Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einer Halbebene und auf ihrem Rande.

Von S. Benjaminowitsch.

(Auszug aus einer Dissertation. Referent: Prof. Dr. L. Berwald).

Die beiden ersten Abschnitte der Arbeit beschäftigen sich mit der Frage, wie viele Wurzeln einer algebraischen Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten in der oberen Halbebene ($\mathfrak{I}(z) > 0$)[1]) und wie viele auf der reellen Achse der Gaußschen Zahlenebene liegen. Es werden zwei verschiedene Methoden zur Beantwortung dieser Frage ausgearbeitet. Sie ergeben sich durch sinngemäße Uebertragung und Verallgemeinerung der von I. Schur[2]) angegebenen Verfahren, durch die man entscheiden kann, ob eine vorgelegte algebraische Gleichung nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzt oder nicht.

Für die Anwendung bequem ist vor allem die im zweiten Abschnitte behandelte Methode. Sie beruht auf vier Regeln, die hier ohne Beweis angegeben seien.

Es liege eine algebraische Gleichung n-ten Grades

$$(1) \qquad f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \qquad\qquad + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

vor. Dann gelten folgende Regeln:

Regel I. Wenn $\mathfrak{I}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$ ist und ζ eine im übrigen beliebige Größe mit *positivem* Imaginärteil bedeutet, so hat die algebraische Gleichung (n—1) -ten Grades

$$(2) \qquad f_1(z) \equiv (\overline{a}_0 z - \overline{a}_0 \zeta + \overline{a}_1)\, f(z) - (a_0 z - a_0 \zeta + a_1)\, \overline{f}(z) = 0$$

ebensoviele Wurzeln in der Halbebene $\mathfrak{I}(z) > 0$ und dieselben reellen Wurzeln wie die Gleichung (1).

Regel II. Wenn $\mathfrak{I}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) < 0$ ist und ζ eine im übrigen beliebige Größe mit *negativem* Imaginärteil bedeutet, so hat die Gleichung (2) um eine Wurzel weniger in der Halbebene $\mathfrak{I}(z) > 0$ als die Gleichung (1) und dieselben reellen Wurzeln.

---

[1]) Wie üblich, bedeutet $\mathfrak{R}(z)$ den Realteil, $\mathfrak{I}(z)$ den Imaginärteil, $\overline{z}$ die konjugiert-komplexe Zahl einer komplexen Zahl z und $\overline{f}(z)$ das Polynom, dessen Koeffizienten die konjugiert komplexen Zahlen der entsprechenden Koeffizienten von f (z) sind.

[2]) I. Schur. Ueber algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen. Zeitschr. f. angew. Math. und Mechanik 1 (1921), S. 307—311.

Regel III. Wenn

$$\mathfrak{I}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = \mathfrak{I}\left(\frac{a_2}{a_0}\right) = \cdots = \mathfrak{I}\left(\frac{a_{p-1}}{a_0}\right) = 0\,, \mathfrak{I}\left(\frac{a_p}{a_0}\right) \neq 0 \quad (2 \leqq p \leqq n)$$

ist, so bilde man der Reihe nach die Polynome

$$f^{[1]}(z) = (z + \zeta_0)\, f(z) \qquad f_1^{[1]}(z)\,;$$

$$f^{[2]}(z) = (z + \zeta_1)\, f_1^{[1]}(z) \qquad f_1^{[2]}(z)\,;$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{[q]}(z) = (z + \zeta_{q-1})\, f_1^{[q-1]}(z) \qquad f_1^{[q]}(z)\,,$$

wo das Polynom $f_1^{[k]}(z)$ aus dem Polynom $f^{[k]}(z)$ nach Regel I. (mit ζ_{k-1} an Stelle von ζ) gebildet ist. $\zeta_0, \zeta_1 \ldots \zeta_{q-1}$ bedeuten dabei $q = \left[\frac{p}{2}\right]$ feste Zahlen mit positivem Imaginärteil, die (bis auf die letzte, wenn p gerade ist) willkürlich wählbar sind. Dann ist

$$f_1^{[q]}(z) = 0 \tag{3}$$

eine Gleichung vom Grade n, die (bei geeigneter Wahl von ζ_{q-1} im Falle eines geraden p[3]) unter eine der Regeln I. oder II. fällt, dieselben reellen Wurzeln und ebensoviele Wurzeln in der Halbebene $\mathfrak{I}(z) > 0$ hat wie die Gleichung (1).

