

Ueber Distanz- und Längenbegriff der ebenen Affingeometrie.

Von Artur Winternitz in Prag.

(Gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Gesellschaft der Wissenschaften und Künste für die tschechoslowakische Republik.)

Die vorliegende Arbeit behandelt einige Probleme, die sich darbieten, wenn man versucht, eine Grundlegung der affinen Infinitesimalgeometrie im Geiste der Mengenlehre zu geben; d. h. diese Fragen in möglichst allgemeiner und zugleich naturgemäßer Weise zu behandeln, so daß das Funktionentheoretische stets aus dem Geometrisch-Gestaltlichen hervorgeht. Dies wird uns durch Minkowski's Theorie der konvexen Gebilde und durch Lebesgue's Ergebnisse über monotone Funktionen sehr erleichtert.

In Kap. I setzen wir in elementarer Weise eine Theorie der Ordnung von Linienelementen auseinander, welche auf eine Analyse des Begriffes „konvexer Bogen“ hinauskommt. Einige merkwürdige Beispiele, die hier konstruiert werden, sind für das Folgende wichtig.

In Kap. II stellen wir einen flächentreuen Affinitäten gegenüber invarianten Distanzbegriff auf und entwickeln seine wichtigsten Eigenschaften. Es bieten sich dann zwei Wege dar, zu einem affinen Längenbegriff zu gelangen. Der eine entspricht der heute gebräuchlichen, auf Scheeffer und Jordan zurückgehenden Definition der Bogenlänge, der andere beruht auf einer Intregalformel, welche zunächst für stetig gekrümmte konvexe Bogen den gleichen Wert ergibt, die sich aber auf Grund der Lebesgue'schen Theorie für beliebige konvexe Bogen als stets existierend erweist. Es musste nun geprüft werden, ob beide Definitionen immer denselben Wert liefern. Ich vermutete zunächst, das Intregal könne einen größeren Wert ergeben. Aber der Versuch, ein entsprechendes Beispiel herzustellen, mißlang. Ein von 1 verschiedenes Verhältnis konnte ich nur so erreichen, daß beide Werte verschwinden. Schließlich fand ich, unter Heranziehung eines an sich einfachen Hilfssatzes, daß beide Größen notwendig stets gleich sein müssen. Der Beweis dieses Ergebnisses bildet das eigentliche Ziel der Untersuchung. Es läßt sich auch aus dem geometrischen Zusammenhang herauslösen und bildet — wie mir scheint — einen recht merkwürdigen und isoliert dastehenden Satz der Theorie der reellen Funktionen.

In dem kurzen Schlußartikel III werden Minkowskische Weltgeometrie und Euklidische Metrik zum Vergleich herangezogen, wo die Dinge einfacher liegen.

Der Anfang von Kap. II, mein Beweis der Distanz-Ungleichung, ist in Blaschke's bekanntes Werk: Vorlesungen über Differentialgeometrie II (bearb. von Reidemeister) aufgenommen worden.

Die Arbeit ist in einer früheren Zeit entstanden und stützt sich in ihrem Hauptteil wesentlich auf die Lebesguesche Integrationstheorie, wie sie in Caratheodory's Vorlesungen über reelle Funktionen (1918) von Grund aus aufgebaut ist. Sind auch heute die Ansichten über diese Theorie infolge Brouwer's einschneidender Kritik geteilt, so wird man ihr doch nicht jeden Wert abstreiten wollen und so mag auch dieser Beitrag zum Verhältnis von Funktionenlehre und Geometrie in der Hoffnung veröffentlicht werden, daß es einmal gelingen wird, das dauernd Wertvolle herauszuholen.

Kap. I. „Konvex geordnete“ Systeme von Linien- elementen.

Wir treiben ebene Affingeometrie und setzen einen axiomatischen Aufbau derselben als vollzogen voraus, wie er etwa in Hölder's Aufsatz „Streckenrechnung und projektive Geometrie“ Leipziger Berichte 1911, S. 65—183, gegeben ist, wo im ersten Abschnitt Parallelstreckenverhältnisse und im letzten Paragraphen des Anhangs Dreiecks- und Polygoninhalt behandelt werden. Das Axiomensystem besteht aus den Hilbert'schen Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung I 1-3, II, dem Parallelenaxiom und dem Satz von Desargues. Dazu tritt weiterhin noch das Dedekind'sche Stetigkeitsaxiom.

§ 1. Wir betrachten Figuren, welche aus orientierten Linien-
elementen aufgebaut sind. Ein solches I wird durch einen Punkt 1 und eine Richtung a angegeben; letztere durch eine Strecke dargestellt, welche durch jede gleichgerichtete ersetzt werden darf. Wir bezeichnen das Element auch genauer mit $I(1, a)$. Wir ziehen weiterhin nur solche Elemente in Betracht, die dem „beschränkten“ System \mathcal{S} angehören. Dieses sei dadurch charakterisiert, daß der Punkt 1 innerhalb des Parallelogrammes \mathfrak{P} , die Richtung a innerhalb des hohlen Winkelraumes \mathfrak{R} liegt. \mathfrak{R} werde durch eine vom Punkte O ausgehende Strecke überstrichen, wenn ihr Endpunkt von A nach B läuft. (O, A, B mögen in dieser Reihenfolge ein „positives“ Dreieck bestimmen.) Die zugelassenen Richtungen haben eine natürliche Ordnung, die wir durch das Zeichen $<$ ausdrücken.

Das System \mathcal{S} fassen wir als teilweise geordnet auf, indem wir die Elemente teils als hintereinander liegend, teils als nebeneinander liegend erklären. Wir sagen, daß das Element $I(1, a)$ dem Element $II(2, b)$ vorangeht: $I < II$, wenn die Richtungsordnung $a < \overrightarrow{12} < b$; dagegen dass $II < I$, wenn die Richtungsordnung $b < \overrightarrow{21} < a$ besteht. Tritt einer von diesen beiden Fällen ein, so heißen die Elemente vergleichbar (hintereinander liegend), sonst unvergleichbar (nebeneinander liegend). Die Vergleichbarkeit impliziert also die Verschiedenheit der Punkte 1, 2 sowie der Richtungen a, b . Von

Hintereinanderordnung im uneigentlichen Sinne $I \leq II$ können wir sprechen, wenn $a \leq 12 \leq b$ oder 1 mit 2 zusammenfällt und $a \leq b$ gilt. Gilt $I < II$, so liegt der Schnittpunkt A der beiden Elementgeraden rechts von 12, das Dreieck 1A2 ist positiv. Umgekehrt stellt jedes positive Dreieck 1A2 zwei aufeinander folgende Linienelemente dar, wenn nur die Richtungen $\vec{1A}$ und $\vec{A2}$ zu \mathfrak{R} gehören. $\vec{12}$ liegt dann dazwischen und es ist $I (1, \vec{1A}) < II (2, \vec{A2})$. Wir nennen 1A2 das „charakteristische Dreieck“ des Elementpaares. Die Beziehung ist transitiv unter Beschränkung auf \mathfrak{S} . Wir nennen sie konvexe Ordnung.

Daß in der Tat aus $I < II$ und $II < III$ die Beziehung $I < III$ folgt, sieht man so: Aus $a < \vec{12} < b < \vec{23} < c$ und $\vec{12} < \vec{13} < \vec{23}$ folgt $a < \vec{13} < c$. Das Dreieck 123 ist positiv. Die Figur sieht so aus: das positive Dreieck 1C3 enthält den Punkt 2 in seinem Inneren, weil die charakteristischen Dreiecke 1A2, 2B3 sowie 123 positiv sind und die hindurchgehende Gerade des zweiten Elementes trifft die Dreiecksseiten 1C und C3 beziehungsweise in den Punkten A und B, weil ihre Richtung zwischen 12 und 23 liegt und die Gerade 12 zwischen C und 3, die Gerade 32 zwischen 1 und C hindurchgeht. Den Streckenzug 1A2B3 nennen wir den charakteristischen Streckenzug des Elementtripels. 1A2 ist positiv, A2B geradlinig, 2B3 positiv. Jeder derartige Streckenzug charakterisiert ein geordnetes Elementtripel, wenn nur die Richtungen $\vec{1A}$, $\vec{B3}$ in \mathfrak{R} liegen. Die Figur entsteht aus einem positiven Dreieck 1C3 wenn man A zwischen 1 und C, B zwischen C und 3 und dann 2 zwischen A und B annimmt.

Wir können nun überhaupt konvex geordnete Systeme von Linienelementen betrachten, solche Systeme nämlich, bei denen je zwei Elemente hintereinander liegen, Teilsysteme von \mathfrak{S} . Derartige Systeme können aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen, aber auch aus unendlich vielen. Im ersten Falle gibt es wieder einen charakteristischen Streckenzug, dessen Ecken abwechselnd die Punkte der Elemente und die Schnittpunkte zweier aufeinander folgender Elementgeraden sind. Er entsteht aus einem konvexen Streckenzug, in dem man auf jeder Strecke einen Punkt hervorhebt, das heißt die Punktfolge 1A2B3C... Q_n ist so beschaffen, daß 1A2 positiv, A2B geradlinig, 2B3 wieder positiv ist usw. Jeder derartige Streckenzug bestimmt ein System von konvex aufeinanderfolgenden Linienelementen, wenn nur Anfangs- und Endrichtung $\vec{1A}$, $\vec{Q_n}$ in \mathfrak{R} liegen.

