# Das Potential im n-dimensionalen Raume.

Von Dr. Otto Biermann.

(Prag den 2. Januar 1885.)

Da die Frage nach der Verwendung der verallgemeinerten Potentialfunction in der Theorie der Functionen mehrerer Variablen durch die Arbeiten der Herren Kronecker [1]) und Poincaré [2]) von Bedeutung geworden ist, beschäftigte ich mich eingehender mit der Theorie des Potentials im $n$-dimensionalen „ebenen" Raume. Als ich die nachstehenden Sätze abgeleitet hatte, wobei ich vor Allem den von Riemann [3]) und C. Neumann [4]) vorgezeichneten Wegen gefolgt war, fand ich eine Reihe von Arbeiten, [5]) die all meine Sätze in grösserer oder geringerer Ausführlichkeit auch schon enthalten. Wenn ich meine Bearbeitung trotzdem der Oeffentlichkeit übergebe, so geschieht dies in der Meinung, dass

---

1) Kronecker: Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln. Monatsberichte d. Berliner Akad. 1869.

2) Poincaré: Sur les fonctions de deux variables. Acta mathematica B. 2.

3) Riemann-Hattendorf: Schwere, Elektricität und Magnetismus.

4) C. Neumann: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.

5) C. Neumann: Abriss einer Theorie der Kugelfunctionen. Zeitschrift für Math. und Physik 12.

Cayley: A memoir on praepotentials. Phil. Trans. t. 165. 1876.

Schwering: Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen. Gött. Nachr. 1873.

Tonelli: Ueber die Potentialfunction in einem mehrfach ausgedehnten Raume. Gött. Nachr. 1875.

Macher: Zur Integration der part. Diffgl $\Sigma \frac{\partial_u^2}{\partial x_\nu^2} = o$ Diss. Würzburg 1878.

eine übersichtliche Darstellung der verstreut vorkommenden Sätze über das verallgemeinerte Potential, die sich denjenigen für das logarithmische und Newton'sche Potential anreihen lassen, wünschenswerth erscheint.

Wir nehmen an, dass zwischen zwei Massenpunkten im $n$-dimensionalen Raume $R_n$, zwischen

$$m\ (a_1,\ a_2 \qquad a_n) \text{ und } \mu\ (x_1,\ x_2 \qquad x_n)$$

eine den Massen $m$ und $\mu$ proportionale und von ihrer Entfernung

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \qquad (x_n - a_n)^2}$$

abhängige Kraft $m\,\mu\,f(r)$ wirke.

Führt man die Entfernungen der Punkte $m$ und $\mu$ von dem Ausgangspunkt der Coordinaten ein:

$$\varrho = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2}, \qquad \varrho_1 = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}$$

so wird

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho_1{}^2 - 2 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, x_\nu,$$

und wenn man noch

$$\frac{\Sigma\, a_\nu\, x_\nu}{\varrho\, \varrho_1} = \cos\,(\varrho\, \varrho_1)$$

einsetzt:

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho_1{}^2 - 2\varrho\varrho_1\ \cos\,(\varrho\varrho_1)$$

Die Componenten der von $m$ auf $\mu$ ausgeübten Kraft in der Richtung der Coordinatenaxen sind

$$X_\nu = \mu\ m\ f\,(r).\ \frac{x_\nu - a_\nu}{r} = \mu\ m\,f\,(r).\ \frac{\partial r}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, 2\,..\,n)$$

und bei Anwendung der Bezeichnung

$$\int f\ (r)\ dr = -\ \varphi\ (r) + Const$$

$$X_\nu = -\ \mu\ m.\ \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x_\nu}$$

Die Componenten der von einem System von Massenpunkten $m_i$ auf $\mu$ ausgeübten Kraft sind darnach

$$X_\nu = \mu\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\ \Sigma_i\ m_i\ \varphi\ (r_i)$$

und wenn man

$$\mu \Sigma m_i \varphi (r_i) = \mu V$$

setzt, wird

$$X_\nu = - \mu \frac{\partial V}{\partial x_\nu}.$$

$\mu V$ heisse das Potential des Systems $m_i$ auf $\mu$ und $V$ das Potential desselben Systems auf eine in $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ befindliche Masseneinheit.

Setzen wir

$$f(r) = \frac{1}{r^{n-1}}$$

und darnach

$$\varphi(r) = \frac{1}{(n-2) r^{n-2}},$$

wobei zu beachten ist, dass unter $\varphi(r)$ für $n = 2$ die Function $\log \frac{1}{r}$ zu verstehen ist, so ist das dem angenommenen Kraftgesetz entsprechende Potential

$$V = \Sigma_i \frac{m_i}{(n-2) r_i^{n-2}}$$

Sind die Massen $m_i$ in einem $n$-fach ausgedehnten Gebiete $(T)$ continuirlich vertheilt und nennt man die Masse des $n$-dimensionalen Raumelementes $da_1 \; da_2 \qquad da_n$

$$\varrho \; da_1 \; da_2 \qquad da_n,$$

wo $\varrho$ die Dichtigkeit in dem Punkte $(a_1 \; a_2 \ldots a_n)$ bedeutet, so wird

$$V = \int_{(T)}^{(n)} \frac{\varrho \; da_1 \; da_2 \; \ldots \; da_n}{(n-2) r^{n-2}} \tag{1}$$

und

$$X_\nu = \int_{(T)}^{(n)} \frac{\varrho (x_\nu - a_\nu)}{r^n} da_1 \; da_2 \qquad da_n = - \frac{\partial V}{\partial x_\nu} \tag{2}$$

Die $n$-fache Integration ist über das $n$-fach ausgedehnte Gebiet $(T)$ zu erstrecken, in dem die stetig vertheilten Massen $m_i$ ausgebreitet sind.

Die Function $V$ wird offenbar solange endlich und stetig sein, als der Punkt $\mu$ oder $(x)$ ausserhalb des Gebietes $(T)$ liegt. Ebensolange gelten die durch Differentiation gewonnenen Formeln 2) und auch die folgenden:

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} = -\int\limits_{(T)}^{(n)} \varrho \left[ \frac{1}{r^n} - n\frac{(x_\nu - a_\nu)^2}{r^{n+2}} \right] da_1\, da_2 \qquad da_n. \quad (3$$

Aus den Gleichungen 3) gewinnt man die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} = \Delta V = o \qquad (4$$

und diese besteht für die Function $V$ solange, als die voranstehenden Darstellungen der zweiten Derivirten eine Bedeutung haben.

