Matrixfunktionen beschränkter Schwankung.*

Dissertation von Otto Dobsch.

Referent: Prof. K. Löwner.

In einer Arbeit in der Mathem. Zeitschr. (Bd. 38. 1934) hat Herr K. Löwner den Begriff der Monotonie auf Matrixfunktionen übertragen. Dabei ist unter einer Matrixfunktion bekanntlich folgendes zu verstehen:

$f(x)$ sei eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, X_n eine reelle symmetrische (nur solche spielen im folgenden eine Rolle) n-reihige Matrix. Die Matrixfunktion n-ter Stufe $f(X_n)$ ordnet dann jeder Matrix X_n, deren Eigenwerte sämtlich dem Definitionsbereich von $f(x)$ angehören, als Funktionswert diejenige Matrix zu, die aus X_n hervorgeht, wenn man alle Eigenvektoren v_i derselben beibehält, die Eigenwerte λ_i hingegen durch $f(\lambda_i)$ ersetzt.

Die Übertragung des Begriffes der Monotonie erfordert die Einführung einer Anordnungsbeziehung für Matrizen. Dies geschieht so: Für zwei Matrizen n-ter Stufe bedeute $A_n \leq B_n$, daß die zu $B_n - A_n$ gehörige quadratische Form negativer Werte nicht fähig ist. $f(X_n)$ heißt dann monoton (die skalare Funktion $f(x)$ monoton von n-ter Stufe), wenn mit $A_n \leq B_n$ stets auch $f(A_n) \leq f(B_n)$ ist. Nach K. Löwner wird die Monotonie n-ter Stufe vollständig zum Ausdruck gebracht durch die Ungleichungen

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} [\xi_1 \eta_1] & [\xi_1 \eta_2] & \cdots & [\xi_1 \eta_m] \\ [\xi_2 \eta_1] & [\xi_2 \eta_2] & \cdots & [\xi_2 \eta_m] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\xi_m \eta_1] & [\xi_m \eta_2] & \cdots & [\xi_m \eta_m] \end{vmatrix} \geqq 0,$$

gültig für $m = 1, 2 \ldots n$ und beliebige Werte $\xi_1 \ldots \xi_m$, $\eta_1 \ldots \eta_m$ aus dem Definitionsbereich von $f(x)$ (er wird für $n > 2$ als Intervall vorausgesetzt) in der Anordnung

$$(2) \qquad \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots < \xi_m < \eta_m$$

Dabei bedeutet $\quad [\xi \eta] = \dfrac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}$

Weiter bringt die Monotonie n-ter Stufe gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften mit sich, nämlich $(2n-3)$-malige stetige Differenzierbarkeit und Beschränktheit des $(2n-2)$-ten Differenzenquotienten in jedem abgeschlossenen Teilintervall aus dem Innern des Definitionsintervalls von $f(x)$. Daraus folgt bekanntlich, daß

*Eine ausführliche Darstellung ist in der Math. Zeitschr. Bd. 43 erschienen.

$f^{(2n-3)}(x)$ (als totalstetige Funktion) mit etwaiger Ausnahme einer Menge vom Maß 0 überall eine Ableitung $f^{(2n-2)}(x)$ hat. Dies die Ergebnisse der Arbeit Herrn K. Löwners, soweit sie im folgenden gebraucht werden.

Es lag nun sehr nahe, auch ein Analogon zu der die monotonen Funktionen umfassenden Klasse der Funktionen beschränkter Schwankung zu suchen, d. h. derjenigen Funktionen, für die bei jeder Einteilung

$$\alpha = x_0 < x_1 < \qquad < x_p = \beta \tag{3}$$

des Definitionsintervalls $\alpha \leqq x \leqq \beta$ von $f(x)$ die Summen

$$\sum_{\nu=1}^{p} \left| f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) \right| \tag{4}$$

unterhalb einer festen Schranke liegen. Jede solche Funktion läßt sich bekanntlich als Differenz zweier monotoner darstellen.

