Die einer Ellipse eingeschriebenen grössten und umschriebenen kleinsten Vielecke.

Von

J. WANKA,
Stud. Phil.

Die folgenden Untersuchungen verdienen deshalb eine weitere Verbreitung, weil das Problem, der Ellipse grösstmögliche Vielecke einzuschreiben oder kleinstmögliche zu umschreiben, im Grunde darauf hinausläuft, die Ellipse von ihrem Mittelpunkt aus in eine gegebene Anzahl flächengleicher Sectoren zu theilen, und so das Analogon zur Kreistheilung darbietet, wie dies die sich ergebenden Gleichungen und die Construction der Vielecke nahelegen. Es werden im Folgenden gewisse Eigenschaften genannter Vielecke u. zw. zunächst der eingeschriebenen abgeleitet und eine Construction derselben angegeben. Hierauf wird kurz gezeigt, dass die umschriebenen Vielecke sich aus den eingeschriebenen in einfacher Weise ergeben und für sie ähnliche Eigenschaften bezüglich der Diagonalen und Theildreiecke gelten wie für die eingeschriebenen. Für Liebhaber synthetischer Beweisführung folgt zuletzt noch eine andere Ableitung der hauptsächlichsten Eigenschaften in Rede stehender n Ecke.

1.

Der Flächeninhalt eines Polygons, dessen n Ecken die rechtwinkligen Coordinaten $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_n y_n$ haben, ist gegeben durch

$$2f = x_1 (y_2 - y_n) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) + \ldots x_n (y_1 - y_{n-1}).$$

Soll derselbe ein Maximum werden mit der Bedingung, dass die Ecken auf einer Ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

liegen, also die Gleichungen bestehen

$$a^2 y_i^2 + b^2 x_i^2 = a^2 b^2 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n),$$

so müssen folgende Differentialgleichungen erfüllt werden:

$$\left.\begin{array}{l}(y_2 - y_n)\,dx_1 + (y_3 - y_1)\,dx_2 + \ldots (y_1 - y_{n-1})\,dx_n \\ + (x_n - x_2)\,dy_1 + (x_1 - x_3)\,dy_2 + \ldots (x_{n-1} - x_1)\,dy_n\end{array}\right\} = 0$$

und $$a^2 y_i dy_i + b^2 x_i dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Mit Anwendung der Multiplicatoren $\alpha \beta \gamma \ldots \nu$ erhält man nach bekannten Vorschriften folgendes System von Gleichungen

$$\begin{array}{c|c} y_2 - y_n + \alpha b^2 x_1 = o & x_n - x_2 + \alpha a^2 y_1 = o \\ y_3 - y_1 + \beta b^2 x_2 = o & x_1 - x_3 + \beta a^2 y_2 = o \\ - - - - - - - & - - - - - - - \\ y_{r+1} - y_{r-1} + \varrho b^2 x_r = o & x_{r-1} - x_{r+1} + \varrho a^2 y_r = o \\ - - - - - - - & - - - - - - - \\ y_1 - y_{n-1} + \nu b^2 x_n = o & x_{n-1} - x_1 + \nu a^2 y_n = o \end{array}$$

2.

Bevor wir an die Discussion dieser allgemeinen Gleichungen gehen, wollen wir für die beiden Fälle $n = 3$ und $n = 4$ die Aufgabe speciell lösen. Für den ersten Fall ist

$$\begin{array}{c|c} y_2 - y_3 + \alpha b^2 x_1 = o & x_3 - x_2 + \alpha a^2 y_1 = o \\ y_3 - y_1 + \beta b^2 x_2 = o & x_1 - x_3 + \beta a^2 y_2 = o \\ y_1 - y_2 + \gamma b^2 x_3 = o & x_2 - x_1 + \gamma a^2 y_3 = o \end{array} \qquad 1)$$

Diese 6 Gleichungen scheinen mit den noch hinzuzunehmenden 3 Gleichungen

$$a^2 y_i^2 + b^2 x_i^2\ a^2 b^2 = o \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad 2)$$

eben auszureichen zur Bestimmung der 6 Coordinaten der 3 Eckpunkte und der 3 Multiplicatoren $\alpha \beta \gamma$. Geometrisch interpretirt würde das heissen, dass es ein ganz bestimmtes Dreieck in der Ellipse gibt, das allein den grössten Flächeninhalt besitzt. Eliminirt man aber aus dem System 1) die Grössen $\alpha \beta \gamma$, so erhält man folgende 3 Gleichungen

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = -\frac{b^2 x_1}{a_2 y_1};\ \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = -\frac{b^2 x_2}{a^2 y_2};\ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2 x_3}{a^2 y_3} \qquad 3)$$

oder in anderer Form

$$a^2 y_3 y_1 + b^2 x_3 x_1 = a^2 y_1 y_2 + b^2 x_1 x_2;\ a^2 y_1 y_2 + b^2 x_1 x_2 = a^2 y_2 y_3 + b^2 x_2 x_3;$$
$$a^2 y_2 y_3 + b^2 x_2 x_3 = a^2 y_3 y_1 + b^2 x_3 x_1 \qquad 4)$$

die letzte dieser 3 Gleichungen ist aber eine Folge der beiden ersten und es sind bloss 2 der Gleichungen 4) von einander unabhängig, so dass also zur Bestimmung der Eckpunkte nur 5 Gleichungen, nämlich 2 der eben angeschriebenen und die Gleichungen 2) übrig bleiben; d. h. wir werden, wenn etwa die Gleichung

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2 \qquad 5)$$

vor der Hand noch unbenützt bleibt, die 4 Coordinaten $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ durch $x_1 y_1$ ausdrücken können. Wählen wir diese dann noch so, dass 5) befriedigt wird, so erhalten wir ein Dreieck grössten Flächeninhalts. Es gibt demnach unendlich viele Dreiecke der verlangten Art, die indessen, wie sich herausstellen wird, alle den gleichen Flächeninhalt haben.

Die Gleichungen 3) stellen eine charakteristische Eigenschaft der grössten Dreiecke dar, die nämlich, dass jede Seite parallel ist zur Tangente im gegenüberliegenden Eckpunkt.*)

Um nun $x_2 y_2$ und $x_3 y_3$ durch $x_1 y_1$ auszudrücken, zeigen wir zunächst, dass $\alpha \beta \gamma$ einander gleich sind. Durch Addition der Gleichungen 1) folgt

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = o \qquad \alpha y_1 + \beta y_1 + \gamma y_3 = o \qquad 6)$$

daher mit Einführung eines Proportionalitätsfactors ist

$$\varrho \alpha = x_2 y_3 - x_3 y_2;\ \varrho \beta = x_3 y_1 - x_1 y_3;\ \varrho \gamma = x_1 y_2 - x_2 y_1 \qquad 7)$$

Aus den Gleichungen

$$y_2 - y_3 + \alpha b^2 x_1 = o \qquad x_3 - x_2 + \alpha a^2 y_1 = o$$

ergibt sich einmal

$$-(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \alpha (a^2 y_1 y_2 + b^2 x_1 x_2) = o,$$

also
$$\varrho = a^2 y_1 y_2 + b^2 x_1 x_2$$

und zweitens

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + \alpha (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2) = o$$

---

*) Diese Bemerkung macht auch schon Steiner (Ges. Werke, Bd. II, S. 241). Eigenschaften anderer Art gibt er auch an ibid. S. 347 und im Nachlass S. 690 u. ff.

