Seien P_1, P_2 . . . P_n die Eckpunkte eines geschlossenen Polygons und sei P_{n+1} identisch mit P_1. Das längs des Polygons erstreckte Linienintegral kann ersetzt werden durch eine Summe von Integralen, die längs der Dreiecke $0\, P_r\, P_{r+1}\, 0$ erstreckt sind ($r = 1, 2, \ldots n$), da sich die längs $0\, P_r$ erstreckten Integrale gegenseitig tilgen. Andrerseits sind aber nach dem obigen die Linienintegrale mit dem Ausdruck 1. als Integrand längs $0\, P_r\, P_{r+1}\, 0$ einzeln Null, weil ja dieser Linienzug ganz in einer durch 0 gehenden Ebene liegt. Infolgedessen verschwindet auch das längs des Polygons erstreckte Integral.

Ueber die erste Krümmung der Kurven bei allgemeiner Maßbestimmung.

Von Dr. Ludwig Berwald in Prag.

Der Begriff der ersten Krümmung einer Kurve des R_n bei der durch:

$$(1) \quad s = \int F\left(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right) dt, \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}; i = 1, 2 \ldots n\right)$$

bewirkten Maßbestimmung ist von Herrn P. Finsler in einer auf Veranlassung C. Carathéodory's entstandenen Göttinger Dissertation eingeführt[1]) und in verschiedener Weise geometrisch erklärt worden. In der vorliegenden Note, die bei Gelegenheit eines angeregten Gedankenaustausches mit Herrn P. Funk entstanden ist, soll eine neue Erklärung dieses Begriffes gegeben werden, die als Erweiterung einer von Herrn A. Voss[2]) für den Riemannschen Raum aufgestellten Definition angesehen werden kann. Anschließend wird ein anderer Gedankengang skizziert, der gleichfalls zur ersten Krümmung führt.

1. Die betrachtete Kurve $C\left(x_i = x_i(t)\right)$ des R_n sei keine Extremale des zu (1) gehörigen Variationsproblems.[3]) Dann de-

[1]) P. Finsler, Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Dissertation, Göttingen, 1918. — Für den Fall $n = 2$ ist die (einzige) Krümmung als „extremale" Krümmung schon von G. Landsberg eingeführt worden. (Ueber die Krümmung in der Variationsrechnung. Math. Ann. 65 (1908), 313—349). Gleichzeitig und unabhängig davon tritt diese Invariante auch bei A. L. Underhill, Invariants of the function $f(x, y, x'\, y')$ in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908) 316—338 auf.

[2]) A. Voss, Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 16 (1880). 129—179, insbes. S. 150. — Vgl. auch L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von M. Lukat, Leipzig 1899, S. 603 ff.

[3]) Bezüglich der Voraussetzungen, die über die Kurve $C\left(x_i = x_i(t)\right)$, die Extremale $E\left(y_i = y_i(\tau)\right)$ und die Funktion $F\left(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right)$ zu machen sind, verweisen wir der Kürze halber etwa auf das Lehrbuch von O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, § 25, insbesondere S. 193 ff, 201 ff. Abgesehen von der Dimensionenzahl, sind diese Voraussetzungen nur insofern abzuändern, als hier C, E und F sämtlich von der Klasse C'' angenommen werden sollen. (Bei Bolza C', bzw. C'''.)

finieren wir ihre erste Krümmung bei der Maßbestimmung (1) — bei der also s den „Bogen“ von C darstellt, gerechnet von einem festen Anfangspunkte auf C — in folgender Weise:

Es sei x_0 $(x_i^{(o)} = x_i(t_o))$ irgend ein regulärer Punkt der Kurve C. Wir legen durch x_0 die Extremale E des betrachteten Variationsproblemes, die dort C berührt, und tragen sowohl auf C als auch auf E kleine Bogen von gleicher Länge s bis x, bezw. y auf. Mit λ bezeichnen wir die Entfernung x y, gemessen auf der geodätischen Linie x y in einer **Riemann**schen Maßbestimmung, welche die Maßbestimmung (1) im Punkte x_0 nach der Richtung der Kurve C oskuliert. (Vgl. Nr. 2.) Dann hat, unter der Voraussetzung $F(x_i(t_o), \dot{x}_i(t_o)) \neq 0$, das Verhältnis $\frac{2\lambda}{s^2}$ für $s \to 0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert:

$$(2)\quad \frac{1}{\varrho_0} = \lim_{s \to 0} \frac{2\lambda}{s^2},$$

die erste Krümmung der Kurve C im Punkte x_0.