§ 2. Bevor wir uns zur Betrachtung unendlicher konvex geordneter Systeme von Linienelementen wenden und auch für diesen Fall etwas dem charakteristischen Streckenzug Analoges suchen, halten wir es für zweckmäßig cartesische Koordinaten einzuführen,

indem wir einen Nullpunkt O wählen und zwei Grundvektoren OX , OY annehmen; die ein Parallelogramm vom Inhalt $+1$ aufspannen. Dabei soll die Richtung von OY dem auf \mathfrak{R} folgenden Nebenwinkel angehören. Dies hat zur Folge, daß die konvexe Ordnung der Elemente mit der natürlichen Ordnung der Abszissen ihrer Punkte übereinstimmt. \mathfrak{B} sei jetzt ein zweidimensionales x - y -Intervall; \mathfrak{S} das entsprechende x -Intervall.

Betrachten wir nun irgend ein konvex geordnetes System von Linienelementen, mag es endlich oder unendlich sein. Die Punkte der Elemente projizieren sich auf eine beschränkte Punktmenge \mathfrak{X} auf der Abszissenachse, innerhalb deren die Ordinate eine eindeutige Funktion $y = f(x)$ ist, die sich als „konvexe Funktion“ erweist. Für je drei aufeinander folgende Elemente $I < II < III$ ist nämlich das Dreieck 123 positiv, also gilt für

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{stets} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} > 0.$$

(x_1, x_2, x_3 gehören zu \mathfrak{X} .)

Fassen wir andererseits die Richtungen der Elemente ins Auge, so bemerken wir, daß ihre Ordnung mit der der Elemente selbst, also auch mit der Ordnung der Abszissen ihrer Punkte, übereinstimmt. Denken wir uns eine Richtung aus \mathfrak{R} stets durch einen Vektor von der Absziss $+1$ dargestellt und nennen die zugehörige Ordinate p , so daß das Linienelement drei Koordinaten x, y, p bekommt, so wird p eine beständig zunehmende Funktion von x innerhalb \mathfrak{X} . Sie erweist sich als eine Art Ableitung von $f(x)$. Es ist ja, wenn $x_1 < x < x_2$ zu \mathfrak{X} gehören:

$$f(x_1, x) \equiv \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < p(x) < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \equiv f(x, x_2).$$

$$\overrightarrow{12} < b < \overrightarrow{23}.$$

Es gilt dann $D^- f(x) \leq p(x) \leq D^+ f(x)$. $f(x, x_2)$ ist bei festem x mit x_2 zunehmend. Die untere Grenze für $x_2 > x$ bezeichnen wir als rechte Ableitung $D^+ f(x)$.

Bevor wir uns zum allgemeinen Falle wenden, heben wir zwei bemerkenswerte Klassen hervor: die „überall dichten“ und die „stetigen“ Systeme.

Wir nennen ein konvex geordnetes System „überall dicht“ in \mathfrak{S} , wenn in jedem Teilintervall Punkte von \mathfrak{X} liegen. $f(x)$ ist eine stetige Funktion und

$$p(x+0) = D^+ f(x) = \lim_{x_2 \rightarrow x} f(x, x_2) \quad (x < x_2),$$

$$f(x-0) = D^- f(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} f(x_1, x) \quad (x_1 < x),$$

$$p(x) = D f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x, \\ x_2 \rightarrow x}} f(x_1, x_2) \quad (x_1 < x < x_2)$$

für geeignete $x_1 - x_2$ -Folgen.

→

Die Eigenschaft erweist sich als von der Projektionsrichtung OY unabhängig; unter entsprechender Berücksichtigung der Bedingungen S. 166 oben.

„Stetig“ nennen wir das System, wenn \mathfrak{X} mit \mathfrak{S} identisch ist. Auch diese Eigenschaft erweist sich als von der Projektionsrichtung unabhängig. Ein solches System kann durch die beständig zunehmende, sonst völlig beliebig im ganzen Intervall \mathfrak{S} definierte Funktion $p(x)$ und den Wert von $f(x_0)$ (x_0 ein Punkt von \mathfrak{X}) angegeben werden. $f(x)$ ist dann als Stammfunktion von $p(x)$ bestimmt.

Uneigentlich konvex geordnete Systeme erklärt man in ähnlicher Weise, indem man sich auf die Hintereinanderordnung im uneigentlichen Sinne stützt. (S. 165). Die Richtungsfunktion $p(x)$ ist dann aufsteigend, das heißt für $x_1 < x_2$ ist stets $p(x_1) < p(x_2)$. Die Richtung kann in einem Intervall konstant bleiben; dem entspricht eine gerade Strecke des Punktortes.

Die konvex geordneten Systeme werden nun in voller Allgemeinheit charakterisiert durch den Satz: Jedes konvex geordnete System ist Teil eines uneigentlich konvexen, stetigen Systemes. Indem wir dieses auf eine bestimmte Weise herstellen, erhalten wir das Analogon zum charakteristischen Streckenzug bei den endlichen Systemen: Wir ergänzen das System zuerst durch Hinzunahme der Häufungselemente zu einem abgeschlossenen und setzen in die Zwischenräume die geradlinigen Verbindungsstrecken. Greift man umgekehrt aus einem uneigentlich konvexen stetigen Elementensystem ein Teilsystem heraus, von dem keine zwei Elemente derselben Strecke des Systemes angehören, so erhält man ein eigentlich konvexes System.¹⁾

§ 3. Wir wenden uns jetzt einer besonderen Erzeugungsweise konvex geordneter Elementensysteme zu, die wir als das Verfahren der „sukzessiven Zwischenschaltung“ bezeichnen. Es besteht darin, daß man zwischen zwei Ausgangselemente $E(0) < E(1)$ zunächst ein Element $E\left(\frac{1}{2}\right)$ dazwischenschaltet: $E(0) < E\left(\frac{1}{2}\right) < E(1)$ (Erster Schritt), sodann zwischen $E(0)$ und $E\left(\frac{1}{2}\right)$ ein Element $E\left(\frac{1}{4}\right)$, zwischen $E\left(\frac{1}{2}\right)$ und $E(1)$ ein Element $E\left(\frac{3}{4}\right)$ (Zweiter Schritt), dann zwischen je zwei von diesen Elementen wieder ein Element (Dritter Schritt) usw. in infinitum. So entsteht ein abzählbares System, welches dicht ist, in dem Sinne, daß zwischen je zwei Elementen stets wieder ein Element liegt. Aber es braucht nicht überall dicht zu sein. Dazu sind vielmehr besondere Bedingungen erforderlich.

¹⁾ Konvexe Funktionen in eindimensionalen Punktmengen behandelt L. Galvani: „Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque“ Palermo Rendiconti XLI, 1916, 103-134.

Ueber die Sprünge einer monotonen Funktion findet sich dort eine irige Angabe, indem statt der Abzählbarkeit das Verschwinden des Jordanschen Inhalts als Kriterium angegeben wird.

Behandeln wir zunächst die entsprechende Frage für geordnete Punktsysteme auf der Geraden. Die Einschaltung eines Punktes zwischen zwei andere $P' < P'' < P'''$ wird durch das positive Teilverhältnis $\tau = \frac{P'' P'''}{P' P''} (> 0)$ bzw. $\tau' = \frac{P' P''}{P'' P'''} = \frac{1}{\tau} (> 0)$ gekennzeichnet. Wir gehen nun von zwei Punkten $P(0) < P(1)$ aus und schalten einen Punkt $P\left(\frac{1}{2}\right)$ nach dem Teilverhältnis $\tau\left(\frac{1}{2}\right)$ bzw. $\left(\frac{1}{2}\right)$ dazwischen (Erster Schritt), sodann $P\left(\frac{1}{4}\right)$ zwischen $P(0)$ und $P\left(\frac{1}{2}\right)$ nach dem Teilverhältnis $\tau\left(\frac{1}{4}\right)$ und $P\left(\frac{3}{4}\right)$ zwischen $P\left(\frac{1}{2}\right)$ und $P(1)$ nach dem Teilverhältnis $\tau\left(\frac{3}{4}\right)$ (Zweiter Schritt) usw. Ist dann τ_n die kleinste der beim n-ten Schritt auftretenden Zahlen τ und τ' , so ist, dafür daß ein überalldichtes Punktsystem entsteht oder, wie man auch sagen kann, eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, wie sie bei der Definition des Riemann'schen Integrals gebraucht wird, notwendig und hinreichend, daß die Reihe $\sum \tau_n$ divergiert. Zunächst kommt man auf die gleichwertige Bedingung der Divergenz des Produktes $\prod \frac{1}{1 + \tau_n}$. Statt der τ kann man auch die Teilverhältnisse $\alpha = \frac{\tau}{1 + \tau}$ verwenden. Die Divergenz von $\sum \alpha_n$ ist gleichwertig.