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen 7)

$$\gamma + \beta + \frac{a^2 b^2}{\varrho} \alpha = o.$$

Analog ist

$$\alpha + \gamma + \frac{a^2 b^2}{\varrho} \beta = o$$

$$\beta + \alpha + \frac{a^2 b^2}{\varrho} \gamma = o,$$

durch Addition wird dann

$$2(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{a^2 b^2}{\varrho} (\alpha + \beta + \gamma) = o,$$

also

$$\varrho = - \frac{a^2 b^2}{2}, \tag{8}$$

denn $\alpha \beta \gamma$, welche nach den Gleichungen 7) proportional sind den Flächeninhalten der 3 Dreiecke, in welche das ganze Dreieck durch die Leitstrahlen zu den Eckpunkten zerfällt wird, können nicht verschwinden. Hiemit ergeben sich nun auch die Grössen $\alpha \beta \gamma$ als gleich. Denn jetzt ist

$$\gamma + \beta - 2\alpha = o \qquad \text{und} \qquad \alpha + \gamma - 2\beta = o,$$

daher

$$\alpha = \beta$$

und ebenso erhält man

$$\beta = \gamma.$$

Nachdem dies constatirt ist, lauten die Gleichungen 6) einfacher

$$x_1 + x_2 + x_3 = o \qquad\qquad y_1 + y_2 + y_3 = o \tag{9}$$

Wir benützen sie zur Elimination von $x_3\, y_3$, womit die Gleichungen 1) übergehen in

$$2y_2 + y_1 + \alpha b^2 x^1 = o \qquad\qquad 2x_2 + x_1 - x \alpha^2 y_1 = o,$$

so dass erhalten wird

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(- y_1 - \alpha b_2 x_1) \qquad\qquad x_2 = \tfrac{1}{2}(- x_1 + \alpha a^2 y_1),$$

sowie auch 10)

$$y_3 = \tfrac{1}{2}(- y_1 + \alpha b^1 x_1) \qquad\qquad x_3 = \tfrac{1}{2}(- x_1 - \alpha a^2 y_1).$$

Um noch α zu bestimmen, haben wir die Bedingung zu benützen, dass die Ecke 2 auf der Ellipse liegt. Die Gleichung

$$a^2 y_2{}^2 + b^2 x_2{}^2 = a^2 b^2$$

wird nun zu folgender

$$1 + \alpha^2 a^2 b^2 = 4,$$

woraus sich ergibt

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{ab}.$$

Wie man aus den Gleichungen 10) sieht, hat die Verschiedenheit des Vorzeichens von α nur Bezug auf die Bezeichungsweise der Ecken. Das Vorzeichen kann folgendermassen festgesetzt werden. Die Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma$ haben sich als gleich ergeben, geometrisch heisst das, die 3 Theildreiecke, in welche durch die vom Mittelpunkt O der Ellipse zu den Eckpunkten gezogenen Leitstrahlen das ganze Dreieck zerfällt, sind einander gleich oder der Mittelpunkt der Ellipse ist der Schwerpunkt des Dreieckes. Nun war — Gleichung 8) — ϱ eine wesentlich negative Grösse. Da weiter

$$\varrho\,\alpha = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

ist, hat α das entgegengesetzte Zeichen wie der Flächeninhalt des Dreieckes $1\ 2\ O$; es wird also, wenn das Dreieck so numerirt wird, dass die Ecken $1\ 2\ 3$ im Sinne der wachsenden Winkel auf einander folgen, α negativ zu wählen sein; bei umgekehrter Numerirung ist das andere Vorzeichen zu nehmen.

Der Flächeninhalt des ganzen eingeschriebenen grössten Dreieckes ist

$$\tfrac{3}{2}\,|\,\varrho\,\alpha\,| = \tfrac{3}{4}\,a\,b\,\sqrt{3}.$$

3.

Für das eingeschriebene Viereck haben wir folgende Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l|l}
y_2 - y_4 + \alpha\, b^2 x_1 = o & x_4 - x_2 + \alpha\, a^2 y_1 = o \\
y_3 - y_1 + \beta\, b^2 x_2 = o & x_1 - x_3 + \beta\, a^2 y_2 = o \\
y_4 - y_2 + \gamma\, b^2 x_3 = o & x_2 - x_4 + \gamma\, a^2 y_3 = o \\
y_1 - y_3 + \delta\, b^2 x_4 = o & x_3 - x_1 + \delta\, a^2 y_4 = o
\end{array}\right. \qquad 1)$$

durch Elimination von $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ folgen die Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4} = -\dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1} & \dfrac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = -\dfrac{b^2 x_3}{a^2 y_3} \\[2ex]
\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = -\dfrac{b^2 x_2}{a^2 y_2} & \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = -\dfrac{b^2 x_4}{a^2 y_4}
\end{array} \qquad 2)$$

oder

$$\begin{array}{l} a^2y_4y_1 + b^2x_4x_1 = a^2y_1y_2 + b^2x_1x_2\,;\; a^2y_1y_2 + b^2x_1x_2 = a^2y_2y_3 + b^2x_2x_3 \\ a^2y_2y_3 + b^2x_2x_3 = a^2y_3y_4 + b^2x_3x_4\,;\; a^2y_3y_4 + b^2x_3x_4 = a^2y_4y_1 + b^2x_4x_1. \end{array} \qquad 3)$$

Man sieht, es sagt auch jetzt die letzte Gleichung nichts neues aus und es wird daher wie bei den eingeschriebenen Dreiecken wieder eine unendliche Anzahl eingeschriebener Vierecke existiren und die Aufgabe die sein, die Coordinaten 3er Eckpunkte durch die der 4. Ecke, etwa durch x_1 y_1 auszudrücken.

Aus den Gleichungen 2) hat man

$$\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{b^2 x_3}{a^2 y_3} \text{ und } \frac{b^2 x_2}{a^2 y_2} = \frac{b^2 x_4}{a^2 y_4}$$

oder $$x_1 y_3 - x_3 y_1 = o \text{ und } x_2 y_4 - x_4 y_2 = o,$$

d. h. die Punkte 1 3 O und 2 4 O liegen auf einer Geraden und dann ist

$$\begin{array}{l} x_3 = -x_1,\; y_3 = -y_1\,; \\ x_4 = -x_2,\; y_4 = -y_2. \end{array} \qquad 4)$$

Ferner entnimmt man den Gleichungen 2), dass die Diagonalen des Viereckes parallel sind den Tangenten in den gegenüberliegenden Eckpunkten, dass also ein grösstes Viereck ein Parallelogramm ist, dessen Diagonalen conjugirte Achsen der Ellipse sind.*) Da das Viereck ein Parallelogramm ist, dessen Diagonalen sich im Mittelpunkt der Ellipse schneiden, so ist der Flächeninhalt der 4 Theildreiecke 1 2 O, 2 3 O, 3 4 O und 4 1 O derselbe.

