

Das Potential im n -dimensionalen Raume.

Von Dr. Otto Biermann.

(Prag den 2. Januar 1885.)

Da die Frage nach der Verwendung der verallgemeinerten Potentialfunction in der Theorie der Functionen mehrerer Variablen durch die Arbeiten der Herren Kronecker ¹⁾ und Poincaré ²⁾ von Bedeutung geworden ist, beschäftigte ich mich eingehender mit der Theorie des Potentials im n -dimensionalen „ebenen“ Raume. Als ich die nachstehenden Sätze abgeleitet hatte, wobei ich vor Allem den von Riemann ³⁾ und C. Neumann ⁴⁾ vorgezeichneten Wegen gefolgt war, fand ich eine Reihe von Arbeiten, ⁵⁾ die all meine Sätze in grösserer oder geringerer Ausführlichkeit auch schon enthalten. Wenn ich meine Bearbeitung trotzdem der Oeffentlichkeit übergebe, so geschieht dies in der Meinung, dass

-
- 1) Kronecker: Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variablen. Monatsberichte d. Berliner Akad. 1869.
 - 2) Poincaré: Sur les fonctions de deux variables. Acta mathematica B. 2.
 - 3) Riemann-Hattendorf: Schwere, Elektrizität und Magnetismus.
 - 4) C. Neumann: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.
 - 5) C. Neumann: Abriss einer Theorie der Kugelfunctionen. Zeitschrift für Math. und Physik 12.

Cayley: A memoir on praepotentials. Phil. Trans. t. 165. 1876.

Schwering: Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen. Gött. Nachr. 1873.

Tonelli: Ueber die Potentialfunction in einem mehrfach ausgedehnten Raume. Gött. Nachr. 1875.

Macher: Zur Integration der part. Diffgl $\Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_v^2} = 0$ Diss. Würzburg 1878.

eine übersichtliche Darstellung der verstreut vorkommenden Sätze über das verallgemeinerte Potential, die sich denjenigen für das logarithmische und Newton'sche Potential anreihen lassen, wünschenswerth erscheint.

Wir nehmen an, dass zwischen zwei Massenpunkten im n -dimensionalen Raume R_n , zwischen

$$m (a_1, a_2 \dots a_n) \text{ und } \mu (x_1, x_2 \dots x_n)$$

eine den Massen m und μ proportionale und von ihrer Entfernung

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

abhängige Kraft $m \mu f(r)$ wirke.

Führt man die Entfernungen der Punkte m und μ von dem Ausgangspunkt der Coordinaten ein:

$$\varrho = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2}, \quad \varrho_1 = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2}$$

so wird

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2 \sum_{\nu=1}^n a_\nu x_\nu,$$

und wenn man noch

$$\frac{\sum a_\nu x_\nu}{\varrho \varrho_1} = \cos(\varrho \varrho_1)$$

einsetzt:

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varrho\varrho_1)$$

Die Componenten der von m auf μ ausgeübten Kraft in der Richtung der Coordinatenaxen sind

$$X_\nu = \mu m f(r) \cdot \frac{x_\nu - a_\nu}{r} = \mu m f(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

und bei Anwendung der Bezeichnung

$$\int f(r) dr = -\varphi(r) + \text{Const}$$

$$X_\nu = -\mu m \cdot \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x_\nu}$$

Die Componenten der von einem System von Massenpunkten m_i auf μ ausgeübten Kraft sind darnach

$$X_\nu = \mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_i m_i \varphi(r_i)$$

und wenn man

$$\mu \sum m_i \varphi(r_i) = \mu V$$

setzt, wird

$$X_\nu = -\mu \frac{\partial V}{\partial x_\nu}.$$

μV heisse das Potential des Systems m_i auf μ und V das Potential desselben Systems auf eine in $(x_1, x_2 \dots x_n)$ befindliche Masseneinheit.

Setzen wir

$$f(r) = \frac{1}{r^{n-1}}$$

und darnach

$$\varphi(r) = \frac{1}{(n-2)r^{n-2}},$$

wobei zu beachten ist, dass unter $\varphi(r)$ für $n = 2$ die Function $\log \frac{1}{r}$ zu verstehen ist, so ist das dem angenommenen Kraftgesetz entsprechende Potential

$$V = \sum_i \frac{m_i}{(n-2)r_i^{n-2}}$$

Sind die Massen m_i in einem n -fach ausgedehnten Gebiete (T) continuirlich vertheilt und nennt man die Masse des n -dimensionalen Raumelementes $da_1 da_2 \dots da_n$

$$\varrho da_1 da_2 \dots da_n,$$

wo ϱ die Dichtigkeit in dem Punkte $(a_1 a_2 \dots a_n)$ bedeutet, so wird

$$V = \int_{(T)}^{(n)} \frac{\varrho da_1 da_2 \dots da_n}{(n-2)r^{n-2}} \quad (1)$$

und

$$X_\nu = \int_{(T)}^{(n)} \frac{\varrho (x_\nu - a_\nu)}{r^n} da_1 da_2 \dots da_n = -\frac{\partial V}{\partial x_\nu} \quad (2)$$

Die n -fache Integration ist über das n -fach ausgedehnte Gebiet (T) zu erstrecken, in dem die stetig vertheilten Massen m_i ausgebreitet sind.

Die Function V wird offenbar solange endlich und stetig sein, als der Punkt μ oder (x) ausserhalb des Gebietes (T) liegt. Eben solange gelten die durch Differentiation gewonnenen Formeln 2) und auch die folgenden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} = - \int_{(x)}^{(n)} \rho \left[\frac{1}{r^n} - n \frac{(x_\nu - a_\nu)^2}{r^{n+2}} \right] da_1 da_2 \dots da_n. \quad (3)$$

Aus den Gleichungen 3) gewinnt man die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} = \Delta V = 0 \quad (4)$$

und diese besteht für die Function V solange, als die voranstehenden Darstellungen der zweiten Derivirten eine Bedeutung haben.