Wir werden zeigen, daß die so definierte erste Krümmung mit dem gleichnamigen Begriffe des Herrn P. Finsler identisch ist.

2. Vor allem müssen wir aber erklären, was wir unter einer oskulierenden Riemann'schen Maßbestimmung verstehen.

Bei festen $x_i^{(o)}$ und beliebig variablen $\dot{x}_i$ stellt die Gleichung:

$$(3)\quad F(x_i^{(o)}, \dot{x}_i) = 1$$

die Indikatrix des Punktes x_0 dar. Wir setzen voraus, daß diese für jeden Punkt x_0 eine geschlossene konvexe Hyperfläche ist, die ihn umschließt.

Zu jedem Punkte $x_0 + \dot{x}_0$ der Indikatrix des Punktes x_0 existiert nun eine einzige Hyperfläche zweiten Grades, die x_0 zum Mittelpunkte hat und die Indikatrix in $x_0 + \dot{x}_0$ oskuliert. Sie heiße nach P. Finsler die im Punkte $x_0 + \dot{x}_0$ oskulierende Indikatrix von x_0. Ihre Gleichung ist:

$$(4)\quad \sqrt{g_{kl}(x_i^o) \cdot \dot{x}_k \dot{x}_l} = 1^{4)}$$

mit:

$$(5)\quad g_{kl}(x_i^o) = F(x_i^{(o)}, \dot{x}_i^{(o)}).\ F_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(x_i^{(o)}, \dot{x}_i^{(o)}) +$$
$$+ F_{\dot{x}_k}(x_i^{(o)}, \dot{x}_i^{(o)}).\ F_{\dot{x}_l}(x_i^{(o)}, \dot{x}_i^{(o)}).\ (dF = F_{x_k} \cdot dx_k + F_{\dot{x}_k} \cdot d\dot{x}_k \text{ usw.})$$

Unter einer **Riemann**'schen Maßbestimmung, welche die Maßbestimmung (1) im Punkte x_0 nach der Richtung $\dot{x}_0$ oskuliert, verstehen wir eine solche Riemann'sche Maßbestimmung

[4] Nach dem Vorgange von A. Einstein unterdrücken wir die Summenzeichen: Es ist also nach jedem Zeiger, der doppelt auftritt, von 1 bis n zu summieren. Die Wurzeln in (4) und weiterhin sind positiv zu ziehen.

(6) $\sigma = \int \sqrt{g_{kl}(x_i)\,dx_k\,dx_l}$,

bei der die Funktionen g_{kl} für $x_i = x_i^{(o)}$ die Werte (5) besitzen.

3. Nach diesen Erläuterungen können wir uns kürzer fassen.

Wir führen auf der gegebenen Kurve C $(x_i = x_i(t))$, und ebenso auf der sie in x_0 berührenden Extremalen E $(y_i = y_i(\tau))$ den zur Maßbestimmung (1) gehörigen „Bogen" als unabhängige Veränderliche ein. Diesen nennen wir auf beiden Kurven s, wobei wir den Punkt x_0 als Anfangspunkt $s = 0$ der Zählung gewählt denken. Die Kurven C und E sind jetzt dargestellt durch $x_i = x_i(s)$, bzw. $y_i = y_i(s)$, und es ist:

(7) $x_i(0) = y_i(0) = x_i^{(o)}, \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$

Die Differentiation nach s bezeichnen wir durch Striche: $x_i'(s) = \frac{dx_i(s)}{ds}$, $y_i'(s) = \frac{dy_i(s)}{ds}$. Dementsprechend bedeutet z. B. x_0' $[x_0'']$ den Vektor mit den Koordinaten $x_i'(0)$ $[x_i''(0)]$, usw.

Daß s auf C und auf E den Bogen darstellt, wird durch die Identitäten

(8) $F(x_i(s), x_i'(s)) = 1, \qquad F(y_i(s), y_i'(s)) = 1$

ausgedrückt. Aus ihnen folgt unschwer, daß die Kurven C und E einander dann und nur dann im gemeinsamen Punkte x_0 berühren, wenn außer (7) noch:

(9) $x_i'(0) = y_i'(0) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$

erfüllt ist.

