Ueber die Fortschreitung ebener Lnftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Von Dr. O. TUMLIRZ.

I.

Für den Fall, dass eine Welle von *unendlich kleinen* Verdichtungen oder Verdünnungen fortschreitet, findet stets zwischen der Molekulargeschwindigkeit u und der entsprechenden Dichtigkeit ϱ eine bestimmte Beziehung statt, deren Ausdruck

$$u = \frac{1}{a}\int \frac{\gamma \varkappa \varrho^{\gamma-1}}{\varrho}\, d\varrho$$

ist, wo $p = \varkappa \varrho^{\gamma}$ das Poissonsche Gesetz, $a = \sqrt{\varkappa \gamma \varrho_0^{\gamma-1}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet. Unter Berücksichtigung der unendlich kleinen Verdichtungen können wir $a = \sqrt{\varkappa \gamma \varrho^{\gamma-1}}$ setzen und demgemäss

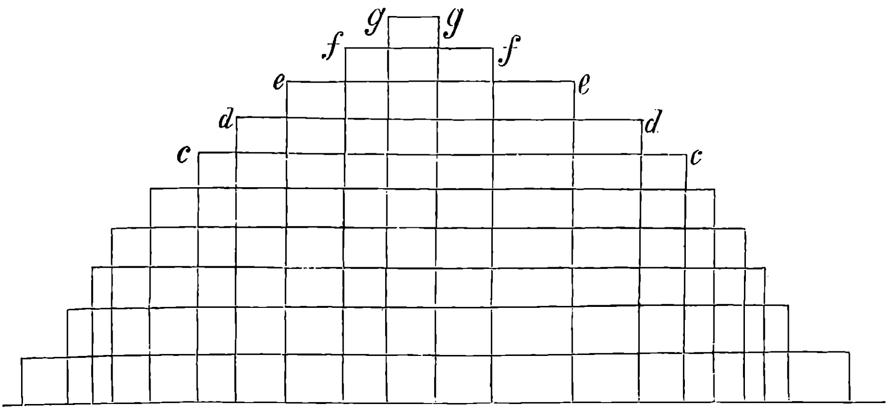
$$u = \int \sqrt{\varkappa \gamma \varrho^{\gamma-1}}\, d \log \varrho = f(\varrho) - f(\varrho_0)$$

wenn ϱ_0 die Dichtigkeit in der Gleichgewichtslage bezeichnet.

Auf dieses Gesetz wollen wir nun die Beziehung zwischen der Molekulargeschwindigkeit und Dichtigkeit bei *endlichen* Verdichtungen und Verdünnungen zurückführen.

Wir betrachten zu dem Ende die Curve der Verdichtungen in einer Form, in der die einzelnen Verdichtungen gegeneinander in besonderer Weise hervorgehoben sind; alsdann ist unmittelbar klar, dass für die Fortpflanzung der Dichtigkeit g bloss der Zustand in f massgebend sein wird, da sie sich in diesem vollständig eingeschlossen und mithin von den andern abgesondert findet. Dasselbe gilt betreffs der Fortpflanzung von f. Für dieses ist nur e massgebend, für e nur d, für d nur c u. s. w. Da nun die Verdichtung in g von der in f unendlich wenig verschieden ist, so wird obiges Gesetz unmittelbar zur Anwendung kommen.

Fig. 1.



Bezeichnen wird demnach mit $u\ u'\ u'' - u^{(n)}$ und $\varrho\ \varrho'\ \varrho'' - \varrho^{(n)}$ die Molekulargeschwindigkeiten resp. die Dichtigkeiten in g, f, e, d — so wird

$$u - u' = f(\varrho) - f(\varrho')$$

sein. Ganz dasselbe gilt betreffs der Fortpflanzung von f im Medium e nämlich

$$u' - u'' = f(\varrho') - f(\varrho''),$$

ebenso für e im Medium d u. s. w., so dass wir schliesslich erhalten:

$$u^{(n-1)} - u^{(n)} = f(\varrho^{(n-1)}) \quad f(\varrho^{(n)}).$$

Durch Addition dieser sämmtlichen Gleichungen erhalten wir dann

$$u - u^{(n)} = f(\varrho) - f(\varrho^{(n)})$$

Hätte nun das Medium, in dem die Bewegung vor sich geht, überall dieselbe Dichtigkeit $\varrho^{(n)}$ und dieselbe Molekulargeschwindigkeit $u^{(n)}$ (also eine Strömungsgeschwindigkeit $u^{(n)}$), dann würde in allen Bewegungszuständen u *eine ganz bestimmte Function von* ϱ *sein und umgekehrt.* So lange aber $u^{(n)}$ und $\varrho^{(n)}$ sich ändern, ändert sich auch die Beziehung zwischen u und ϱ. *Diesen letzteren Fall wollen wir nun etwas näher ins Auge fassen.*

II.

Wir betrachten zu dem Ende eine Gleichgewichtsstörung, die sich auf ein endliches Gebiet erstrecken möge, das durch die

Ungleichheiten $a < x < b$ bestimmt ist. Für alle x, die grösser als b sind, mögen ϱ und u die Werte ϱ_2 u_2, für alle x unter a die Werte ϱ_1 u_1 haben.

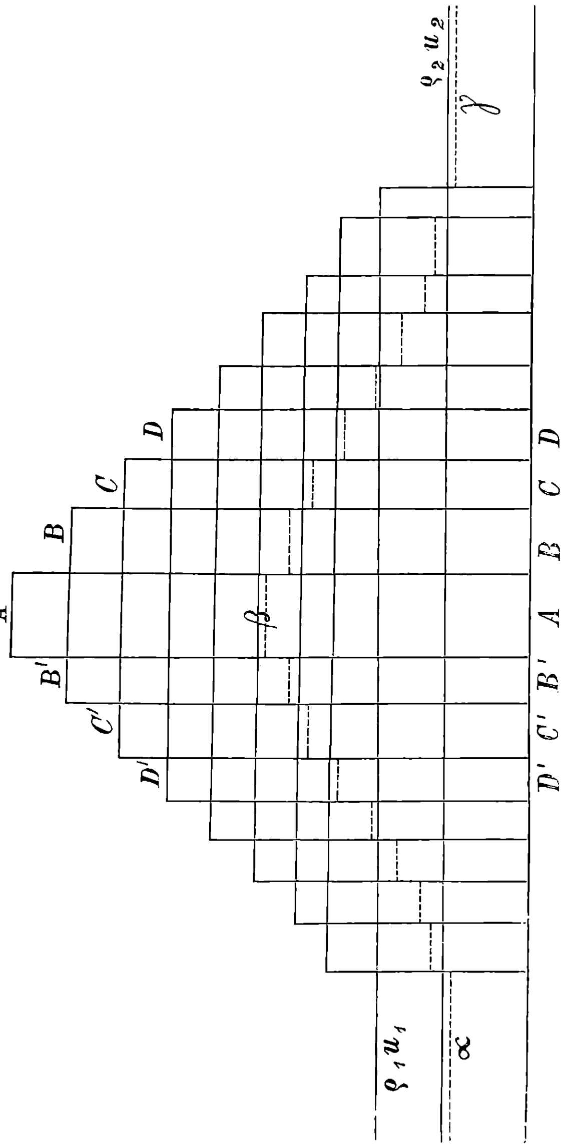


Fig. 2.