Um das Verhalten der Function $V$ und ihrer Derivirten beurtheilen zu können, wenn der Punkt $(x)$ in dem Gebiete $T$ liegt, führen wir Polarcoordinaten ein:

$$a_1 = x_1 + r \cos \alpha_1$$
$$a_2 = x_2 + r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2$$
$$a_3 = x_3 + r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3$$

$$a_{n-1} = x_{n-1} + r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \qquad \sin \alpha_{n-2} \cos \alpha_{n-1}$$
$$a_n = x_n + r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \;..\; \sin \alpha_{n-2} \sin \alpha_{n-1}.$$

Dann ist das Element

$$da_1\, da_2 \qquad da_n = P\, dr\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \qquad d\alpha_{n-1},$$

wenn $P$ die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial r} & \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_{n-1}} \\ & & \\ \frac{\partial a_n}{\partial r} & \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_{n-1}} \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Die Berechnung gibt:

$$da_1\, da_2 \,..\, da_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \alpha_1 \sin^{n-3} \alpha_2 \qquad \sin \alpha_{n-2}\, dr\, d\alpha_1 \,. \qquad d\alpha_{n-1}$$

und damit wird:

$$1') \quad V = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha_{n-1} \,.\int\limits_0^{\pi} \sin \alpha_{n-2}\, d\alpha_{n-2} \ldots \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2} \alpha_1\, d\alpha_1 \,.\int\limits_0^{\pi} \frac{\varrho\, r}{n-2}\, dr$$

$$2')\quad \frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \int^{(n)} \sin^{n-1} \alpha_1 \sin^{n-2} \alpha_2 \quad \sin^{n-\nu+1} \alpha_{\nu-1} \quad \sin^{n-\nu-1} \alpha_\nu \cos \alpha_\nu$$

$$\sin^{n-\nu+2} \alpha_{\nu+1} \quad \sin \alpha_{\nu-2} \quad \varrho \, dr \, d\alpha_1 \quad d\alpha_{n-1}$$

$$3')\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} = -\int^{(n)} \sin^{n-2} \alpha_1 \sin^{n-3} \alpha_2 \quad \sin \alpha_{n-2}$$

$$\left[\frac{1-n \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \ldots \sin^2 \alpha_{\nu-1} \cos \alpha_\nu}{r}\right] \varrho \, dr \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-}$$

Hier ist ersichtlich, dass das Potential $V$ und seine ersten Derivirten auch endliche und stetige Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, wenn der Punkt $(x)$ innerhalb des stetig mit Masse erfüllten Gebietes $(T)$ liegt. Die Integrale in den Gleichungen 3′) verlieren aber in diesem Fall jede Bedeutung; wir sehen uns darum zur Beurtheilung des Verhaltens der zweiten Derivirten genöthigt, noch eine Transformation vorzunehmen, wenn die erste keine verwendbare Umgestaltung mit sich brachte.

Vorher will ich nur anführen, dass die Transformation des „Differentialparameters“ $\triangle V$ durch die Polarcoordinaten den Ausdruck liefert:

$$\frac{1}{r^2}\left[r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (n-1)\, r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1{}^2} + \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2{}^2}\right.$$

$$+ \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_3{}^2} + \ldots + \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \ldots \operatorname{cosec}^2 \alpha_{n-2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2{}_{n-1}}$$

$$+ (n-2) \operatorname{cotg} \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + (n-3) \operatorname{cotg} \alpha_2 \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}$$

$$+ (n-4) \operatorname{cotg} \alpha_3 \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} +$$

$$\left. + \operatorname{cotg} \alpha_{n-2} \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 \ldots \operatorname{cosec}^2 \alpha_{n-3} . \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-2}}\right]$$

den man leicht aus den Untersuchungen von Gundelfinger (in Borchardt's Journal B 85, p. 295) ablesen kann.

Die angekündigte Transformation betrifft die Ausdrücke:

$$\frac{\partial V}{\partial x_\nu} = -\int_{(T)}^{(n)} \varrho \frac{x_\nu - \alpha_\nu}{r^n} \, da_1 \, da_2 \quad da_n$$

$$= \int_{(T)}^{(n)} \varrho \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left(\frac{-1}{(n-2) r^{n-2}}\right) da_1 \, da_2 \quad da_n$$

Man kann zeigen, dass solange als die Function $\frac{\varrho}{(n-2)r^{n-2}}$ innerhalb $T$ stetig ist, die Darstellungen gelten:

$$\frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \int\limits_{(T)}^{(n)} \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu} da_1\, da_2 \ldots da_2 + \int\limits_{(S)} \frac{\varrho}{(n-2)r^{n-2}} \cos \alpha_\nu\, d\sigma \quad (5$$

wo $\alpha_1 \; \alpha_2 \quad . \; \alpha_n$ die Winkel bedeuten, welche die nach dem Innern von $T$ auf dem Elemente $d\sigma$ der $(n-1)$ dimensionalen Begrenzung $(S)$ des Gebietes $T$ errichtete Normale mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen einschliesst.

Kommen innerhalb $T$ Unstetigkeitsstellen der Function $\frac{\varrho}{(n-2)r^{n-2}}$ vor, so hat man von dem Gebiete $(T)$ solche Theile abzusondern, welche diese Stellen enthalten. In dem so modificirten Gebiete $T'$ gilt für

$$\frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \int\limits_{(T')}^{(n)} \varrho \; \frac{\partial}{\partial a_\nu} \left( \frac{-1}{(n-2)r^{n-2}} \right) da_1\, da_2 \qquad da_n$$

die gleiche Transformation, nur ist das Begrenzungsintegral auch über die Begrenzung der abgesonderten Raumtheile zu erstrecken.

Ist $\varrho$ eine stetige Function des Ortes, fällt aber $(x)$ mit einem Punkte $(a^{(i)})$ zusammen, so umgebe man diesen Punkt mit dem durch

$$(x_1 - a_1^{(i)})^2 + (x_2 - a_2^{(i)})^2 + \qquad (x_n - a_n^{(i)})^2 = \delta^2$$

definirten Gebilde $(K)$. Lassen wir dann $\delta$ nach Null convergiren, so wird der Beitrag zu dem Begrenzungsintegral, wenn $\varrho_1$ der grösste Werth von $\varrho$ innerhalb des neuen Gebildes ist, kleiner als

$$\lim_{\delta = o} \frac{\varrho}{(n-2)\delta^{n-2}} \int d\sigma,$$

— die Integration über die Begrenzung (von $K$) erstreckt. Da aber

$$\int d\sigma = \delta^{n-1} \; c_n$$

ist, wo $c_n$ die Begrenzung des Gebildes

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \qquad x_n{}^2 = 1$$

bezeichnet, so ist jener Beitrag gleich einer Zahl $\varepsilon$ zu setzen, die kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon_1$.

