

# Das Analogon zum Cauchy'schen Hauptsatz bei einer speziellen $2n - 1$ dimensionalen Gruppe des $n -$ dimensionalen Raumes.

Von Walter Fröhlich in Prag.

Es handelt sich um die sehr spezielle inhaltstreu-affine Gruppe

$$(1) \quad x_i^* = a_i x_i + b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit der Bedingung

$$(2) \quad \prod a_i = 1,$$

in welcher  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rechtwinklige Parallelkoordinaten des ursprünglichen,  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  des transformierten Punktes bedeuten und  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  Parameter sind.

## I.

Wir greifen nun aus der Gruppe (1) eine einparametrische Schar heraus, indem wir uns  $a_i$  und  $b_i$  als im betrachteten Gebiet reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters  $t$  denken, derart, daß die Gleichung (2) nunmehr identisch besteht und daß für einen Anfangswert  $t_0$  alle

$$a_i(t_0) = 1 \quad b_i(t_0) = 0$$

werden. Eine solche Schar soll „Pseudobewegung“ heißen. Um die Polkurve <sup>1)</sup> zu ermitteln, muß man die Ableitungen der rechten Seiten von (1) nach  $t$  Null setzen, also

$$(3) \quad a_i' x_i + b_i' = 0.$$

Bezeichnet man die Polkurve mit  $y_i$ , so ist

$$(4) \quad y_i = - \frac{b_i'}{a_i'}$$

und die Polbahn <sup>1)</sup> wird erhalten, indem man auf jeden Punkt von  $y_i(t)$  die vermöge  $t$  zugehörige Transformation von (1) ausübt, d. h.

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnungen finden sich schon in den für die ganze Kinematik grundlegenden Arbeiten von Burmester: „Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung gesetzmäßig veränderlicher Systeme“ in der „Zeitschrift für Math. u. Ph.“ im 19., 20., 23., 47. Jahrgang etc. Ausführliche Literaturangaben habe ich in meiner Dissertation „Zur Bewegung flächentreu-affin veränderlicher, ebener Systeme“ (Prag 1926) gemacht. Im Zusammenhang mit diesem Thema steht auch meine im „Jahresbericht des deutschen Staatsrealgymnasiums Prag III“ (1930—31) erschienene Arbeit: „Über eine Verallgemeinerung des Cauchy'schen Hauptsatzes der Kinematik auf projizierte Transformationen in der Ebene“

$$(5) \quad z_i = a_i y_i + b_i \equiv b_i - \frac{b_i'}{a_i'} a_i$$

oder kürzer

$$(6) \quad z_i = y_i^*.$$

In jeder Phase fallen also die vermöge  $t$  zusammengehörigen Punkte von Polbahn und Polkurve zusammen. Die Kurven berühren einander überdies, da durch Differentiation von (5) vermöge (4)

$$(7) \quad z_i' = a_i y_i' \quad \text{oder kürzer} \quad (8) \quad z_i' = y_i' \quad \text{folgt.}$$

Die Multiplikation der  $n$  Gleichungen (7) führt wegen (2) auf

$$(9) \quad \Pi z_i' = \Pi y_i'$$

Nun ist aber augenscheinlich bei jeder reellen, stetig differenzierbaren Kurve

$$x_i = x_i(t)$$

der Ausdruck

$$\Pi \frac{d x_i}{d t}$$

eine Differentialinvariante der Gruppe (1). Man kann sie zur Bildung der stets reellen Integralinvariante

$$(10) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt[n]{\pm \Pi \frac{d x_i}{d t}} d t$$

verwenden, wenn man die folgenden drei Festsetzungen macht:

- I. Für das Intervall  $t_0$  bis  $t$  sollen alle  $\frac{d x_i}{d t}$  überall von Null verschieden sein.
- II. Für ungerade  $n$  ist immer das Pluszeichen zu nehmen.
- III. Für gerade  $n$  ist unter der Wurzel der Betrag des Produktes zu nehmen.