Ein interessanter Spezialfall, in welchem diese Bedingung erfüllt ist, ist der, daß τ immer denselben Wert behält, so daß die Figur sich immer ähnlich wiederholt. Fast man die Abszisse x des Punktes P als Funktion einer Veränderlichen t auf, so daß $x(0) = 0$ die Abszisse des Punktes $P(0)$, $x(1) = 1$ die Abszisse des Punktes $P(1)$, $x\left(\frac{1}{2}\right)$ die des Punktes $P\left(\frac{1}{2}\right)$ usw. darstellt, so wird für $\tau = 1$: $x = t$; sonst aber entsteht ein interessantes Beispiel einer monotonen Funktion²⁾, das sich als von konstanter λ -Variation (nach der Terminologie von Carathéodory) erweisen wird.

Kehren wir nun zu den konvex geordneten Systemen von Linienelementen zurück, so ist zunächst zu bemerken, daß die Zwischenschaltung eines Elementes II zwischen I und III ($I < II < III$) durch drei Teilverhältnisse

$$\alpha = \frac{1}{1} \frac{A}{C}, \beta = \frac{C}{C} \frac{B}{3}, \gamma = \frac{A}{A} \frac{2}{B} \quad (0 < \alpha, \beta, \gamma < 1)$$

gekennzeichnet werden kann. (Bezeichnungsweise von S. 165.)

Um nun zu entscheiden, ob ein überalldichtes Elementensystem entsteht, brauchen wir nur die Projektion auf die Abszissenachse zu

²⁾ Diese Funktion kommt schon bei Faber vor: „Ueber stetige Funktionen“, Math. Ann. 69.

beurteilen. Wir wollen uns mit der Aufstellung hinreichender Bedingungen begnügen und bedienen uns dazu der Abschätzung:

$$\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{1-(1-\alpha)(1-\gamma)} < \tau = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} < \frac{1-\beta\gamma}{\beta\gamma}$$

Sie ergibt sich, wenn man in den Richtungen a bzw. b projiziert. Dabei bemerke man, daß $\xi = \beta\gamma$ und $\eta = (1-\alpha)(1-\gamma)$ die Koordinaten des Punktes 2 in jenem Koordinatensystem sind, dessen Nullpunkt C, dessen Grundvektoren C3 und C1 sind.

Nennen wir dann σ_n die kleinste der beim n-ten Schritt auftretenden Zahlen $\sigma = \beta\gamma$, $\sigma' = (1-\alpha)(1-\gamma)$ (statt der Werte $\frac{\beta\gamma}{1-\beta\gamma}$, $\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{1-(1-\alpha)(1-\gamma)}$, welche sich zunächst ergeben), so ist die Divergenz der Reihe $\sum \sigma_n$ hinreichend für die der Reihe $\sum \tau_n$, also auch dafür, daß das konvex geordnete Elementsystem überalldicht wird. Sicher hinreichend ist es zum Beispiel, wenn die Zahlen σ eine positive untere Schranke haben. Ein besonders interessanter Spezialfall, welcher dieser Bedingung genügt, ist der, daß die α, β, γ ihre Werte behalten; die Zwischenschaltung also jedesmal in affin ähnlicher Weise vorgenommen wird. Ist $\alpha = \beta = \gamma$, so entsteht ein Parallelbogen, wenn man das System zu einem stetigen vervollständigt, im anderen Falle sehr merkwürdige Kurven, deren Beschaffenheit wir im Folgenden noch näher kennen lernen werden.

Wir können uns nun noch die Frage vorlegen, wenn auch das Richtungsbild $p(x)$ überalldicht wird, in welchem Falle durch Vervollständigung als Punktort eine stetig-differenzierbare konvexe Kurve hervorgeht. Die Frage soll hier aber nur für den zuletzt erwähnten besonderen Fall, wo die Konstruktion nur von drei Parametern α, β, γ abhängt, durchgeführt werden. Bezeichnen wir die den obigen τ analogen Teilverhältnisse auf der p-geraden mit ϱ , so ist das erste willkürlich, je nach der Wahl der Ordinatenrichtung. Die folgenden aber sind durch Rekursionsformeln bestimmt, vermöge deren sich aus einem ϱ das der Einschaltung $p' < p'' < p'''$ entspricht, die beiden nächsten Teilverhältnisse ϱ', ϱ'' berechnen lassen, die beziehungsweise der Einschaltung zwischen p' und p'' und der zwischen p'' und p''' entsprechen. Ist $\varrho = \varrho \binom{k}{2^n}$ (k ungrad), so wird

$$\varrho' = \varrho \binom{2k-1}{2^n+1}, \quad \varrho'' = \varrho \binom{2k+1}{2^n+1}.$$

Diese Formeln lauten:

$$\varrho' = \alpha' (\varrho + 1), \quad \varrho'' = \alpha'' \left(\frac{1}{\varrho} + 1 \right).$$

Dabei ist:

$$\alpha' = \frac{\beta\gamma}{\alpha} > 0, \quad \alpha'' = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{1-\beta} > 0.$$

Zur Herleitung der Formeln bedient man sich zweckmäßig des Satzes, daß bei der Richtungseinschaltung $\vec{12} < \vec{13} < \vec{23}$ das Richtungsteilverhältnis ϱ gleich dem Abszissenteilverhältnis τ ist.

Nun sind zwei Fälle wesentlich zu unterscheiden:

Entweder sind $\alpha', \alpha'' \leq 1$ Dann folgt aus Ungleichungen

$$\frac{1}{N} < \varrho < N \text{ stets } \frac{1}{N+1} \leq \underline{z} < (\varrho', \varrho'') \leq N+1 \text{ wobei } \underline{z}$$

die kleinere der beiden Zahlen α', α'' bedeutet und $N \frac{1}{z} - 1$

angenommen wird. Wenn dann nur beim ersten Schritt $\frac{1}{N_0} < \varrho \left(\frac{1}{2} \right)$

$< N_0$ ist, so wird beim n-ten Schritt: $\frac{1}{N_0+n} < \varrho < N_0+n$ und so-

mit ist $\sum \varrho_n > \sum \frac{1}{N_0+n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) divergent. In diesem

Falle wird also das Richtungsbild überalldicht und die schließlich entstehende konvexe Kurve ist rund.

Ist dagegen ein $\alpha > 1$ (etwa $\alpha' > 1$), so wird $\varrho' > \alpha \varrho$ und somit bei n-maligem Fortgehen nach derselben Seite hin:

$$> \frac{\alpha^n}{N_0} \quad \left(\varrho \left(\frac{1}{2} \right) > \frac{1}{N_0} \right) \quad \frac{1}{\varrho_n} < \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n N_0$$

und infolgedessen $\sum \varrho_n < \sum \frac{1}{\varrho_n} < N_0 \sum \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

also konvergent. Dies tritt offenbar immer ein, wenn man von einer bestimmten Stelle an, immer nach derselben Seite fortgeht, (und nur dann). In diesem Falle wird also das Richtungsbild nicht überall dicht, vielmehr sind seine Punkte isoliert, wenn $\alpha', \alpha'' > 1$ oder wenigstens einseitig isoliert, wenn nur eine von diesen beiden Bedingungen erfüllt ist. Die vollständigen konvexen Kurven haben Ecken und zwar gerade bei den sukzessive definierten Elementen.

Die nebenstehende Figur 1 gibt die geometrische Bedeutung der Ungleichungen $\alpha', \alpha'' \leq 1$ an. Der Punkt 2 muß so liegen, daß Dreieck E2F positiv oder Null wird, d. h. $(1 - \xi - \eta)^2 - \xi \eta \geq 0$ ausfällt, also auf der Außenseite des Ellipsenbogens liegt, von welchem Figur 2 eine einfache Erzeugung andeutet

Seine Linienelemente sind übrigens 2, EF wenn E2F geradlinig liegen. Die Bedingung für die Richtung b ist $\vec{E2} < b < \vec{2F}$.

Interessant ist eine weitere Spezialisierung der Konstruktion, durch welche bewirkt werden kann, daß ϱ seinen Wert behält, so daß p(x) die schon früher erwähnte Fabersche Funktion wird.

Dazu ist erforderlich, daß $\varrho' = \frac{\alpha'}{1-\alpha'} = \frac{1-\alpha''}{\alpha''}$, also $\alpha' + \alpha'' = 1$ oder $\alpha = \beta$ ist.

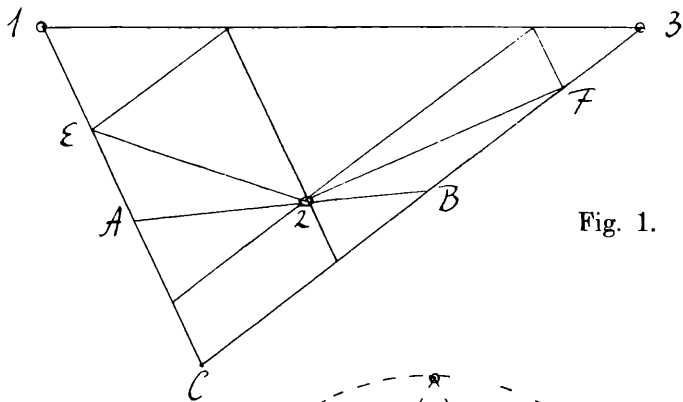


Fig. 1.

Fig. 2.