Diese Gleichgewichtsstörung wird sich in zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortlaufende Verdichtungs- (resp. Verdünnungs-) Wellen teilen und zwar in der Weise, dass jede Verdichtung (resp. Verdünnung) sich so teilt. Die Molekulargeschwindigkeiten in den fortschreitenden Verdichtungen (resp. Verdünnungen) werden desto grösser sein, je grösser die ursprüngliche Verdichtung (Verdünnung) war. Da auf diese Weise von jeder Verdichtung (AA, BB —) zwei nach entgegengesetzten Richtungen laufende Verdichtungen ausgehen, so können wir den ganzen Vorgang uns so vorstellen, als würden sich zwei Wellen, von denen die eine die nach rechts, die andere die nach links gehenden Verdichtungen enthält, durchdringen. Diese denken wir uns dargestellt durch die doppelt zunehmende Curve $\alpha \beta \gamma$ —, die nach rechts gehende Welle möge mit *II*, die andere mit *I* bezeichnet werden. Alsdann wird jede Verdichtung der *II* mit allen Verdichtungen der *I*, die sich vor ihr befinden, nach und nach zusammentreffen und dadurch einen immer anderen Bewegungszustand erzeugen.

Trifft z. B. die aus *AA* nach rechts abgehende Dichtigkeit $\frac{1}{2}\varrho_n$ mit der aus *BB* nach links gehenden $\frac{1}{2}\varrho_{n+1}$ zusammen, so entsteht eine neue Dichtigkeit

$$= \frac{\varrho_n + \varrho_{n+1}}{2},$$

die kleiner als ϱ_n und grösser als ϱ_{n+1} aber von beiden unendlich wenig verschieden ist. In *AA* war nun zur Zeit $t = \theta$ die Molekulargeschwindigkeit $= \theta$; es trafen dort gleichsam der Zustand n_2 mit dem n_1 zusammen. Daher wird unter Anwendung obigen Gesetzes die Molekulargeschwindigkeit beim Zusammentreffen von n_2 mit $(n+1)_1$

$$u_{n,\, n+1} = f(\varrho_n) - f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+1}}{2}\right)$$

oder

$$u_{n,\, n+1} = f(\varrho) - f(\varrho_{n+1})$$

sein. Bezeichnen wir die Werte $f(\varrho)$ in *AA*, *BB*, — — je nachdem wir die daraus fortschreitenden Verdichtungen als nach rechts oder links abgehend betrachten mit

$$\begin{array}{lccccc} & 2r_n & 2r_{n+1} & — — — & 2r_{n+\gamma} \\ \text{resp.} & 2s_n & 2s_{n+1} & — — — & 2s_{n+\gamma}, \end{array}$$

so können wir obige Gleichungen auch so schreiben:

$$f(\varrho) + u_{n,\, n+1} = 2r_n$$

$$f(\varrho) - u_{n,\, n+1} = 2s_{n+1}$$

Nehmen wir nun allgemein an, dass beim gegenseitigen Durchdringen der beiden Wellen $\frac{1}{2}\varrho_n$ mit $\frac{1}{2}\varrho_{n+\gamma}$ zusammenkommt, dann wird die resultirende Dichtigkeit gleich

$$\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma}}{2}$$

sein. Unmittelbar vorher war ϱ_n mit $\varrho_{n+\gamma-1}$ und ϱ_{n+1} mit $\varrho_{n+\gamma}$ zusammengetroffen; dies gab die Dichtigkeiten

$$\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma-1}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_{n+1} + \varrho_{n+\gamma}}{2}$$

welche von der ersteren unendlich wenig verschieden sind.

Bezeichnen wir die sich jetzt ergebende Molekulargeschwindigkeit mit $u_{n,n+\gamma}$ so wird wieder

$$u_{n,n+\gamma} - u_{n,n+\gamma-1} = f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma-2}}{2}\right) - f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right)$$

und

$$u_{n,n+\gamma} - u_{n+1,n+\gamma} = f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right) - f\left(\frac{\varrho_{n+1} + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right)$$

sein. Aber ebenso gelten die Beziehungen

$$u_{n,n+\gamma-1} - u_{n,n+\gamma-2} = f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma-2}}{2}\right) - f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma-1}}{2}\right)$$

— — — — — — —

$$u_{n,n+1} - u_{n,n} = u_{n,n+1} = f(\varrho_n) - f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+1}}{2}\right)$$

und durch Addition

$$u_{n,n+\gamma} = f(\varrho_n) - f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right) = 2r_n - f(\varrho);$$

ferner gilt auch

$$u_{n+1,n+\gamma} - u_{n+2,n+\gamma} = f\left(\frac{\varrho_{n+1} + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right) | f\left(\frac{\varrho_{n+2} + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right)$$

— — — — — — — —

$$u_{n+\gamma-1,\, n+\gamma} - u_{n+\gamma,\, n+\gamma} = u_{n+\gamma-1,\, n+\gamma} =$$

$$= f\left(\frac{\varrho_{n+\gamma-1} + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right) - f\,(\varrho_{n+\gamma})$$

und durch Addition

$$u_{n,\, n+\gamma} = f\left(\frac{\varrho_n + \varrho_{n+\gamma}}{2}\right) - f\,(\varrho_{n+\gamma})$$

oder

$$u_{n, n+\gamma} = f\,(\varrho) - 2s_{n+\gamma},$$

so dass u und ϱ des neuen Zustandes durch die beiden Beziehungen

$$f(\varrho) + u = 2r_n$$

$$f\,(\varrho) - u = 2s_{n+\gamma}$$

bestimmt sind.

Trifft nun irgend eine Dichtigkeit der II — $\frac{\varrho_n}{2}$ — mit $\frac{\varrho_2}{2}$ zusammen, so werden ϱ und u

durch $f\,(\varrho) + u = 2r_n$

$$f\,(\varrho) - u = 2s_2 = f\,(\varrho_2)$$

gegeben sein. ϱ_2 gehört aber nicht mehr dem Gebiete der Gleichgewichtsstörung an und ist für alle x, die grösser als b sind, constant, mithin folgt aus der zweiten Gleichung, dass sobald irgend eine Verdichtung der II mit $\frac{\varrho_2}{2}$ zusammentrifft, *u und ϱ durch eine ganz bestimmte Funktion aneinander geknüpft sind.* (Dabei müssen wir uns vorstellen, dass auch die Dichtigkeiten ϱ_1 und ϱ_2 sich ergeben aus zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitenden Wellen von der constanten Dichtigkeit $\frac{\varrho_1}{2}$ resp. $\frac{\varrho_2}{2}$). Haben beide Wellen I und II sich getrennt, dann wird sich zwischen ihnen ein Zustand herstellen, der durch die Gleichungen

$$f\,(\varrho) + u = 2r_1$$

$$f\,(\varrho) - u = 2s_2$$

bestimmt ist.