Um das Verhalten der Function V und ihrer Derivirten beurtheilen zu können, wenn der Punkt (x) in dem Gebiete T liegt, führen wir Polarcordinaten ein:

$$a_1 = x_1 + r \cos \alpha_1$$

$$a_2 = x_2 + r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2$$

$$a_3 = x_3 + r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3$$

$$a_{n-1} = x_{n-1} + r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_{n-2} \cos \alpha_{n-1}$$

$$a_n = x_n + r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_{n-2} \sin \alpha_{n-1}.$$

Dann ist das Element

$$da_1 da_2 \dots da_n = P dr d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1},$$

wenn P die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial r} & \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_{n-1}} \\ \frac{\partial a_n}{\partial r} & \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_{n-1}} \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Die Berechnung gibt:

$$da_1 da_2 \dots da_n = r^{n-1} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_{n-2} dr d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}$$

und damit wird:

$$1') V = \int_0^{2\pi} d\alpha_{n-1} \cdot \int_0^\pi \sin \alpha_{n-2} d\alpha_{n-2} \dots \int_0^\pi \sin \alpha_1 d\alpha_1 \cdot \int_0^{\frac{\rho r}{n-2}} dr$$

$$2') \quad \frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \int \sin^{\overset{(n)}{n-1}} \alpha_1 \sin^{\overset{(n)}{n-2}} \alpha_2 \dots \sin^{\overset{(n)}{n-\nu+1}} \alpha_{\nu-1} \sin^{\overset{(n)}{n-\nu}} \alpha_\nu \cos \alpha_\nu$$

$$\sin^{\overset{(n)}{n-\nu+2}} \alpha_{\nu+1} \sin^{\overset{(n)}{n-\nu-2}} \alpha_{\nu-2} \rho \, dr \, da_1 \dots da_{n-1}$$

$$3') \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} = - \int \sin^{\overset{(n)}{n-2}} \alpha_1 \sin^{\overset{(n)}{n-3}} \alpha_2 \dots \sin^{\overset{(n)}{n-2}} \alpha_{n-2} \cos \alpha_{n-1}$$

$$\left[\frac{1 - n \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \dots \sin^2 \alpha_{\nu-1} \cos \alpha_\nu}{r} \right] \rho \, dr \, da_1 \dots da_{n-1}$$

Hier ist ersichtlich, dass das Potential V und seine ersten Derivirten auch endliche und stetige Functionen von $x_1, x_2 \dots x_n$ sind, wenn der Punkt (x) innerhalb des stetig mit Masse erfüllten Gebietes (T) liegt. Die Integrale in den Gleichungen 3') verlieren aber in diesem Fall jede Bedeutung; wir sehen uns darum zur Beurtheilung des Verhaltens der zweiten Derivirten genöthigt, noch eine Transformation vorzunehmen, wenn die erste keine verwendbare Umgestaltung mit sich brachte.

Vorher will ich nur anführen, dass die Transformation des „Differentialparameters“ ΔV durch die Polarcoordinaten den Ausdruck liefert:

$$\frac{1}{r^2} \left[r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (n-1) r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1^2} + \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2^2} \right.$$

$$+ \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_3^2} + \dots + \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \dots \operatorname{cosec}^2 \alpha_{n-2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{n-1}^2}$$

$$+ (n-2) \cotg \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + (n-3) \cotg \alpha_2 \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}$$

$$+ (n-4) \cotg \alpha_3 \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} +$$

$$\left. + \cotg \alpha_{n-2} \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \dots \operatorname{cosec}^2 \alpha_{n-3} \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-2}} \right]$$

den man leicht aus den Untersuchungen von Gundelfinger (in Borchardt's Journal B 85, p. 295) ablesen kann.

Die angekündigte Transformation betrifft die Ausdrücke:

$$\frac{\partial V}{\partial x_\nu} = - \int_{(T)} \rho \frac{x_\nu - \alpha_\nu}{r^n} da_1 da_2 \dots da_n$$

$$= \int_{(T)} \rho \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left(\frac{-1}{(n-2)r^{n-2}} \right) da_1 da_2 \dots da_n$$

Man kann zeigen, dass solange als die Function $\frac{\varrho}{(n-2)r^{n-2}}$ innerhalb T stetig ist, die Darstellungen gelten:

$$\frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \int_{(T)}^{(n)} \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu} da_1 da_2 \dots da_2 + \int_{(S)} \frac{\varrho}{(n-2)r^{n-2}} \cos \alpha_\nu d\sigma \quad (5)$$

wo $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ die Winkel bedeuten, welche die nach dem Innern von T auf dem Elemente $d\sigma$ der $(n-1)$ dimensionalen Begrenzung (S) des Gebietes T errichtete Normale mit den positiven Richtungen der Coordinatenachsen einschliesst.

Kommen innerhalb T Unstetigkeitsstellen der Function $\frac{\varrho}{(n-2)r^{n-2}}$ vor, so hat man von dem Gebiete (T) solche Theile abzusondern, welche diese Stellen enthalten. In dem so modificirten Gebiete T' gilt für

$$\frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \int_{(T')}^{(n)} \varrho \frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(\frac{-1}{(n-2)r^{n-2}} \right) da_1 da_2 \dots da_n$$

die gleiche Transformation, nur ist das Begrenzungsintegral auch über die Begrenzung der abgesonderten Raumtheile zu erstrecken.