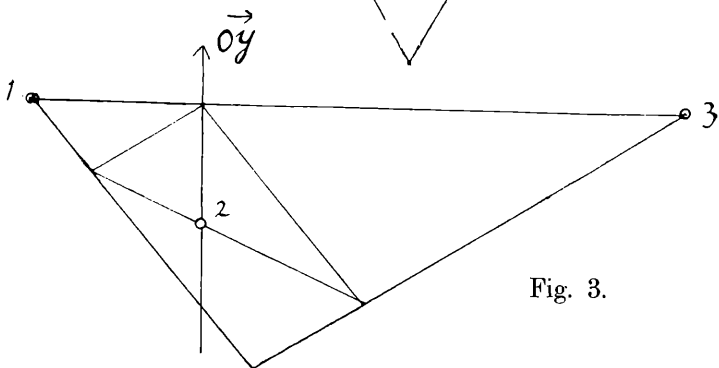
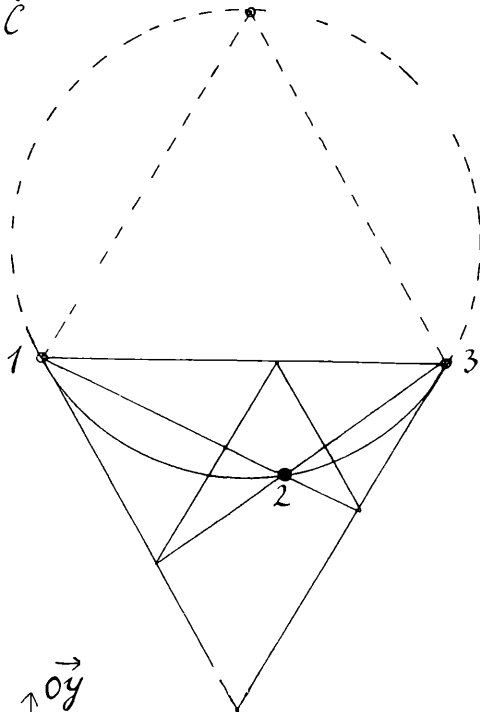


Fig. 3.

(Für $\alpha \leq \beta$ wäre $\alpha' \leq \gamma$, $\alpha'' \leq 1 - \gamma$, $\alpha' + \alpha'' \leq 1$.)

Es wird dann $\alpha' = \gamma$, $\alpha'' = 1 - \gamma$ $\varrho = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ Die Ordinatenrichtung kann leicht so gewählt werden, daß auch ϱ ($\frac{1}{2}$) diesen Wert annimmt.

Der erste Schritt der Konstruktion ist durch Figur 3 angedeutet. Die Gerade des Elementes ist eine Tangente des durch die Ausgangselemente gehenden Parabelbogens.

Sind alle drei Teilverhältnisse einander gleich: $\alpha = \beta = \gamma$, so wird $p(x) = x$, $y(x) = \frac{x^2}{2}$; es entsteht also ein Parabelbogen, wie schon früher behauptet.

Die Eigenschaft der Parabel, daß für je drei Linienelemente $\alpha = \beta = \gamma$ ist, findet sich schon im Barycentrischen Calcul von Möbius (1827) und wird für uns weiterhin noch wichtig sein.

Kap. II. Affiner Distanz- und Längenbegriff.

§ 1. Affin-Distanz.

Wir stellen nun der Theorie der Ordnung von Linienelementen eine Maßtheorie zur Seite. Dazu kommen für uns, da wir auf dem affinen Standpunkt stehen, vor allem Flächeninhalte, insbesondere Dreiecksinhalte, in Betracht, die mit einer ein für alle mal aufgewiesenen Einheit gemessen werden. Der Dreiecksinhalt hängt nun von drei Punkten ab, was eine gewisse Komplikation bewirkt. Es erscheint wünschenswert einen dem Distanzbegriff der metrischen Geometrie analogen Maßbegriff einzuführen, der nur von zwei Elementen abhängt. Dies gelingt in der Tat, wenn wir zwei Linienelemente nehmen. Wir brauchen uns nur an das schon früher aufgetretene charakteristische Dreieck zu erinnern. Wir beschäftigen uns also wieder nur mit Linienelementen, die der Gesamtheit \mathcal{S} angehören und insbesondere mit konvex aufeinanderfolgenden. Sind also $I < II$ zwei solche, so hat das charakteristische Dreieck IA_2 , welches in der früheren Weise definiert ist, eine positive Maßzahl (IA_2) und wir kommen überein die affine Distanz der beiden

Elemente durch die Formel $\overline{I II} = 2 \cdot \sqrt[3]{(IA_2)}$ zu definieren. Die Distanz zweier konvex aufeinanderfolgender Elemente ist also immer positiv. Die besondere Art ihrer Abhängigkeit von dem Dreiecksinhalt mag zunächst willkürlich erscheinen, wird sich aber im Folgenden dadurch rechtfertigen, daß ein Längenbegriff darauf aufgebaut wird, der eine weit gehende Analogie zur metrischen Geometrie, genauer gesagt zu der indefiniten Metrik des Minkowskischen Raumzeit-Kontinuums zu Tage treten lassen wird. Uebrigens tritt schon die konvexe Ordnung der Linienelemente

in Analogie zur zeitartigen Ordnung, dem Nacheinander der Welt-
punkte. Wir leiten nun eine Ungleichung zwischen den Distanzen
dreier aufeinanderfolgender Elemente $I < II < III$ her, welche
ganz so auch bei den Eigenzeiten gilt. Sie lautet:

$$(D) \quad \overline{I II} + \overline{II III} \leq \overline{I III}.$$

Zum Beweise verwenden wir die bereits früher eingeführten
drei Teilverhältnisse, welche die Figur affin charakterisieren:

$$\alpha = \frac{1A}{1C} \quad \beta = \frac{CB}{C3} \quad \gamma = \frac{A2}{AB}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } (1A2) &= (A21) = (AB1), \\ (AB1) &= (1AB) = \alpha \cdot (1CA), \\ (1CB) &= (CB1) = \beta \cdot (C31) \end{aligned}$$

$$\text{und somit } (1A2) = \alpha\beta\gamma \cdot (1C3)$$

$$\text{und analog } (2B3) = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \cdot (1C3),$$

$$\text{also } \frac{\overline{I II}}{\overline{I III}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

$$\text{und } \frac{\overline{II III}}{\overline{I III}} = \frac{\sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}{\sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}} \leq \frac{1-\alpha + 1-\beta + 1-\gamma}{3},$$

$$\text{durch Addition: } \frac{\overline{I II} + \overline{II III}}{\overline{I III}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}{\sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}} \leq 1$$

oder (D). Hervorzuheben ist, daß auch das Gleichheitszeichen ein-
treten kann und zwar geschieht dies dann und nur dann, wenn
 $\alpha = \beta = \gamma$ ist. Die drei Linienelemente liegen dann auf einer Parabel.
Hält man I und III fest, so beschreibt II den I und III verbindenden
und dadurch bestimmten Parabelbogen.

Die Parabel tritt dadurch in Analogie zur geraden Linie.

Z u s a t z.

Einen schönen Beweis für die Ungleichung zwischen dem geometrischen
und dem arithmetischen Mittel von mehr als zwei Zahlen gibt Cauchy in
seinem Lehrbuch der algebraischen Analysis. Er geht in unserem Falle so:
Für 4 positive Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist

$$\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\gamma\delta}} \leq \frac{\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\gamma\delta}}{2} \leq \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\gamma + \delta}{2}}{2}$$

$$\text{Setzen wir nun } \delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} \quad \text{so folgt aus}$$

$$\alpha\beta\gamma\delta \leq \delta^4 \text{ sofort } \alpha\beta\gamma \leq \delta^3, \text{ also } \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

§ 2. Distanzformel.

Für das Folgende benötigen wir eine Formel für die Distanz
zweier aufeinanderfolgender Linienelemente $I < II$ unter Verwen-
dung cartesischer Koordinaten. Aus dem charakteristischen Dreieck

1 A 2 ergibt sich unter Benutzung der Bezeichnungen ξ_1, ξ_2 für die Vektoren 01 und 02 und p_1, p_2 für Vektoren von den Richtungen a, b :

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= \varrho_1 p_1 + \varrho_2 p_2 \\ \varrho_1 (p_1, p_2) &= (\xi_2 - \xi_1, p_2), \quad \varrho_2 (p_1, p_2) = (p_1, \xi_2 - \xi_1), \\ 2 \quad (1 A 2) \quad (\varrho_1 p_1, \varrho_2 p_2) &= \frac{(p_1, \xi_2 - \xi_1) \cdot (\xi_2 - \xi_1, p_2)}{(p_1, p_2)} \end{aligned}$$

und durch Einsetzen der Koordinaten:

$$2 \quad (1 A 2) = \frac{[(y_2 - y_1) - p_1(x_2 - x_1)] [p_2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)]}{p_2 - p_1}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} a \quad 2 \quad \frac{(y_2 - y_1) - p_1(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} &= 2 \cdot \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - p_1}{x_2 - x_1} \\ b &= 2 \quad \frac{p_2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2} = 2 \quad \frac{p_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1}, \end{aligned}$$

so wird

$$8 \quad (1 A 2) = \frac{2 a b}{a + b} (x_2 - x_1)^3$$

und $\overline{I II} = 2 \cdot \sqrt[3]{(1 A 2)} = \sqrt[3]{m} (x_2 - x_1),$

wenn man $m = \frac{2 a b}{a + b}$ setzt.