III.

Betrachten wir nun die Differentialgleichungen der Bewegung ebener Luftwellen in einer cylinderischen Röhre, deren Axe mit der xAxe zusammenfallen mag, ohne Rücksicht auf die Reibung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -p'\frac{\partial log\varrho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial log\varrho}{\partial t} + u\frac{\partial log\varrho}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Wird die letztere mit $\pm\sqrt{p'}$ multiplicirt und zur ersteren addirt, so ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm \sqrt{p'}\frac{\partial log\varrho}{\partial t} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \sqrt{p'}\frac{\partial log\varrho}{\partial x}\right) =$$

$$= \mp\sqrt{p'}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \sqrt{p'}\frac{\partial log\varrho}{\partial x}\right).$$

Da nun in den beiden Wellen I und II nach ihrer Trennung u eine bestimmte Funktion von ist, so wird

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial x}$$

sein, wodurch sich obige Gleichung zu

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (u \pm \sqrt{p'})\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm \sqrt{p'})\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

gestaltet. Addiren wir zur letzten Gleichung, nachdem sie mit dt multiplicirt wurde, die identische Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = 0,$$

so erhalten wir

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left\{dx - (u \pm \sqrt{p'})\,dt\right\}.$$

Ganz ebenso können wir erhalten

$$d\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial x}\left\{dx - (u \pm \sqrt{p'})\,dt\right\}.$$

Fassen wir nun die Fortbewegung eines bestimmten Bewegungszustandes d. h. eines bestimmten u oder ϱ ins Auge, so haben wir $du = 0$ resp. $d\varrho = 0$ zu setzen und erhalten dadurch

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{p'},$$

d. h. die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieses bestimmten u oder ϱ ist $u \pm \sqrt{p'}$

Durch Integration der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm \sqrt{p'})\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (u \pm \sqrt{p'})\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0$$

erhalten wir

$$u = \Phi\left\{x - (u \pm \sqrt{p'})\, t\right\}$$
$$\varrho = \Psi\left\{x - (u \pm \sqrt{p'})\, t\right\}$$

wo Φ und Ψ beliebige Funktionen bezeichnen.

Fast dieselben Gleichungen bekamen auf einem anderen Wege Poisson (Journal de l'école polytechnique 14) und Lagrange (Memoires de Turin tome II) und zwar ersterer

$$u = f\left\{x - (\sqrt{\mu} + u)\ \mathrm{t}\right\}$$

letzterer $$u = f\left\{x - \left[\sqrt{\mu} + f(x - \sqrt{\mu}\, t)\right] t\right\},$$

wo $\mu = \frac{p}{\varrho}$ ist.

IV.

Aus Obigem würde folgen, dass jedes ϱ und jedes u sich unverändert mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzen wird. Suchen wir z. B. das Maximum der Dichtigkeit oder der Molekulargeschwindigkeit zu irgend einer Zeit t, so werden wir in

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi'\left\{x - (u \pm \sqrt{p'})\ t\right\}\left\{1 - t\left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial \sqrt{p'}}{\partial x}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

zu setzen haben, wodurch (unter Annahme, dass $\sqrt{p'}$ als die constante Schallgeschwindigkeit $[= a]$ genommen wird)

$$\Phi'\left\{x - (u \pm \sqrt{p'})\right\} = 0$$
$$x - (u \pm \sqrt{p'})\, t = \text{const.}$$
$$u_{max} = \Phi\ (\text{const.}) = \text{const.}$$

d. h. von der Zeit unabhängig wird.

Aus obiger Beziehung für u und ϱ lässt sich noch eine weitere Folgerung ziehen:

Die verschiedenen u und ϱ schreiten mit verschiedener Geschwindigkeit fort; es werden daher die grösseren ϱ und u die kleineren vorangehenden in kurzer Zeit einholen. Dadurch entsteht aber in der Dichtigkeitscurve ein Sprung, eine Unstetigkeit, indem mehreren Dichtigkeiten oder Molekulargeschwindigkeiten dieselbe Abszisse x zukommen wird. Die Zeit t, zu welcher bei irgend einem u ein Sprung eintritt, können wir genau bestimmen, denn für dieses t wird $\frac{\partial u}{\partial x} = \infty$, wodurch wir aus der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi' \left\{ x - (u + \sqrt{p'})\, t \right\} \left[1 - \left(1 \pm \frac{\partial \sqrt{p'}}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

wenn dieselbe durch $\frac{\partial u}{\partial x}$ dividirt und $\frac{\partial \sqrt{p'}}{\partial u} = 0$ angenommen wird,

$$1 = - \Phi' [x - (u \pm \sqrt{p'})\, t].\, t$$

oder

$$x - (u + \sqrt{p'})\, t = X(t)$$

$$u = \Phi_1 (t)$$

$$t = \Phi_2 (u)$$

erhalten. Ist z. B. $u = A \sin [x - (u + \sqrt{p'}) t]$

so ist

$$A^2 \cos^2 [x - (u \pm \sqrt{p'})\, t] = \frac{1}{t^2}.$$

Nun ist

$$A^2 \, Sin^2 [x - (u \pm \sqrt{p'})\, t] = u^2,$$

mithin

$$A^2 - u^2 = \frac{1}{t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{A^2 - u^2}}.$$

t ist ein Minimum für $u = \theta$ ein Maximum für $u = A$.

Aus der Gleichung

$$\Phi' \left\{ x - (u \pm \sqrt{p'})\, t \right\} = - \frac{1}{t}$$

ersieht man, dass bei jenem u, bei dem zur Zeit $t = 0$ $\Phi' (x)$ ein Maximum oder ein Minimum ist, die Unstetigkeit zuerst resp. zuletzt eintreten wird. Denn da

$$u = \Phi (x) = \Phi [x + x' - (u \pm \sqrt{p'})\, t]$$

ist, wo

$$x' = (u \pm \sqrt{p'})\, t$$

ist, so wird auch

$$\Phi'(x) = \Phi'[x + x' - (u \pm \sqrt{p'})\, t]$$

oder

$$\Phi'(x) = -\frac{1}{t}$$

$$t = -\frac{1}{\Phi'(x)}$$

sein.