Zu II. ist zu bemerken, daß man nötigenfalls durch Umorientierung der Kurve immer auf ein positives

$$\Pi \frac{d x_i}{d t}$$

kommen kann. Dagegen macht III. die Unterscheidung zweier „Arten“ von Kurven notwendig, je nachdem, ob

$$\Pi \frac{d x_i}{d t}$$

dessen Vorzeichen jetzt von der Wahl des Parameters unabhängig ist, positiv oder negativ ausfällt.

Die so definierte Integralinvariante (10) soll „Pseudobogen“ heißen.

Führt man jetzt auf den beiden Kurven  $y_i$  und  $z_i$  den Pseudobogen ein, gemessen vom Berührungspunkt in der Anfangslage bis zum Berührungspunkt in der betreffenden Phase, so ersieht man aus (9) die Gleichheit der beiden Pseudobögen, so daß der Satz gilt:

**Satz I:** „Bei jeder Pseudobewegung führt die Polkurve eine Pseudorollung auf der Polbahn aus“.

Wir wollen uns nun der Umkehrung dieses Satzes zuwenden und gehen von zwei Kurven

$$y_i = y_i(\varrho) \quad z_i = z_i(\sigma)$$

aus. Auf jeder der beiden sei ein Punkt

$$y_i(\varrho_0) \quad \text{bzw.} \quad z_i(\sigma_0)$$

markiert. Durch eine Transformation der Gruppe (1) sollen die beiden Punkte

$$y_i(\varrho_0) \quad \text{und} \quad z_i(\sigma_0)$$

derart zur Deckung gebracht werden, daß die beiden Kurven daselbst einander berühren. Durch eine leichte Rechnung erkennt man:

a) für ungerades  $n$  ist eine solche (reelle) Transformation stets eindeutig bestimmt,

b) für gerades  $n$  existiert eine solche (reelle) Transformation nur, wenn die beiden Kurven „der gleichen Art“ angehören, und ist dann stets zweideutig.

Jetzt führen wir noch auf beiden Kurven den Pseudobogen ein und beginnen mit der Messung im Berührungspunkt. Wieder ist ein Unterschied zu beobachten zwischen

$n = \text{ungerade}$ , wo die positive Zählung von  $s$  auf beiden Kurven von selbst nach der gleichen Seite hin erfolgt und

$n = \text{gerade}$ , wo man wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel die positive Zählung von  $s$  auf beiden Kurven nach der gleichen Seite eigens verlangen muß.

Ist aber diese Festsetzung einmal getroffen, so gelten außer den Gleichungen

$$(11) \quad z_i(s_0) = y_i(s_0)$$

$$(12) \quad \Pi z_i'(s) = \Pi y_i'(s) \equiv +1, \quad \text{bzw.} \quad -1$$

offenbar noch

$$(13) \quad z_i'(s_0) = y_i'(s_0).$$

Nun ist die Pseudobewegung eindeutig bestimmt, denn nach (7) lassen sich die  $a_i$  als

$$(14) \quad a_i = \frac{z_i'(s)}{y_i'(s)}$$

berechnen und aus (5) die  $b_i$  als

$$(15) \quad b_i = z_i - \frac{z_i'}{y_i'} y_i$$

Daß die Relation (2) gilt, ersieht man aus (14) und (12). Durch eine einfache Rechnung erkennt man ferner, daß tatsächlich

$$z_i = y_i^*$$

ist.

Daß endlich die

$$a_{i(s_0)} = 1, \quad b_{i(s_0)} = 0$$

sind, ergibt sich aus (14) und (13), bzw. aus (15), (13) und (11).

**Satz II:** „Jede Pseudobewegung kann durch Pseudorollen erzeugt werden, und zwar dürfen

a) bei ungeradem  $n$  die beiden Kurven (sowie die beiden Punkte, die in der Anfangslage zur Deckung kommen sollen) willkürlich vorgeschrieben werden. Die Bestimmung ist dann eindeutig.

b) bei geradem  $n$  nur zwei Kurven „der gleichen Art“ als Polbahn und Polkurve vorgeschrieben werden. Die Bestimmung ist dann zweideutig“.