Wir bemerken hiezu, daß $x_1 < x_2$, $a > 0$, $b > 0$ die Bedingungen für die Ordnung $I < II$ sind. m ist als harmonisches Mittel der positiven Zahlen a, b gleichfalls positiv, daher auch $\overline{I II}$, wie es sein muß, wenn $I < II$.

§ 3. Affinlänge „konvexer Systeme“.³⁾

Nun sind wir in der Lage ein affines Analogon der Länge für stetige konvex geordnete Systeme von Linienelementen, für „konvexe Systeme“, wie wir weiterhin kürzer sagen wollen, zu erklären.

Wir wollen annehmen, daß das System ein erstes und ein letztes Element hat. Greift man dann ein endliches Teilsystem heraus, dem Anfangs- und Endelement angehören, so haben je zwei benachbarte von diesen Elementen eine positive Affindistanz und die Summe dieser positiven Maßzahlen sei σ . Die positiven Zahlen σ haben eine untere Grenze, welche positiv oder Null sein kann. Sie ist es, welche wir als Affinlänge A des Systems oder auch des

³⁾ Die Einführung dieses Begriffs läuft auf dasselbe hinaus, wie Blaschkes Erklärung der Affinlänge einer konvexen Kurve in der Mitteilung „Ueber affine Geometrie I“, Leipz. Ber., Bd. 68, S. 227.

konvexen Bogens bezeichnen. Diese Definition ist zwar kurz, scheint aber zunächst wenig naturgemäß. Erinnern wir uns jedoch an die Ungleichung (D), so bemerken wir, daß die σ umso kleiner werden, je dichter das Teilsystem wird. Genau gesprochen gilt der Satz:

Die Affinlänge A ist der Grenzwert jeder ausgezeichneten σ -folge. Sie kann also etwa durch sukzessive Zwischenschaltung als Grenzwert der zugehörigen σ erhalten werden, wenn das abzählbare Teilsystem überalldicht wird. Der Beweis ist dem des des entsprechenden Satzes in der metrischen Geometrie völlig analog.

Die Affinlänge hat auch für jedes Teilsystem, das aus allen Elementen zwischen zweien, $I < II$, besteht, einen Sinn und ist dadurch als eine Art Intervallfunktion $A(I, II) (> 0)$ erklärt. Sie ist additiv, das heißt: Für $I < II < III$ ist $A(I, III) = A(I, II) + A(II, III)$. Auf dieser Eigenschaft beruht es, daß die von einem Anfangselement aus gezählte Affinlänge der Ordnung des Endelementes entsprechend aufsteigend ist: Für $I < II < III$ ist $A(I, II) \leq A(I, III)$. Ob aber die Affinlänge auch beständig zunimmt, $A(I, II) < A(I, III)$, das ist eine andere Frage. Das hängt nämlich davon ab, ob nicht die Affinlänge eines Teilbogens 0 ist. Wir unterscheiden darum zwischen „affin rektifizierbaren“ und „nicht rektifizierbaren“ konvexen Systemen oder Bögen und zwar sagen wir das erstere, wenn kein Teilbogen eine verschwindende Affinlänge hat. Nur in diesem Falle kann die Affinlänge als ein affiner Parameter bezeichnet werden, der bei affinen Bögen gestattet, die zusammengehörigen Punkte auf Grund abstrakter Beschreibung zu finden, nachdem ein Paar irgendwie gegeben ist. Nur ein solcher Bogen läßt sich eineindeutig und affinlängentreu auf einen Parabelbogen abbilden. Man sollte ihn eigentlich „parabolifizierbar“ nennen. Daß es tatsächlich sowohl rektifizierbare als auch nicht rektifizierbare konvexe Bögen gibt, können wir schon an den in I § 3 (S. 169) konstruierten Beispielen ersehen, die durch sukzessive Zwischenschaltung unter affinähnlicher Wiederholung entstehen. Man erkennt nämlich sofort, daß sich bei jedem Schritt

σ mit demselben Faktor $\nu = \sqrt[3]{a\beta\gamma} + \sqrt[3]{(1-a)(1-\beta)(1-\gamma)}$ multipliziert. Ist $a = \beta = \gamma$, $\nu = 1$, hat man es also mit einem Parabelbogen zu tun, so ist die Affinlänge gleich der affinen Distanz A von Anfangs- und Endelement, was ja aus der in diesem Falle eintretenden Additivität der Distanz sofort klar ist. Der Parabelbogen ist also rektifizierbar. Sind aber nicht alle drei Teilverhältnisse einander gleich, so ist $\nu < 1$ und $\sigma_n = \nu^n A$, daher die Affinlänge Null.

§ 4. Die Affinlänge stetig differenzierbarer konvexer Systeme.

Unter Bezugnahme auf ein in der früheren Weise angelegtes Koordiuatensystem ist die von einem Anfangselement an gezählte

Affinlänge $A(x_1, x_2)$ eine aufsteigende Funktion von x . Für die affin-rektifizierbaren stetigen konvexen Systeme ist dann charakteristisch, daß diese Funktion beständig zunimmt. Bevor wir auf das nähere Studium dieser Funktion vom Standpunkt der Theorie der reellen Funktionen aus eingehen, halten wir es für nützlich, einen wichtigen Spezialfall zu betrachten. Wir wollen nämlich annehmen, daß $p(x)$ stetig differenzierbar ist. Wir sprechen dann von einem stetig differenzierbaren konvexen System. $f(x)$ ist dann zweimalstetig differenzierbar. ($p(x) = f''(x)$). Wir haben es mit anderen Worten mit einer stetig-gekrümmten konvexen Kurve zu tun.

Sehen wir uns nun die in § 2 abgeleitete Distanzformel an, so bemerken wir, daß a und b nach der Taylor'schen Formel Werte sind, welche $f'''(x) = p'(x)$ im Intervall (x_1, x_2) annimmt und daher auch ihr harmonisches Mittel m ein solcher Wert ist. Daher wird

$$\overline{I\ II} = \sqrt[3]{y''(\xi)} \quad (x_2 - x_1) = \sqrt[3]{p'(\xi)} \quad (x_2 - x_1),$$

wobei $x_1 < \xi < x_2$,

daher weiter $\sigma = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[3]{y''} \, dx$ und der Grenzwert der ausgezeichneten σ -folgen $A(x) = \int_{x_1}^x \sqrt[3]{y''} \, dx$.

$A(x)$ ist also in diesem Falle eine stetig differenzierbare Funktion

$$\text{von } x \text{ und } A' = \sqrt[3]{y''} = \sqrt[3]{y'^4}$$

Da $f'''(x) \geq 0$ ist, könnte nur dann $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt[3]{y''} \, dx = 0$ sein;

wenn im Intervall (x_1, x_2) durchwegs $f'''(x) = 0$ wäre. Dies ist aber mit der Bedingung der Konvexität im strengen Sinne unvereinbar. Ein stetig-differenzierbares konvexes System (ein stetig-gekrümmter konvexer Bogen) ist also stets affin-rektifizierbar. Die Punktmenge, in welcher $f'''(x)$ verschwindet, ist im allgemeinen abgeschlossen und punkthaft, bemerkenswert ist aber der Spezialfall, daß sie leer, also durchwegs $f'''(x) > 0$ ist. Dann konvergiert nämlich das Verhältnis von Affinlänge und Affindistanz nach 1,

$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{A(x_1, x_2)}{x_2 - x_1} = 1$ (gleichmäßig). Dadurch ist die Affinlänge in diesem Falle offenbar charakterisiert.

⁴⁾ $dA = \sqrt[3]{y''} \, dx$ ist als niedrigstes invariantes Differenzial der affinen Gruppe längst bekannt. Es wurde von Pick aufgestellt und als Analogon des Bogenelementes aufgefaßt. Vgl. Diss. E. Nohel, Wiener Sitzungsberichte 123, 1914.

Daß die Integralformel für die Affinlänge einen über den Fall der stetig-differenzierbaren Systeme hinausgehenden Geltungsbereich hat, können wir zunächst für den Fall zeigen, daß $p(x)$ durchweg differenzierbar und die Ableitung $p'(x)$ im Riemann'schen Sinne integrierbar ist. Später werden wir allerdings unabhängig zeigen, daß die Integralformel ganz allgemein gilt, so daß diese Zwischenbetrachtungen eigentlich überflüssig sind. Es genügt für den angegebenen Zweck festzustellen, daß allemal, wenn $q \leq p'(x) \leq Q$ auch $q \leq m(x_1, x_2) \leq Q$ ist. Dies werde zunächst für $a(x_1, x_2)$ gezeigt. Zunächst sieht man: Wenn $p(x)$ aufsteigend ist, ist

$$a(x_1, x_2) = \frac{2}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \{ p(x) - p(x_1) \} dx \text{ sicher } \geq 0. \text{ Wendet}$$

man dies nun auf die Funktionen $p(x) - q \cdot x$ bzw. $Q \cdot x - p(x)$ an und berücksichtigt die Linearitätseigenschaft $a\{a_1 p_1 + a_2 p_2\} = a_1 a\{p_1\} + a_2 a\{p_2\}$, so folgt $q \leq a(x_1, x_2) \leq Q$ und analog $q \leq b(x_1, x_2) \leq Q$ und somit auch $q \leq m(x_1, x_2) \leq Q$, somit

$\sqrt[3]{q} \Delta x \leq \sqrt[3]{m} \Delta x \leq \sqrt[3]{Q} \Delta x$ und daraus, indem man auf die Definition des Riemann'schen Integrals zurückgeht:

$$\Delta(\underline{x}, \bar{x}) = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \sqrt[3]{y''} dx$$

§ 5. Allgemeine Untersuchung über die Affinlänge konvexer Systeme; Totalstetigkeit der Funktion $\Delta(x)$.