Um noch das Geschwindigkeitspotentiat φ zu bestimmen, setzen wir

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

in die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm \sqrt{p'})\frac{\partial u}{\partial x} = \theta$$

ein und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \pm \sqrt{p'}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right\} = \theta$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \pm \sqrt{p'}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = \Omega(t).$$

Für unendlich kleine Amplituden ist $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = \theta$, $\Omega(t) = \theta$ zu setzen. Nehmen wir auch für diesen Fall $\Omega(t) = \theta$ so wird die allgemeinste Lösung dieser partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \varphi = c\left\{x - \left(\pm \sqrt{p'} + \frac{1}{2}c\right) t\right\} + \Psi(c) \\ \theta = x \mp \sqrt{p'}\, t - ct + \Psi'(c) \end{cases}$$

sein, wo c nach näherer Bestimmung von $\Psi(c)$ aus beiden Gleichungen zu eliminiren ist.

V.

Eine solche Fortbewegung aber wie sie sich in der Gleichung

$$u = \Phi[x - (u \pm \sqrt{p'})\, t]$$

ausspricht, kann höchstens nur im Anfange, so lange sie dem Princip der Energie nicht widerspricht, bestehen, denn schon der Umstand, dass der Unterschied der von zwei von einander um ein endliches verschiedenen u zurückgelegten Wegstrecken für ein unendlich grosses t auch unendlich gross wird, beweisst hinlänglich, dass jene Bewegung nur im Anfange nicht aber für die Dauer mit dem Princip der Energie in Uebereinstimmung stehen kann. Wir wollen nun im folgenden den Einfluss dieses Prinzips näher untersuchen.

Der Zuwachs an totaler Energie, den ein System von Massenpuncten während eines Zeitelementes erfährt, ist stets der ihm während dieser Zeit von aussen zugeführten Arbeit gleich oder

$$dE = d\Pi.$$

Daher entspricht die totale Energie der Gleichgewichtsstörung einem bestimmten Betrage geleisteter Arbeit äusserer Kräfte und ist gleich der Summe der totalen Energien der beiden Wellen, die daraus hervorgehen. Die Energie einer jeden dieser Wellen entspricht aber auch einem bestimmten Betrage geleisteter Arbeit äusserer Kräfte und bleibt daher während der Fortpflanzung *constant,* da hiebei keine weiteren äusseren Kräfte zur Arbeitsleistung gelangen.

Die totale Energie ist gleich der Summe aus der potentiellen und actuellen Energie. Die erstere ergibt sich auf folgende Weise: dV sei das Volumen einer Schichte in der Welle. Wenn dasselbe sich in Folge des in ihm herrschenden Ueberdruckes ausdehnt zum Volumen $dV\ (1+s)$, so dass dann die Dichte gleich ϱ_0 ($=$ Dichtigkeit in der Gleichgewichtslage) wird, so wird die darin enthaltene Masse dieselbe bleiben, also

$$dV.\,\varrho = dV\varrho_0\,(1+s)$$

oder

$$\varrho = \varrho_0\,(1+s)$$

sein. Wird während dieses Vorganges dV zu $dV\ (1+s')$, dann muss

$$dV(1+s')\,\varrho' = dV\varrho_0\,(1+s)$$

sein oder

$$\varrho' = \varrho_0\,\frac{1+s}{1+s'}.$$

Ist nun das Druckgesetz

$$p = a^2\varrho,$$

dann wird der Ueberdruck

$$dp = a^2\,(\varrho'-\varrho_0) = a^2\,\varrho_0\,\frac{s-s'}{1+s'}$$

sein. Im nächsten Augenblicke hat $dV\,(1+s')$ um $dV.\,ds'$ zugenommen, mithin hat die geleistete Arbeit den Betrag

$$dV\,ds'.\,a^2\,\varrho_0\,\frac{s-s'}{1+s'},$$

und für die ganze Ausdehnung:

$$a^2\,\varrho_0\,dV\int\frac{s-s'}{1+s'}\,ds' = a^2\,\varrho_0\,dV\left[(1+s)\,log\,(1+s)-s\right].$$

Für die *potentielle Energie* der ganzen Welle erhalten wir somit

$$E_p = a^2\,\varrho^0\int dV\left[\,(1+s)\,log\,(1+s)-s\,\right]$$

oder

$$= a^2\,\varrho_0\int\left[\,(1+s)\,log\,(1+s)-s\,\right]dx$$

wenn wir die Bewegung in einer Röhre vom Querschnitte 1 betrachten, und für die actuelle Energie (lebendige Kraft)

$$E_l = \frac{1}{2}\int\varrho\,u^2\,dV.$$

Für unendlich kleine Schwingungen können wir s^3 vernachlässigen und erhalten, da $u=\pm as$ ist,

$$E_p = a^2\,\varrho_0\int\left[\,(1+s)\,(s-\frac{1}{2}\,s^2)-s\,\right]dx = \frac{1}{2}\,a^2\,\varrho_0\int s^2\,dx$$

$$E_l = \frac{1}{2}\,a^2\,\varrho_0\int(1+s)\,s^2\,dx = \frac{1}{2}\,a^2\,\varrho_0\int s^2\,dx$$

also

$$E_l = E_p.$$

VI.

Haben wir es mit Schwingungen von endlicher Amplitude zu thun dann wird sich, solange u eine veränderliche Function von ϱ ist, sowol die actuelle wie die potentielle Energie ändern, so aber, dass ihre Summe constant bleibt. Denn betrachten wir ein bestimmtes r,*) so werden sich ϱ und u so lange ändern, als sich s ändert, daher wird sich auch die Funktion unter dem Integralzeichen in dem Ausdrucke für E_p fortwährend ändern. Haben aber die beiden Wellen sich vollständig getrennt, dann ist in jeder derselben überall u eine bestimmte Funktion von ϱ, und wir können alsdann sowohl in dem Ausdruck für E_p wie in dem für E_l die Funktion unter dem Integralzeichen als eine Funktion von ϱ allein ausdrücken, die mit ϱ zugleich wächst und abnimmt. Diese Funk-

*) Vergl. Art. II.

tionen sind ferner stets *positiv* und *endlich* und die Integrazionsgrenzen für beide Fälle dieselben.