Die Tatsache, daß für geradzahlige  $n$  **zwei** verschiedene Pseudorollen in Betracht kommen, läßt sich in der Ebene ( $n = 2$ ) als „Außen- und Innenrollen“ interpretieren.

## II.

Die im ersten Teil durchgeführten Betrachtungen sollen jetzt erweitert werden auf den Fall, daß die  $a_i$  und  $b_i$  Funktionen zweier wesentlicher Parameter  $u, v$  sind, also

$$(16) \quad a_i = a_i(u, v) \quad b_i = b_i(u, v).$$

Die oben gemachten Differenzierbarkeitsannahmen sollen weiter in Gültigkeit bleiben, ebenso die Gleichungen (1) und (2). Auch sollen für die Anfangswerte  $u_0, v_0$  alle

$$(17) \quad a_i(u_0, v_0) = 1 \quad b_i(u_0, v_0) = 0$$

werden. Nun aber machen wir noch die einschränkende Voraussetzung, daß alle

$$(18) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial a_i}{\partial u} & \frac{\partial b_i}{\partial u} \\ \frac{\partial a_i}{\partial v} & \frac{\partial b_i}{\partial v} \end{array} \right| \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sind.<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Daß es solche zweiparametrische Scharen wirklich gibt, sieht man gleich ein, weil z. B. die  $a_i$  abgesehen von den Randwerten und der Forderung  $\sum a_i = 1$  willkürlich gewählt werden können und jedes  $b_i$  dann notwendig eine willkürliche Funktion des  $a_i$  sein muß, das nur noch den Randbedingungen zu genügen hat.

Zu jeder Transformation unserer zweiparametrischen Schar gehören jetzt  $\infty^1$  benachbarte Transformationen und die totalen Änderungen der  $x_i^*$

$$d x_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial u} d u + \frac{\partial x_i^*}{\partial v} d v$$

können für einen Punkt dann und nur dann verschwinden, wenn die Gleichungen

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial x_i^*}{\partial v} = 0$$

mit einander verträglich sind. Dadurch kommt man aber auf die Relationen (18). Geometrisch gesprochen: Es existiert unter unserer Voraussetzung (18) ein Punkt  $y_i$ , der beim Uebergang von einer Transformation unserer Schar zu allen  $\infty^1$  Nachbartransformationen festbleibt. Für dieses Momentanzentrum  $y_i$  gilt also

$$(19) \quad y_i(u, v) = - \frac{\frac{\partial b_i}{\partial u}}{\frac{\partial a_i}{\partial u}} = - \frac{\frac{\partial b_i}{\partial v}}{\frac{\partial a_i}{\partial v}}$$

Man wird (19) die „Polfläche im bewegten System“ und

$$(20) \quad z_i = a_i y_i + b_i$$

die „Polfläche im festen System“ nennen. Jede solche zweiparametrische Schar, die auch der Bedingung (18) genügt, soll „zweiparametrische Pseudobewegung“ heißen. Die Punkte der beiden Polflächen sind durch die krummlinigen Koordinaten  $u, v$  eindeutig auf einander bezogen. Daß die Abbildung „pseudolängentreu“ ist, läßt sich sogleich einsehen, denn mittels zweier willkürlich gewählter Funktionen

$$u = u(t) \quad v = v(t)$$

werden zwei zusammengehörige Kurven auf den beiden Polflächen  $y_i$  und  $z_i$  festgelegt und dadurch wird die ganze Untersuchung auf den in I. behandelten Fall zurückgeführt.

Die Pseudolängentreue ist natürlich gegen alle Transformationen der Pseudobewegung invariant, so daß es wieder berechtigt erscheint, von einer „Pseudorollung“ zu sprechen.

**Satz III:** „Bei jeder zweiparametrischen Pseudobewegung führt die bewegliche Polfläche eine Pseudorollung auf der festen aus.“

Für das Folgende bemerken wir noch, daß die Determinanten

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial u} & \frac{\partial z_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} & \frac{\partial z_i}{\partial v} \end{vmatrix}$$

wie man sofort bestätigt, alle Null sind.