Nach diesen orientierenden Voruntersuchungen betrachten wir den allgemeinen Fall eines beliebigen stetigen konvexen Systems. Dann ist $p(x)$ irgendeine stets zunehmende Funktion von x im Intervall $\mathfrak{S} < \underline{x}, \bar{x} >$. Nach einem allgemeinen Satz von Lebesgue existiert in einem massgleichen Kern des Intervalls oder, wie man auch sagt, fast überall die Ableitung $p'(x)$ und diese ist summierbar, ohne daß durch die Angabe von $p'(x)$ die Zuwächse von $p(x)$ bestimmt wären. Wir werden zeigen, daß gleichwohl die

Affinlänge bestimmt und zwar gleich dem Integral $\int \sqrt[3]{p'} dx$ ist.

Wir zeigen zunächst, daß $\Delta(x)$ eine totalstetige Funktion von x ist. Nur eine solche Funktion kann ja als Integral dargestellt werden. Dazu müssen wir zeigen: Zu jedem System in \mathfrak{S} enthaltener, nicht übereinandergreifender Intervalle δ von hinlänglicher Kleinheit der Gesamtlänge gehört eine Affinlängensumme $\Sigma \Delta$ von vorgeschriebener Kleinheit. Wir werden sogar zeigen, daß die Summe

der Affindistanzen $\Sigma \Delta < \varepsilon$ wird, sobald nur $\Sigma \Delta x$ klein genug ist. Wir lassen sogar noch eine weitere Vergrößerung eintreten:

$$\Delta \leq \Delta \quad \sqrt[3]{m} \cdot \Delta x \leq \sqrt[3]{q} \Delta x, \quad \text{also } \frac{\Sigma \Delta}{\delta} \leq \frac{\Sigma \Delta}{\delta} \leq \frac{\Sigma \sqrt[3]{q} \Delta x}{\delta};$$

wobei $q = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} = m$ ist.

Um den Beweis zu führen, verteilen wir die Intervalle δ auf zwei Klassen: diejenigen, δ_1 für welche der Differenzenquotient $q \leq A$ und diejenigen, δ_2 , für welche $q > A$ ist, indem wir uns noch vorbehalten A zu wählen. Für die ersten ist $\Delta < q^{-\frac{1}{3}} \cdot \Delta x < A^{-\frac{1}{3}} \Delta x$ und daher $\frac{\Sigma \Delta}{\delta_1} \leq A^{-\frac{1}{3}} \frac{\Sigma \Delta x}{\delta}$

Für die zweiten hingegen ist $q > A$, daher $q^{-\frac{1}{3}} < A^{-\frac{2}{3}} q$ und $\Delta \leq q^{-\frac{1}{3}} \cdot \Delta x < A^{-\frac{2}{3}} \cdot q \Delta x = A^{-\frac{2}{3}} \Delta p$ und $\frac{\Sigma \Delta}{\delta_2} \leq A^{-\frac{2}{3}} \frac{\Sigma (\overline{p} - \underline{p})}{\delta}$.

Nehmen wir nun A so groß an, daß $A^{-\frac{2}{3}} \frac{\delta_2}{(\overline{p} - \underline{p})} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ wird, also

etwa $A = \left[\frac{2}{\varepsilon} (\overline{p} - \underline{p}) \right]^{\frac{3}{2}}$ und hierauf η so klein, daß für $\frac{\Sigma \Delta x}{\delta} < \eta$

$A^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{\Sigma \Delta x}{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt, etwa $\eta = \frac{\varepsilon}{2} \cdot A^{-\frac{1}{3}} = \left[\frac{\varepsilon^3}{8(\overline{p} - \underline{p})} \right]^{\frac{1}{2}}$ so

haben wir $\frac{\Sigma \Delta}{\delta_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{\Sigma \Delta}{\delta_2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, zusammen: $\frac{\Sigma \Delta}{\delta} < \varepsilon$ für $\frac{\Sigma \Delta x}{\delta} < \eta$

und die Behauptung ist bewiesen. Wir können jetzt schließen, daß eine summierbare Funktion $\varphi(x)$ existiert, sodaß $\Delta = \int \varphi(x) dx$ wird. Diese Funktion gilt es nun, in seinem maßgleichen Kern des Intervalls zu bestimmen. Wir werden zeigen, daß fast überall $\varphi(x) = \sqrt[3]{p'}$ ist. Der erste Teil des Beweises besteht darin, daß

wir zeigen, daß überall dort, wo p' existiert, $\lim \frac{\Delta}{\Delta x} = \sqrt[3]{p'}$ ist.

§ 6. Hilfssatz.

Die Funktion $g(x)$ sei im Intervall $(\underline{x}, \overline{x})$ definiert und summierbar, ferner sei sie an der Stelle x_0 des Intervalls differenzierbar, das heißt derart durch eine lineare Funktion approximierbar, daß eine Formel gilt:

$$(*) \quad g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$$

mit $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Wir behaupten dann, daß das arithmetische Mittel der Funktion $g(x)$ in einem Teilintervall (x_1, x_2) , welches nahe bei x_0 liegt, ungefähr gleich dem Funktionswert in der Mitte des Intervalls ist, das heißt präzise

$$(**) \quad \lim_{x_2 - x_1} \frac{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} = 0,$$

wenn x_1 und x_2 so nach x_0 konvergieren, daß

$$(* *) \quad \left| \frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right| \leq M \cdot |x_2 - x_1| \quad \text{bleibt.}$$

x_0 liege also entweder im Intervall (x_1, x_2) oder doch nicht zu weit außerhalb. Durch Einsetzen von (*) wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx &= g(x_0) + g'(x_0) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0\right) \\ &+ \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x) (x - x_0) dx \end{aligned}$$

und

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0\right) + \varepsilon\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0\right),$$

somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x) (x - x_0) dx \\ &- \varepsilon\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0\right), \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right| < (\varepsilon + \varepsilon M) |x_2 - x_1|$$

wenn ε die obere Grenze der Funktion $\varepsilon(x)$ im Intervall (x_1, x_2) bedeutet, und da diese nach Null geht, folgt die Behauptung.

Zusatzbemerkung.

Ist $g'(x_0) \equiv 0$ und nehmen wir $g(x)$ stetig an, so daß wir

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx = g(\xi) \quad \text{setzen können, so folgt } \lim_{x_2 - x_1} \frac{\xi - \frac{x_1 + x_2}{2}}{x_2 - x_1} = 0$$

Es ist nämlich nach (*)

$$\frac{g(\xi) - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} = g'(x_0) \cdot \frac{\xi - \frac{x_1 + x_2}{2}}{x_2 - x_1} + \varepsilon(\xi) \cdot \frac{\xi - x_0}{x_2 - x_1} - \varepsilon\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0}{x_2 - x_1},$$

also für $x_1 \rightarrow x_0, x_2 \rightarrow x_0$ $0 = g'(x_0) \lim \frac{\xi - \frac{x_1 + x_2}{2}}{x_2 - x_1}$.

§ 7. Anwendung des Hilfssatzes.

Kehren wir nun zu unserem Problem zurück, so ist $p(x)$ monoton, also sicher summierbar und nach einem grundlegenden Ergebnis von Lebesgue in einem maßgleichen Kern des Intervalls differenzierbar. Ist x_0 eine Stelle dieses Kernes und sind x_1, x_2 zwei Werte, die wir unter Einhaltung der Bedingung (***) nach x_0 rücken lassen, so haben wir (vgl. § 2)

$$a(x_1, x_2) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx - p(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$a(x_1, x_2) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx - p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} = 2 \cdot \frac{p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= p'(x_0) + \left\{ \varepsilon\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \varepsilon(x_1) \right\} \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0}{x_2 - x_1}$$

unter Verwendung von (*) für $p(x)$. Da auf $p(x)$ unser Hilfssatz anwendbar ist, folgt

$\lim a(x_1, x_2) = p'(x_0)$ und da $b(x_1, x_2) = a(x_2, x_1)$ auch

$\lim b(x_1, x_2) = p'(x_0)$ m liegt als harmonisches Mittel

zwischen a und b , also ist auch $\lim m(x_1, x_2) = p'(x_0)$ und schließlich für die Distanz Δ der zu x_1 und x_2 gehörigen Linienelemente

$$\lim \frac{\Delta}{x_2 - x_1} = \sqrt[3]{p'(x_0)} \quad \text{für } x_1 \rightarrow x_0, x_2 \rightarrow x_0$$

unter Berücksichtigung von (***) .

§ 8. Allgemeiner Beweis der Integralformel für die Affinlänge.

