Ueber die Wirtinger'schen Bedingungen für das Bestehen eines totalen Differentials.

Von Paul Funk in Prag.

Von Wirtinger wurde der folgende Satz bewiesen[1]): Damit der Ausdruck:

$$1.\quad \sum_{i=1}^{i=n} X_i\,(x_1, x_2 \qquad x_n)\; dx_i$$

ein vollständiges Differential sei, ist bei Voraussetzung der Stetigkeit der Differentialquotienten der X_i notwendig und hinreichend, daß die folgenden Gleichungen bestehen.

$$2.\quad W_k = \sum_{h=1}^{h=n} X_{hk}\; x_h = 0, \quad (k = 1, 2, \qquad n.)$$

wobei zur Abkürzung

$$3.\quad X_{hk} = - X_{kh} = \frac{\delta X_h}{\delta x_k} - \frac{\delta X_k}{\delta x_h}$$

gesetzt ist. Wegen 3. besteht die Identität:

$$\sum_{k=1}^{k=n} W_k\; x_k = 0$$

Es ist somit die Anzahl der voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen auf $n - 1$ herabgedrückt — an Stelle der $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen in der üblichen Form, die das Verschwinden aller X_{hk} fordern. Der Satz läßt sich auch so aussprechen, daß sich das Verschwinden der X_{hk} als eine Folge der Gleichungen 2. und der Voraussetzung der Stetigkeit der Differentialquotienten der X_h erweist.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Aussage, der Ausdruck 1. sei ein vollständiges Differential, gleichbedeutend ist mit der Aussage, daß das Linienintegral mit 1. als Integrand für jede beliebige geschlossene Kurve im n-dimensionalen Raum verschwinden soll, was man also kurz als Wirbelfreiheit des Vektorfeldes X_h bezeichnen könnte.

Der Wirtinger'sche Beweis ist rein analytisch. Wir wollen hier durch eine mehr geometrische Ueberlegung zum Ziele gelangen.

Ausgangspunkt für unsere Betrachtung ist die Invarianz des bilinearen Ausdruckes:

$$4.\quad \sum_{h=1,\,k=1}^{h=n,\,k=n} X_{hk}\; u^{(h)}\; \overline{u}^{(k)}$$

wenn man die x, u und $\overline{u}$ derselben linearen Punkttransformation

[1]) W. Wirtinger: Bemerkung zur Theorie des vollständigen Differentials. Wiener Ber. 119.

unterwirft. Denken wir uns zwei feste Vektoren mit den Komponenten $u^{(h)}$ beziehungsweise $\overline{u}^{(h)}$ vom Koordinatenanfangspunkte 0 aus aufgetragen und betrachten wir die durch sie gelegte zweidimensionale Ebene

$$5.\quad x_h = \lambda\, u^{(h)} + \overline{\lambda}\, \overline{u}^{(h)}$$

Wenn nun für diese Werte von x der Ausdruck 4. verschwindet, also:

$$6.\quad \sum_{h=1,\,k=1}^{h=n,\,k=n} X_{hk}\,(\lambda u^{(1)} + \overline{\lambda}\,\overline{u}^{(1)},\ \lambda u^{(2)} + \overline{\lambda}\,\overline{u},^{(2)}\ \ .\ \lambda u^{(n)} + \overline{\lambda}\,\overline{u}^{(n)})\ u^{(h)}\overline{u}^{(k)} = 0$$

so verschwindet offenbar das Linienintegral mit 1. als Integranden für jede in dieser Ebene gelegene geschlossene Kurve. Um dies zu erkennen, denke man sich die Vektoren mit den Komponenten $u^{(h)}$ beziehungsweise $\overline{u}^{(h)}$ durch lineare Transformation in Vektoren mit den Komponenten:

$$\begin{matrix} 1,\ 0,\ 0 & & 0 \\ 0,\ 1,\ 0\ . & & 0 \end{matrix}$$

übergeführt, so daß dann Gleichung 6. in eine Gleichung von der Form:

$$X_{1\,2} = \frac{\delta X_1}{\delta x_2} - \frac{\delta X_2}{\delta x_1} = 0$$

übergeht, gültig für alle Werte von x_1 und x_2, wenn $x_3 = x_4\ . = x_n = 0$ ist.