Aus den Gleichungen 1) folgt durch Addition der 1. und 3. Gleichung

$$\alpha x_1 + \gamma x_3 = o$$

und wegen 4) ist $$\alpha = \gamma;$$
ähnlich findet man $$\beta = \delta.$$

Schreiben wir nun die Gleichungen der ersten und zweiten Reihe im System 1) in dieser Weise

$$\left.\begin{array}{r} 2y_2 + \alpha b^2 x_1 + o \\ -2x_2 + \alpha a^2 y_1 + o \end{array}\right| \begin{array}{r} -2y_1 + \beta b^2 x_2 = o \\ 2x_1 + \beta a^2 y_2 = o \end{array} \qquad 5)$$

so erhält man aus ihnen

*) Vgl. Steiner Ges. Werke Bd. II. S. 413 und S. 619.

$$2(x_1y_2 - x_2y_1) + \alpha(b^2x_1^2 + a_2y_1^2) = o$$

und
$$2(x_1y_2 - x_2y_1) + \beta(b^2x_2^2 + a^2y_2^2) = o$$

oder $2(x_1y_2 - x_2y_1) + \alpha a^2b^2 = o$ und $2(x_1y_2 - x_2y_1) + \beta a^2b^2 = o$.

Es sind demnach α und β gleich und es erweisen sich auch hier alle 4 Multiplicatoren als gleich. Wiederum ist α proportional dem Flächeninhalt des Dreieckes 1 2 O. Soll der Punkt 2 von 1 aus im Sinne der wachsenden Winkel gelegen sein, muss α negativ genommen werden, in anderen Falle positiv. Für dieses resultirt nämlich abermals eine rein quadratische Gleichung. Zunächst ist aus 5)

$y_2 = -\frac{\alpha}{2} b^2 x_1$	$y_3 = -y_1$	$y_4 = \frac{\alpha}{2} b^2 x_1$
$x_2 = \frac{\alpha}{2} a^2 y_1$	$x_3 = -x_1$	$x_4 = -\frac{\alpha}{2} a^2 y_1$.

Soll nun die Ecke 2 auf der Ellipse liegen, muss sein

$$a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = a^2b^2$$

oder
$$\tfrac{1}{4}\alpha^2a^2b^2 = 1,$$

daher ist
$$\alpha = \pm\frac{2}{ab};$$

der Flächeninhalt ist $2ab$, also für alle grössten Vierecke derselbe.

4.

Allgemeine Lösung. Unter Beachtung der den beiden vorhergehenden Fällen gemeinschaftlichen Resultate ist es unschwer, die allgemeine Lösung derart zu bewirken, dass sie auf die einfachste Form gebracht wird. Es ist das ein im analytischen Beweisverfahren steckendes synthetisches Moment. Wir eliminiren zunächst wieder die Multiplicatoren $\alpha\beta\gamma \;\; . \nu$ aus dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} y_{h+1} - y_{h-1} + \eta b^2x_h = o \\ x_{h-1} - x_{h+1} + \eta a^2y_h = o \end{array} \quad (h = 1, 2, \ldots n) \qquad 1)$$

und erhalten Gleichungen von der Form

$$\frac{y_{h+1} - y_{h-1}}{x_{k+1} - x_{h-1}} = -\frac{b^2x_h}{a^2y_h} \quad (h = 1, 2, \ldots n) \qquad 2)$$

oder

$$a^2y_{h+1}, y_h + b^2x_{h+1}x_h = a^2y_hy_{h-1} + b^2x_hx_{h-1} \quad (h = 1, 2, \ldots n) \qquad 3)$$

wo der Index o gleichwertig ist mit dem Index n und der Index $n + 1$ gleichwertig ist mit 1. Hat man $n - 1$ dieser letzteren Gleichungen aufgestellt, so ist die $n$te eine Folge der übrigen, daher ist auch allgemein ein Eckpunkt willkürlich, die Coordinaten der anderen lassen sich durch ihn ausdrücken und es gibt demnach unendlich viele Dreiecke, die sich der Ellipse einschreiben lassen und einen grössten Inhalt haben. Die zur Verfügung stehenden Gleichungen sind

$$a^2 y_n y_1 + b^2 x_n x_1 = a^2 y_1 y_2 + b^2 x_1 x_2 = a^2 y_2 y_3 + b^2 x_2 x_3 = \,.\,. \\ = a^2 y_{n-1} y_n + b^2 x_{n-1} x_n \qquad 3)$$

und $$a^2 y_h^2 + b^2 x_h^2 = a^2 b^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)\,. \qquad 4)$$

also $2n - 1$ an der Zahl. Indem wir etwa $x_k y_k$ als verfügbar noch unbestimmt lassen, fällt eine der Gleichungen 4), nämlich

$$a^2 y_k^2 + b^2 x_k^2 = a^2 b^2$$

weg und es bleiben $2n - 2$ Gleichungen übrig zu Bestimmung der $2(n - 1)$ Coordinaten der $n - 1$ Eckpunkte durch $x_k y_k$.

Die Gleichungen 3), deren Inhalt kurz so ausgedrückt werden kann, dass der Ausdruck $a^2 y_h y_{h \pm 1} + b^2 x_h x_{h \pm 1}$ eine Constante, von x_h und y_h nicht abhängt, bilden nun für das Weitere den Angelpunkt. Die Ausdrücke, die für die x_h und y_h in den x_k und y_k gewonnen werden, müssen nothwendig des Baues der Gleichungen wegen algebraisch sein. Drücken wir speciell $x_{k \pm 1}$ und $y_{k \pm 1}$ durch $x_k y_k$ aus, so müssen wir auch rationale Formen erhalten der eben gemachten Bemerkung zufolge. Wir machen nun folgende Hypothese

$$x_{k+1} = M + N x_k + P y_k + Q x_k^2 + R x_k y_k + S y_k^2 + \ldots$$
$$y_{k+1} = M' + N' x_k + P' y_k + Q' x_k^2 + R' x_k y_k + S' y_k^2 + \ldots$$

und fragen uns, welche Beziehungen zwischen den unbestimmten Coefficienten $M\ N\ P \qquad M'\ N'\ P'$ bestehen müssen. Es ist dann

$$a^2 y_k y_{k+1} + b^2 x_k x_{k+1} = M b^2 x_k + M' a^2 y_k + N b^2 x_k^2 + x_k y_k (b^2 P + a^2 N') \\ + P' a^2 y_k^2 + Q b^2 x_k^3 + Q' a^2 x_k^2 y_k + R b^2 x_k^2 y_k + \ldots$$

Da nun x_k und y_k bloss die Gleichung

$$a^2 y_k^2 + b^2 x_k^2 = a^2 b^2$$

erfüllen, sonst ganz beliebig sind, so wird $a^2 y_k y_{k+1} + b^2 x_k x_{k+1}$ nur dann eine Constante, wenn

$$M = M' = Q = Q' = R = R' = o$$

und $$N = P'$$

$$b^2 P + a^2 N' = o$$

ist. Man gelangt also zufolge dieser einen Bedingung nothwendig zu linearen Ausdrücken, nämlich

$$x_{k+1} = Nx_k + Py_k \quad \text{und} \quad y_{k+1} = -\frac{b^2}{a^2} Px_k + Ny_k \qquad 5)$$

Zwischen den 2 übrig gebliebenen Coefficienten N und P besteht aber, da der Eckpunkt $k+1$ auch auf der Ellipse liegen muss, noch eine weitere Relation. Die Gleichung

$$a^2 y_{k+1}^2 + b^2 x_{k+1}^2 = a^2 b^2$$

geht mit den Gleichungen 5) in folgende über

$$\left(N^2 + \frac{b^2}{a^2} P^2\right)(a^2 y_k^2 + b^2 x_k^2) = a^2 b^2$$

oder

$$N^2 + \frac{b^2}{a^2} P^2 = 1 \qquad 6);$$

der eine Coefficient, der auf diese Weise unbestimmt bleibt, ist nun aber noch in der Weise constant, dass er mit dem Index k nichts gemein hat, für alle Punkte, von denen wir ausgehen mögen, in gleicher Weise gilt. Denn es ist

$$a^2 y_k y_{k+1} + b^2 x_k x_{k+1} = N a^2 b^2 \qquad 7)$$

Wenn wir also das Polygon in einem Sinne durchlaufen, von 1 zu 2, 3 ... n übergehen, so ergibt sich jeder folgende Punkt aus dem nächst vorhergehenden in derselben Weise u. zw. wie die Gleichungen 5) und 6) zeigen, durch eine lineare Substitution mit der Determinante $+1$ und den gleichen Coefficienten. Davon sind alle durch einen ausdrückbar, der demnach die einzige noch zu bestimmende Grösse darstellt und sich ergeben wird, wenn die Anzahl der Eckpunkte, die das Polygon haben soll, gegeben wird.