Wir kommen nun zum allgemeinen Beweise des Satzes, daß die Affinlänge eines stetigen konvexen Systemes $\Delta(\underline{x}, x)$ gleich dem

Integral $\iota(\underline{x}, \bar{x}) = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \sqrt[3]{p'(x)} dx$ ist. Dazu nützen wir die Total-

stetigkeit der beiden Funktionen $\Delta(\underline{x}, \bar{x})$ und $\iota(\underline{x}, \bar{x})$ sowie die Definition der Affinlänge als Grenzwert ausgezeichnete Folgen von Distanzsummen in Form des folgenden Satzes aus:

Zu jeder positiven Zahl ϵ lassen sich zwei positive Zahlen δ und η , letztere < 1 , derart bestimmen, daß für jedes in $\langle \underline{x}, \bar{x} \rangle$ enthaltene System von nicht übereinandergreifenden Teilintervallen σ , welche so klein sind, daß $\Delta x < \delta (\bar{x} - \underline{x})$ und zusammen so groß, daß $\Sigma \Delta x < \eta (\bar{x} - \underline{x})$ ist, stets sowohl $[\Delta(\underline{x}, \bar{x}) - \Sigma_{\sigma} \Delta] < \epsilon$

als auch $[(\underline{x}, \bar{x}) - \Sigma_{\sigma} \Delta] < \epsilon$ ausfällt.

Ferner machen wir vom Vitalischen Ueberdeckungssatze Gebrauch und zwar in jener Form, wie er bei Caratheodory loc. cit. S 299 § 288, Satz 1 ausgesprochen ist.

Sei \mathfrak{K}_0 jener maßgleiche Kern des Intervalls $\langle \underline{x}, \bar{x} \rangle$, in welchem die Ableitungen p' und ι' beide zugleich existieren. Zu jedem Punkt x_0 dieser Menge denken wir uns eine Folge der Bedingung $(***)$ gemäß auf ihn zusammenschumpfender Intervalle.

Es ist dann sowohl $\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^x \sqrt[3]{p'} dx = \sqrt[3]{p'(x_0)}$

als auch $\lim \sqrt[3]{m(x, x_2)} = \sqrt[3]{p'(x_0)}$, daher

$\lim \left\{ \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[3]{p'} dx - \sqrt[3]{m(x_1, x_2)} \right\} = 0$. Wir behalten nur jene Inter-

valle bei, für welche bereits $\left| \int \sqrt[3]{p} dx - \Delta \right| < \epsilon \cdot (x_2 - x_1)$

und außerdem $0 < x_2 - x_1 < \delta$ ist (vergleiche oben). Nach dem angeführten Vitalischen Satze läßt sich dann eine endliche Anzahl von Punkten x_0 und dazu gehörigen Intervallen, ohne daß sie übereinandergreifen, derart auswählen, daß $\Sigma \Delta x < \eta (\bar{x} - \underline{x})$ aus-

fällt. Es ist dann wegen $\left| \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^x \sqrt[3]{p'} dx - \Delta \right| < \epsilon$

$$\text{auch } \left| \frac{\sum_{\sigma} \int_{\sigma} \sqrt[3]{p'} dx - \sum_{\sigma} \Delta}{\sum_{\sigma} (x_2 - x_1)} \right| < \varepsilon.$$

Ferner der vorausgeschickten Betrachtung zufolge

$$\left| \frac{1}{x_2 - x_1} \int \sqrt[3]{p'} dx - \sum \int \sqrt[3]{p'} dx \right| < \varepsilon$$

$$\text{und andererseits } [\Delta(\underline{x}, \bar{x}) - \sum_{\sigma} \Delta] < \varepsilon$$

$$\text{und somit } \left| \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\Delta - \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \sqrt[3]{p'} dx \right] \right| < 3 \varepsilon$$

und da dies für jedes ε gilt, ist die Behauptung

$$\Delta(\underline{x}, \bar{x}) = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \sqrt[3]{p'} dx$$

bewiesen.

§ 9. Das funktionentheoretische Ergebnis.

Lösen wir den funktionentheoretischen Teil aus dem geometrischen Zusammenhang heraus, so haben wir folgenden merkwürdigen Satz bewiesen

Ist von einer im Intervall $\langle \underline{x}, \bar{x} \rangle$ nirgendsnegativen summierbaren Funktion $\psi(x)$ eine aufsteigende Stammfunktion $p(x)$ be-

kannt, so läßt sich das Lebesgue Integral $\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \sqrt[3]{\psi(x)} dx$ auf

folgende Art als Grenzwert Riemann'scher Summen berechnen

$$\text{Es ist } \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \sqrt[3]{\psi(x)} dx = \lim_{\mathcal{Z}} \sum_{\mathcal{Z}} \sqrt[3]{m_{\mathcal{Z}}} (x_{\mathcal{Z}+1} - x_{\mathcal{Z}}) \text{ für jede aus-}$$

zeichnete Zerlegungsfolge: $\underline{x} = x_0 < x_1 < \dots < x_p = \bar{x}$
 $(\mathcal{Z} = 0, 1, \dots, p-1)$. Dabei ist $m_{\mathcal{Z}} = \frac{2 a_{\mathcal{Z}} b_{\mathcal{Z}}}{a_{\mathcal{Z}} + b_{\mathcal{Z}}}$ und

$$\left. \begin{aligned}
 a_{\lambda} &= \frac{2}{(x_{\lambda+1} - x_{\lambda})^2} \int_{x_{\lambda}}^{x_{\lambda+1}} \{ p(x) - p(x_{\lambda}) \} dx, \\
 b_{\lambda} &= \frac{2}{(x_{\lambda+1} - x_{\lambda})^2} \int_x^{x_{\lambda+1}} \{ p(x_{\lambda+1}) - p(x) \} dx
 \end{aligned} \right\} \text{Riemann'sche Integrale.}$$

Daß man jedes Lebesguesche Integral als Grenzwert Riemann'scher Summen mit vorgeschriebener ausgezeichnete Zerlegungsfolge darstellen kann, indem man passende Werte zwischen der unteren und oberen Grenze der Funktion auswählt, ist bekannt. (Hahn, Wiener Sitzungs-Berichte 123). Im allgemeinen weiß man aber nichts darüber wie man diese Werte findet.

§ 10. Affine Rektifizierbarkeit.

Jetzt können wir über die Unterscheidung zwischen affin rektifizierbaren und nicht rektifizierbaren Systemen genau Bescheid geben. Auf die Frage, wann ein konvexer Bogen die Affinlänge Null hat, haben wir nach unserem Ergebnis zunächst die Antwort

Es muß $\int \sqrt[3]{p'} dx = 0$ also in einem maßgleichen Kern des zugehörigen x Intervalls $p' = 0$ sein. Die zunehmende Funktion $p(x)$ muß also nach der Benennungsweise von Caratheodory von konstanter λ -Variation sein.

Diese Funktionen besitzen folgende merkwürdige charakteristische Eigenschaft: Es gibt abzählbare Systeme σ von nicht übereinandergreifenden Teilintervallen in $\langle \underline{x}, \overline{x} \rangle$ von beliebig kleiner Gesamtlänge, Umschließungen der Menge, wo $p' \equiv 0$ ist, in welchem das gesamte Wachstum der Funktion $p(x)$ stattfindet: $p(\overline{x}) - p(\underline{x}) = \sum_{\sigma} \Delta p$. Faßt man den Zuwachs der Funktion in einem Intervall als Massenbelegung auf, so entsprechen den Funktionen von konstanter λ -Variation Massenbelegungen, die in einer Menge vom Maße Null ihren Sitz haben.

Die Existenz konvexer Bogen von der Affinlänge 0 haben wir bereits auf S. 175 an Beispielen bewiesen. Die zugehörigen $p(x)$ geben also Beispiele von Funktionen von konstanter λ -Variation. Insbesondere ist das nun auch für die durch sukzessive Teilung nach demselben Teilverhältnis entstehenden monotonen Funktionen von Faber bewiesen.

Ein konvexer Bogen ist nun affin rektifizierbar, wenn in keinem Teilintervall das Richtungsbild $p(x)$ von konstanter λ -Variation ist.

Dann wird $A(x) = \int_x^{x_0} \sqrt[3]{p'} dx$ eine beständig zunehmende Funktion von x .

§ 11. Die Affinlänge als Funktion allgemeinerer Parameter.

Man kann auch noch die Beschränkung der Richtungen auf einen Winkelraum aufheben, also allgemeinere konvexe Bogen betrachten, die durch „konvexe Fortsetzung“ entstehen. Zwei stetige konvexe Systeme sollen als unmittelbare Fortsetzung voneinander gelten, wenn das Endelement des ersten zugleich Anfangselement des zweiten ist. Die durch wiederholte unmittelbare Fortsetzung entstehenden Systeme lassen die Zusammensetzungsstellen nicht erkennen. Ein solches System kann sich auch schließen, dann sind auch Anfangs- und Endelemente nicht mehr herauszufinden. Dazu sind wenigstens drei einfache konvexe Systeme erforderlich. Die Affinlänge, als Summe der Affinlängen der einzelnen einfachen Systeme ist von der Wahl der Zerlegung unabhängig und durch die Integralformel

$$A = \int \sqrt[3]{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} dt$$

darstellbar. Dies gilt unter Bedingungen, die sich so formulieren lassen: $x(t), y(t)$ sollen von beschränkter Drehung⁵⁾ und $|Ax| + |Ay| \geq \frac{|At|}{M}$ ($M > 0$) sein. $x'(t), y'(t)$ sind dann von beschränkter

Variation, $x''(t), y''(t)$ ihre fast überall existierenden Ableitungen

§ 12. Affinlänge als Mengenfunktion und Erklärung für beliebige meßbare konvexe Systeme.