Da nun

$$E_p + E_l = \int_{at}^{at+\lambda} \left[a^2 \varrho_0 \left\{ (1+s) \log (1+s) - s \right\} + \frac{1}{2} \varrho u^2 \right] dx = const.$$

ist, wo $x = at$ und $x = at + \lambda$ die Grenzen der Welle bezeichnen, so muss

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_l}{\partial t} = 0$$

oder

$$0 = \left[a^2 \varrho_0 \left\{ (1+s) \log (1+s) - s \right\} + \frac{1}{2} \varrho u^2 \right]_{at}^{at+\lambda}$$

$$+ \int_{at}^{at+\lambda} \left[a^2 \varrho_0 \log \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\varrho u^2)}{\partial \varrho} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right] dx$$

sein. Für $x = at$ und $x = at + \lambda$ ist aber $s = 0$ und $u = 0$, daher erhalten wir

$$\int_{at}^{at+\lambda} \left[a^2 \varrho_0 \log \varrho + \frac{1}{2} \frac{\partial (\varrho u^2)}{\partial \varrho} \right] \frac{\partial \varrho}{\partial t} dx = 0$$

Nun gilt aber für die Fortpflanzung der Wellen die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (u \pm \sqrt{p'}) \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0;$$

demnach gestaltet sich die frühere Beziehung zu

$$\int_{at}^{at+\lambda} \left[a^2 \varrho_0 \log \varrho + \frac{1}{2} \frac{\partial (\varrho u^2)}{\partial \varrho} \right] (u \pm \sqrt{p'}) \frac{\partial \varrho}{\partial x} dx = 0,$$

und dies gilt welchen Wert t auch haben mag. Für ein bestimmtes t ist ϱ bloss eine Function von x, mithin

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} dx = d\varrho;$$

und da wir den Fall betrachten, dass sich die beiden Wellen bereits vollständig getrennt haben, so erhalten wir unter dem Integralzeichen bloss eine Function von ϱ, die wir mit $f(\varrho)$ bezeichnen wollen. Was die Grenzen anbelangt, so entspricht den Abszissen $x = at$ und $x = at + \lambda$ $\varrho = \varrho_0 = 1$. Theilen wir nun das Integrationsgebiet in zwei Theile von 1 bis $\varrho_{max.}$ und von $\varrho_{max.}$ bis 1, so erhalten wir:

$$\int_1^{\varrho_{max.}} f(\varrho)\, d\varrho + \int_{\varrho_{max.}}^1 f(\varrho)\, d\varrho = \theta$$

oder

$$\theta = \lim \Sigma \left\{ f(\varrho_1)(\varrho_1 - \varrho_0) + \quad f(\varrho_{\max})(\varrho_m - \varrho_{m\ 1}) + \cdots f(\varrho)(\varrho_0 - \varrho_1) \right\}$$

Im Hinterteile der Welle liegen zwischen ϱ_0 und $\varrho_{\max}$ dieselben ϱ wie zwischen $\varrho_{\max}$ und ϱ_0 im Vorderteile, daher tritt das Nullwerden durch gegenseitiges Aufheben der Glieder ein.

Sollte nun einmal eine Unstetigkeit eintreten, so werden dort mehrere ϱ ausfallen. Da aber die Energie stets constant sein muss, so müsste dann

$$\theta = \lim \Sigma \left\{ f(\varrho_1)(\varrho_1 - \varrho_0) + \cdots f(\varrho_n)(\varrho_n - \varrho_{n-1}) + \right.$$
$$\left. f(\varrho_{n-r})(\varrho_{n-r} - \varrho_{n-r-1}) + \cdots f(\varrho_1)(\varrho_0 - \varrho_1) \right\}$$

sein; aber durch Subtraction von der obigen Gleichung bekämen wir dann

$$\theta = \lim \Sigma \left\{ f(\varrho_{n+1})(\varrho_{n+1} - \varrho_n) + \cdots f(\varrho_{n-r-1})\ \varrho_{n-r-1} - \varrho_{n-r-2}) \right\},$$

was nicht sein kann, da alle diese Glieder gleiche Vorzeichen haben. Nach dem Principe von der Erhaltung der Kraft darf also kein Glied ausfallen, also *keine Unstetigkeit* eintreten, oder sie muss, falls sie in irgend einem Zeitpunkte auftreten sollte, sofort wieder verschwinden.

Eine weitere Folgerung daraus ist die, dass auch die lebendige Kraft und die potentielle Energie der Wellenbewegung jede für sich constant sein muss. Denn für die erstere ist

$$\frac{\partial E_l}{\partial t} = \int_{\varrho_0}^{\varrho_{max}} \Psi(\varrho)\, d\varrho + \int_{\varrho_{max}}^{\varrho_0} \Psi(\varrho)\, d\varrho,$$

wenn wir

$$\frac{1}{2}\frac{d(\varrho u^2)}{d\varrho} = \Psi(\varrho)$$

setzen. Da nun $\Psi(\varrho)$ endlich, stetig und eindeutig ist und kein ϱ ausfallen darf, so muss

$$\frac{\partial E_l}{\partial t} = 0$$

also

$$E_l = const.$$

und daher auch

$$E_p = const.$$

sein.

Es folgt somit, dass die ganze Bewegung durch zwei Gleichungen bestimmt ist nemlich:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm \sqrt{p'})\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und

$$\int_0^{u_{max}} \Phi(u)\, du + \int_{u_{max}}^{0} \Phi(u)\, du = 0,$$

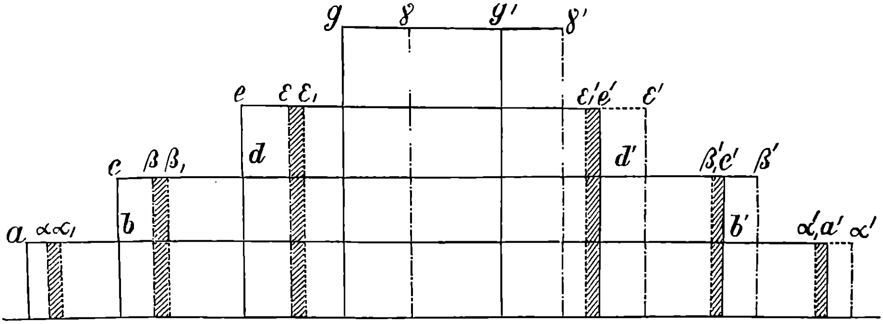
wenn wir die Function unter dem Integralzeichen in dem Ausdruck für $\frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_l}{\partial t} = 0$ als Function von u ausdrücken und mit $\Phi(u)$ bezeichnen. Die erstere Gleichung gilt nicht unbedingt, sondern nur innerhalb jener Grenzen, die durch die zweite Gleichung gezogen sind.

VII.

Der Vorgang, wie eine plötzlich eintretende Unstetigkeit sich sofort wieder auflöst, lässt sich auf eine höchst einfache und anschauliche Weise darstellen.

