

Ueber eine Curve dritter Ordnung.

Von

EMIL FREUND.

(Mit 1 Abbildung.)

Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller die Parabel berührenden und durch ihren Brennpunkt gehenden Kreise zu bestimmen.

Jedem Punkte M' der Parabel entspricht der Mittelpunkt des berührenden Kreises M . Dieser muss auf der Normalen $M'N$ liegen. Weil F dem Kreise angehört, so ist $M'F$ eine Sehne. Die im Halbierungspunkte von $M'F$ auf diese errichtete Senkrechte schneidet die Normale in dem Mittelpunkte des berührenden Brennpunktkreises.

Eine Beziehung zwischen den Coordinaten ξ , η dieses Mittelpunktes, welche für alle berührenden Brennpunktkreise gilt, stellt die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes dar.

Aufstellung der Curvengleichung.

Es sei M' ein beliebiger Punkt der Parabel. Der zugehörige Kreismittelpunkt liegt zunächst auf der Normalen $M'N$. Sind seine Coordinaten ξ , η , so gilt für dieselben die Normalengleichung:

$$y\xi + p\eta = y(p + x). \quad (\text{I})$$

Ist $M'F$ die entsprechende Sehne des gesuchten Berührungskreises, so hat deren Halbierungspunkt P die Coordinaten

$$\frac{2x + p}{4}, \frac{y}{2}.$$

Die in P auf MF errichtete Senkrechte, welche durch den Kreismittelpunkt geht, hat die Gleichung :

$$\eta - \frac{y}{2} = \frac{p - 2x}{2y} \left(\xi - \frac{2x + p}{4} \right)$$

oder anders geordnet

$$4(p - 2x)\xi - 8y\eta = p^2 - 4(x^2 + y^2). \quad (\text{II})$$

Die durch (I) und (II) dargestellten Geraden schneiden sich in dem Punkte m der gesuchten Curve. Jedem Punkte M' der Parabel entspricht ein Punkt M der Curve, dessen Coordinaten ξ, η wir durch die von M' (x, y) ausdrücken können, indem wir nach ξ und η auflösen. Wir erhalten :

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} y(p+x) & p \\ p^2 - 4(x^2 + y^2) & -8y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4(p-2x) & -8y \end{vmatrix}}, \eta = \frac{\begin{vmatrix} y & y(p+x) \\ 4(p-2x) & p^2 - 4(x^2 + y^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4(p-2x) & -8y \end{vmatrix}} \quad (\text{III})$$

Der Nenner in den Ausdrücken für ξ und η ist die Determinante aus den Coëfficienten der Unbekannten ξ, η in (I) und (II).

Die Zähler gehen aus den Nennern hervor, wenn man an die Stelle der Coëfficienten der Unbekannten, welche zu bestimmen ist, die entsprechenden rechten Theile der Gleichungen (I) und (II) setzt.

Wir entwickeln nun die Ausdrücke für ξ und η und erhalten nach einigen Reductionen

$$\xi = \frac{p + 6x}{4}, \quad x = \frac{4\xi - p}{6} \quad (\text{IV})$$

$$\eta = \frac{3p - 2x}{4p} \cdot y \quad (\text{V})$$

Eliminiren wir aus (IV) und (V) und der Parabelgleichung

$$y^2 = 2px$$

x und y , so erhalten wir als Gleichung der Curve

$$\eta = \pm \frac{5p - 2\xi}{6p} \sqrt{\frac{p(4\xi - p)}{3}},$$

oder indem wir statt ξ und η wieder x und y schreiben:

$$y = \pm \frac{5p - 2x}{6p} \sqrt{\frac{p(4x - p)}{3}}. \quad (\text{VI})$$

Die Curve ist von dritter Ordnung.

Wir können zunächst folgende Schlüsse über den Verlauf der durch (VI) dargestellten Curve ziehen.

1. Wegen des doppelten Vorzeichens der Quadratwurzel entsprechen jedem x zwei gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete y .

Die Curve besteht daher aus zwei zur Parabelaxe symmetrisch gelegenen Aesten.

Wir betrachten bloss den einen Ast, welcher der positiven Wurzel entspricht.

2. Damit y reell werde, muss der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv sein, d. h.

$$x \geq \frac{p}{4}.$$

Für $x < \frac{p}{4}$ existiren keine reellen y .