Wir wählen als Ausgangspunkt $x_1 y_1$ und lassen N und P vorläufig noch in der unbestimmten Form. Wir haben gefunden

$$x_2 = Nx_1 + Py_1 \qquad y_2 = -\frac{b^2}{a^2} Px_1 + Ny_1$$

Weiter ist

$$x_3 = Nx_2 + Py_2 \qquad y_3 = -\frac{b^2}{a^2} Px_2 + Ny_2$$

oder

$$x_3 = (2N^2 - 1)\, x_1 + 2NPy_1\,; \quad y_3 = -2\frac{b^2}{a^2} NPx_1 + (2N^2 - 1)\, y_1$$

und analog erhält man

$$x_4 = N(4N^2 - 3)\,x_1 + P\,(4N^2 - 1)y_1\,;$$

$$y_4 = -\frac{b^2}{a^2}\,P\,(4N^2 - 1)\,x_1 + N\,(4N^2 - 3)\,y_1$$

$$x_5 = [8N^2\,(N^2 - 1) + 1]\,x_1 + 4NP\,(2N^2 - 1)\,y_1\,;$$

$$y_5 = -4\frac{b^2}{a^2}\,NP\,(2N^2 - 1)\,x_1 + [8N^2\,(N^2 - 1) + 1]\,y_1$$

etc.

Allgemein wird sein

$$x_k = Lx_1 + Ky_1 \quad \text{und} \quad y_k = -\frac{b^2}{a^2}\,Kx_1 + Ly_1\,. \qquad 8)$$

Hiebei genügen die Grössen L und K sowie N und P der Gleichung

$$L^2 + \frac{b^2}{a^2}\,K^2 = 1 \qquad 9)$$

Aus 8) ergibt sich nämlich

$$x_{k+1} = (NL - \frac{b^2}{a^2}\,KP)\,x_1 + (NK + LP)\,y_1$$

$$y_{k+1} = -\frac{b^2}{a^2}\,(NK + LP)\,x_1 + (NL - \frac{b^2}{a^2}\,KP)\,y_1 \qquad 10)$$

Setzen wir die Ausdrücke aus 8) und 10) in die Gleichung 7) ein, so bekommt man nach einfachen Reductionen

$$K(NK + LP)\,(\frac{b^4}{a^2}\,x_1^2 + b^2y_1^2) + L\,(NL - \frac{b^2}{a^2}\,KP)\,(b^2x_1^2 + a^2y_1^2) =$$

$$= N\,(b^2x_1^2 + a^2y_1^2)\,(L^2 + \frac{b^2}{a^2}\,K^2) = Na^2b^2,$$

woraus die zu beweisende Relation folgt.

Um nun den Coefficienten N für ein specielles n Eck zu bestimmen, hat man die Bedingung aufzustellen, dass der $(n+1)$te Eckpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfällt, hätte also zu setzen

$$x_{n+1} = x_1$$

dies scheint 2 Gleichungen in sich zu schliessen, indem nämlich der Coefficient von x_1 in den Ausdruck für x_{n+1} 1 und derjenige von y_1 verschwinden müsste. Dies letztere ist dann aber eo ipso vermöge der Relation 9) der Fall; ist hier $L = 1$, so wird $K = o$. Die

Gleichung $L = 1$ ist in N eine solche $n$ten Grades, hat demnach n Wurzeln, welche auf die n Eckpunkte entfallen, eine davon auch auf $x_1\, y_1$ selbst. Dieser Wurzelwerth muss aber 1 sein, denn $N = 1$ entspricht einer linearen Substitution, welche die Identität bedeutet. Nur durch diese geht $x_1\, y_1$ in sich selbst über.*) Es lassen sich indessen Gleichungen viel niedrigeren Grades für N ansetzen, wenn man gewisse geometrische Eigenschaften der eingeschriebenen grössten Polygone passend verwendet. Diese sollen jetzt entwickelt werden.

5.

Wir haben gesehen, dass der Punkt $k + 1$ aus dem Eckpunkt k durch eine lineare Substitution mit der Determinante $+ 1$ hervorgeht; es leitet sich aber deswegen auch der Punkt k aus $k + 1$ durch eine ebensolche Substitution ab; ist nämlich

$$x_{k+1} = N x_k + P y_k \qquad y_{k+1} = - \frac{b^2}{a^2} P x_k + N y_k,$$

so ist auch umgekehrt

$$x_k = N x_{k+1} - P y_{k+1} \qquad y_k = \frac{b^2}{a^2} P x_{k+1} + N y_{k+1}.$$

Diese Substitution, welche sich von der früheren nur durch das Vorzeichen des P unterscheidet, entspricht sonach einem Umfahren des Vieleckes in dem entgegengesetzten Sinne.

Wir wählen nun den Punkt $x_1\, y_1$ wieder als Ausgangspunkt und, wenn gesetzt wird

$$x_2 = N x_1 + P y_1 \qquad y_2 = - \frac{b^2}{a^2} P x_1 + N y_1,$$

so ist $\quad x_n = N x_1 - P y_1 \qquad y_n = \dfrac{b^2}{a^2} P x_1 + N y_1.$

Daraus folgt $x_2 - x_n = 2 P y_1 \qquad y_2 - y_n = - 2 \dfrac{b^2}{a^2} P x_1,$

also
$$\frac{y_2 - y_n}{x_2 - x_n} = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Nennen wir nun die Verbindungslinie $2\,n$ eine erste Diagonale, weil sie beim Ueberspringen eines Eckpunktes entsteht, und für das Spätere jene Diagonale, bei der k (oder bei anderer Auffassung

---

*) Diese Gleichungen sind dieselben, welche Gauss in den Disqu. arith. behandelt.