In beistehender Figur sei ein Teil der Welle und zwar jener, der die grössten Verdichtungen enthält, dargestellt. Im Verlaufe der Fortpflanzung treten a und b, c und d auseinander, c' und d', a' und b' dagegen näher an einander und zwar so, dass für dieselben Dichtigkeiten die Entfernung auf der einen Seite ebenso gross ist als die Annäherung auf der andern, mithin die Stücke

Fig 3.



$$g\gamma = e\varepsilon_1 \qquad e\varepsilon = c\beta_1 \qquad c\beta = a\alpha_1$$
$$g'\gamma' = \varepsilon'\varepsilon'_1 \qquad e'\varepsilon' = \beta'\beta_1{}' \qquad c'\beta' = \alpha'\alpha_1{}'$$

$a \; c \; e \; g \; g' \; e' \; c' \; a'$ entspricht der Zeit t

$\alpha \; \beta \; \varepsilon \; \gamma \; \varepsilon' \; \gamma' \; \beta' \; \alpha'$ $t + dt$

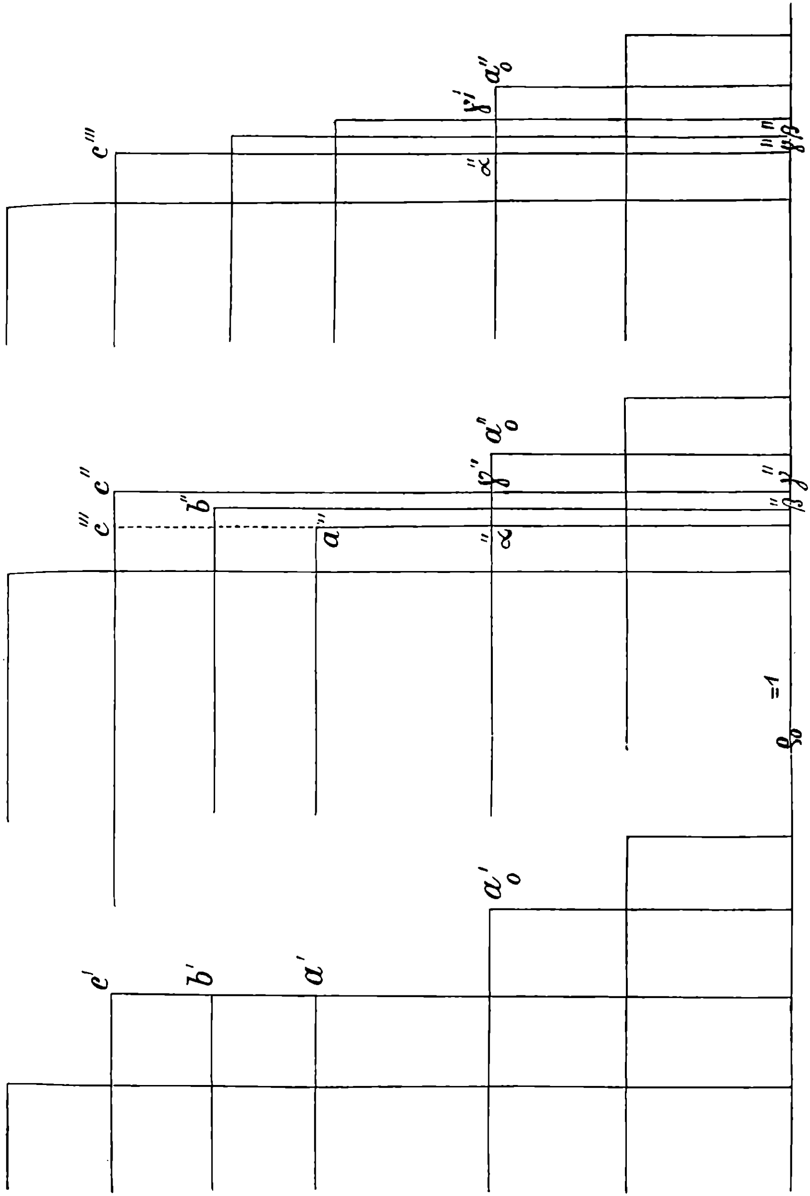
cc', aa' immer dieselben bleiben. Den schraffirten Teilen linker Hand entspricht Gewinn, denen rechter Hand Verlust an Energie. Gewinn und Verlust müssen sich vollständig compensiren. Was von diesem Teile der Welle gilt, das gilt auch von der ganzen Welle; die totale Energie kann nur dann constant sein, wenn die Verluste auf der rechten Seite die Gewinnste auf der linken compensiren.

Betrachten wir nun den Fall, dass in der Vorderseite der Welle mehrere ϱ zusammenfallen (Fig. 4). In der Hinterseite der Welle ist für die gegenseitige Beziehung dieser Dichtigkeiten gar keine Veränderung eingetreten; wir erhalten daher bei diesen im nächsten Zeitelement dt dieselben Gewinnste an Energie wie in jedem früheren, diese müssen aber durch Verluste auf der rechten Seite compensirt werden. Würden sich nun die betreffenden Dichtigkeiten mit der Geschwindigkeit $u \pm \sqrt{p'}$ fortpflanzen, so käme c' nach c'', b' nach b'', a' nach a'' (Fig. 5). Die beiden letzteren würden aber nicht weiter zu beachten sein, da sie gleichsam als ausgefallen anzusehen wären. In der Dichtigkeit entsprechend a_0'' ist dabei ein Verlust eingetreten, der um einen Betrag entsprechend $\alpha'' \gamma''$ grösser ist als der Gewinn an Energie linker Hand für dieselbe Dichtigkeit. Linker Hand sind aber bezüglich der Dichtigkeiten b'' und a'' an Energie Beträge gewonnen worden, die $b''\gamma''$ resp. $a''\beta''$ entsprechen (nach dem obigen); demnach hat in $c''\beta''$ noch ein weiterer Verlust einzutreten, und zwar muss dieser

Fig. 4.

Fig.

Fig. 6.



der Differenz $b'' \gamma'' — \gamma' \beta''$ entsprechen. Ebenso in $c''' \gamma''$. Hier muss der weitere Verlust an Energie der Differenz $a'' \beta'' — \alpha'' \beta''$ entsprechen. Auf diese Weise muss daher, da in $c''' \beta''$ an Energie verloren wurde und in $c'' \beta''$ dies in einem noch höheren Grade der Fall war, die Dichtigkeitscurve von c''' gegen a_0'' hin **stetig** abfallen (Fig. 6), und die Unstetigkeit hat sich somit aufgelöst.