4. Die Koordinaten $x_i(s)$ $[y_i(s)]$ des Punktes x [y], zu dem man gelangt, wenn man auf C [E] von x_0 aus den Bogen s aufträgt, können nach der Taylor'schen Formel wegen (7) und (9) in folgender Weise geschrieben werden:

$$(10)\quad \begin{cases} x_i(s) = x_i(0) + s\,x_i'(0) + \frac{s^2}{2}\,x_i''(\vartheta s), & (0 < \vartheta < 1); \\ y_i(s) = x_i(0) + s\,x_i'(0) + \frac{s^2}{2}\,y_i''(\eta s), & (0 < \eta < 1). \end{cases}$$

Man hat daher:

(11) $x_i(s) - y_i(s) = \frac{s^2}{2}\left(x_i''(\vartheta s) - y_i''(\eta s)\right).$

$(i = 1, 2 \ldots n)$. Für $s \to 0$ geht in der Grenze $x_i''(\vartheta s) - y_i''(\eta s)$ in $x_i''(0) - y_i''(0)$ über.

5. Der Vektor $x_0'' - y_0''$ ist zur Kurve C im Punkte x_0 transversal.

Denn aus den Identitäten (8) folgt durch Differentiation nach s und Uebergang zu $s = 0$ wegen (7) und (9):

$$(12)\quad \begin{cases} x_i'(0).\ F_{x_i}(x_i(0), x_i'(0)) + x_i''(0).\ F_{x_i'}(x_i(0), x_i'(0)) = 0, \\ x_i'(0).\ F_{x_i}(x_i(0), x_i'(0)) + y_i''(0).\ F_{x_i'}(x_i(0), x_i'(0)) = 0, \end{cases}$$

und hieraus durch Subtraktion:

(13) $(x_i''(0) - y_i''(0)).\ F_{x_i'}(x_i(0), x_i'(0)) = 0.$

Das ist aber die Transversalitätsbedingung.

6. Die Entfernung zweier unendlich benachbarten Punkte x, y, gemessen in einer im Punkte x_0 nach der Kurvenrichtung x_0' oskulierenden Riemann'schen Maßbestimmung (6) ist:

$$(14)\quad \lambda = \sqrt{g_{kl}(x_i)\cdot(x_k - y_k)(x_l - y_l)}$$

Wenn man hierin für die Koordinatendifferenzen die Werte (11) einsetzt und zur Grenze $s \to 0$ übergeht, so erhält man wegen (5) und (8) zunächst:

$$(15)\quad \frac{1}{\varrho_0} \equiv \lim_{s\to 0} \frac{2\lambda}{s^2} =$$

$$= \sqrt{(F x_k' x_l' + F x_k' F x_l')\cdot(x_k'' - y_k'')\cdot(x_l'' - y_l'')},$$

wobei in Fx_k', Fx_l', $Fx_k'x_l'$ die Argumente $x_i(0)$, $x_i'(0)$, in x_k'', x_l''; y_k'', y_l'' das Argument Null zu nehmen ist.

Berücksichtigt man die Transversalitätsbedingung (13), so kommt weiter:

$$(16)\quad \frac{1}{\varrho_0} = \sqrt{F x_k' x_l' (x_k'' - y_k'')(x_l'' - y_l'')}.$$

Endlich liefert die Einführung eines anderen (regulären) Parameters $t = t(s)$ den von Herrn P. Finsler angegebenen Ausdruck:

$$(17)\quad \frac{1}{\varrho_0} = \sqrt{\frac{F\dot{x}_k \dot{x}_l (\ddot{x}_k - \ddot{y}_k)(\ddot{x}_l - \ddot{y}_l)}{F^3}}\ ^{5)}$$

7. Den im Punkte x_0 angebrachten Vektor h von den Koordinaten:

$$(18)\quad h^i = \varrho_0\,(x_i''(0) - y_i''(0)),\quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

nennen wir den Hauptnormalvektor der Kurve C im Punkte x_0. Er ist nach (13) zur Kurve C transversal, und so normiert, daß er in jeder **Riemann**'schen Maßbestimmung, die im Punkte x_0 nach der Richtung von C oskuliert, Einheitsvektor ist. Sein Endpunkt liegt also auf der im Punkte $x_0 + x_0'$ oskulierenden Indikatrix des Punktes x_0.