Ist ϱ eine stetige Function des Ortes, fällt aber (x) mit einem Punkte $(a^{(i)})$ zusammen, so umgebe man diesen Punkt mit dem durch

$$(x_1 - a_1^{(i)})^2 + (x_2 - a_2^{(i)})^2 + \dots + (x_n - a_n^{(i)})^2 = \delta^2$$

definirten Gebilde (K) . Lassen wir dann δ nach Null convergiren, so wird der Beitrag zu dem Begrenzungsintegral, wenn ϱ_1 der grösste Werth von ϱ innerhalb des neuen Gebildes ist, kleiner als

$$\lim_{\delta=0} \frac{\varrho}{(n-2)\delta^{n-2}} \int d\sigma,$$

— die Integration über die Begrenzung (von K) erstreckt. Da aber

$$\int d\sigma = \delta^{n-1} c_n$$

ist, wo c_n die Begrenzung des Gebildes

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

bezeichnet, so ist jener Beitrag gleich einer Zahl ε zu setzen, die kleiner gemacht werden kann, als eine beliebige kleine Zahl ε_1 .

Da $\frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu}$ innerhalb T endlich ist, so wird das n -fache Integral

$$\int \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu} da_1 da_2 \dots da_n$$

über das Gebiet (K) erstreckt mit δ auch Null, und darum gilt die obige Transformation, ob der Punkt (x) ausserhalb oder innerhalb (T) liegt.

Aus den Darstellungen der ersten Derivirten $\frac{\partial V}{\partial x_\nu}$ in den Gleichungen 5) ergeben sich jetzt für die zweiten Derivirten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} &= \int_{(T)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \right) \frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu} da_1 da_2 \dots da_n \\ &+ \int_{(S)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \right) \varrho \cos \alpha_\nu d\sigma \end{aligned} \quad (6)$$

die bei stetigem ϱ endlich und stetig bleiben, gleichviel ob (x) ausserhalb oder innerhalb T liegt, wie man bei Benützung der bisher verwendeten Hilfsmittel leicht sieht. Fällt aber (x) in die Begrenzung (S), so verliert das zweite Integral seine Bedeutung.

Lassen wir auch Unstetigkeitsstellen für ϱ zu, so bleiben V und dessen erste Derivirte überall endliche und stetige Functionen, indess die zweiten Derivirten nur endlich und stetig sind, wenn (x) in endlicher wenn auch noch so kleiner Entfernung von der Begrenzung S oder den Unstetigkeitsstellen gehalten wird. Es ist nun die mit diesen Eigenschaften der ersten und zweiten Derivirten nothwendig sich einstellende sprungweise Aenderung der letzteren bei einem Durchgang durch die Begrenzung (S) zu untersuchen, doch beschränken wir uns auf die Ermittlung des Sprunges, den ΔV erleidet.

Zu diesem Zwecke beachte man zuerst, in welcher Weise das Gauss'sche Begrenzungsintegral zu verallgemeinern ist.

Bezeichnet $d\sigma$ das Element der geschlossenen Begrenzung S eines Gebietes T mit den Coordinaten ($a_1 a_2 \dots a_n$), r den Abstand des Elementes $d\sigma$ von einem beliebigen Punkte (x) und (rN) den Winkel, welchen diese Entfernung mit der in $d\sigma$ nach dem Innern von T gezogenen Normalen N einschliesst, so ist

$$W_x = \int_{(s)} \frac{\cos(rN)}{r^{n-1}} d\sigma \quad (7)$$

das dem Gauss'schen analoge Begrenzungsintegral. Ist unter (a) ein äusserer, unter (i) ein innerer und unter (s) ein Punkt (x) in der Begrenzung S verstanden, so ist

$$W_a = 0, \quad W_{(i)} = c_n, \quad W_{(s)} = \frac{c_n}{2} \quad (8)$$

und c_n bedeutet wieder die $(n-1)$ dimensionale Begrenzung des Gebildes

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Bezeichnet man mit C_n den n -dimensionalen Inhalt dieses Gebildes, so gilt

$$c_n = nC_n$$

und es ist

$$C_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} \quad C_{2m+1} = \pi^m \frac{2^{2m+1} \cdot m!}{(2m+1)!} \quad \text{oder} \quad C_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$$

Die Formel für $W_{(s)}$ ist an die Bedingung geknüpft, dass (s) ein Punkt der stetig gekrümmten Begrenzung ist. Die Modificationen in anderem Falle sind auch hier im n -dimensionalen Raume bald beurtheilt.

Mit Hilfe der Formeln (8) lassen sich dann folgende Sätze aufstellen:

1) Sind die Massen M_a ausserhalb eines Gebietes T und M_s auf dessen Begrenzung S vertheilt, ist N die innere Normale, und bezeichnet man mit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_a \quad \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_i$$

die Werthe des nach N gewonnenen Differentialquotienten des Potentials V der Massen $M_a + M_s$ ausserhalb und innerhalb der Begrenzung S , so ist

$$8) \quad \int_{(s)} \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_i d\sigma = 0 \quad \int_{(s)} \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_a d\sigma = c_n M_s.$$

2) Liegen innerhalb T die Massen M_i und auf S die Massen M_s und ist \mathfrak{N} die äussere Normale, so bestehen die Gleichungen

$$9) \quad \int \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}\right)_i d\sigma = -c_n M_i, \quad \int \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}\right)_a d\sigma = -c_n (M_i + M_s)$$

wo die Bezeichnungen nicht mehr misszuverstehen sind.¹⁾

¹⁾ Siehe Gauss Theoria attractionis Art. 23.