Hätte sich die Dichtigkeit c' während dieses Zeitelements dt mit der frühern Geschwindigkeit $u + \sqrt{p'}$ fortgepflanzt, so wäre sie nach c'' gekommen; nun ist sie aber wie so eben gezeigt wurde thatsächlich nur bis c''' gekommen, mithin hinter c'' um $(u_{c'} — u_{a'})\, dt$ zurückgeblieben. Dadurch aber wird für die Dichtigkeiten die grösser als c' sind, die Gelegenheit die kleineren vorangehenden Dichtigkeiten einzuholen bedeutend günstiger, und somit jenes Gesetz

$$t = \Phi_2 (u)$$

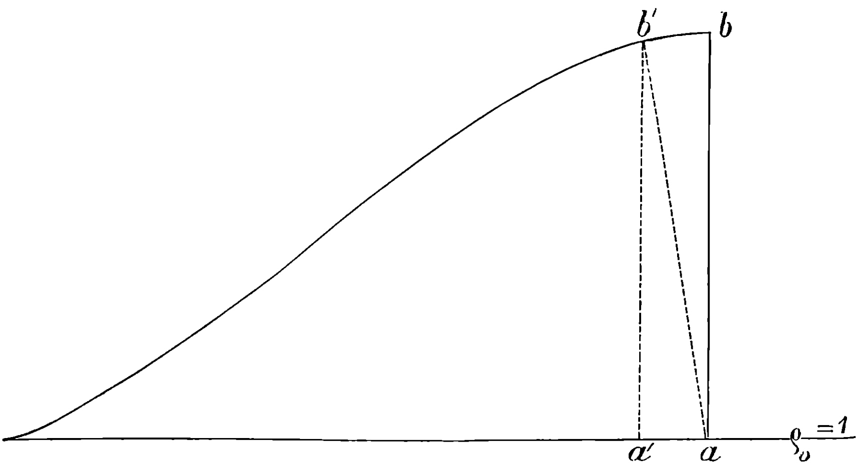
$$\text{oder } t = - \frac{1}{\Phi'(x)}$$

vollständig aufgehoben.

VIII.

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass in der Vorderseite der Welle eine Unstetigkeit eigetreten ist, in der alle in dem Vorderteil vorkommenden Dicktigkeiten zusammengefallen sind, was nach obigem bei jeder Welle nach einer gewissen Zeit eintreten wird. Alsdann

Fig. 7.



wird sich diese Unstetigkeit sofort auflösen und in die stetig abfallende Curve ab' übergehen. Dadurch wird aber die grösste Dichtigkeit nicht mehr ab sondern $a'b'$ sein. Diese liegt hinter jener um udt, ist also um

$$\frac{\partial u}{\partial x} udt$$

kleiner. Bezeichnen wir mit U stets die grösste in der Welle vorkommende Molekulargeschwindigkeit, so wird

$$dU = -\, {}^1/_2 \frac{\partial U}{\partial x}\, Udt$$

sein. Es muss noch $^1/_2$ eingeführt werden, da $a'b'$ im nächsten dt ungeändert bleibt. Nach diesem dt hat es a wieder eingeholt, bildet eine Unstetigkeit und sinkt dann im nächsten dt um $\frac{\partial U}{\partial x}\, Udt$, welcher Betrag also die Abnahme während $2\,dt$ bezeichnet. Hinter $a'b'$ gelten vollständig die Differentialgleichungen der Bewegung; es wird also

$$U = f\{x - (U \pm t\sqrt{p'})\, t\}$$

sein. Nun ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f'\{x - (U \pm \sqrt{p'})\, t\}\left(1 - t\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

oder

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{f'\ \{x - (U \pm \sqrt{p'})\, t\}}{1 + t.f'\ \{x - (U \pm \sqrt{p'})\, t\}}$$

daher

$$dU = -\, {}^1/_2 \,.\frac{f'\{(x - (U \pm \sqrt{p}\, t')\}}{1 + tf'\ \{x - (U \pm \sqrt{p'})\, t\}}\, Udt.$$

Nun folgt aus

$$U = f\ \{x - (U \pm \sqrt{p'})\, t\}$$

$$x - (U \pm \sqrt{p'})\, t = X(U),$$

somit

$$f'(x - (U \pm \sqrt{p'})\, t\} = \Phi(U),$$

daher wird

$$dU = -\, {}^1/_2\, \frac{\Phi(U)}{1 + t\Phi(U)}\, U.dt$$

$$\frac{dt}{dU}+\frac{2}{U}.t=-\frac{2}{U\Phi(U)}$$

also

$$t=\frac{C}{U^2}-\frac{2}{U^2}\int\frac{UdU}{\Phi(U)}.$$

Zälen wir die Zeit vom Beginn der Bewegung der Welle und ist τ die Zeit des Eintritts jener Unstetigkeit, so haben wir statt t zu setzen $t-\tau$; mithin wird

$$t-\tau=\frac{C}{U^2}-\frac{2}{U^2}\int\frac{UdU}{\Phi(U)}.$$

Bedeutet A die Molekulargeschwindigkeit in ab zur Zeit τ (also die Geschwindigkeit in der Unstetigkeitsstelle), so wird

$$C=2\int^{A}\frac{UdU}{\Phi(U)}$$

und

$$t-\tau=\frac{2}{U^2}\int_U^A\frac{UdU}{\Phi(U)}.$$

Beispiel. IX.

Ist zur Zeit $t=\theta$ $u=A\,Sin\,\alpha x$

und $A=46^{m}$ (entsprechend $s=\frac{\varrho}{\varrho_0}-1=0{\cdot}15$) $\alpha=100$, so dass die Länge der Welle $=3{\cdot}14^{cm}$ ist, und setzen wir voraus, dass zur Zeit τ in ab $u=A$ ist so wird

$$f'\{x-(U+\sqrt{p'})t\}=\Phi(U)=\alpha\sqrt{A^2-U^2}$$

und

$$t-\tau=\frac{2}{\alpha U^2}\sqrt{A^2-U^2}$$

sein. Ist ferner t_1 die Zeit, zu welcher U bis auf den Wert 1 herabgesunken ist (das entsprechende ϱ ist $=1{\cdot}0037$), so wird

$$t_1=\tau+\frac{2}{100}\sqrt{46^2-1}=\tau+\frac{46}{50}.$$

In Wirklichkeit fällt t_1 noch kleiner aus, da den grossen Molekulargeschwindigkeiten eine grosse Reibung entspricht.

Aus

$$t_1 - \tau = \frac{2}{\alpha}\sqrt{A^2 - 1}$$

ersieht man, dass t_1 desto grösser ist, je kleiner α (d. h. je länger die Welle) und je grösser A (d. i. je grösser die Verdichtung) ist.