8. Man gelangt noch auf einem ganz anderen Wege zur ersten Krümmung:

Bekanntlich lassen sich die Lagrange'schen Ausdrücke, die gleich Null gesetzt die Differentialgleichungen der Extremalen geben, auffassen als die Koordinaten eines gegenüber Punkttransformationen kovarianten Tensors erster Stufe.[6] Bildet man

[5] In (17) stehen in F und $F\dot{x}_k \dot{x}_l$ die Argumente $x_i(t_0)$, $\dot{x}_i(t_0)$, in $\ddot{x}_k$, $\ddot{x}_l$; $\ddot{y}_k$, $\ddot{y}_l$ das Argument t_0 des Punktes x_0. $\ddot{x}_k$ bedeutet natürlich

$$\left[\frac{d^2 x_k(t)}{dt^2}\right]_{t = t_0} \text{usw.}$$

[6] Die Punkttransformationen werden dabei als umkehrbar = eindeutig, stetig und zweimal stetig differentiierbar vorausgesetzt. Vgl. O. Bolza, a. a. O. S. 343ff.

insbesondere die Lagrange'schen Ausdrücke für den Punkt x_0 der Kurve C:

$$(19)\quad l_i = \left[F_{x_i}\left(x_i(s),\, x_i'(s)\right) - \frac{d\, F_{x_i'}\left(x_i(s),\, x_i'(s)\right)}{ds} \right]_{s=0},$$

$$(i = 1,\, 2 \ldots n),$$

so kann man diese daher im Raume der x_i' [Nr. 2] als Koordinaten einer Hyperebene l deuten, die durch den festen Punkt x_0 läuft. Als Hauptnormalenrichtung der Kurve C im Punkt x_0 wird man jetzt die Richtung definieren, die in Bezug auf die im Punkte $x_0 + x_0'$ oskulierende Indikatrix des Punktes x_0 konjugiert zur Hyperebene l ist. Normiert man ferner den in dieser Richtung von x_0 ausgehenden Vektor durch die Forderung, daß sein Endpunkt auf jener oskulierenden Indikatrix liegen soll, so gelangt man wieder zum Hauptnormalvektor h. Schließlich ergibt sich die erste Krümmung der Kurve C im Punkte x_0 aus:

$$(20)\quad \frac{1}{\varrho_0} = \sqrt{l_i\, h^i}$$

Die angedeutete Ableitung der ersten Krümmung verallgemeinert eine von Herrn P. Funk für $n = 2$ gegebene.[7])

Prag, den 14. Juli 1920.

[7]) P. Funk, Ueber den Begriff „extremale Krümmung" und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. Math. Zeitsch. 3 (1919), 87—92.

Zur Klärung der geologischen Verhältnisse am Südostrande des Altpaläozoikums in Mittelböhmen.

Eine Antwort an Herrn Dr. R. Kettner.

Von Dr. Adalbert Liebus.

Im Jahre 1913 beendete ich eine Reihe von Begehungen in der Sektion des Blattes Z. 6, Kol. X.

Seinerzeit erhielt ich als Volontär und später als externer Mitarbeiter der geologischen Reichsanstalt in Wien dieses Blatt zur geologischen Aufnahme zugewiesen, habe aber nach einer Besprechung mit Prof. Dr. J. J. Jahn diesen Teil des Gebietes, nämlich die Umgebung von Jinetz, nicht mitkartiert, da er sich die Gegend von Jinetz für eine monographische Bearbeitung ausersehen hatte. Diese ist im „Věstník přírodovědeckého klubu v Prostějově" erschienen. Dadurch war ich meines Versprechens enthoben und begann auf eigene Kosten, mit eigener Karte die Begehungen, deren Resultate die im Jahrbuche der geologischen Reichsanstalt, Bd. 63, Heft 4, publizierte Arbeit war: „Geologische Studien am Südostrande des Altpaläozoikums in Mittelböhmen", in der ich der Hauptsache nach die regel-