Unserer bisherigen Untersuchung liegt die Auffassung der Affinlänge eines stetigen konvexen Systems als Intervallfunktion zu Grunde. Es wurde ihre Totalstetigkeit festgestellt und die zugehörige Dichte bestimmt. Dies ermöglicht den Uebergang zu der zugehörigen Mengenfunktion. Liegt ein stetiges geordnetes Elementsystem vor, welches das Intervall $\langle \underline{x}, \bar{x} \rangle$ zur Abszissenprojektion hat, so entspricht jeder meßbaren Teilmenge \mathcal{X} desselben ein Elementsystem, welches wir als meßbar bezeichnen; die Eigenschaft ist vom Koordinatensystem unabhängig. Als Affinlänge desselben werden

wir das über \mathcal{X} erstreckte Integral $\int \sqrt[3]{p' dx}$ anzusehen haben.

⁵⁾ Vgl. A. Winternitz, Leipz. Ber. 69, S. 350 ff, (1917).

Diese Mengenfunktion ist totalstetig. (Caratheodory Kap. IX.) Was den Begriff der Rektifizierbarkeit anlangt, so liegt eine Verschärfung nahe. Wir bezeichnen ein stetiges konvexes System dann und nur dann als im engeren Sinne affin rektifizierbar, wenn die Affinlänge eines Teilsystems nur dann verschwindet, wenn die Projektion auf die Abszissenachse das Maß Null hat. Die Unabhängigkeit dieser Bedingung vom Koordinatensystem ist leicht zu erkennen. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß $p' > 0$ ist.

Bei im strengen Sinne rektifizierbaren konvexen Bogen besteht zwischen Affinlänge und Affindistanz in einem maßgleichen Kern der Abszissenprojektion die charakteristische Beziehung:

$$\lim \frac{\Delta}{\Delta} = 1.$$

Erinnern wir uns jetzt an die Erweiterung eines beliebigen beschränkten konvexen Systems zu einem uneigentlich-konvexen stetigen, wie wir es dem charakteristischen Streckenzug gegenübergestellt haben, so sehen wir, daß wir für jedes solche System, wenn es nur meßbar ist, die Affinlänge mittels des Integrals definieren können. Als affin rektifizierbar im strengen Sinne betrachten wir ein solches System dann, wenn die Affinlänge eines Teilsystems desselben nur dann verschwindet, wenn die Abszissenprojektion vom Maße Null ist.

Kap. III. Die einfachsten Analoga.

§ 1. Die Eigenzeit als Analogon der Affinlänge.

Wir wollen noch einmal die bereits in Kap. II, § 1 bemerkte weltgeometrische Analogie betrachten. Auch die Eigenzeit ist als untere Grenze von Distanzsummen zu definieren, auch hier läuft die Frage der Rektifizierbarkeit darauf hinaus, ob ein Weltlinienbogen die Eigenzeit Null haben kann. Obwohl je zwei Punkte im strengen Sinne zeitartig aufeinanderfolgen:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < c^2 (\Delta t)^2.$$

Wir erläutern unsere Ergebnisse durch Heranziehung der einfachsten Analoga.

Auch hier gilt die Integralformel für die Länge allgemein, wenn man die Zeit t , die jetzt der Abszisse entspricht, als Parameter verwendet. In der Tat erweist sich die Eigenzeit sofort als totalstetige Funktion von t , denn es ist,

$$\frac{\Delta}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{c^2 (\Delta t)^2}} < 1.$$

also $\Sigma \Delta < \Sigma \Delta t$. Ferner existieren in einem maßgleichen Kern des Intervalls $< \underline{t}, \bar{t} >$ die Ableitungen $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Die

Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sind nämlich von beschränkten Differenzenquotienten: $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|$, $\left| \frac{\Delta y}{\Delta t} \right|$, $\left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| < c$.

Nun kann man ganz analog, wie wir es früher bei der Affinlänge getan haben, beweisen, daß $s = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}} dt$ ist. Aber

es ist hervorzuheben, daß hier die unmittelbare funktionentheoretische Konsequenz der gestaltlichen Voraussetzung verhältnismäßig stärker und die weitere Konsequenz des Bestehens der Integralformel darum weniger verwunderlich ist. Während nämlich $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ von beschränkten Differenzenquotienten und infolgedessen totalstetig sind, ist die entsprechende Funktion $p(x)$ bloß monoton, also von beschränkter Variation, aber nicht notwendig totalstetig. Nun können wir noch die Frage beantworten, wann die Eigenzeit eines Weltlinienbogens verschwindet. Dazu muß

$$\int \sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}} dt = 0$$

sein, also in einem maßgleichen Kern von $\langle \underline{t}, \bar{t} \rangle$ $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2$. Dann ist die Länge des vom Punkte \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} in der Zeit \bar{t} durchlaufenen Weges $= \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = c(\bar{t} - \underline{t})$. Wir haben

es also einfach mit einem rektifizierbaren Weg zu tun, der mit Lichtgeschwindigkeit durchlaufen wird. (Lichtlinie). Gleichwohl folgen je zwei Weltpunkte zeitartig aufeinander, denn die Sehne ist kürzer als der Bogen: $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < c^2 (\Delta t)^2$. Die nicht rektifizierbaren Weltlinien sind also nicht sehr verborgen.

§ 2. Vergleich mit der Euklidischen Metrik.

Zum Schlusse werde noch der Längenbegriff der Euklidischen Metrik der Affinlänge beziehungsweise der Eigenzeit gegenübergestellt.

Hier ist zunächst einmal die Anwendung des Distanzbegriffs an keinerlei gestaltliche Bedingung geknüpft. Ferner ist das Verzeichen der Distanzgleichung für drei Punkte umgekehrt und es handelt sich darum bei der Rektifikation um eine obere Grenze von Distanzsummen. Ist aber ein stetiger Bogen rektifizierbar, d. h., hier endlich, so hat dies die funktionentheoretische Konsequenz, daß $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ Funktionen von beschränkter Variation werden. Dies ermöglicht noch nicht die Darstellung der Länge l durch eine Integralformel, sie braucht nicht totalstetig von t abzuhängen, es ist noch eine, im allgemeinen nicht meßbare, Transformation von t frei. Es ist nur

$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} < l$, Es gibt jedoch Parameter, von welchen x, y, z in solcher Weise abhängen, daß die Differenzenquotienten beschränkt sind: $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|, \left| \frac{\Delta y}{\Delta t} \right|, \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| \leq K$ zum Beispiel selbst; das ist eine mit der Rektifizierbarkeit äquivalente Bedingung. Dann ist die Länge eine totalstetige Funktion des Parameters t und es gilt die Integralformel $\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$ wie schon Lebesgue gezeigt hat. (Leçons sur l'integration p 125) und wie man, vielleicht etwas einfacher, nach unserem Verfahren erkennen kann. Ein geeigneter Parameter ist etwa die Summe der Totalvariationen der x, y, z im Intervall $< \underline{t}, t >$.

Unsere Betrachtungsweise könnte wohl auch auf Geometrien anderer Gruppen (ungrader Gliederzahl) ausgedehnt werden. Wir haben hier aber bloß die einfachsten Analoge herangezogen, um das Frühere zu beleuchten.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Kap. I. „Konvex geordnete“ Systeme von Linienelementen	164
§ 1. Endliche	164
§ 2. Unendliche } Systeme von Linienelementen	165
§ 3. Erzeugung überalldichter geordneter Systeme durch sukzessive Zwischenschaltung	167
Kap. II. Affiner Distanz- und Längenbegriff	172
§ 1. Affindistanz	172
§ 2. Distanzformel	173
§ 3. Affinlänge „konvexer Systeme“	174
§ 4. Die Affinlänge stetig-differenzierbarer konvexer Systeme	175
§ 5. Allgemeine Untersuchung über die Affinlänge konvexer Systeme; Totalstetigkeit der Funktion $A(x)$	177
§ 6. Hilfssatz über das arithmetische Mittel einer Funktion, welche an einer Stelle eine Ableitung besitzt	178
§ 7. Anwendung des Hilfssatzes	180
§ 8. Allgemeiner Beweis der Integralformel für die Affinlänge	180
§ 9. Das funktionentheoretische Ergebnis	182
§ 10. Affine Rektifizierbarkeit	83
§ 11. Die Affinlänge als Funktion allgemeinerer Parameter	184
§ 12. Affinlänge als Mengenfunktion und Erklärung für beliebige meßbare konvexe Systeme	184
Kap. III. Die einfachsten Analoga	185
§ 1. Die Eigenzeit als Analogon der Affinlänge	185
§ 2. Vergleich mit der Euklidischen Metrik	186

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften](#)

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: [77](#)

Autor(en)/Author(s): Winternitz Artur

Artikel/Article: [Ueber Distanz- und Längenbegriff der ebenen Affingeometrie 163-187](#)