Um nun zu sehen, inwieweit die Umkehrung dieses Satzes, gültig ist, gehen wir von zwei pseudolängentreu auf einander bezogenen Flächen

$$y_i = y_i(u, v) \quad z_i = z_i(u, v)$$

aus, für welche also die Gleichung

$$(22) \quad II \left( \frac{\partial y_i}{\partial u} du + \frac{\partial y_i}{\partial v} dv \right) = II \left( \frac{\partial z_i}{\partial u} du + \frac{\partial z_i}{\partial v} dv \right)$$

identisch bestehen muß.

Hieraus folgt, daß die Linearfaktoren links mit denen auf der rechten Seite bis auf nur von  $u, v$  abhängige Faktoren übereinstimmen, daß also die Größen

$$(23) \quad a_i = \frac{\frac{\partial y_i}{\partial u}}{\frac{\partial y_i}{\partial v}}$$

abgesehen von der Reihenfolge mit den

$$(24) \quad \beta_i = \frac{\frac{\partial z_i}{\partial u}}{\frac{\partial z_i}{\partial v}}$$

identisch sind. Sei etwa

$$a_i = \beta_j,$$

so sieht man, daß aus (22) nicht unbedingt

$$(25) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y_i}{\partial u} & \frac{\partial z_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} & \frac{\partial z_i}{\partial v} \end{array} \right| = 0$$

gefolgert werden kann, daß sich aber die Gültigkeit von (25) immer erreichen läßt, wenn man vorher die Fläche  $y_i$  einer Achsenvertauschung d. i. einer Transformation von der Form

$$y_i^* = y_j$$

unterwirft. Ist aber die Gültigkeit von (25) erreicht und hat man durch zwei willkürlich gewählte Anfangswerte

$$u_0 \quad v_0$$

einen Punkt auf der Fläche  $y_i$  und seinen entsprechenden auf  $z_i$  als Anfangspunkte bestimmt, so sieht man leicht ein, daß sich mit Hilfe einer Transformation (1) das Bestehen von

$$(26) \quad y_i(u_0, v_0) = z_i(u_0, v_0)$$

$$(27) \quad \left( \frac{\partial y_i}{\partial u} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = \left( \frac{\partial z_i}{\partial u} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \quad \left( \frac{\partial y_i}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = \left( \frac{\partial z_i}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$

erzwingen läßt und zwar stets in eindeutiger Weise.

Setzt man nun

$$(28) \quad a_i = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\frac{\partial y_i}{\partial u}} \equiv \frac{\frac{\partial z_i}{\partial v}}{\frac{\partial y_i}{\partial v}}$$

$$(29) \quad b_i = z_i - a_i y_i,$$

so ergibt sich für die Anfangslage

$$a_i(u_0, v_0) = 1, \quad b_i(u_0, v_0) = 0$$

und ohne Schwierigkeiten beweist man für alle Werte von  $u, v$

$$II a_i(u, v) \equiv 1$$

Die Differentiationen von (29) liefern bei Verwendung von (28)

$$\frac{\partial b_i}{\partial u} = - \frac{\partial a_i}{\partial u} y_i \quad \frac{\partial b_i}{\partial v} = - \frac{\partial a_i}{\partial v} y_i$$

und daraus folgen wieder die Gleichungen (18). Wir haben es also wirklich mit einer zweiparametrischen Pseudobewegung zu tun.

**Satz IV:** „Irgend zwei pseudolängentreu aufeinander bezogene Flächen bestimmen als Polflächen eine zweiparametrische Pseudobewegung in eindeutiger Weise, wenn es gestattet ist, im Bedarfsfall die bewegliche Polfläche vorerst einer Achsenvertauschung zu unterwerfen.“

### III.

Zu ähnlichen Resultaten wie bisher gelangt man ohne Schwierigkeit, wenn man Scharen von drei und mehr wesentlichen Parametern betrachtet.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften](#)

Jahr/Year: 1932

Band/Volume: [80](#)

Autor(en)/Author(s): Fröhlich Walter

Artikel/Article: [Das Analogon zum Cauchy'schen Hauptsatz bei einer speziellen  \$2n - 1\$  dimensionalen Gruppe des  \$n\$  - dimensionalen Raumes 116-122](#)