Da $\frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu}$ innerhalb $T$ endlich ist, so wird das $n$-fache Integral

$$\int^{(n)} \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu} da_1 \, da_2 \quad da_n$$

über das Gebiet ($K$) erstreckt mit $\delta$ auch Null, und darum gilt die obige Transformation, ob der Punkt ($x$) ausserhalb oder innerhalb ($T$) liegt.

Aus den Darstellungen der ersten Derivirten $\frac{\partial V}{\partial x_\nu}$ in den Gleichungen 5) ergeben sich jetzt für die zweiten Derivirten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu^2} = \int_{(T)}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \right) \frac{\partial \varrho}{\partial a_\nu} da_1 \, da_2 \quad da_n$$

$$+ \int_{(S)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \right) \varrho \cos \alpha_\nu \, d\sigma \tag{6}$$

die bei stetigem $\varrho$ endlich und stetig bleiben, gleichviel ob ($x$) ausserhalb oder innerhalb $T$ liegt, wie man bei Benützung der bisher verwendeten Hilfsmittel leicht sieht. Fällt aber ($x$) in die Begrenzung ($S$), so verliert das zweite Integral seine Bedeutung.

Lassen wir auch Unstetigkeitsstellen für $\varrho$ zu, so bleiben $V$ und dessen erste Derivirte überall endliche und stetige Functionen, indess die zweiten Derivirten nur endlich und stetig sind, wenn ($x$) in endlicher wenn auch noch so kleiner Entfernung von der Begrenzung $S$ oder den Unstetigkeitsstellen gehalten wird. Es ist nun die mit diesen Eigenschaften der ersten und zweiten Derivirten nothwendig sich einstellende sprungweise Aenderung der letzteren bei einem Durchgang durch die Begrenzung ($S$) zu untersuchen, doch beschränken wir uns auf die Ermittlung des Sprunges, den $\triangle V$ erleidet.

Zu diesem Zwecke beachte man zuerst, in welcher Weise das Gauss'sche Begrenzungsintegral zu verallgemeinern ist.

Bezeichnet $d\sigma$ das Element der geschlossenen Begrenzung $S$ eines Gebietes $T$ mit den Coordinaten ($a_1 \, a_2 \ldots a_n$), $r$ den Abstand des Elementes $d\sigma$ von einem beliebigen Punkte ($x$) und ($r$N) den Winkel, welchen diese Entfernung mit der in $d\sigma$ nach dem Innern von $T$ gezogenen Normalen N einschliesst, so ist

$$W_x = \int\limits_{(S)} \frac{\cos\,(r\mathrm{N})}{r^{n-1}}\, d\sigma \tag{7}$$

das dem Gauss'schen analoge Begrenzungsintegral. Ist unter ($a$) ein äusserer, unter ($i$) ein innerer und unter ($s$) ein Punkt ($x$) in der Begrenzung $S$ verstanden, so ist

$$W_a = o,\ W_{(i)} = c_n,\ W_{(s)} = \frac{c_n}{2} \tag{8}$$

und $c_n$ bedeutet wieder die ($n$—1) dimensionale Begrenzung des Gebildes $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \quad x_n{}^2 = 1.$

Bezeichnet man mit $C_n$ den $n$-dimensionalen Inhalt dieses Gebildes, so gilt $c_n = nC_n$ und es ist

$$C_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} \quad C_{2m+1} = \pi^m\,\frac{2^{2m+1}.\ m!}{(2m+1)!} \text{ oder } C_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Die Formel für $W_{(s)}$ ist an die Bedingung geknüpft, dass ($s$) ein Punkt der stetig gekrümmten Begrenzung ist. Die Modificationen in anderem Falle sind auch hier im $n$-dimensionalen Raume bald beurtheilt.

Mit Hilfe der Formeln (8) lassen sich dann folgende Sätze aufstellen:

1) Sind die Massen $M_a$ ausserhalb eines Gebietes $T$ und $M_s$ auf dessen Begrenzung $S$ vertheilt, ist $N$ die innere Normale, und bezeichnet man mit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathrm{N}}\right)_a \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \mathrm{N}}\right)_i$$

die Werthe des nach N gewonnenen Differentialquotienten des Potentials $V$ der Massen $M_a + M_s$ ausserhalb und innerhalb der Begrenzung $S$, so ist

$$8) \qquad \int\limits_{(S)} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathrm{N}}\right)_i d\sigma = o \quad \int\limits_{(S)} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathrm{N}}\right)_a d\sigma = c_n\ M_s.$$

2) Liegen innerhalb $T$ die Massen $M_i$ und auf $S$ die Massen $M_s$ und ist $\mathfrak{N}$ die äussere Normale, so bestehen die Gleichungen

$$9) \quad \int \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}\right)_i d\sigma = -\,c_n\,M_i\,,\int \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}\right)_a d\sigma = -\,c_n\ (M_i + M_s)$$

wo die Bezeichnungen nicht mehr misszuverstehen sind.[1])

---

[1]) Siehe Gauss Theoria attractionis Art. 23.

Betrachtet man jetzt innerhalb eines Gebietes $T$ ein an den Punkt $(x)$ anstossendes gerades rechtwinkliges Gebilde $(P)$ mit den Kantenlängen $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$ und dem Inhalt $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ und bildet

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}\right)_i d\sigma$$

über die Begrenzung von $(P)$, so ist dieses einerseits gleich $-c_n M_i = -c_n\, \varrho\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, andererseits gleich $\triangle V dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ und darum gilt für jeden Punkt $(x)$, der innerhalb $T$ aber in endlicher wenn auch noch so kleiner Entfernung von der Begrenzung oder einer Unstetigkeitsstelle von $\varrho$ liegt,

$$\triangle V = -\, c_n\, \varrho. \tag{10}$$

Damit sind nun die vorzüglichsten Eigenschaften der Function $V$ festgestellt, wenn die Massenvertheilung über ein $n$-dimensionales im Endlichen liegendes Gebiet ausgebreitet sind und die Dichtigkeit $\varrho$ eine stetige Function des Ortes ist. Wir fassen die Fälle ins Auge, wo die Masse über ein $(n-\nu)$ fach ausgedehntes Gebilde $K_{n-\nu}$ im $n$-dimensionalen Raume stetig ausgebreitet ist.

