Zur konstruktiven Behandlung von Aufgaben aus der nichteuklidischen Geometrie der Ebene mit Methoden der darstellenden Geometrie.

Von W Fröhlich in Prag.

Einleitung.

Aus der darstellenden Geometrie sind viele Beispiele von planimetrischen Aufgaben bekannt, welche durch stereometrische Betrachtungen konstruktiv bequem zugänglich werden. Die Heranziehung einer höheren Dimension kann auch für nichteuklidische Konstruktionen von Vorteil sein. Es sollen im Folgenden für die konstruktive Behandlung von Aufgaben aus der hyperbolischen Geometrie der Ebene mit Zuhilfenahme des projektiven Raumes zwei Methoden entwickelt werden, denen wir die Namen Projektionsmethode und zyklographische Methode geben. Anschließend sollen einige Bemerkungen über die elliptische Geometrie der Ebene und über die Geometrie auf der Kugel folgen.

Um die hyperbolischen Konstruktionen in einer festen Ebene π zu vereinfachen, wird die Fundamentalkurve [1]) gewöhnlich als Kreis K angenommen. Alle anderen Fälle lassen sich ja mittels (perspektiver) Kollineationen auf diesen Fall zurückführen. Um mit den verschiedenen Bezeichnungen, die im Laufe der Zeit üblich geworden sind, keine Schwierigkeiten zu haben, geben wir jetzt eine Erklärung aller Namen, die wir verwenden wollen:

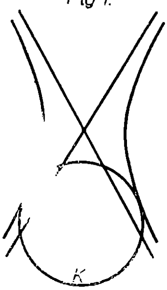
Die Gesamtheit aller Punkte der projektiven Ebene wird im Sinne der hyperbolischen Geometrie in eigentliche Punkte, Randpunkte und Überpunkte eingeteilt [2]), je nach ihrer Lage im Innern von K, auf K und außerhalb von K. Von den hyperbolischen Kreisen gibt es zwei Arten: Die Entfernungskreise, welche als Ort aller Punkte konstanten hyperbolischen Abstandes von einem festen Punkte definiert werden,

---

[1]) Diese Bezeichnung findet sich z. B. in dem Lehrbuch von F Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, auf Seite 174. Dieses Buch ist als Band XXVI der Grundlehren der math. Wissenschaften erschienen und wird im folgenden mit F. K. zitiert werden.

[2]) In dem Lehrbuch von H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 1923.

Fig 1.



und die Winkelkreise [3]), die als Einhüllende aller Geraden erklärt werden, welche eine feste Gerade unter einem konstanten hyperbolischen Winkel schneiden. Die Entfernungskreise selbst werden als eigentliche Kreise, Horozykeln oder Hyperzykeln bezeichnet, je nachdem ob der hyperbolische Mittelpunkt ein eigentlicher Punkt, ein Randpunkt oder ein Überpunkt ist. Die Winkelkreise (Fig. 1) bestehen nur aus Rand- und Überpunkten, aber die Tangenten der Winkelkreise gehen durch das Innere von K.

§ 1. Die Projektionsmethode.

Die ebenen Schnitte einer durch K gehenden Fläche zweiten Grades Φ^2 projizieren sich in hyperbolische Kreise von π, wenn das Projektionszentrum der Pol von π bezüglich Φ^2 ist. Es folgt dies aus der Tatsache, daß jeder hyperbolische Kreis von K (reell oder imaginär) doppelt berührt wird. Nehmen wir insbesondere eine Kugel Φ_1, für welche K ein Großkreis ist, so erhalten wir die Entfernungskreise als orthogonale Projektionen der gewöhnlichen Kugelkreise auf π. Nehmen wir noch ein gleichseitiges Drehhyperboloid Φ_2 dazu, für welches K der Kehlkreis ist, so erscheinen die Winkelkreise als orthogonale Projektionen der ebenen Schnitte von Φ_2 auf π.

Die Verwertung der Flächen Φ_1 und Φ_2 bei der Konstruktion erläutern wir jetzt an drei Beispielen:

1. Ein hyperbolischer Kreis ist aus drei Punkten a, b, c zu konstruieren Die drei Punkte liegen entweder alle innerhalb K oder alle außerhalb K. Im ersten Fall sind sie Bilder von sechs auf Φ_1 liegenden Punkten a_1, a_2, b_1, b_2 c_1, c_2. Die vier Ebenen $a_1\, b_1\, c_1$, $a_1\, b_1\, c_2$, $a_1\, b_2\, c_1$ und $a_1\, b_2\, c_2$ schneiden Φ_1 nach vier gewöhnlichen Kreisen, deren orthogonale Projektionen auf π die gesuchten Lösungen (vier Entfernungskreise) sind. — Die vier anderen Ebenen $a_2\, b_2\, c_2$, $a_2\, b_2\, c_1$, $a_2\, b_1\, c_2$ und $a_2\, b_1\, c_1$ führen natürlich zu denselben Lösungen in π. Im zweiten Fall tritt Φ_2 an die Stelle von Φ_1. Zu Lösungen (Winkelkreisen) führen aber nur jene Schnittebenen, die mit K zwei reelle Punkte gemein haben.

