.$
$q_2 : Q = f_2 : F.$
$q_n : Q = f_n : F.$, mithin ist:

$q_1 = Q\,\dfrac{f_1}{F}$, $q_2 = Q\,\dfrac{f_2}{F}$, $q_3 = Q\dfrac{f_3}{F} \ldots$ $q_n = Q\,\dfrac{f_n}{F}$, subst.

so: $PR = m\,\dfrac{Q}{F}\,[f_1\, x_1 + f_2\, x_2 + \ldots\ldots f_n\, x_n]$

$$PR = m\,\frac{Q}{F}\,\Sigma\,(fx) \qquad 1)$$

Um den $\Sigma\,(fx)$ für eine kreisförmige Basis des Zapfens zu finden, theile man den Halbmesser R in eine sehr grosse Anzahl (n) gleicher Theile und zerlege durch concentrische Kreise die ganze Kreisfläche in n Kreisringe von sehr geringer Dicke, suche fx für jeden einzelnen Ring auf, und summire die Resultate, so erhält man die $\Sigma\,(fx)$ für die ganze Basisfläche.

$$\Sigma (fx) = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots f_n x_n = 2 \pi x_1 x_1 x_1 + 2 \pi 2 x_1 . x_1 2 x_1 + \ldots 2 \pi n x_1 x_1 n x_1$$

$$\Sigma (fx) = 2 \pi x_1^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2]$$

$$= 2 \pi x_1^3 \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \quad n x_1 = R, \text{ so}$$

$\Sigma (fx) = 2 \pi \frac{R^3}{n^3} \frac{n^3}{3} = {}^2/_3 \pi R^3$, wenn man gleich das 2. und 3. Glied als unendlich klein weglässt, indem ja n unendlich gross angenommen werden muss.

Substituirt man den so gefundenen Werth in die Gleichung 1),

so $PR = m \frac{Q}{F} . {}^2/_3 F R$ und

$P = {}^2/_3 m Q$. 2), d. h. jene Kraft, die an der Peripherie des Zapfens angebracht, der Reibung das Gleichgewicht halten würde. Nun ist:

$P_1 = m Q$ ... für einen liegenden Zapfen,

daher: $P = {}^2/_3 P_1$, d. h. die Reibung am stehenden Zapfen ist bei sonst gleichen Umständen gleich ${}^2/_3$ von der Reibung am liegenden Zapfen.

Hat der stehende Zapfen die Form eines kreisförmigen Ringes, dessen Halbmesser R und r sind, so ist

$$P_2 = m \frac{Q}{F} \Sigma (fx);$$

Nun ist $\Sigma (fx) = {}^2/_3 \pi R^3 - {}^2/_3 \pi r^3 = {}^2/_3 \pi (R^3 - r^3)$

und $F = \pi (R^2 - r^2)$, demnach

$$P_2 = m \frac{Q}{F} {}^2/_3 \pi (R^3 - r^3)$$

$P_2 = {}^2/_3 m Q \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ 3) Grösse der Reibung am stehenden ringförmigen Zapfen.

Die unterirdischen Abflüsse des Oceans und aller grösseren Binnenseen.

Von Med. Dr. *Alois Nowak* in Prag.

(Fortsetzung von S. 139).

Legt man der Berechnung das Stromgebiet und die Abfuhr des St. Lorenzo zu Grunde, ersteres = 18.600 d. Quadr.-Meilen, letztere nach Darby jährlich nahe an 500.000 Millionen Kubikmeter, dann würden sämmtliche Stromgebiete über 65 Billionen Kubikmeter oder nahe an 159 d. Kubikmeilen in's Weltmeer liefern. Betrachtet man endlich den Wasserreich-