Betrachtet man jetzt innerhalb eines Gebietes T ein an den Punkt (x) anstossendes gerades rechtwinkliges Gebilde (P) mit den Kantenlängen $dx_1, dx_2 \dots dx_n$ und dem Inhalt $dx_1 dx_2 \dots dx_n$ und bildet

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_i d\sigma$$

über die Begrenzung von (P) , so ist dieses einerseits gleich $-c_n M_i = -c_n \varrho dx_1 dx_2 \dots dx_n$, andererseits gleich $\Delta V dx_1 dx_2 \dots dx_n$ und darum gilt für jeden Punkt (x) , der innerhalb T aber in endlicher wenn auch noch so kleiner Entfernung von der Begrenzung oder einer Unstetigkeitsstelle von ϱ liegt,

$$\Delta V = -c_n \varrho. \quad (10)$$

Damit sind nun die vorzüglichsten Eigenschaften der Function V festgestellt, wenn die Massenvertheilung über ein n -dimensionales im Endlichen liegendes Gebiet ausgebreitet sind und die Dichtigkeit ϱ eine stetige Function des Ortes ist. Wir fassen die Fälle ins Auge, wo die Masse über ein $(n-\nu)$ fach ausgedehntes Gebilde $K_{n-\nu}$ im n -dimensionalen Raume stetig ausgebreitet ist.

Bezeichnet $d\sigma_{n-\nu}$ das Element des Gebildes $K_{n-\nu}$, ϱ die Dichtigkeit der wiederum stetig vertheilten Masse, so ist das Potential

$$V = \int \frac{\varrho d\sigma_{n-\nu}}{(n-2)r^{n-2}} \quad (11)$$

Die Function V genügt im ganzen unendlichen n -fach ausgedehnten Raume R_n der Differentialgleichung

$$\Delta V = 0.$$

Ist $\nu = 1$, so ist V überall endlich und stetig, aber die ersten Derivirten haben nicht mehr die Eigenthümlichkeit allenthalben endlich und stetig zu sein. Bezeichnet $\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}$ die Derivirte von V , genommen nach einer Normale zu dem Gebilde K_{n-1} (\mathfrak{N} nach aussen zu positiv gezählt), ϱ_0 die Dichtigkeit im Fusspunkt der Normale \mathfrak{N} , so ist nämlich $\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}$ bei dem Durchgang durch K_{n-1}

unstetig, und zwar derart dass

$$12) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{+o} - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{-o} = -c_n \varrho_o$$

ist.

Bei einer stetigen Vertheilung der Masse auf einem $n-\nu$ dimensionalen Gebilde ist V endlich und stetig, so lange der Punkt (x) in endlicher Entfernung t von $K_{n-\nu}$ sich befindet (wo t immer die kürzeste Entfernung bedeutet). Wird jedoch t unendlich klein, so wächst V ins Unbegrenzte, so zwar dass

$$13) \quad \lim_{t=o} V = \lim_{t=o} \varrho_o \frac{c_n}{c_\nu} \frac{1}{(\nu-2)t^{\nu-2}}$$

und daher

$$14) \quad \lim \left(t^{\nu-1} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = - \frac{c_n}{c_\nu} \varrho_o \quad (\nu = 2, 3 \dots n)$$

gilt. Mit ϱ_o ist wieder die Dichtigkeit an der Stelle bezeichnet, in welche der Punkt (x) für das verschwindende t hineinrückt.

Die Richtigkeit der letzten Formeln ergibt sich bei Anwendung der Gleichung

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_i d\sigma_{n-\nu} = -c_n M_i,$$

wenn man dieselbe ebenso verwerthet, wie das zur Bestimmung des Verhaltens des Newton'schen Potentials bei der Vertheilung der Masse auf einer Curve geschieht. Die Formel

$$\lim \left(t^{n-2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = - \frac{c_n}{c_{n-1}} \varrho_o,$$

welche bei stetiger Vertheilung der Masse auf einer Curve in Anwendung kommt, ist übrigens durch directe Rechnung zu bestätigen, wenn man die Masse etwa auf einer der Coordinatenaxen vertheilt denkt.

Die Formel

$$\lim \left(t^{n-1} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = - \varrho_o$$

folgt unmittelbar aus der Definition von V , wenn die Masse in einem Punkt concentrirt ist, d. h. aus

$$V = \frac{Q_0}{(n-2)r^{n-2}}$$

Lassen wir den stets im Endlichen erhaltenen Punkt in unendliche Entfernung R von dem Coordinatenursprung rücken, indess die Massen M in einem endlichen Gebiet verbleiben, so ist wegen

$$\lim_{R=\infty} \frac{R}{r} = 1$$

$$\lim ((n-2)R^{n-2} V) = M, \quad \lim R^{n-1} \frac{\partial V}{\partial R} = -M \quad (15)$$

und man sieht, dass V_∞ Null ist ausser in dem Falle $n = 2$ wo V_∞ den Werth $-\infty$ annimmt.

Später soll auseinandergesetzt werden, dass die Potentialfunction durch die Gleichung $\Delta V = 0$, die Eigenschaft in 15) und eine der Gleichungen 10, 12, 14) vollständig und eindeutig bestimmt ist. Jetzt nehmen wir erst ein Beispiel einer speciellen Massenvertheilung vor.

Es soll die Masse M gleichmässig in dem durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2$$

definirten Gebilde (K_n) ausgebreitet sein, welches ist dann der Werth des Potentials in einem äusseren und einem inneren Punkt?