Bezeichnet $d\sigma_{n-\nu}$ das Element des Gebildes $K_{n-\nu}$, $\varrho$ die Dichtigkeit der wiederum stetig vertheilten Masse, so ist das Potential

$$V = \int \frac{\varrho\, d\sigma_{n-\nu}}{(n-2)\, r^{n-2}} \tag{11}$$

Die Function $V$ genügt im ganzen unendlichen $n$-fach ausgedehnten Raume $R_n$ der Differentialgleichung

$$\triangle V = o.$$

Ist $\nu = 1$, so ist $V$ überall endlich und stetig, aber die ersten Derivirten haben nicht mehr die Eigenthümlichkeit allenthalben endlich und stetig zu sein. Bezeichnet $\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}$ die Derivirte von $V$, genommen nach einer Normale zu dem Gebilde $K_{n-1}$ ($\mathfrak{N}$ nach aussen zu positiv gezählt), $\varrho_0$ die Dichtigkeit im Fusspunkt der Normale $\mathfrak{N}$, so ist nämlich $\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}$ bei dem Durchgang durch $K_{n-1}$

unstetig, und zwar derart dass

12) $$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}\right)_{+o} - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}\right)_{-o} = - c_n \varrho_o$$

ist.

Bei einer stetigen Vertheilung der Masse auf einem $n—\nu$ dimensionalen Gebilde ist $V$ endlich und stetig, so lange der Punkt $(x)$ in endlicher Entfernung $t$ von $K_{n-\nu}$ sich befindet (wo $t$ immer die kürzeste Entfernung bedeutet). Wird jedoch $t$ unendlich klein, so wächst $V$ ins Unbegrenzte, so zwar dass

13) $$\lim_{t=o} V = \lim \varrho_o \frac{c_n}{c_\nu} \frac{1}{(\nu-2)t^{\nu-2}}$$

und daher

14) $$\lim \left(t^{\nu-1} \frac{\partial V}{\partial t}\right) = - \frac{c_n}{c_\nu} \varrho_o \; (\nu = 2, 3 \ldots n)$$

gilt. Mit $\varrho_o$ ist wieder die Dichtigkeit an der Stelle bezeichnet, in welche der Punkt $(x)$ für das verschwindende $t$ hineinrückt.

Die Richtigkeit der letzten Formeln ergibt sich bei Anwendung der Gleichung

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i d\sigma_{n-\nu} = - c_n M_i,$$

wenn man dieselbe ebenso verwerthet, wie das zur Bestimmung des Verhaltens des Newton'schen Potentials bei der Vertheilung der Masse auf einer Curve geschieht. Die Formel

$$\lim \left(t^{n-2} \frac{\partial V}{\partial t}\right) = - \frac{c_n}{c_{n-1}} \varrho_o,$$

welche bei stetiger Vertheilung der Masse auf einer Curve in Anwendung kommt, ist übrigens durch directe Rechnung zu bestätigen, wenn man die Masse etwa auf einer der Coordinatenaxen vertheilt denkt.

Die Formel

$$\lim \left(t^{n-1} \frac{\partial V}{\partial t}\right) = - \varrho_o$$

folgt unmittelbar aus der Definition von $V$, wenn die Masse in einem Punkt concentrirt ist, d. h. aus

$$V = \frac{\varrho_o}{(n-2)t^{n-2}}$$

Lassen wir den stets im Endlichen erhaltenen Punkt in unendliche Entfernung $R$ von dem Coordinatenursprung rücken, indess die Massen $M$ in einem endlichen Gebiet verbleiben, so ist wegen

$$\lim_{R=\infty} \frac{R}{r} = 1$$

$$lim\ ((n-2)R^{n-2}\ V) = M, \qquad lim\ R^{n-1} \frac{\partial V}{\partial R} = -M \qquad (15$$

und man sieht, dass $V_\infty$ Null ist ausser in dem Falle $n = 2$ wo $V_\infty$ den Werth $-\infty$ annimmt.

Später soll auseinandergesetzt werden, dass die Potentialfunction durch die Gleichung $\triangle V = o$, die Eigenschaft in 15) und eine der Gleichungen 10, 12, 14) vollständig und eindeutig bestimmt ist. Jetzt nehmen wir erst ein Beispiel einer speciellen Massenvertheilung vor.

Es soll die Masse $M$ gleichmässig in dem durch die Gleichung

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \qquad x_n{}^2 = R^2$$

definirten Gebilde $(K_n)$ ausgebreitet sein, welches ist dann der Werth des Potentials in einem äusseren und einem inneren Punkt?

Da $V$ nur eine Function der Entfernung des Punktes $(x)$ von dem Coordinatenursprung ist, lautet die Differentialgleichung $\triangle V = o$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\ \frac{\partial V}{\partial r} = o,$$

wie man aus dem auf Seite 97 angegebenen Differentialparameter ersieht, und daher hat $V$ die Form

$$\frac{c}{(n-2)r^{n-2}} + c'$$

Weil $V_\infty = o$ ist, verschwindet die Constante $c'$, und wegen der Eigenschaft

$$lim\ ((n-2)r^{n-2}\ V) = M = \varrho\ C_n\ R^n$$

ist

$$V_a = \frac{M}{(n-2)r^{n-2}} \qquad (16$$

Den Werth $V_i$ finden wir, indem wir beachten, dass der Punkt $(x)$ für das Gebilde $\Sigma x_\nu^2 = r^2$ ein äusserer, für das Gebilde $\Sigma x_\nu^2 = r_1^2$ $(r \gtreqless r_1 \leq R)$ ein innerer Punkt ist, und für dieses allein $V_i = c'$ sein muss, da $V_{(o)}$ nicht unendlich werden darf. $V_{(o)}$ hat den Werth:

$$\int_r^R \frac{c_n \varrho \, r_1^{n-1} \, dr_1}{(n-2) r_1^{n-2}} = \frac{\varrho \, c_n}{2(n-2)} (R^2 - r^2)$$