3. Für $x = \frac{p}{4}$ wird $y = 0$.

Die Curve schneidet die Abscissenaxe im Abstände $\frac{p}{4}$ vom Ursprung (B).

4. Wenn x grösser als $\frac{p}{4}$ und kleiner als $\frac{5p}{2}$ ist, so ist y positiv, der Zweig liegt ober der Axe.

5. Für $x = \frac{5p}{2}$ wird $y = 0$; beide Zweige schneiden sich in einem Punkte der Abscissenaxe.

Die Curve hat einen Doppelpunkt von den Coordinaten: $x = \frac{5p}{2}$, $y = 0$, (E).

Sie schliesst ferner einen geschlossenen Raum ein, ein sogenanntes Blatt.

Für diesen Werth von x erhält man:

$$y = \frac{5p - 2p}{6p} \sqrt{\frac{p \cdot 3p}{3}} = \frac{p}{2},$$

die Punkte $x = p$, $y = \pm \frac{p}{2}$ sind die Culminationspunkte (C, D).

Ferner ergibt sich:

$$8. \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2}{\sqrt{3p}} \frac{-2x - p}{4(x - p) \sqrt{4x - p}}.$$

Der zweite Differentialquotient wird 0 für:

$$-(2x + p) = 0, \quad x = -\frac{p}{2}.$$

Dieser Werth von x kommt ausser Betracht, da für negative x die y imaginär werden.

Die Curve hat keinen Inflexionspunkt.

Um die Schnittpunkte der Curve mit der Parabel zu finden, lassen wir beide Gleichungen gleichzeitig bestehen:

$$y^2 = 2px, \quad y^2 = \frac{(2x - 5p)^2 \cdot (4x - p)}{108p}$$

Wir setzen die rechten Theile gleich und befreien vom Nenner. Die Schnittgleichung lautet daher:

$$9. \quad 16x^3 - 84px^2 - 96p^2x - 25p^3 = 0.$$

Diese Gleichung als vom dritten Grade hat entweder eine oder drei reelle Wurzeln. Da das absolute Glied $(-\frac{25}{16}p^3)$ das Product aller mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Wurzeln ist, so muss die eine Wurzel positiv sein; sind alle drei Wurzeln reell, so sind davon entweder eine positiv, zwei negativ — oder alle drei positiv. Da aber das Gleichungspolynom bloss einen Zeichenwechsel hat, so kann die Gleichung höchstens eine positive Wurzel haben, welche ihr aber nothwendig zukommt, also:

Die Gleichung hat eine positive Wurzel.

Die etwaigen negativen oder complexen Wurzeln fallen ausser Betracht, da den negativen x auf beiden Curven keine reellen Punkte entsprechen.

Die Parabel wird von der gesuchten Curve in zwei symmetrisch zur Axe liegenden reellen Punkten geschnitten, deren Abscissen gleich der positiven Wurzel von Gleichung (9) sind.

Wir wollen nun die Wurzeln der Schnittgleichung

$$x^3 - \frac{21}{4} p x^2 - 6 p^2 x - \frac{25}{16} p^3 = 0$$

bestimmen.

Wir bringen die Gleichung auf die reducirte Form

$$z^3 - a z - b = 0,$$

indem wir setzen:

$$x = z + \frac{7}{4} p.$$

und es ist dann

$$a = \frac{3^5}{2^4} p^2, \quad b = \frac{3^6}{2^5} p^3.$$

Für die Discriminante

$$\Delta = b^2 - \frac{2^2}{3^3} a^3$$

ergibt sich hiermit der Werth

$$\Delta = 0;$$

daher hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, unter denen zwei einander gleich sind. Sie lauten in unserem Falle

$$z_1 = 2 \sqrt[3]{\frac{b}{2}}, \quad z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}},$$

und wenn man den obigen Werth von b einsetzt:

$$z_1 = \frac{18}{4} p, \quad z_2 = z_3 = -\frac{9}{4} p.$$

Hieraus ergeben sich für die Wurzeln unserer Gleichung (9)

$$x_1 = z_1 + \frac{7}{4} p = \frac{25}{4} p,$$

$$x_2 = x_3 = z_2 + \frac{7}{4} p = -\frac{1}{2} p.$$

Nur der erste Werth hat für unsere Aufgabe eine Bedeutung, da negativen Werthen von x keine reellen Punkte der

beiden Curven entsprechen. Bestimmt man noch aus der Parabelgleichung das zu x_1 gehörige y_1 , so haben wir das Resultat:

$$x = \frac{25}{4} p, y = \pm 7/2 p$$

sind die beiden Schnittpunkte der Parabel mit unserer Curve.