$n - k - 2$) Eckpunkte ausgelassen sind, eine $k$te Diagonale, so können wir Gleichung 1) in folgenden Satz fassen: Bei einem grössten n Eck ist jede erste Diagonale parallel zur Tangente im übersprungenen Eckpunkt.*)

So wie wir von dem Punkt 1 zu 2, 3 ... übergingen, wollen wir jetzt in entgegengesetzter Richtung von 1 zu n, $n-1, n-2 \dots$ übergehen. Es wird sein

$$x_{n-1} = (2N^2 - 1)\,x_1 - 2NPy_1 \qquad y_{n-1} = 2\,\frac{b^2}{a^2}\,NPx_1 + (2N^2 - 1)\,y_1$$

und in ähnlicher Weise erhält man die Coordinaten der folgenden Ecken. Es lässt sich aber unschwer übersehen, wie die jetzt sich einstellenden Coefficienten im Vergleich zu den Seite 41 und 42 erhaltenen gebaut sind. Betrachten wir diese letzteren genauer, so bemerken wir, dass die Grösse P immer nur als Factor bei dem Coefficienten von y_1 in den Ausdrücken für die einzelnen x vorkommt; da wir nun in der rückläufigen Substitution — wie ich mir die in Rede stehende kurz zu nennen erlaube — statt P zu setzen haben $-P$, so sehen wir sofort ein, dass die jetzt auftretenden Coefficienten dieselben sein werden wie jene auf Seite 41 und 42, nur wird das Vorzeichen bei y_1 in den Ausdrücken für die x und das bei x_1 in den Ausdrücken für die y immer das entgegengesetzte sein. War nun also

$$x_k = Lx_1 + Ky_1 \qquad\qquad y_k = -\frac{b^2}{a^2}\,Kx_1 + Ly,$$

so können wir unmittelbar schreiben

$$x_{n-k+2} = Lx_1 - Ky_1 \qquad\qquad y_{n-k+2} = \frac{b^2}{a^2}\,Kx_1 + Ly_1.$$

Daraus ergibt sich aber

$$\frac{y_k - y_{n-k+2}}{x_k - x_{n-k+2}} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \qquad \left(k = 2, 3 \dots \frac{n}{2} + 1\right)$$

d. h. die Verbindungslinie zweier von dem 1. Punkt $x_1\,y_1$ um eine gleiche Anzahl von Zwischenpunkten entfernter Eckpunkte ist der Tangente im Punkt 1 parallel oder es lässt sich zu einer ersten Diagonale eine dritte, fünfte, siebente ..., ihr parallele Diagonale finden.

---

*) Diese charakteristische Eigenschaft erwähnt Steiner in seiner 2. Abhandlung „Ueber Minimum und Maximum" (Ges. Werke Bd. II. S. 241).

Diese Eigenschaft, welche bei unserer Beweisart eine Folge der Eigenschaften linearer Substitutionen und ihrer Umkehrungen ist, ermöglicht es nun, den Grad der Gleichung für N bedeutend zu reduciren.

Bei einem $2n$ Ecke ist nämlich klar, dass jedem Punkt diametral gegenüber auf der Ellipse wieder ein Punkt sich vorfindet. Es wird dann also sein

$$x_{n+1} = -x_1.$$

Setzt man den Ausdruck für x_{n+1} ein, so muss darin der Coefficient von x_1 sein -1, jener von y_1 aber o. Diese letztere Bedingung, welche sich in einer dem Grade nach niedrigsten Gleichung repräsentirt, wird man zu benützen haben.

Bei einem $2n-1$ Ecke wird man sagen können, die Gerade $n, n+1$ ist der Tangente in 1 parallel; d. h. in dem Ausdrucke für x_n und x_{n+1} müssen die Coefficienten von x_1 gleich, jene von y_1 gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet sein. Hier wird man ebenfalls die 2. Bedingung als die einfachere wirklich verwerthen.

Ich lasse hier einige Beispiele folgen.

6.

I. Fünfeck. Wir setzen die Summe der Coefficienten des y_1 in den Ausdrücken für x_3 und x_4 gleich o, also

$$2NP + P(4N^2 - 1) = o$$

oder

$$N^2 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{4} = o,$$

woraus

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

II. S e c h s e c k. Für dieses erhalten wir

$$2N^2 - 1 = -1$$

$$N = o.$$

III. S i e b e n e c k. Da ergibt sich die Gleichung

$$P(4N^2 - 1) + 4NP(2N^2 - 1) = o$$

$$8N^3 + 4N^2 - 4N - 1 = o.$$

Reducirt man auf die gewöhnliche Form, indem man setzt

$$N = N_1 - \frac{1}{6}.$$

vereinfacht sich die Gleichung

$$(6\,N_1)^3 - 21\,(6\,N_1) - 7 = o,$$

wo man noch einführt $\quad 6\,N_1 = N_2, \quad$ um zu erhalten

$$N_2^3 - 21\,N_2 - 7 = o.$$

Hier tritt aber der casus irreducibilis ein, d. h. die Wurzeln dieser Gleichung lassen sich nicht algebraisch, geschweige denn durch Quadratwurzeln bestimmen. Es ist dies also ein Beweis dafür, dass die Construction eines grössten Siebeneckes in der Ellipse und daher auch eines regelmässigen Siebeneckes im Kreise mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar.

IV. Achteck. Dafür hat man

$$4\,N P\,(2\,N^2 - 1) = o$$

oder

$$N = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dieselbe Gleichung erhielte man, wenn die Bedingung aufgestellt würde, dass der Eckpunkt 3. mit einem 2. Eckpunkt eines grössten Viereckes zusammenfallen soll. Diese Bedingung lautet

$$(2\,N^2 - 1)\,x_1 + 2\,NPy_1 = \pm \frac{a}{b}\,y_1$$

oder

$$2\,N^2 - 1 = o$$

$$P = \pm \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2\,N}.$$

V. Neuneck. Auch hier können wir durch Anwendung jenes eben erwähnten Kunstgriffes eine Vereinfachung bewirken; der 4. Eckpunkt des Neuneckes muss ein 2. Punkt eines grössten Dreieckes sein. Dies gibt die Gleichung

$$N\,(4\,N^2 - 3) = -\frac{1}{2}$$

oder

$$8\,N^3 - 6\,N + 1 = o.$$

Setzt man $\quad 2\,N = N_1, \quad$ so ist

$$N_1^3 - 3\,N_1 + 1 = o,$$

welche Gleichung wieder einem casus irreducibilis entspricht.

7.

Entwickelung anderer Eigenschaften der grössten Polygone. Verbinden wir einen Eckpunkt k mit dem Ausgangspunkt und diese beiden Punkte mit dem Mittelpunkt O der Ellipse, so erhalten wir ein dem Flächeninhalt nach constantes Dreieck; d. h. in demselben Polygone geben 2 ebensoweit abstehende Eckpunkte mit dem Mittelpunkt der Ellipse ein gleich grosses Dreieck und auch, wenn wir in einem anderen grössten Polygon gleicher Seitenzahl das analoge Theildreieck aufsuchen, ist dieses mit dem ersteren flächengleich. Denn es ist wegen Gleichung 8) Seite 42

$$x_1 y_k - x_k y_1 = - K b^2,$$

womit auch die geometrische Bedeutung der Coefficienten K klar ist. Es lässt sich daraus folgern, dass der Mittelpunkt der Ellipse für jedes grösste Polygon jener Punkt ist, von dem aus man nach den Ecken Gerade zu ziehen hat, um das Polygon in n gleiche Theildreiecke zu zerlegen. Ferner ergibt sich, dass alle grössten Polygone den nämlichen Flächeninhalt, nämlich $\frac{n}{2} b^2 N$ haben, sowie auch, dass die zu jedem Polygone zugehörigen Sternpolygone den gleichen Flächeninhalt besitzen. Es gibt deren bei einem $2n + 1$ Eck $n - 1$, bei einem $2n$ Eck $n - 2$. Diese Sternpolygone haben ausser den Ecken, welche ihnen gemeinsam sind mit dem convexen n Eck, noch andere Eckpunkte, deren Anzahl n, $2n$, $3n$ .. ist und welche dann zu je n auf Ellipsen liegen, die der ursprünglichen ähnlich und ähnlich liegend sind, und für welche sie Ecken grösster n Ecke sind.