Darum ist

$$V_i = \frac{\varrho \, C_n \, r^n}{(n-2) r^{n-2}} + \frac{\varrho \, c_n}{2(n-2)} (R^2 - r^2)$$

$$= - \frac{\varrho \, c_n}{2\, n} r^2 + \frac{\varrho \, c_n \, R^2}{2(n-2)} \tag{17}$$

Für $n = 2$ ist das Integral

$$\int r \log \frac{1}{r} \, dr = \frac{r^2}{4} \left(1 + \log \frac{1}{r^2}\right)$$

zu verwenden, und es wird

$$V_i = - \frac{\varrho \, c_2}{4} r^2 + \frac{\varrho \, c_2 \, R^2}{4} \left(1 + \log \frac{1}{R^2}\right).$$

Ist die Masse $M$ gleichmässig auf der Begrenzung von $(K_n)$ ausgebreitet, so ist $M = \varrho \, c_n \, R^{n-1}$ und

$$V_a = \frac{M}{(n-2) r^{n-2}} \qquad V_i = \frac{M}{(n-2) R^{n-2}} \tag{18}$$

In beiden Fällen besteht also für äussere Punkte eine äquipotentiale Massenvertheilung darin, dass die gesammte Masse in den Punkt $(o)$ verlegt ist.

Breiten wir ausserhalb und innerhalb der Begrenzung von $K_n$ Massen $m_a$ und $m_i$ aus, so ist das Potential in einem Punkte $(x_\sigma)$ der Begrenzung

$$V_\sigma = \Sigma \, m_a \frac{1}{(n-2) r_a^{n-2}} + \Sigma \, m_i \frac{1}{(n-2) r_i^{n-2}}, \tag{19}$$

worin $r_a$ und $r_i$ die Entfernung des Punktes $(x_\sigma)$ von $m_a$ resp. $m_i$ bedeutet.

Nach den voranstehenden Formeln ist das Integral

$$\int V_\sigma \, d\sigma = \left[\Sigma \, m_a \frac{1}{(n-2) r_a^{n-2}} + \frac{\Sigma \, m_i}{(n-2) R^{n-2}}\right] \int d\sigma \tag{20}$$

und offenbar sind daher Massen auf der Begrenzung von $K_n$ beliebig den $m_a$ oder $m_i$ zuzuordnen.

Speciell ergibt sich hieraus:

$$\frac{\int V_\sigma\, d\sigma}{\int d\sigma} = \Sigma\, m_a \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} = V_{(o)}$$

und

$$\frac{\int V_\sigma\, d\sigma}{\int d\sigma} = \frac{\Sigma\, m_i}{(n-2)R^{n-2}}$$

wenn die Massen nur ausserhalb oder innerhalb $K_n$ liegen. Nennt man den linksstehenden Quotienten das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche $V$ auf der Begrenzung erhält, so ist dieses im ersten Fall so gross als der Werth von $V$ im Mittelpunkte von $K_n$, im zweiten Fall unabhängig von der Vertheilung der Massen.

Versteht man unter der natürlichen Belegung einer geschlossenen Begrenzung $S$ eine derartige Vertheilung der Masse $M = 1$ auf $S$, dass das Potential in allen inneren Punkten constant $\Pi$ ist, dann gilt bei irgend einer Massenvertheilung:

$$\int_{(S)} V_\sigma \,.\, \varrho_\sigma\, \delta\sigma = \Sigma\, m_a\, P_{m_a} + \Pi \,.\, \Sigma\, m_i \tag{21}$$

wo $P_{m_a}$ das Potential der natürlichen Belegung von der Dichtigkeit $\varrho_\sigma$ auf einen äusseren Massenpunkt bedeutet. Bei der Begrenzung des Gebildes $K_n$ ist

$$\Pi = \frac{1}{(n-2)R^{n-2}}\,,\quad P_{m_a} = \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} \quad \text{und} \quad \varrho_\sigma = \frac{1}{c_n R^{n-1}}$$

Mit Hilfe dieser Sätze lassen sich die bekannten Neumann-schen Theoreme über die extremen Werthe des Potentials nachbilden und die folgenden Sätze beweisen:

Erstens: $V_a$ ist bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn die Masse $M$ innerhalb eines geschlossenen Gebietes $T$ und auf dessen Begrenzung $S$ vertheilt und $V_\sigma$ gegeben ist, oder $V_a$ ist vollständig bestimmt, wenn das Potential von Massen innerhalb und auf der Begrenzung gegeben ist, ausser in dem „singulären“ Falle, $\Pi = o$ $(n = 2)$.

Zweitens: $V_i$ ist vollständig bestimmt, wenn die Potentialwerthe $V_\sigma$ von Massen ausserhalb $T$ und auf $S$ gegeben sind.

Drittens: Die Dichtigkeit einer Belegung von der Gesammtmasse $M$ auf $S$ ist eindeutig bestimmt, wenn die Werthe

$V_\sigma$ von bestimmten Werthen nur um eine additive Constante abweichen, oder die Dichtigkeit einer Belegung auf $S$ ist bestimmt, wenn $V_\sigma$ vorgegeben sind; — ausser in dem früher genannten singulären Fall.

Wir gehen jetzt auf den Green'schen Satz ein. Auf Grund der Transformation des über ein vollständig begrenztes Gebiet $T$ ausgedehnten Integrals

$$\int\limits_{(T)} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}\, dx_1\, dx_2 \qquad dx_n$$

in welchem $F$ eine innerhalb $T$ bestimmte endliche und stetige Function bedeutet, in das Begrenzungsintegral:

$$-\int\limits_{(S)} F\, \frac{\partial x_\nu}{\partial N}\, d\sigma,$$

wo $N$ die in dem Element $d\sigma$ der Begrenzung nach Innen gezogene Normale bezeichnet, und auf Grund der Transformation:

$$\int\limits_{(T)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}\, dx_1\, dx_2\, . \qquad dx_n = -\int\limits_{(S)} \Sigma\, F_\nu\, \frac{\partial x_\nu}{\partial N}\, d\sigma \quad (A$$

lassen sich für zwei innerhalb $T$ endliche und stetige Functionen $V$ und $W$, deren erste Derivirte auch endlich und stetig sind, die folgenden Sätze aufstellen:

$$\int\limits_{(T)} \Sigma\, \frac{\partial W}{\partial x_\nu}\, \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\, dx_1\, dx_2 \qquad dx_n = -\int\limits_{(T)} V \triangle W\, dx_1\, dx_2\, . \qquad dx_n$$
$$-\int\limits_{(S)} V\, \frac{\partial W}{\partial N}\, d\sigma \qquad (22$$

$$\int \Sigma\, \frac{\partial W}{\partial x_\nu}\, \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\, dx_1\, dx_2 \qquad dx_n = -\int\limits_{(T)} W \triangle V\, dx_1\, dx_2\, . \qquad dx_n$$
$$-\int\limits_{(S)} W\, \frac{\partial V}{\partial N}\, d\sigma \qquad (23$$

und

$$\int\limits_{(T)} (V \triangle W - W \triangle V)\, dx_1\, dx_2 \qquad dx_n +$$
$$+ \int\limits_{(S)} \left( V\, \frac{\partial W}{\partial N} - W\, \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\sigma = o. \qquad (24$$