2. Ein hyperbolischer Kreis ist aus dem hyperbolischen Mittelpunkt m' und einem Peripheriepunkt a' zu konstruieren Liegt a' außerhalb K, dann muß auch m' außerhalb K liegen. Wir bestimmen die

[3]) F. K. Seite 183.

Polare M von m' bezüglich K und dann die Punkte a_1, a_2 auf Φ_2, deren Bild a' ist. Die beiden Ebenen $[a_1 M]$ und $[a_2 M]$ schneiden Φ_2 in zwei Kurven, deren gemeinsames Bild in π die gesuchte Lösung (Winkelkreis) ist. — Liegt a' innerhalb K, so tritt Φ_1 an die Stelle von Φ_2 und die Lösung ist ein Entfernungskreis.

3. Ein Dreieck aus den hyperbolischen Längen der drei Seiten zu konstruieren Diese Aufgabe kommt auf die Bestimmung der Schnittpunkte zweier hyperbolischer Kreise hinaus. Man ermittelt wie bei der vorigen Aufgabe die zugehörigen Kreise auf der Kugel und pojiziert deren Schnittpunkte auf π.

§ 2. Die zyklographische Methode.

Die scheinbaren Umrisse A der im vorigen Paragraphen verwendeten Fläche Φ_2 aus den Punkten a des Raumes auf der Ebene π sind ebenfalls hyperbolische Kreise, wie man sich ohne viele Mühe überzeugen kann. Umgekehrt gehören zu jedem hyperbolischen Kreis A in π im allgemeinen zwei Punkte a_1 und a_2 des Raumes, welche zu π symmetrisch liegen. (Im besonderen können sie in einen uneigentlichen Punkt zusammenfallen.) Denn die gemeinsamen Tangentialebenen von A und Φ_2 umhüllen zwei Kegel zweiten Grades mit den Scheiteln a_1 und a_2. Wir wollen A das zyklographische Bild von a_1 oder von a_2 nennen.

Die Fläche Φ_2 teilt den Raum in zwei Teile. Die Punkte jenes Teiles, der die Drehachse enthält, haben die Entfernungskreise zu zyklographischen Bildern, die Punkte des anderen Teiles die Winkelkreise. Die zyklographischen Bilder der Punkte von Φ_2 bilden den Übergang zwischen den beiden Arten hyperbolischer Kreise. Es sind gerade Linien.

Um die Verwendbarkeit der zyklographischen Methode darzutun, erörtern wir zuerst die drei zu den Beispielen des vorigen Paragraphen dualen Aufgaben:

1. Ein hyperbolischer Kreis ist aus drei Tangenten T_1 T_2, T_3 (die alle K reell schneiden müssen) zu konstruieren Wir bestimmen die sechs Tangentialebenen α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, γ_3 von T_1, T_2, T_3 an Φ_2. Das zyklographische Bild S des Schnittpunktes s von α_1, α_2 und α_3 ist eine Lösung. Die anderen Lösungen findet man durch andere Kombinationen der Ebenen.

2. Ein hyperbolischer Kreis ist aus der Polare M seines hyperbolischen Mittelpunktes m' bezüglich K und einer der Tangente T zu konstruieren Wir bestimmen in einer Tangentialebenen τ von T an

Φ_2 jenen Punkt a, dessen Normalriß auf π der Punkt m' ist. Dann ist das zyklographische Bild A von a die gesuchte Lösung.

3. Ein Dreieck ist aus den hyperbolischen Größen der drei Winkel zu konstruieren Die Aufgabe kommt auf die Bestimmung der gemeinsamen Tangenten zweier hyperbolischer Kreise A und B hinaus. Man ermittelt wie bei der vorigen Aufgabe zwei Punkte a und b im Raum, deren zyklographische Bilder A und B sind, und schneidet die Verbindungsgerade ab mit der Ebene π. Von diesen Schnittpunkten gehen die gesuchten Tangenten aus.

Mit unserer zyklographischen Methode kann aber auch die Berührungsaufgabe des Apollonius [4]) für die hyperbolische Geometrie gelöst werden. Der Gedankengang ist dem der gewöhnlichen Zyklographie völlig analog und braucht deshalb hier nicht ausgeführt zu werden. Dagegen wollen wir hervorheben, daß die Lösung dieser Aufgabe, wie die aller vorhergehenden Aufgaben, mit Zirkel und Lineal möglich ist.