Da V nur eine Function der Entfernung des Punktes (x) von dem Coordinatenursprung ist, lautet die Differentialgleichung $\Delta V = 0$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

wie man aus dem auf Seite 97 angegebenen Differentialparameter ersieht, und daher hat V die Form

$$\frac{c}{(n-2)r^{n-2}} + c'$$

Weil $V_\infty = 0$ ist, verschwindet die Constante c' , und wegen der Eigenschaft

$$\lim ((n-2)r^{n-2} V) = M = c C_n R^n$$

ist

$$V_a = \frac{M}{(n-2)r^{n-2}} \quad (16)$$

Den Werth V_i finden wir, indem wir beachten, dass der Punkt (x) für das Gebilde $\Sigma x_{\nu^2} = r^2$ ein äusserer, für das Gebilde $\Sigma x_{\nu^2} = r_1^2$ ($r \leq r_1 \leq R$) ein innerer Punkt ist, und für dieses allein $V_i = c'$ sein muss, da $V_{(o)}$ nicht unendlich werden darf. $V_{(o)}$ hat den Werth:

$$\int_r^R \frac{c_n \varrho r_1^{n-1} dr_1}{(n-2)r_1^{n-2}} = \frac{\varrho c_n}{2(n-2)} (R^2 - r^2)$$

Darum ist

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{\varrho C_n r^n}{(n-2)r^{n-2}} + \frac{\varrho c_n}{2(n-2)} (R^2 - r^2) \\ &= -\frac{\varrho c_n}{2n} r^2 + \frac{\varrho c_n R^2}{2(n-2)} \end{aligned} \quad (17)$$

Für $n = 2$ ist das Integral

$$\int_r^R \log \frac{1}{r} dr = \frac{r^2}{4} \left(1 + \log \frac{1}{r^2} \right)$$

zu verwenden, und es wird

$$V_i = -\frac{\varrho c_2}{4} r^2 + \frac{\varrho c_2 R^2}{4} \left(1 + \log \frac{1}{R^2} \right).$$

Ist die Masse M gleichmässig auf der Begrenzung von (K_n) ausgebreitet, so ist $M = \varrho c_n R^{n-1}$ und

$$V_a = \frac{M}{(n-2)r^{n-2}} \quad V_i = \frac{M}{(n-2)R^{n-2}} \quad (18)$$

In beiden Fällen besteht also für äussere Punkte eine äquipotentielle Massenvertheilung darin, dass die gesammte Masse in den Punkt (o) verlegt ist.

Breiten wir ausserhalb und innerhalb der Begrenzung von K_n Massen m_a und m_i aus, so ist das Potential in einem Punkte (x_σ) der Begrenzung

$$V_\sigma = \Sigma m_a \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} + \Sigma m_i \frac{1}{(n-2)r_i^{n-2}}, \quad (19)$$

worin r_a und r_i die Entfernung des Punktes (x_σ) von m_a resp. m_i bedeutet.

Nach den voranstehenden Formeln ist das Integral

$$\int V_\sigma d\sigma = \left[\Sigma m_a \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} + \frac{\Sigma m_i}{(n-2)R^{n-2}} \right] \int d\sigma \quad (20)$$

und offenbar sind daher Massen auf der Begrenzung von K_n beliebig den m_a oder m_i zuzuordnen.

Speziell ergibt sich hieraus:

$$\frac{\int V_\sigma d\sigma}{\int d\sigma} = \Sigma m_a \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} = V_{(o)}$$

und

$$\frac{\int V_\sigma d\sigma}{\int d\sigma} = \frac{\Sigma m_i}{(n-2)R^{n-2}}$$

wenn die Massen nur ausserhalb oder innerhalb K_n liegen. Nennt man den linksstehenden Quotienten das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche V auf der Begrenzung erhält, so ist dieses im ersten Fall so gross als der Werth von V im Mittelpunkte von K_n , im zweiten Fall unabhängig von der Vertheilung der Massen.

Versteht man unter der natürlichen Belegung einer geschlossenen Begrenzung S eine derartige Vertheilung der Masse $M = 1$ auf S , dass das Potential in allen inneren Punkten constant Π ist, dann gilt bei irgend einer Massenvertheilung:

$$\int_{(S)} V_\sigma \cdot \varrho_\sigma d\sigma = \Sigma m_a P_{m_a} + \Pi \cdot \Sigma m_i \quad (21)$$

wo P_{m_a} das Potential der natürlichen Belegung von der Dichtigkeit ϱ_σ auf einen äusseren Massenpunkt bedeutet. Bei der Begrenzung des Gebildes K_n ist

$$\Pi = \frac{1}{(n-2)R^{n-2}}, \quad P_{m_a} = \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} \quad \text{und} \quad \varrho_\sigma = \frac{1}{c_n R^{n-1}}$$

Mit Hilfe dieser Sätze lassen sich die bekannten Neumannschen Theoreme über die extremen Werthe des Potentials nachbilden und die folgenden Sätze beweisen:

Erstens: V_a ist bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn die Masse M innerhalb eines geschlossenen Gebietes T und auf dessen Begrenzung S vertheilt und V_σ gegeben ist, oder V_a ist vollständig bestimmt, wenn das Potential von Massen innerhalb und auf der Begrenzung gegeben ist, ausser in dem „singulären“ Falle, $\Pi = 0$ ($n = 2$).

Zweitens: V_i ist vollständig bestimmt, wenn die Potentialwerthe V_σ von Massen ausserhalb T und auf S gegeben sind.

Drittens: Die Dichtigkeit einer Belegung von der Gesamtmasse M auf S ist eindeutig bestimmt, wenn die Werthe

V_σ von bestimmten Werthen nur um eine additive Constante abweichen, oder die Dichtigkeit einer Belegung auf S ist bestimmt, wenn V_σ vorgegeben sind; — ausser in dem früher genannten singulären Fall.