Mit Hilfe des letzten Satzes können wir den Werth der Potentialfunction $V$ für jeden Punkt im Innern von $T$ bestimmen, wenn die Werthe von $V$ auf der Begrenzung $S$ und $\triangle V$ im Innern bekannt sind und weiter eine Function $W$ angegeben werden kann, welche innerhalb $T$ der Differentialgleichung $\triangle W = o$ genügt, auf der Begrenzung den Werth Null besitzt und im Innern von $T$ überall endlich und stetig ist ausser im Punkte $(x^i)$, wo sie unendlich wird wie $\left(\frac{1}{(n-2)r^{n-2}}\right)_{r=o}$. Eine derartige Hilfsfunction wird man besitzen, wenn man eine für jeden Punkt der Begrenzung des Gebietes $T$ gegebene einwerthige, endliche und stetige Function $U$ für das Innere in eindeutiger Weise so bestimmen kann, dass sie auch da einwerthig, endlich und stetig ist und ausserdem der Gleichung $\triangle U = o$ genügt. Die Function $W$ ist offenbar gleich

$$U + \frac{1}{(n-2)r^{n-2}}, \text{ wenn } U_\sigma = -\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \text{ ist.}$$

Auf die Bestimmung von $U_i$ bei gegebenem $U_\sigma$ werden wir noch eingehen, jetzt nehmen wir die Existenz einer Function $U$ und $W$ an.

Um mit Hilfe des Green'schen Satzes 24) $V_i$ aus den Werthen $V_\sigma$ und $(\triangle V)_i$ zu bestimmen, umschliessen wir die Stelle $(x^{(i)})$ mit dem Gebilde $K_n$

$$(x_1 - x_1^{(i)})^2 + (x_2 - x_2^{(i)})^2 + \qquad (x_n - x_n^{(i)})^2 = r^2$$

und sondern das so definirte Gebiet um die Stelle $(x^{(i)})$ von $T$ ab, dann lässt sich der Green'sche Satz auf das neue Gebiet $T'$ anwenden und zwar folgt wegen: $W_\sigma = o$ und $\triangle W = o$

$$\int\limits_{(T)} W \triangle V \, dx_1 \, dx_2 \qquad dx_n = \int\limits_{(S)} V \frac{\partial W}{\partial N} \, d\sigma + \int\limits_{(s)} \left( V \frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial V}{\partial r} \right) d\sigma$$

wo $d\sigma'$ das Element der Begrenzung $(s)$ von $K_n$ bezeichnet. Lässt man den Radius des Gebildes $K_n$ nach Null convergiren, so findet man, dass

$$\lim \int\limits_{(T')} W \triangle V \, dx_1 \, dx_2 \, . \, . \quad dx_n = \int\limits_{(T)} W \triangle V \, dx_1 \, dx_2 \, . \, . \, . \, dx_n$$

$$\lim \int_{(s)} \left( V \frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial V}{\partial r} \right) d\sigma' = - c_n \; V_i$$

ist und daher wird

$$c_n \, V_i = - \int_{(T)} W \triangle V \; dx_1 \;\; dx_2 \qquad dx_n + \int_{(S)} V_\sigma \; \frac{\partial W}{\partial \mathrm{N}} d\sigma \qquad (25$$

Diese Bestimmung von $V_i$ beruhte auf der Voraussetzung, dass $V$ und seine ersten Derivirten innerhalb $T$ endlich und stetig sind. Trifft diese Voraussetzung nicht ein, finden sich also in einem $n-1$, $n-2$ . $n-\nu$ dimensionalen Gebilde $K_{n-1}$, $K_{n-2}$ $K_{n-\nu}$ innerhalb $T$ Unstetigkeiten, so sind in der Gleichung 25) rechts noch Beiträge hinzuzufügen und zwar entsprechend den Unstetigkeiten auf $K_{n-1}$ der Beitrag

$$\int \left[ \left( V_{+o} - V_{-o} \right) \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{N}} - W \left( \left( \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{+o} - \left( \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{-o} \right) \right] d\sigma_{n-1}$$

und bei Unstetigkeiten auf $K_{n-\nu}$ der Beitrag:

$$- c_\nu \int W \lim \left( t^{\nu-1} \; \frac{\partial V}{\partial t} \right)_o d\sigma_{n-\nu} \qquad (\nu = 2, \; 3 \qquad n)$$

wo unter $d\sigma_\mu$ das Element von $K_\mu$ zu verstehen ist, $\mathfrak{N}$ die Normale in einem Unstetigkeitspunkte von $K_{n-1}$, $V_{+o}$, $\left( \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{+o}$, $V_{-o}$, $\left( \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{-o}$ die Werthe von $V$ und $\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}}$ in den $K_{n-1}$ unendlich nahe liegenden Punkten der Normale und endlich $t$ die kürzeste Entfernung eines Punktes $(x)$ von $K_{n-\nu}$ bezeichnet.

Wenden wir diese Sätze auf den Fall an, dass $T$ das unendliche $n$-fach ausgedehnte Gebiet ist, dann ist die Function $W$ gleich $\frac{1}{(n-2) r^{n-2}}$ und die obige Gleichung 25) lautet:

$$c_n \, V_i = - \int_{(T_\infty)} \frac{\triangle V}{(n-2) r^{n-2}} \; dx_1 \;\; dx_2 \qquad dx_n +$$

$$\int_{(S)} \left( \frac{\partial}{\partial \mathrm{N}} \left( \frac{1}{(n-2) r^{n-2}} \right) - \frac{1}{(n-2) r^{n-2}} \; \frac{\partial V}{d \mathrm{N}} \right) d\sigma$$

Als Begrenzung des Gebietes $(T_\infty)$ fassen wir die Begrenzung des Gebildes $K_n$ auf, wo $r$ unendlich gross ist; da stellt sich zufolge der Eigenschaften der Potentialfunction wonach

$$V_\infty = o, \quad \lim R^{n-2} \frac{\partial V}{\partial R} = o$$

ist heraus, dass dieser Theil des Begrenzungsintegrales Null ist, und dasselbe nur über die Umhüllungen der Unstetigkeitsbereiche zu erstrecken ist.