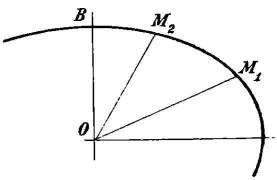

Fig. 1.

An diese Betrachtungen der Theildreiecke schliesst sich noch eine wichtige Bemerkung, die den Zusammenhang der grössten Polygone mit jenem Probleme klarlegt, das analog der Kreistheilung die Ellipse in eine gegebene Anzahl gleicher Sectoren vom Mittelpunkt zu theilen verlangt. Wir gewinnen dann das Resultat in der einfachsten Form. Mit Rücksicht auf Fig. 1 ist in bekannter Weise der Flächeninhalt des Sectors BOM_1

$$\frac{ab}{2} \text{ arc sin } \frac{x_1}{a},$$

jener von BOM_2

$$\frac{ab}{2} \text{ arc sin } \frac{x_2}{a},$$

daher der Flächeninhalt des Sectors

$$M_2OM_1 \qquad \frac{ab}{2}\left(\arc\sin\frac{x_1}{a} - \arc\sin\frac{x_2}{a}\right)$$

$$= \frac{ab}{2}\arc\sin\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{ab}.$$

Es sei nun M_1 unser Ausgangspunkt x_1y_1, M_2 aber irgend einer der anderen Eckpunkte x_ky_k des grössten Polygons, dann ist der durch diese 2 Punkte bestimmte Sector

$$\frac{ab}{2}\arc\sin\frac{x_1y_k - x_ky_1}{ab}$$

$$= \frac{ab}{2}\arc\sin\left(\frac{b}{a}K\right), \tag{1}$$

von Zeichen abgesehen. Speciell ist der von der Ecke 1 und 2, also überhaupt von 2 unmittelbar benachbarten Eckpunkten begrenzte

Ellipsensector $$\frac{ab}{2}\arc\sin\left(\frac{b}{a}P\right). \tag{2}$$

Ein grösstes Polygon hat demnach die wichtige Eigenschaft, dass seine Ecken jene Theilungspunkte auf der Ellipsenperipherie markiren, die man mit dem Mittelpunkt zu verbinden hat, um flächengleiche Sectoren zu erhalten. Kehren wir die Gleichungen 1) und 2), welche ja auch so geschrieben werden können

$$\frac{ab}{n}\pi = \frac{ab}{2}\arc\sin\left(\frac{b}{a}P\right)$$

$$(k-1)\frac{ab}{n}\pi = \frac{ab}{2}\arc\sin\left(\frac{b}{a}K\right),$$

um, so erhalten wir die Coefficientenbestimmung in der einfachen

Form $$P = \frac{a}{b}\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad N = \cos\frac{2\pi}{n}$$

und $$K = \frac{a}{b}\sin(k-1)\frac{2\pi}{n}, \quad L = \cos(k-1)\frac{2\pi}{n}$$

für den Eckpunkt k. Hiemit ist unser Problem auf das der Kreistheilung zurückgeführt, welch letztere es ja auch als Specialfall in sich fasst. Denn wird die Ellipse zu einem Kreis, so gehen die grössten Polygone über in regelmässige Polygone. Man bemerke auch, dass N von den Achsen a und b frei ist, also für alle Ellipsen in derselben Ellipse gilt.

Eine weitere Eigenschaft der grössten Polygone ist die, dass ihr Schwerpunkt mit dem Ellipsenmittelpunkt zusammenfällt. Wir greifen irgend eine Ecke heraus, ziehen durch sie und den Mittelpunkt O eine Gerade und alle jene Diagonalen, die der Tangente in der gewählten Ecke parallel sind, also auch parallel sind der dem gezogenen Durchmesser conjugirten Achsenrichtung. Dadurch zerfällt das Polygon in Dreiecke und Trapeze. Die Diagonalen werden von dem gezogenen Durchmesser gehälftet. In Folge dessen liegen auf letzterem auch die Schwerpunkte der einzelnen Dreiecke und Trapeze, also auch der Schwerpunkt des ganzen Polygons. Da letzteres von jedem Durchmesser, den man durch einen Eckpunkt ziehen kann, gilt, muss nothwendig der Schwerpunkt in ihren gemeinsamen Durchschnitt, den Mittelpunkt fallen. Auch der Mittelpunkt der Sternpolygone fällt in O hinein. Schliesslich mag noch gezeigt werden, dass das Polygon, sowie auch seine Sternpolygone Ellipsen umschrieben sind, welche zur ursprünglichen ähnlich und ähnlich liegend sind. Dies kann man dann auch so aussprechen. Bewegt sich eine Sehne von veränderlicher Länge in einer Ellipse derart, dass das zwischen ihr und dem überspannten Ellipsenbogen gelegene Segment einen constanten Inhalt hat, so wälzt sich die Sehne auf einer ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse. Wir verbinden $x_1 y_1$ mit einem anderen Eckpunkt $x_k\, y_k$ durch eine Gerade, deren Gleichung ist

$$y - y_1 = \frac{y_k - y_1}{x_k - x_1}(x - x_1)$$

oder

$$\varphi = x_1\left[(L-1)\,y + \frac{b^2}{a^2}Kx\right] + y_1\left[Ky - (L-1)\,x\right] - Kb^2 = o;$$

hierin sind x_1 und y_1 als veränderliche Parameter aufzufassen, welche die Bedingung erfüllen

$$\psi = a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 = o.$$

Zur Bestimmung der Einhüllenden der veränderlichen Sehne bilden wir noch der Vorschrift gemäss

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial y_1}}$$

Wir erhalten $$\frac{(L-1)\,y+\frac{b^2}{a^2}\,Kx}{2\,a^2 y_1}=\frac{Ky-(L-1)\,x}{2\,b^2 x_1}$$

oder $b^2 x_1\left[(L-1)\,y+\frac{b^2}{a^2}\,Kx\right]-a^2 y_1\left[Ky-(L-1)x\right]=o.$

Mit Hilfe dieser Gleichung und $\varphi=o$ bestimmen wir x_1 und y_1 und setzen die Ausdrücke dafür in die Gleichung $\psi=o$ ein; es folgt nach einfachen Reductionen

$$\frac{b^2 K^2}{4(1-L)^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\,K^2+(L-1)^2\right)\ \frac{b^2 x^2+a^2 y^2}{a^2}=a^2\,b^2$$

$$b^2 x^2+\alpha^2 y^2=\frac{a^2\,b^2}{\cos^2(k-1)\frac{\pi}{n}}$$

8.