Wir gehen jetzt auf den Green'schen Satz ein. Auf Grund der Transformation des über ein vollständig begrenztes Gebiet T ausgedehnten Integrals

$$\int_{(T)} \frac{\partial F}{\partial x_\nu} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

in welchem F eine innerhalb T bestimmte endliche und stetige Function bedeutet, in das Begrenzungsintegral:

$$- \int_{(S)} F \frac{\partial x_\nu}{\partial N} d\sigma,$$

wo N die in dem Element $d\sigma$ der Begrenzung nach Innen gezogene Normale bezeichnet, und auf Grund der Transformation:

$$\int_{(T)} \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_\nu} dx_1 dx_2 \dots dx_n = - \int_{(S)} F_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial N} d\sigma \quad (A)$$

lassen sich für zwei innerhalb T endliche und stetige Functionen V und W , deren erste Derivirte auch endlich und stetig sind, die folgenden Sätze aufstellen:

$$\int_{(T)} \sum \frac{\partial W}{\partial x_\nu} \frac{\partial V}{\partial x_\nu} dx_1 dx_2 \dots dx_n = - \int_{(T)} V \Delta W dx_1 dx_2 \dots dx_n - \int_{(S)} V \frac{\partial W}{\partial N} d\sigma \quad (22)$$

$$\int_{(T)} \sum \frac{\partial W}{\partial x_\nu} \frac{\partial V}{\partial x_\nu} dx_1 dx_2 \dots dx_n = - \int_{(T)} W \Delta V dx_1 dx_2 \dots dx_n - \int_{(S)} W \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma \quad (23)$$

und

$$\int_{(T)} (V \Delta W - W \Delta V) dx_1 dx_2 \dots dx_n + \int_{(S)} (V \frac{\partial W}{\partial N} - W \frac{\partial V}{\partial N}) d\sigma = 0. \quad (24)$$

Mit Hilfe des letzten Satzes können wir den Werth der Potentialfunction V für jeden Punkt im Innern von T bestimmen, wenn die Werthe von V auf der Begrenzung S und ΔV im Innern bekannt sind und weiter eine Function W angegeben werden kann, welche innerhalb T der Differentialgleichung $\Delta W = 0$ genügt, auf der Begrenzung den Werth Null besitzt und im Innern von T überall endlich und stetig ist ausser im Punkte (x^i) , wo sie unendlich wird wie $\left(\frac{1}{(n-2)r^{n-2}}\right)_{r=0}$. Eine derartige Hilfsfunction wird man besitzen, wenn man eine für jeden Punkt der Begrenzung des Gebietes T gegebene einwerthige, endliche und stetige Function U für das Innere in eindeutiger Weise so bestimmen kann, dass sie auch da einwerthig, endlich und stetig ist und ausserdem der Gleichung $\Delta U = 0$ genügt. Die Function W ist offenbar gleich

$$U + \frac{1}{(n-2)r^{n-2}}, \text{ wenn } U_\sigma = -\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \text{ ist.}$$

Auf die Bestimmung von U_i bei gegebenem U_σ werden wir noch eingehen, jetzt nehmen wir die Existenz einer Function U und W an.

Um mit Hilfe des Green'schen Satzes 24) V_i aus den Werthen V_σ und $(\Delta V)_i$ zu bestimmen, umschliessen wir die Stelle $(x^{(i)})$ mit dem Gebilde K_n

$$(x_1 - x_1^{(i)})^2 + (x_2 - x_2^{(i)})^2 + \dots + (x_n - x_n^{(i)})^2 = r^2$$

und sondern das so definirte Gebiet um die Stelle $(x^{(i)})$ von T ab, dann lässt sich der Green'sche Satz auf das neue Gebiet T' anwenden und zwar folgt wegen: $W_\sigma = 0$ und $\Delta W = 0$

$$\int_{(T')} W \Delta V \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n = \int_{(S)} V \frac{\partial W}{\partial N} \, d\sigma + \int_{(s)} \left(V \frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial V}{\partial r} \right) d\sigma$$

wo $d\sigma'$ das Element der Begrenzung (s) von K_n bezeichnet. Lässt man den Radius des Gebildes K_n nach Null convergiren, so findet man, dass

$$\lim_{(r') \rightarrow 0} \int_{(T')} W \Delta V \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n = \int_{(T)} W \Delta V \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n$$

$$\lim_{(s)} \int \left(V \frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial V}{\partial r} \right) d\sigma' = -c_n V_i$$

ist und daher wird

$$c_n V_i = - \int_{(x)} W \Delta V dx_1 dx_2 \dots dx_n + \int_{(s)} V_\sigma \frac{\partial W}{\partial N} d\sigma \quad (25)$$

Diese Bestimmung von V_i beruhte auf der Voraussetzung, dass V und seine ersten Derivirten innerhalb T endlich und stetig sind. Trifft diese Voraussetzung nicht ein, finden sich also in einem $n-1$, $n-2$. . . $n-\nu$ dimensionalen Gebilde K_{n-1} , K_{n-2} . . . $K_{n-\nu}$ innerhalb T Unstetigkeiten, so sind in der Gleichung (25) rechts noch Beiträge hinzuzufügen und zwar entsprechend den Unstetigkeiten auf K_{n-1} der Beitrag

$$\int \left[\left(V_{+o} - V_{-o} \right) \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{N}} - W \left(\left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{+o} - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{-o} \right) \right] d\sigma_{n-1}$$

und bei Unstetigkeiten auf $K_{n-\nu}$ der Beitrag:

$$-c_\nu \int W \lim \left(t^{\nu-1} \frac{\partial V}{\partial t} \right) d\sigma_{n-\nu} \quad (\nu = 2, 3 \dots n)$$

wo unter $d\sigma_\mu$ das Element von K_μ zu verstehen ist, \mathfrak{N} die Normale in einem Unstetigkeitspunkte von K_{n-1} , V_{+o} , $\left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{+o}$, V_{-o} , $\left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{-o}$ die

Werthe von V und $\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}$ in den K_{n-1} unendlich nahe liegenden Punkten der Normale und endlich t die kürzeste Entfernung eines Punktes (x) von $K_{n-\nu}$ bezeichnet.