Nehmen wir an, dass die Masse stetig in einem endlichen Gebiete $T$ ausgebreitet sei, so dass $V$ und seine ersten Derivirten allenthalben endlich und stetig sind, so fällt das Begrenzungsintegral ganz aus, und da $\triangle V$ gleich $o$ resp. $-c_n \varrho$ ist, je nachdem der Punkt $(x)$ ausserhalb oder innerhalb $T$ liegt, ist

$$V_i = \int\limits_{(T)} \varrho \, \frac{dx_1 \, dx_2 \, . \, . \, . \, dx_n}{(n-2) r^{n-2}}$$

Ist die Masse nur in einem $(n-1)$ dimensionalen endlichen Gebiete $K_{n-1}$ vertheilt, so ist überall $\triangle V = o$, $V$ aber allenthalben endlich und stetig, also $V_{+o} = V_{-o}$ und es wird

$$c_n \; V_i = - \int \frac{1}{(n-2) r^{n-2}} \left( \left( \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{+o} - \left( \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{N}} \right)_{-o} \right) \; d\sigma_{n-1}$$

oder

$$V_i = \int \frac{d\sigma_{n-1}}{(n-2) r^{n-2}}$$

und ebenso bei der Vertheilung der Masse in einem $n-\nu$ dimensionalen Gebiete

$$V_i = \int \frac{d\sigma_{n-\nu}}{(n-2) r^{n-2}},$$

wenn wir die auf Seite 102 angegebenen Gleichungen 12), 14) benützen. Indem wir auf diese Weise stets eine einzige bestimmte Function $V_i$ gefunden haben, die zufolge unserer Definitionen gerade die Potentialfunction ist, erscheint auch nachgewiesen, dass die Potentialfunction durch die Differentialgleichung $\triangle V = o$, das Verhalten im Unendlichen und die Bedingungen 10, 12, 14) völlig bestimmt ist.

Wir geben nun noch einige Folgerungen aus den Greenschen Sätzen an: Ist $U$ eine Function, die innerhalb eines Gebietes

$T$ nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig ist und ausserdem die Differentialgleichung $\triangle U = o$ erfüllt, so gilt zufolge der Gleichung $A$)

$$\int\limits_{(S)} \left( \frac{\partial U}{\partial \mathrm{N}} \right) d\sigma = o$$

$$\int\limits_{(S)} U \left( \frac{\partial U}{\partial \mathrm{N}} \right)_i d\sigma + \int\limits_{(T)} \Sigma \left( \frac{\partial U}{\partial x_v} \right)^2 dx_1 \; dx_2 \qquad dx_n = o$$

und zufolge 24), wenn $W = \dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}}$ gesetzt wird:

$$\int\limits_{(S)} \left( U \frac{\partial}{\partial \mathrm{N}} \left( \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} \right) - \frac{1}{(n-2)r_a^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial \mathrm{N}} \right) d\sigma = o$$

$$\int\limits_{(S)} \left( U \frac{\partial}{\partial \mathrm{N}} \left( \frac{1}{(n-2)r_i^{n-2}} \right) - \frac{1}{(n-2)r_i^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial \mathrm{N}} \right) d\sigma = c_n \; U_i$$

je nachdem die Stellen ($x$) ausserhalb oder innerhalb $T$ liegt, was auch durch den Index $a$ und $i$ bei $r$ angezeigt ist.

Hierin ist $U$ als Potential anzusehen, wenn die Massen auf der Begrenzung und ausserhalb des Gebietes $T$ liegen. Es sei also $U$ das Potential irgend welcher Massen, die theils ausserhalb, theils auf der Begrenzung des Gebildes $K_n$

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots (x_n - a_n)^2 = R^2$$

ausgebreitet sind; die Werthe $U_\sigma$ seien gegeben gleich $\varrho_\sigma$, man soll $U_i$ finden. Wir suchen also in einem speciellen Falle die früher verlangte Hilfsfunction $U$ und nach dem zweiten Neumann-schen Theorem ist diese völlig bestimmt, wenn überhaupt eine solche Function existirt.

Bezeichnet $r$ den Abstand der Stelle ($x$) von dem Element $d\sigma$ der Begrenzung, $E$ die Entfernung der Stelle ($x$) von dem Mittelpunkt ($a$), so dass

$$r^2 = R^2 + E^2 - 2ERa$$

wird, wenn man

$$a = \frac{a_1 \; x_1 + a_2 \; x_2 + \ldots . \; a_n \; x_n}{RE}$$

setzt, so ist die Lösung des verlangten Problems in

$$U_i = \frac{1}{c_n} \int_{(S)} \varrho_\sigma \frac{R^2 - E^2}{r^n\ R} d\sigma \qquad (26$$

enthalten, was man durch die Verallgemeinerung der Betrachtungen an dem Kreise und der Kugel leicht bestätigt. (Siehe Neumann, Tonelli und Macher.)

Führt man die Function

$$V = \int_{(S)} \frac{\varrho_\sigma\ d\sigma}{(n-2) r^{n-2}}$$

ein, welche continuirlich aber nicht holomorph ist, indem die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_{+R} - \left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_{-R} = - c_n\ \varrho_\sigma$$

gilt, so kann man $U_i$ auf folgende Form bringen:

$$U_i = \frac{n-2}{c_n} \frac{1}{R} \left(V + \frac{2E}{n-2} \frac{\partial V}{\partial E}\right) \qquad (27$$

Führt man noch

$$E^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$$

ein, so wird

$$U_i = \frac{2}{c_n R^{n-1}} \int \frac{\varrho_\sigma \cos \varphi\ d\sigma}{\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}} - \frac{1}{c_n R^{n-1}} \int \frac{\varrho_\sigma\ d\sigma}{\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}}, \qquad (28$$

und in dieser Formel ist der Grenzfall $n = 2$ unmittelbar zu übersehen, den wir weiterhin ausschliessen.