Es mag noch kurz eine andere Behandlungsweise der Gleichungen angedeutet werden. Der Nerv dieses Verfahrens liegt darin, dass die Gleichheit der Multiplicatoren $\alpha\beta\gamma\quad\nu$ bewiesen wird. Es ist gewesen $$y_{h+1}-y_{h-1}+\eta\,b^2 x_h=o$$
und weiter haben wir gefunden

$$y_{h+1}=-\frac{b^2}{a^2}\,Px_h+Ny_h\qquad\qquad y_{h-1}=\frac{b^2}{a^2}\,Px_h+Ny_h$$

Substituiren wir diese Ausdrücke, so ergibt sich

$$\eta=\frac{2P}{a^2}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{n}}{ab}.$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich für jeden anderen Multiplicator und sie sind daher einander gleich. Wir können nun die Gleichungen 1) in Abschnitt 4, in welchen überall α zu stehen hat, und welche die Grössen $x_h\,y_h$ linear enthalten, bei vorläufig noch unbestimmten α dazu verwenden, um die Grössen $x_2\,y_2$; $x_3\,y_3$; ... $x_n\,y_n$ durch $x_1\,y_1$ und α, sowie die anderen Constanten auszudrücken. Für α ergibt sich dadurch eine Bestimmungsleichung, dass man verlangt, dass etwa $x_2\,y_2$ auf der Ellipse liege. Dieser Weg ist der bei der Berechnung des Dreieckes und Viereckes eingeschlagene.

9.

Construction eines grössten Polygons. Um nach Festlegung eines ersten Eckpunktes M_1 (siehe Fig. 2) auf der Ellipse das Polygon zeichnen zu können, ist es bloss nöthig, noch den nächsten Punkt M_2 zu ermitteln, denn dann ergeben sich die anderen Punkte leicht, indem man die abgeleiteten Eigenschaften der grössten Polygone zu Hilfe nimmt. M_n z. B. ist hernach der Schnittpunkt der durch M_2 parallel zur Tangente in M_1 gezogenen Geraden mit der Ellipse; M_3 ist zu erhalten, wenn man durch M_1 parallel zur Tangente in M_2 eine Gerade zieht und mit der Ellipse zum Durchschnitt bringt; u. s. w. Nach der im Folgenden gegebenen Methode werden wir jedoch alle diese Punkte mit einem Schlage erhalten. Wir erinnern an die Gleichungen

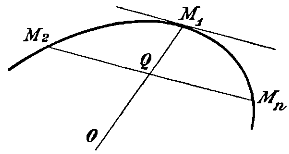

Fig. 2.

$$x_2 = Nx_1 + Py_1 \qquad y_2 = -\frac{b^2}{a^2} Px_1 + Ny_1$$

$$x_n = Nx_1 - Py_1 \qquad y_n = \frac{b^2}{a^2} Px_1 + Ny_1$$

Daraus folgt $\dfrac{x_2 + x_n}{2} = Nx_1 \qquad \dfrac{y_2 + y_n}{2} = Ny_1$;

dies sind die Coordinaten von Q. Setzt man $OM_1 = r$, $OQ = r'$, so ist

$$r : r' = 1 : N.$$

Es ergab sich aber, dass N von den Achsen gar nicht abhängt; es wird demnach der Punkt Q derselbe bleiben, welche Ellipse, deren Achsen in die x und y Achse fallen, wir auch durch M_1 legen mögen. Am einfachsten wird es sein, einen Kreis mit dem Radius r zu verwenden. Zeichnen wir diesem das regelmässige n Eck ein, dessen einer Eckpunkt in M_1 zu liegen kommt, so brauchen wir bloss die so erhaltenen Punkte der Kreisperipherie senkrecht auf OM_1 zu projicieren, um nicht nur Q zu erhalten, sondern auch diejenigen auf dem durch M_1 gezogenen Durchmesser liegenden Punkte, in denen dieser von jenen Diagonalen des Polygons geschnitten wird, die parallel sind zur Tangente in M_1. Zieht man hernach besagte Diagonalen, so schneiden sie die Ellipse in den übrigen Eckpunkten des n Eckes. (Siehe Fig. 3.)

Der Grund, dass wir hier alle Punkte auf einmal bekommen können, liegt in Folgendem. Eine Ellipse

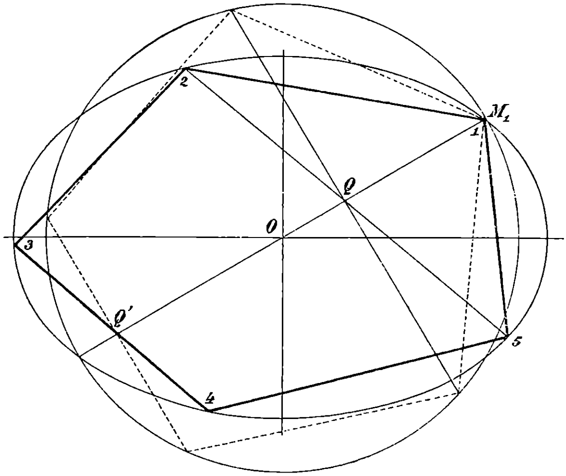

Fig. 3.

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

und ein ihr concentrischer Kreis

$$x^2 + y^2 = a^2$$

haben bekanntlich die Eigenschaft, dass (siehe Fig. 4) der Sector OAB_1 sich verhält zu Sector OAB_2 wie b zu a; es ist auch

$$S(OB_1 C_1) : S(OB_2 C_2) = b : a.$$

Ist nun $S(OAB_2) = S(OB_2 C_2)$, so ist auch $S(OAB_1) = S(OB_1 C_1)$. Diese Eigenschaft bleibt auch erhalten, wenn wir statt auf rechtwinklige Achsen, Ellipse und Kreis auf 2 conjugirte Durchmesser als Achsen beziehen, denn die beiden Curvengleichungen behalten dann dieselbe Form, nämlich

$$a_1^2 \eta^2 + b_1^2 \xi^2 = a_1^2 b_1^2 \text{ und } x^2 + y^2 = a_1^2,$$

wo a_1 und b_1 die Hälften der conjugirten Durchmesser sind und der Kreis bezogen ist auf die rechtwinkeligen Achsen xy, die Ellipse auf die Achsen $\xi\,\eta$ (siehe Fig. 5). Aus der Conformität der jetzigen Gleichungen mit denen des früheren Falles folgt, dass man ebenso die Proportionen aufstellen kann

$$S(OAB_1) : S(OAB_2) = b_1 : a_1$$

und $$S(OB_1C_1) : S(OB_2C_2) = b_1 \quad a_1.$$

Ist wiederum $S(OAB_2) = S(OB_2C_2)$, so muss auch sein
$$S(OB_1C_1) = S(OAB_1).$$

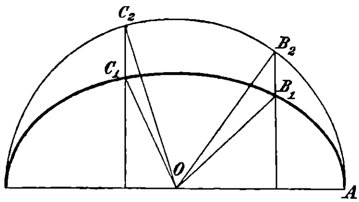

Fig. 4.

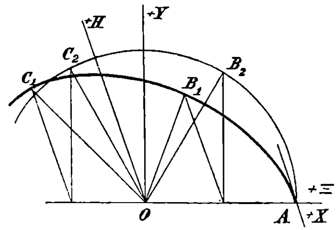

Fig. 5.