Wenden wir diese Sätze auf den Fall an, dass T das unendliche n -fach ausgedehnte Gebiet ist, dann ist die Function W gleich $\frac{1}{(n-2)r^{n-2}}$ und die obige Gleichung (25) lautet:

$$c_n V_i = - \int_{(T_\infty)} \frac{\Delta V}{(n-2)r^{n-2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n + \int_{(s)} \left(\frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \right) - \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\sigma$$

Als Begrenzung des Gebietes (T_∞) fassen wir die Begrenzung des Gebildes K_n auf, wo r unendlich gross ist; da stellt sich zufolge der Eigenschaften der Potentialfunction wonach

$$V_\infty = 0, \quad \lim R^{n-2} \frac{\partial V}{\partial R} = 0$$

ist heraus, dass dieser Theil des Begrenzungsintegrals Null ist, und dasselbe nur über die Umhüllungen der Unstetigkeitsbereiche zu erstrecken ist.

Nehmen wir an, dass die Masse stetig in einem endlichen Gebiete T ausgebreitet sei, so dass V und seine ersten Derivirten allenthalben endlich und stetig sind, so fällt das Begrenzungsintegral ganz aus, und da ΔV gleich 0 resp. $-c_n \rho$ ist, je nachdem der Punkt (x) ausserhalb oder innerhalb T liegt, ist

$$V_i = \int_{(T)} \rho \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{(n-2)r^{n-2}}$$

Ist die Masse nur in einem $(n-1)$ dimensionalen endlichen Gebiete K_{n-1} vertheilt, so ist überall $\Delta V = 0$, V aber allenthalben endlich und stetig, also $V_{+o} = V_{-o}$ und es wird

$$c_n V_i = - \int \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{R}} \right)_{+o} - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{R}} \right)_{-o} \right) d\sigma_{n-1}$$

oder

$$V_i = \int \frac{d\sigma_{n-1}}{(n-2)r^{n-2}}$$

und ebenso bei der Vertheilung der Masse in einem $n-\nu$ dimensional Gebiete

$$V_i = \int \frac{d\sigma_{n-\nu}}{(n-2)r^{n-2}},$$

wenn wir die auf Seite 102 angegebenen Gleichungen (12), (14) benützen. Indem wir auf diese Weise stets eine einzige bestimmte Function V_i gefunden haben, die zufolge unserer Definitionen gerade die Potentialfunction ist, erscheint auch nachgewiesen, dass die Potentialfunction durch die Differentialgleichung $\Delta V = 0$, das Verhalten im Unendlichen und die Bedingungen (10, 12, 14) völlig bestimmt ist.

Wir geben nun noch einige Folgerungen aus den Green'schen Sätzen an: Ist U eine Function, die innerhalb eines Gebietes

T nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig ist und ausserdem die Differentialgleichung $\Delta U = 0$ erfüllt, so gilt zufolge der Gleichung A)

$$\int_{(s)} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}} \right) d\sigma = 0$$

$$\int_{(s)} U \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}} \right)_i d\sigma + \int_{(T)} \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

und zufolge 24), wenn $W = \frac{1}{(n-2)r^{n-2}}$ gesetzt wird:

$$\int_{(s)} \left(U \frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} \left(\frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} \right) - \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}} \right) d\sigma = 0$$

$$\int_{(s)} \left(U \frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} \left(\frac{1}{(n-2)r_i^{n-2}} \right) - \frac{1}{(n-2)r_i^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}} \right) d\sigma = c_n U_i$$

je nachdem die Stellen (x) ausserhalb oder innerhalb T liegt, was auch durch den Index a und i bei r angezeigt ist.

Hierin ist U als Potential anzusehen, wenn die Massen auf der Begrenzung und ausserhalb des Gebietes T liegen. Es sei also U das Potential irgend welcher Massen, die theils ausserhalb, theils auf der Begrenzung des Gebildes K_n

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = R^2$$

ausgebreitet sind; die Werthe U_σ seien gegeben gleich ρ_σ , man soll U_i finden. Wir suchen also in einem speciellen Falle die früher verlangte Hilfsfunction U und nach dem zweiten Neumannschen Theorem ist diese völlig bestimmt, wenn überhaupt eine solche Function existirt.

Bezeichnet r den Abstand der Stelle (x) von dem Element $d\sigma$ der Begrenzung, E die Entfernung der Stelle (x) von dem Mittelpunkt (a) , so dass

$$r^2 = R^2 + E^2 - 2ERa$$

wird, wenn man

$$a = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{RE}$$

setzt, so ist die Lösung des verlangten Problems in

$$U_i = \frac{1}{c_n} \int_{(S)} \varrho_\sigma \frac{R^2 - E^2}{r^n R} d\sigma \quad (26)$$

enthalten, was man durch die Verallgemeinerung der Betrachtungen an dem Kreise und der Kugel leicht bestätigt. (Siehe Neumann, Tonelli und Macher.)

Führt man die Function

$$V = \int_{(S)} \frac{\varrho_\sigma d\sigma}{(n-2)r^{n-2}}$$

ein, welche continuirlich aber nicht holomorph ist, indem die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial E} \right)_{+R} - \left(\frac{\partial V}{\partial E} \right)_{-R} = -c_n \varrho_\sigma$$

gilt, so kann man U_i auf folgende Form bringen:

$$U_i = \frac{n-2}{c_n} \frac{1}{R} \left(V + \frac{2E}{n-2} \frac{\partial V}{\partial E} \right) \quad (27)$$

Führt man noch

$$E^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$$

ein, so wird

$$U_i = \frac{2}{c_n R^{n-1}} \int \frac{\varrho_\sigma \cos \varphi d\sigma}{\left(\frac{r}{R} \right)^{n-1}} - \frac{1}{c_n R^{n-1}} \int \frac{\varrho_\sigma d\sigma}{\left(\frac{r}{R} \right)^{n-1}}, \quad (28)$$

und in dieser Formel ist der Grenzfall $n=2$ unmittelbar zu übersehen, den wir weiterhin ausschliessen.