§ 3. Bemerkungen über die elliptische Geometrie und über die Geometrie auf der Kugel.

Die vorstehenden Methoden sind sinngemäß auch auf die elliptische Geometrie der Ebene anwendbar. An Stelle der Flächen Φ_1 und Φ_2 tritt eine einzige Fläche zweiten Grades Φ_3, welche durch den nullteiligen Fundamentalkreis $\overline{K}$ geht. Es ist vorteilhaft Φ_3 als gleichseitiges, zweischaliges Drehhyperboloid zu nehmen, dessen nullteiliger Kehlkreis der Fundamentalkreis $\overline{K}$ ist. Jeder elliptische Kreis kann sowohl als Entfernungskreis, als auch als Winkelkreis aufgefaßt werden. Die Sache in allen Einzelheiten durchzudenken, kann wohl dem Leser überlassen bleiben, dagegen muß hervorgehoben werden, daß der bekannte Zusammenhang zwischen der elliptischen Geometrie der Ebene π und der euklidischen Geometrie im Bündel s konstruktiv verwertet werden kann, was vielleicht noch vorteilhafter ist als die Verwendung der Fläche Φ_3. Der Bündelscheitel s ist nämlich irgendeiner der beiden Punkte des Raumes, aus welchen der absolute Kugelkreis in den Kreis $\overline{K}$ projiziert wird. Die elliptischen Kreise von π werden aus s durch Drehkegel projiziert. Es kann also die ganze Kinematik im Bündel, welche durch die Theorie der Kegelzahnräder für die Lehre vom Maschinenbau so bedeutungsvoll ist, als eine Kinematik der elliptischen Geometrie der Ebene angesehen werden und es werden z. B. bei der Konstruktion der konischen

[4]) Es ist das die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise berührt.

Evolvente oder der konischen Zyklide Kurven gezeichnet, die man als Gebilde der elliptischen Geometrie der Ebene auffassen kann.

Auf eine Kugel mit dem Mittelpunkt s wird die elliptische Geometrie der Ebene in die gewöhnliche Geometrie auf der Kugel projiziert. Dadurch wird beispielsweise die Berührungsaufgabe des Apollonius in der elliptischen Geometrie auf die gleiche Aufgabe mit Kugelkreisen zurückgeführt. Diese aber kann so gelöst werden: Man ordnet jedem Kreis P der Kugel $\varkappa$ den Pol p der durch P gehende Ebene bezüglich $\varkappa$ zu. Den Kegel, welcher P aus p projiziert, wird man sphärisch-zyklographischen Kegel nennen. Die Lösung unserer Aufgabe erfolgt dann durch die Bestimmung der gemeinsamen Punkte dreier sphärisch-zyklographischer Kegel und ist stets mit Zirkel und Lineal möglich.

Reliefüberschiebungen in den Westkarpathen.

Von E. Spengler.

(Mit einer Abbildung.)

Der Begriff der „Reliefüberschiebung" wurde von O. Ampferer im Jahre 1924 in die geologische Literatur eingeführt [1]. Ampferer versteht darunter eine Überschiebung, welche über einen bereits mit einem Erosionsrelief versehenen Untergrund vordringt. Am schönsten hat Ampferer die Erscheinungen der Reliefüberschiebungen im Karwendelgebirge verfolgen können, aber er konnte auch Beispiele aus anderen Gegenden, z. B. aus den Südtiroler Dolomiten beibringen.

Die Reliefüberschiebungen vollziehen sich nicht immer in der Weise, daß die Schubmasse passiv jeder Unebenheit des Reliefs des Untergrundes folgt, sondern sie schafft sich dadurch eine ebener gestaltete Schubfläche, daß sie stärkere Aufragungen des Untergrundreliefs abschert und an ihrer Basis eine Strecke mitschleift, während Vertiefungen des Untergrundes mit mitgebrachtem Material ausgestopft und dadurch eingeebnet werden. Als klassisches Beispiel für letzteren Fall sei das Profil angeführt, welches Ampferer vom Stanserjoch südlich des Achensees beschreibt. [2]) Das Stanserjoch bildet eine breite Antiklinale aus Wettersteinkalk. Etwa im Scheitel dieses Gewölbes befindet sich ein kleiner talartiger Einschnitt, welcher in ganz wirrer Lagerung mit viel

---

[1]) O Ampferer, Beiträge zur Auflösung der Mechanik der Alpen. Jahrb. Geol. Bundesanst. 74. Bd., S. 35.

[2]) O. Ampferer, Die Reliefüberschiebung des Karwendelgebirges. Jahrb. Geol. Bundesanstalt 78. Bd. Taf. V., unterstes Profil.