Bei der Vertheilung der Massen innerhalb $K_n$ und auf der Begrenzung findet man bei gegebenen Werthen $U_\sigma = - \varrho_\sigma\ U_a$ in derselben Form 27) und es ist

$$\lim_{E=R} (U_a - U_i) = - 2 \varrho_\sigma$$

Die Function $\varrho_\sigma$ kann auch unendlich werden; es ist dann nur nothwendig, dass sie integrabel ist.

Beachtet man, dass die Differentialgleichung $\triangle V = o$ in Polarcoordination die Form erhält:

$$E^2 \frac{\partial V}{\partial E} + (n-1) E \frac{\partial V}{\partial E} + \Phi (V) = o$$

so wird, wenn jetzt mit $U$ die rechte Seite der Gleichung 27) bezeichnet wird,

$$-c_n\, R.\, E \frac{\partial U}{\partial E} = (n-2)\, E\, \frac{\partial V}{\partial E} + 2\, \Phi\,(V)$$

und es folgt:

$$\left(E\,\frac{\partial U}{\partial E}\right)_{+o} - \left(E\,\frac{\partial U}{\partial E}\right)_{-o} = (n-2).\ \varrho\sigma$$

Es lässt sich leicht eine Function $W$ angeben, die sammt ihrer Ableitung $\frac{\partial W}{\partial E}$ an der Begrenzung von $K_n$ keine Discontinuität aufweist. Wir brauchen $W$ ausserhalb $K_n$ nur die Bedeutung von

$$-\left(\frac{U}{2} + \frac{V}{c_n} + \frac{V'}{c_n}\right)$$

innerhalb $K_n$ die von

$$\varrho\sigma - \left(\frac{U}{2} + \frac{V}{c_n} + \frac{V'}{c_n}\right)$$

beizulegen, wo $V'$ eine Function derselben Art wie $V$ ist, welche also an der Begrenzung stetig ist, indess $\frac{\partial V'}{\partial E}$ bei dem Durchgang einen Sprung macht, der die Discontinuität der übrigen Glieder in $\frac{\partial W}{\partial E}$ aufhebt. Das ist auch zu erreichen, wenn unter $\varrho\sigma$ eine Function der Veränderlichen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ verstanden wird, von der eben die Begrenzungswerthe vorgelegt sind. Die Function $W$ aber genügt der Differentialgleichung $\triangle W = o$ und die beiden Darstellungen ausserhalb und innerhalb $K_n$ sind Fortsetzungen von einander.

Die oben entwickelte Function $U$ lässt sich mit Hilfe der Neumann-Schwarz'schen combinatorischen Methode auch dann bestimmen, wenn der Bereich $T$ nicht blos von einem Gebilde $K_n$ sondern von beliebig vielen derartigen Gebilden begrenzt wird. Während nun in der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen $X = x + iy$ durch eine innerhalb eines von Kreisen begrenzten Flächentheiles ($T$) existirende Function $U\,(x\,y)$ stets eine und nur eine Function $f\,(X)$ mit dem reellen Theile $U$ bestimmt wird, indem

$$V = \int_{(x_0\, y_0)}^{(x\, y)} \left( \frac{\partial U}{\partial x}\, dy - \frac{\partial U}{\partial y}\, dx \right)$$

eine innerhalb $T$ eindeutige und stetige Function ist, deren Ableitungen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

genügen, wird eine Function $U(x_1, y_1, x_2, y_2 \;.\; x_n, y_n)$ im Allgemeinen nicht der reelle Theil einer Function $f$ der complexen Variabeln $X_\nu = x_\nu + iy_\nu$ $(\nu = 1, 2 \quad n)$ sein.

Setzt man

$$f = U + i\, V,$$

so besteht zufolge des nothwendigen Systems von Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + i \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = o$$

für den reellen und imaginären Theil auch das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial U}{\partial x_\nu} - \frac{\partial V}{\partial y_\nu} = o, \quad \frac{\partial U}{\partial y_\nu} + \frac{\partial V}{\partial x_\nu} = o$$

oder

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu\; \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 V}{\partial y_\nu\; \partial x_\mu} = o, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_\nu\; \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu\; \partial x_\mu} = o$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu\; \partial y_\mu} - \frac{\partial^2 V}{\partial y_\nu\; \partial y_\mu} = o, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_\nu\; \partial y_\mu} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_\nu\; \partial y_\mu} = o$$

und daher für $U$ das System von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu\; \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_\mu\; \partial y_\nu} = o, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu\; \partial y_\mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_\nu\; \partial x_\mu} = o \qquad (28$$

Eine Function $U$, die an der Begrenzung eines von Gebilden $K$ zusammengesetzen $2n$-fach ausgedehnten Bereiches $(T)$ vorgeschriebene Werthe besitzt und innerhalb $T$ der partiellen Differentialgleichung $\triangle U = o$ genügt, wird den Differentialgleichungen 28) im Allgemeinen nicht genügen, und kann dann nicht der reelle Theil einer Function $f\,(X_1\; X_2 \;\; .\,.\, X_n)$ sein. Ist ein analytischer Ausdruck $f$ vorgelegt, der jedenfalls innerhalb eines in Rede stehenden Bereiches $T$ eine Bedeutung hat, so kann es zur Untersuchung der durch denselben definirten Function von Vortheil sein, die Function $U$ zu construiren, die an der Begrenzung von $T$ etwa diejenigen Werthe annimmt, welche $f$ daselbst besitzt oder andere für $f$ charakteristische Werthe. Bildet man ferner die mit $U$ verbundene Function $W$, welche bei dem Durchgang durch die Begrenzung sammt ihrer Ableitung $\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{N}}$ stetig ist und allenthalben der Differentialgleichung $\triangle W = o$ genügt, so kann diese Function möglicherweise zur Untersuchung des reellen Theiles von $f$ verwendet werden.

Dieser Gedanke rührt von H. Poincaré her. Er hat denselben auch bei dem Beweise des wichtigen Satzes benützt, dass nämlich eine Function $f\,(X_1\ X_2)$, welche sich im Endlichen wie eine rationale Function verhält also allenthalben durch den Quotienten zweier Potenzreihen darstellbar ist, auch durch den Quotienten zweier ganzer Functionen auszudrücken ist, eines Satzes, den man auch für Functionen von mehr als zwei complexen Veränderlichen aussprechen kann.