Regel IV. Wenn

$$\mathfrak{I}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = \mathfrak{I}\left(\frac{a_2}{a_0}\right) = \cdots = \mathfrak{I}\left(\frac{a_n}{a_0}\right) = 0$$

ist, so hat die Gleichung (1) ebensoviele Wurzeln in der Halbebene $\mathfrak{I}(z) > 0$ wie die Gleichung (n—1)-ten Grades

$$n\, f(z) - (z - \zeta)\, f'(z) = 0\,, \tag{4}$$

in der ζ eine im übrigen beliebige Größe mit positivem Imaginärteil bedeutet. Die Gleichung (4) fällt unter die früheren Regeln, wenn nicht der triviale Fall $f(z) = a_0 (z - a)^n$, ($a_0 \neq 0$, a reell) vorliegt.

---

[3]) Ist in diesem Falle

$$f_1^{[q-1]}(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n\,,$$

so ist ζ_{q-1} so zu wählen, daß

$$\mathfrak{I}(\zeta_{q-1}) > 0\,, \quad \mathfrak{R}(\zeta_{q-1}) \neq \frac{1}{2}\left\{\frac{A_1}{A_0} - \frac{\mathfrak{I}\left(\frac{A_3}{A_0}\right)}{\mathfrak{I}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)} + \frac{\mathfrak{I}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)}{\mathfrak{I}(\zeta_{q-1})}\right\}$$

Auf Grund dieser vier Regeln läßt sich aus der gegebenen Gleichung (1) eine Reihe von algebraischen Gleichungen

$$(5) \qquad f(z) = 0, \quad f_1(z) = 0, \qquad f_m(z) = 0$$

ableiten, deren Gradzahlen beständig abnehmen. Man kann dieses Reduktionsverfahren so weit treiben, daß die letzte Gleichung (5) linear ist. Dann kann die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung in der Halbebene $\mathfrak{J}(z) > 0$ durch Auflösung gefunden werden. Anderseits liefert das Rekursionsverfahren selbst die Differenz der Anzahlen der Wurzeln der ersten und letzten Gleichung (5) in der Halbebene $\mathfrak{J}(z) > 0$. Damit ist die Anzahl der Wurzeln der Gleichung (1) in der Halbebene $\mathfrak{J}(z) > 0$ bestimmt.

Um die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (1) zu finden, hat man nur zu beachten, daß die Anzahl dieser Wurzeln ganz ungeändert bleibt, solange sich die Reduktion nach den Regeln I. bis III. vollzieht. Ist also $f_s(z) = 0$ die erste unter die Regel IV. fallende Gleichung, die in der Reihe (5) auftritt, n_s ihr Grad und l die Anzahl ihrer Wurzeln in der Halbebene $\mathfrak{J}(z) > 0$, so hat die Gleichung (1) $n_s - 2l$ reelle Wurzeln.

Das im Vorstehenden auseinandergesetzte Reduktionsverfahren wird insbesondere für die praktische Anwendung soweit ausgestaltet, daß es eine bequeme, anscheinend neue Methode zur Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten ergibt.

Im dritten Abschnitt der Arbeit wird eine entsprechende Methode zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in der linken Halbebene ($\mathfrak{R}(z) < 0$) und auf der imaginären Achse der Gaußschen Zahlenebene entwickelt und der Zusammenhang erörtert, in dem die oben angegebenen Regeln mit den Regeln stehen, die A. Cohn[4]) zur Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung im Innern und am Rande des Einheitskreises abgeleitet hat.

[4]) A. Cohn, Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. Math. Zeitschrift 14 (1922), S. 110—148.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften

Jahr/Year: 1934

Band/Volume: 82

Autor(en)/Author(s): Benjaminowitsch S.

Artikel/Article: Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einer Halbebene und auf ihrem Rande 1-3