X. Grösse der Verlängerung der Welle.

Die Grösse der Fortpflanzung der einzelnen Dichtigkeiten der Welle ist gegeben durch

$$\sqrt{p'} + u;$$

daher wird die äusserste Rückseite der Welle sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{p'}$ fortpflanzen und demnach die Verlängerung der Welle durch

$$\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t_1} U dt$$

bestimmt sein. Nun hatten wir gefunden

$$t - \tau = \frac{2}{U^2}\int_U^A \frac{UdU}{\Phi(U)}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dU} + \frac{2}{U}(t - \tau) + \frac{2}{U\Phi(U)} = 0,$$

so erhalten wir

$$dt = -\left[\frac{4}{U^3}\int_U^A \frac{UdU}{\Phi(U)} + \frac{2}{U\Phi(U)}\right] dU,$$

und

$$\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t_1} U dt = -\frac{1}{2}\int_A^1 UdU \left\{\frac{4}{U^3}\int_U^A \frac{UdU}{\Phi(U)} + \frac{2}{U\Phi(U)}\right\}$$

$$= \int_1^A dU \left\{\frac{2}{U^2}\int_U^A \frac{UdU}{\Phi(U)} + \frac{1}{\Phi(U)}\right\}.$$

Ist nun wie früher

$$\Phi(U) = \alpha\sqrt{A^2 - U^2}.$$

dann ist

$$\frac{1}{\alpha}\int_U^A \frac{U\,dU}{\sqrt{A^2 - U^2}} = +\frac{1}{\alpha}\sqrt{A^2 - U^2}$$

und

$$\frac{1}{2}\int_\tau^{t_1} U\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_1^A dU\left\{\frac{2\sqrt{A^2 - U^2}}{U^2} + \frac{1}{\sqrt{A^2 - U^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_1^A dU\left\{\frac{2A^2}{U^2\sqrt{A^2 - U^2}} - \frac{1}{\sqrt{A^2 - U^2}}\right\}$$

$$= \frac{2A^2}{\alpha}\int_1^A \frac{dU}{U^2\sqrt{A^2 - U^2}} - \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{A}\right\}.$$

Nun ist

$$\int_1^A \frac{dU}{U^2\sqrt{A^2 - U^2}} = \int_1^{\frac{1}{A}} \frac{-\frac{dv}{v^2}}{\frac{1}{v^2}\sqrt{A^2 - \frac{1}{v^2}}} = \int_{\frac{1}{A}}^1 \frac{v\,dv}{\sqrt{A^2v^2 - 1}} = \frac{1}{A^2}\sqrt{A^2 - 1}.$$

Mithin

$$\frac{1}{2}\int_\tau^{t_1} U\,dt = \frac{4\sqrt{A^2 - 1} - \pi + 2\arcsin\frac{1}{A}}{2\alpha}$$

$$= \frac{4\sqrt{A^2 - 1} - \pi + \frac{2}{A}}{2\alpha},$$

wenn wir unter der Voraussetzung des sehr kleinen Wertes von $\frac{1}{A}$ den Sinus mit dem Bogen vertauschen. Alsdann können wir aber auch

$$\sqrt{A^2-1}=A\sqrt{1-\frac{1}{A^2}}=A-\frac{1}{2A}$$

setzen, wodurch

$$\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t_1}Udt=\frac{1}{2\alpha}\left(4A-\pi+\frac{2}{A}-\frac{2}{A}\right)=\frac{1}{2\alpha}\left(4A-\pi\right)$$

wird.

Ist nun $\alpha=100$ $A=46^{\mathrm{m}}$,

dann ist

$$\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t_1}Udt=\frac{180{\cdot}86^{\mathrm{m}}}{200}=0{\cdot}9043^{\mathrm{m}}.$$

Die Welle war zur Zeit $t=0$ $3{\cdot}14^{\mathrm{cm}}$ lang und hat sich also während der Bewegung innerhalb der Zeit

$$t=\tau+\frac{46}{50}$$

auf $90{\cdot}435^{\mathrm{cm}}$

ausgedehnt.

XI.

Alles was bezüglich der Verdichtungswellen gezeigt wurde, gilt ebenso für die Verdünnungswellen. Während irgendein u in der ersteren mit der Geschwindigkeit

$$u+\sqrt{p'}$$

fortschreitet, erfolgt dies bei den Verdünnungswellen mit der Geschwindigkeit

$$-u+\sqrt{p'}.$$

Das Streben nach Bildung von Unstetigkeiten besteht bei denselben in ganz gleicher Weise und der Vorgang der Auflösung der Unstetigkeit ist vollständig derselbe. Auch die Welle erfahrt eine Verlängerung, aber im entgegengesetzten Sinne. Betrachten wir nemlich eine nach der negativen x fortschreitende Verdünnungswelle, deren Molekulargeschwindigkeit durch

$$u=f\,[x-(u-a)\,t]$$

ausgedrückt ist, so gilt bezüglich ihrer Formänderung ganz dasselbe, was wir oben bei den nach der positiven x fortschreitenden

Verdichtungswellen gesagt haben. Auch hier wird nach der Zeit τ eine Abnahme der grössten Molekulargeschwindigkeit stattfinden und zwar nach demselben Gesetze

$$dU = -\,{}^1/_2 \frac{dU}{dx}\, U dt$$

oder

$$dU = -\frac{1}{2}\frac{f'}{1+t.f'}\, U dt,$$

wo f' wieder die Derivirte von $f\{x-(U \pm \sqrt{p'})\,t\}$ nach dem Argument bezeichnet. Die Grösse der Zeit t_1 und der Wellenverlängerung, die hier im zur Fortpflanzungsrichtung entgegengesetzten Sinne eintritt, wird genau dieselbe sein wie bei einer Verdichtungswelle.

Folgt demnach auf eine Verdünnungswelle, der

$$u = f\,\{x - (\sqrt{p'} - u)\,t\}$$

entspricht, eine Verdichtungswelle, für die

$$u = f\,\{x - (\sqrt{p'} + u)\,t\}$$

gilt, so muss sich das beiderseitige Streben nach Wellenverlängerung gegenseitig aufheben.

Sie werden fort und fort an Schwingungsweite einbüssen, ohne an Länge gewinnen zu können und schliesslich zu gewöhnlichen Schallwellen herabsinken. Dies ist der Grund, warum Töne von noch so grosser Intensität sich mit der gewöhnlichen Schallgeschwindigkeit fortpflanzen und dabei zugleich an Intensität verlieren aber bezüglich ihrer Höhe ungeändert bleiben.

Anmerkung.

1) Wie aus Obigem folgt, hängt auch die Verlängerung der Welle von deren ursprünglichen Länge und Verdichtung ab, da in dem Ausdrucke für dieselbe ausser t_1 noch α und A enthalten ist.

2) Folgt auf eine Verdünnungswelle eine Verdichtungswelle von anderer Länge und anderer Verdichtung, so werden die beiderseitigen Verlängerungen sich nur teilweise aufheben können, und somit das Verhältnis der Wellenlängen sich fortwährend *ändern.*

3) Findet die Ausbreitung im *Raume* statt, dann überträgt sich die constante Energie auf immer grössere Massen, was ein zweiter Grund der Abnahme der Dichtigkeit ist. Im Raume muss daher t_1 bedeutend kleiner sein und ebenso auch die Wellenverlängerung. Die ausführliche Untersuchung dieses Falles jedoch soll den Gegenstand einer nächsten Abhandlung bilden.