Umschriebene kleinste Vielecke. Wir wollen von diesen zeigen, dass sie die Ellipse in den Ecken eines grössten Polygons berühren. Damit werden sie denn als erledigt betrachtet werden können. Angenommen, es wären von einem umschriebenen Polygon, das einen kleinsten Flächeninhalt haben soll, alle Berührungspunkte bis auf einen einzigen, der irgendwo (siehe Fig. 6) zwischen A und B liegen wird, bestimmt. A und B sind selbst zwei der schon gefundenen Berührungspunkte. Wäre C der Berührungspunkt, zu Folge dessen das Viereck $A\,B\,M\,N$ ein kleinstes ist unter all den möglichen, so würde $M\,N$ eine Seite des verlangten Polygons sein. Nun ist es eine Eigenschaft des Minimums, dass bei einer unendlich kleinen Abänderung der in Betracht kommenden Unabhängigen die betreffende Grösse selbst sich nicht ändert. Ist also $M_1\,N_1$ eine $M\,N$ unendlich benachbarte Tangente, die man aus $M\,N$ durch eine Drehung $d\varphi$ um den Berührungspunkt C sich entstanden denken kann, so muss das Viereck $A\,B\,M_1\,N_1$ mit $A\,B\,M\,N$ flächengleich sein. Wird gesetzt $C\,M = m$ und $C\,N = n$, so lautet die Bedingung

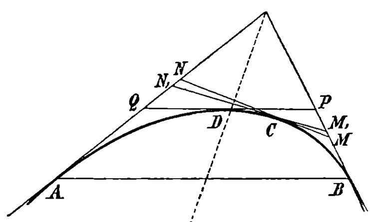

Fig. 6.

$$\frac{m^2 d\varphi}{2} = \frac{n^2 d\varphi}{2}$$

oder $$m = n.$$

Diese wird aber nur erfüllt bei einer zu $A\,B$ parallelen Tangente. Als charakteristische Eigenschaft der umschriebenen kleinsten Polygone finden wir somit die, dass die einzelnen Seiten in den Berührungspunkten gehälftet werden. Ist nun D der zwischen A und B liegende richtige Berührungspunkt, so sieht man unmittelbar, dass dann $A\,D\,B$ auch drei Endpunkte eines der Ellipse eingeschriebenen grössten Vieleckes sind; die Gerade $O\,D$ muss auch durch den Schnittpunkt der beiden in A und B gelegten Tangenten gehen. Die Schnittpunkte dieser mit der in D gelegten Tangente seien P und Q. Diese Punkte liegen auch auf den von O nach den Mittelpunkten von $A\,D$ und $B\,D$ gezogenen Geraden.

Als Eigenschaften der umschriebenen Polygone können wir also die angeben, dass sie die Ellipse in den Ecken eines eingeschriebenen grössten Vieleckes von gleicher Seitenzahl berühren, ferner in gleiche Theildreiecke zerfallen, wenn man ihre Ecken mit dem Mittelpunkt verbindet, welch letzterer auch ihr Schwerpunkt ist. Im übrigen lassen sich ähnliche Eigenschaften wie bei den eingeschriebenen Vielecken auch von ihnen aufzählen, was aber unterbleiben mag.

10.

Aehnlich wie wir im Vorhergehenden die Grundeigenschaft der kleinsten umschriebenen Polygone synthetisch abgeleitet haben, soll auch für die eingeschriebenen Vielecke grössten Flächeninhalts das schon angegebene Hauptmerkmal durch einfache geometrische Erwägungen entwickelt werden. Wir denken uns abermals, alle Eckpunkte wären schon bekannt bis auf einen, zwischen A und B gelegenen (Fig. 5), da gibt es schon die blosse Anschauung, dass, weil bei gegebener Basis $A\,B$ das Dreieck die grösstmögliche Höhe haben muss, um einen maximalen Inhalt zu erhalten, jener Punkt zu nehmen ist, dessen Abstand von $A\,B$ ein grösster ist, also jener, dessen Tangente parallel ist zu $A\,B$, demnach wiederum D. Man sieht ferner, dass diese Eigenschaft auch gilt für solche Polygone, die irgend einer, überall convexen Curve eingeschrieben sind.*) Speciell für Ellipsen gelten noch einige Sätze betreffs der Diago-

*) Vgl. Steiner „Ueber Maximum und Minimum" 1. Abh. (Ges. Werke S. 241 u. f.)

nalen, welche mit Hinzuziehung des Pascal'schen Satzes gewonnen werden. Zunächst zeigen wir, dass eine zweite Diagonale parallel ist zur Verbindungslinie der beiden übersprungenen Punkte. Aus M_1 und M_2 (siehe Fig. 7) erhalten wir die Punkte M_3 und Mn, indem nach dem soeben gefundenen Satz durch M_1 parallel zu M_2 und durch M_2 parallel zu M_1 Gerade gezogen werden. Betrachtet man nun das Sechseck $M_n\ M_1\ M_2\ M_3$, wo M_1 und M_2 als Berührungspunkte je zwei Punkte repräsentiren und numerirt die Punkte in der angedeuteten Weise, so findet man leicht, dass die Pascal'sche Gerade in diesem Falle die unendlich ferne Gerade ist und daher $M_1\ M_1$ parallel ist mit $M_3\ M_n$. Mit Hilfe des Beweisprincipes kann

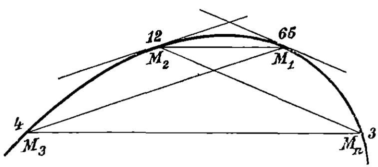

Fig. 7.

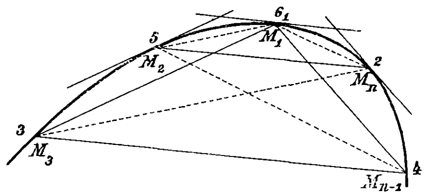

Fig. 8.

nachgewiesen werden, dass eine dritte Diagonale parallel ist zu einer ersten. Wir denken uns in Fig. 8 von den Punkten $M_n\ M_1\ M_2$ übergegangen zu den Punkten M_3 und $M_n -_1$; dann ist nach dem unmittelbar vorangehenden Satz $M_n\ M_3$ parallel zu $M_1\ M_2$ und $M_2\ M_n -_1$ parallel zu $M_1\ M_n$. Wir wollen zeigen, dass $M_2\ M_n$ parallel ist zu $M_3\ M_n -_1$. In dem Sechseck $M_n -_1\ M_n\ M_1\ M_2\ M_3$, wo M_1 als Berührungspunkt doppelt zählt, wird, wenn wie in der Fig. numerirt ist, wieder nach dem bekannten Schema die Pascal'sche Gerade ins Unendliche rücken, woraus folgt, dass $M_3\ M_n - 1$ parallel ist zur Tangente in M_1. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise gelangt man zu den schon aufgezählten Eigenschaften der Diagonalen.

Auch die Sätze über die Gleichheit der Theildreiecke und der entstehenden Ellipsensectoren ergeben sich durch ganz einfache Ueberlegungen.

Nachtrag.

Während der Drucklegung verfiel ich auf eine noch etwas einfachere Construction. Auf dem mit dem Radius a gezeichneten concentrischen Kreis sei N_1 jener Punkt, der mit dem gegebenen ersten Punkt M_1 des zu construirenden n Eckes gleiche Abscisse hat; seine Ordinate η_1 ist gleich $\frac{a}{b} y_1$. Wir schreiben nun dem Kreis ebenfalls ein grösstes n Eck ein. Der $k$te Eckpunkt N_k hat die Abscisse

$$\xi_k = L x_1 + K' \eta_1,$$

wo
$$K' = \sin (k - 1) \frac{2\pi}{n} \text{ ist.}$$

Auf der Ellipse hat der $k$te Eckpunkt M_k die Abscisse

$$x_k = L x_1 + K y_1,$$

wo
$$K = \frac{a}{b} \sin (k - 1) \frac{2\pi}{n} \quad \text{ist.}$$

Wegen $K' \eta_1 = K y_1$ ist auch $\xi_k = x_k$, womit die Construction leicht auszuführen ist.