Quadratur des Blattes.

Die Fläche wird gefunden, wenn wir das Element $2 y dx$ zwischen $x = \frac{p}{4}$ und $x = \frac{5p}{2}$ integrieren.

Es ist also

$$\begin{aligned} F &= \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{5p}{2}} \frac{5p - 2x}{3p} \sqrt{p \frac{(4x - p)}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{3 \sqrt{3p}} \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{5p}{2}} (5p - 2x) \sqrt{4x - p} dx. \end{aligned}$$

Um den Differentialausdruck rational zu machen, setzen wir:

$$\sqrt{4x - p} = z, \quad x = \frac{z^2 + p}{4}, \quad dx = \frac{z dz}{2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int (5p - 2x) \sqrt{4x - p} dx &= \frac{1}{4} \int (9p - z^2) z^2 dz = \\ &= \frac{9}{4} p \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{20} + C = \frac{3}{4} p (4x - p) \sqrt{4x - p} - \\ &\quad - \frac{(4x - p)^2 \sqrt{4x - p}}{20} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{5p}{2}} (5p - 2x) \sqrt{4x - p} dx &= \frac{81}{4} p^2 \sqrt{p} - \frac{243}{20} p^2 \sqrt{p} = \\ &= \frac{162}{20} p^2 \sqrt{p}, \end{aligned}$$

daher schliesslich:

$$10. \quad F = \frac{9 \sqrt{3}}{10} p^2.$$

Tangentenproblem der Curve.

Die Richtungsconstante der Tangente eines beliebigen Punktes der Curve $M(x, y)$ ist:

$$11. \quad m = \frac{dy}{dx} = \frac{2(p-x)}{\sqrt{3p} \sqrt{4x-p}}.$$

Der Punkt M entspricht einem Punkte M' der Parabel, auf dessen Normale er liegt. Bezeichnen wir die Coordinaten von M' mit ξ und η , so ist nach Gleichung (IV)

$$\xi = \frac{4x-p}{6},$$

daher

$$\eta = \sqrt{2p\xi} - \sqrt{\frac{p(4x-p)}{3}}.$$

Die Richtungsconstante des Vectors FM' ist:

$$m' = \frac{\eta}{\xi - \frac{p}{2}} = \frac{2\eta}{2\xi - p}.$$

Führen wir nun statt ξ und η ihre Werthe in Functionen von x ein, so erhalten wir:

$$12. \quad m^1 = 2 \sqrt{\frac{p(4x-p)}{3}} \frac{4x-p-3p}{3} = \\ = \frac{\sqrt{3p} \sqrt{4x-p}}{2(x-p)}.$$

Hieraus und aus (11) folgt:

$$\underline{m \cdot m' = -1.}$$

Dies ist die Bedingung der Perpendicularität der Tangente an die gesuchte Curve im Punkte M und des Vectors FM' des M entsprechenden Parabelpunktes M' .

Errichtet man aber im Halbirungspunkte des Vectors eine Senkrechte auf letzteren, so geht diese durch den entsprechenden Punkt der gesuchten Curve (siehe frühere Construction).

Durch diesen Punkt kann man aber auf den Vector nur eine Senkrechte ziehen; da nun die Tangente in M senkrecht auf den Vector des M entsprechenden Parabelpunktes ist, so muss sie durch den Halbirungspunkt des Vectors gehen.

Es resultiren daraus folgende Sätze:

- a) Die Tangente an einem Punkte der durch Gleichung (VI) dargestellten Curve dritter Ordnung steht im Halbirungspunkte des entsprechenden Parabel-Vectors senkrecht auf diesen.
 - b) Die in den Halbirungspunkten der Parabel-Vectoren auf diese errichteten Senkrechten werden in ihrer Aufeinanderfolge von der durch Gleichung (VI) dargestellten Curve eingehüllt.
-

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften](#)

Jahr/Year: 1894

Band/Volume: [42](#)

Autor(en)/Author(s): Freund Emil

Artikel/Article: [Ueber eine Curve dritter Ordnung. 160-168](#)