Nun zeigen wir, daß wegen der Gleichung 2 zunächst für jede geschlossene Kurve, die auf einer beliebigen zweidimensionalen Ebene durch 0 liegt, das Linienintegral mit dem Ausdrucke 1. als Integrand verschwindet. Um das hiezu nötige Bestehen der Gleichungen 6. zu beweisen, setzen wir in unsere Bedingungsgleichung 2. für die x_h die in 5. angegebenen Werte ein und erhalten:

$$2.a\quad \sum_{h=1}^{h=n} X_{hk}\,(\lambda u^{(1)} + \overline{\lambda}\,\overline{u}^{(1)},\ \lambda u^{(2)} + \overline{\lambda}\,\overline{u}^{(2)}, \ldots \lambda u^{(n)} + \overline{\lambda}\,\overline{u}^{(n)})\,(\lambda u^{(h)} + \overline{\lambda}\,\overline{u}^{(h)}) = 0$$

$$(k = 1,\ 2 \qquad n)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit $u^{(k)}$ (beziehungsweise mit $\overline{u}^{(k)}$), addieren wir dann über alle k und berücksichtigen wir dabei den Umstand, daß die aus unserem bilinearen Ausdruck 4. für $u^{(k)} = \overline{u}^{(k)}$ hervorgehende quadratische Form wegen 3. identisch verschwindet, so erhalten wir die mit λ (beziehungsweise $\overline{\lambda}$) multiplizierte Gleichung 6. Der Fall $\lambda = \overline{\lambda} = 0$ kann wegen der Voraussetzung der Stetigkeit keine Ausnahme bilden.

Um nun weiter vom Verschwinden unseres Linienintegrales für jede geschlossene Kurve auf einer durch 0 gehenden Ebene auf das Verschwinden für jede beliebige geschlossene Kurve zu schließen, betrachten wir zunächst ein beliebiges geschlossenes Polygon. Der allgemeine Fall ergibt sich dann unmittelbar durch Grenzübergang.

Seien P_1, P_2 . . . P_n die Eckpunkte eines geschlossenen Polygons und sei P_{n+1} identisch mit P_1. Das längs des Polygons erstreckte Linienintegral kann ersetzt werden durch eine Summe von Integralen, die längs der Dreiecke $0\, P_r\, P_{r+1}\, 0$ erstreckt sind ($r = 1, 2, \ldots n$), da sich die längs $0\, P_r$ erstreckten Integrale gegenseitig tilgen. Andrerseits sind aber nach dem obigen die Linienintegrale mit dem Ausdruck 1. als Integrand längs $0\, P_r\, P_{r+1}\, 0$ einzeln Null, weil ja dieser Linienzug ganz in einer durch 0 gehenden Ebene liegt. Infolgedessen verschwindet auch das längs des Polygons erstreckte Integral.

Ueber die erste Krümmung der Kurven bei allgemeiner Maßbestimmung.

Von Dr. Ludwig Berwald in Prag.

Der Begriff der ersten Krümmung einer Kurve des R_n bei der durch:

$$(1) \quad s = \int F\left(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right) dt, \left(\dot{x}_i = \frac{d x_i}{d t}; i = 1, 2 \ldots n\right)$$

bewirkten Maßbestimmung ist von Herrn P Finsler in einer auf Veranlassung C. Carathéodory's entstandenen Göttinger Dissertation eingeführt[1]) und in verschiedener Weise geometrisch erklärt worden. In der vorliegenden Note, die bei Gelegenheit eines angeregten Gedankenaustausches mit Herrn P. Funk entstanden ist, soll eine neue Erklärung dieses Begriffes gegeben werden, die als Erweiterung einer von Herrn A. Voss[2]) für den Riemannschen Raum aufgestellten Definition angesehen werden kann. Anschließend wird ein anderer Gedankengang skizziert, der gleichfalls zur ersten Krümmung führt.

1. Die betrachtete Kurve $C\left(x_i = x_i(t)\right)$ des R_n sei keine Extremale des zu (1) gehörigen Variationsproblems.[3]) Dann de-

[1]) P. Finsler, Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Dissertation, Göttingen, 1918. — Für den Fall $n = 2$ ist die (einzige) Krümmung als „extremale" Krümmung schon von G. Landsberg eingeführt worden. (Ueber die Krümmung in der Variationsrechnung. Math. Ann. 65 (1908), 313—349). Gleichzeitig und unabhängig davon tritt diese Invariante auch bei A. L. Underhill, Invariants of the function $f(x, y, x'\, y')$ in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908) 316—338 auf.

[2]) A. Voss, Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 16 (1880). 129—179, insbes. S. 150. — Vgl. auch L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von M. Lukat, Leipzig 1899, S. 603 ff.

[3]) Bezüglich der Voraussetzungen, die über die Kurve $C\left(x_i = x_i(t)\right)$, die Extremale $E\left(y_i = y_i(\tau)\right)$ und die Funktion $F\left(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right)$ zu machen sind, verweisen wir der Kürze halber etwa auf das Lehrbuch von O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, § 25, insbesondere S. 193 ff, 201 ff. Abgesehen von der Dimensionenzahl, sind diese Voraussetzungen nur insofern abzuändern, als hier C, E und F sämtlich von der Klasse C'' angenommen werden sollen. (Bei Bolza C', bzw. C'''.)