Bei der Vertheilung der Massen innerhalb K_n und auf der Begrenzung findet man bei gegebenen Werthen $U_\sigma = -\varrho_\sigma U_a$ in derselben Form 27) und es ist

$$\lim_{E=k} (U_a - U_i) = -2\varrho_\sigma$$

Die Function ϱ_σ kann auch unendlich werden; es ist dann nur nothwendig, dass sie integrabel ist.

Beachtet man, dass die Differentialgleichung $\Delta V = 0$ in Polarcoordination die Form erhält:

$$E^2 \frac{\partial V}{\partial E} + (n-1) E \frac{\partial V}{\partial E} + \Phi(V) = 0$$

so wird, wenn jetzt mit U die rechte Seite der Gleichung 27) bezeichnet wird,

$$-c_n R. E \frac{\partial U}{\partial E} = (n-2) E \frac{\partial V}{\partial E} + 2 \Phi(V)$$

und es folgt:

$$\left(E \frac{\partial U}{\partial E} \right)_{+o} - \left(E \frac{\partial U}{\partial E} \right)_{-o} = (n-2) \cdot \varrho\sigma$$

Es lässt sich leicht eine Function W angeben, die sammt ihrer Ableitung $\frac{\partial W}{\partial E}$ an der Begrenzung von K_n keine Discontinuität aufweist. Wir brauchen W ausserhalb K_n nur die Bedeutung von

$$- \left(\frac{U}{2} + \frac{V}{c_n} + \frac{V}{c_n} \right)$$

innerhalb K_n die von

$$\varrho\sigma - \left(\frac{U}{2} + \frac{V}{c_n} + \frac{V}{c_n} \right)$$

beizulegen, wo V eine Function derselben Art wie V ist, welche also an der Begrenzung stetig ist, indess $\frac{\partial V}{\partial E}$ bei dem Durchgang einen Sprung macht, der die Discontinuität der übrigen Glieder in $\frac{\partial W}{\partial E}$ aufhebt. Das ist auch zu erreichen, wenn unter $\varrho\sigma$ eine Function der Veränderlichen $x_1 x_2 \dots x_n$ verstanden wird, von der eben die Begrenzungswerthe vorgelegt sind. Die Function W aber genügt der Differentialgleichung $\Delta W = o$ und die beiden Darstellungen ausserhalb und innerhalb K_n sind Fortsetzungen von einander.

Die oben entwickelte Function U lässt sich mit Hilfe der Neumann-Schwarz'schen combinatorischen Methode auch dann bestimmen, wenn der Bereich T nicht bloß von einem Gebilde K_n sondern von beliebig vielen derartigen Gebilden begrenzt wird. Während nun in der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen $X = x + iy$ durch eine innerhalb eines von Kreisen begrenzten Flächentheiles (T) existirende Function $U(x, y)$ stets eine und nur eine Function $f(X)$ mit dem reellen Theile U bestimmt wird, indem

$$V = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right)$$

eine innerhalb T eindeutige und stetige Function ist, deren Ableitungen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial y}$$

genügen, wird eine Function $U(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ im Allgemeinen nicht der reelle Theil einer Function f der complexen Variablen $X_\nu = x_\nu + iy_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sein.

Setzt man

$$f = U + iV,$$

so besteht zufolge des nothwendigen Systems von Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + i \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = 0$$

für den reellen und imaginären Theil auch das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial U}{\partial x_\nu} - \frac{\partial V}{\partial y_\nu} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y_\nu} + \frac{\partial V}{\partial x_\nu} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 V}{\partial y_\nu \partial x_\mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial y_\mu} - \frac{\partial^2 V}{\partial y_\nu \partial y_\mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_\nu \partial y_\mu} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu \partial y_\mu} = 0$$

und daher für U das System von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_\mu \partial y_\nu} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial y_\mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_\nu \partial x_\mu} = 0 \quad (28)$$

Eine Function U , die an der Begrenzung eines von Gebilden K zusammengesetzten $2n$ -fach ausgedehnten Bereiches (T) vorgeschriebene Werthe besitzt und innerhalb T der partiellen Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügt, wird den Differentialgleichungen (28) im Allgemeinen nicht genügen, und kann dann nicht der reelle Theil einer Function $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sein. Ist ein analytischer Ausdruck f vorgelegt, der jedenfalls innerhalb eines in Rede

stehenden Bereiches T eine Bedeutung hat, so kann es zur Untersuchung der durch denselben definirten Function von Vortheil sein, die Function U zu construiren, die an der Begrenzung von T etwa diejenigen Werthe annimmt, welche f daselbst besitzt oder andere für f charakteristische Werthe. Bildet man ferner die mit U verbundene Function W , welche bei dem Durchgang durch die Begrenzung sammt ihrer Ableitung $\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{N}}$ stetig ist und allenthalben der Differentialgleichung $\Delta W = 0$ genügt, so kann diese Function möglicherweise zur Untersuchung des reellen Theiles von f verwendet werden.

Dieser Gedanke rührt von H. Poincaré her. Er hat denselben auch bei dem Beweise des wichtigen Satzes benützt, dass nämlich eine Function $f(X_1, X_2)$, welche sich im Endlichen wie eine rationale Function verhält also allenthalben durch den Quotienten zweier Potenzreihen darstellbar ist, auch durch den Quotienten zweier ganzer Functionen auszudrücken ist, eines Satzes, den man auch für Functionen von mehr als zwei complexen Veränderlichen aussprechen kann.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften](#)

Jahr/Year: 1885

Band/Volume: [34](#)

Autor(en)/Author(s): Biermann Otto

Artikel/Article: [Das Potential im n-dimensionalen Raume. 93-114](#)