Ein möglicher Weg der Übertragung dieses Begriffes auf Matrixfunktionen (vielleicht der nächstliegende) ist folgender:

Man definiere auf irgendeine Weise für Matrizen einen Absolutbetrag $b(A)$. Man wird dann sagen, daß die in $\langle \alpha, \beta \rangle$ definierte Funktion $f(x)$ als Matrixfunktion n-ter Stufe von beschränkter Schwankung ist, wenn es eine Zahl K gibt, sodaß stets

$$S(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} b\left\{ f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)}) \right\} < K \cdot b(E) \tag{5}$$

gilt, unabhängig von der speziellen Wahl der „Zerlegung“

$$\mathfrak{Z} \quad \alpha E = A^{(0)} \leq A^{(1)} \leq \qquad \leq A^{(p)} = \beta E \tag{6}$$

(E = n-dimensionale Einheitsmatrix.)

Die durch (5) charakterisierte Funktionenklasse ist weitgehend unabhängig von der Art der Betragdefinition $b(A)$. Ist $b(A)$ ein Skalar, so wird man naturgemäß verlangen:

1. es sei $b(0) = 0$, $b(A) > 0$ für $A \neq 0$,
2. $b(A)$ sei eine stetige Funktion der Matrixkomponenten a_{ik}.

Zwei verschiedene Betragfunktionen $b(A)$, $b^*(A)$ führen in (5) sicher dann zur gleichen Funktionenklasse, wenn es zwei positive Zahlen k_1, k_2 gibt, mit denen stets

$$k_1 < \frac{b(A)}{b^*(A)} < k_2$$

ist. Dies ist beispielsweise erfüllt, wenn man außer 1) und 2) noch

$$3.) \quad b(\lambda A) = \lambda b(A) \qquad (\lambda \geqq 0)$$

fordert.

Schließlich könnte man in Anlehnung an den Funktionsbegriff für Matrizen unter b (A) diejenige Matrix verstehen, die aus A entsteht durch Beibehaltung der Eigenvektoren und Ersetzung der Eigenwerte λ_i durch $|\lambda_i|$ Auch dieser Betrag führt zur gleichen Funktionenklasse.

Es wird nun gezeigt (der Beweis macht den ersten Teil der Arbeit aus) daß jede Funktion, die im gewöhnlichen Sinne von beschränkter Schwankung ist, dies in dem angeführten Sinne auch als Matrixfunktion n-ter Stufe ist, wenn der Betrag auf eine der angegebenem Arten definiert wird. (Die Umkehrung ist trivial.) Dem Beweise wird die spezielle Betragdefinition $b(A) = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2}$ zugrunde gelegt. Ist dann k eine Schranke für die Summen (4), so kann für $K \cdot b(E)$ in (5) der Wert $\frac{3\pi}{2} n^2 k$ genommen werden.

Ein zweiter möglicher Weg der Übertragung des Begriffs der beschränkten Schwankung auf Matrixfunktionen besteht in der Charakterisierung der Funktionen, die sich als Differenz zweier von gleicher Stufe monotoner darstellen lassen. Für die Möglichkeit dieser Zerlegbarkeit werden notwendige Bedingungen angegeben, die in der Endlichkeit gewisser Integrale bestehen.

Zunächst gestatten die genannten Differenzierbarkeitseigenschaften monotoner Funktionen, die Monotoniekriterien (1) in folgende differentielle Form zu bringen:

Für die Monotonie n-ter Stufe einer Funktion f (x) in einem offenen Intervall $\alpha < X < \beta$ sind die beiden folgenden Bedingungen zusammen notwendig und hinreichend:

I. (2n-3)-malige stetige Differenzierbarkeit von f (x) und Beschränktheit des ersten Differenzenquotienten von $f^{(2n-3)}(x)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (α, β). ($f^{(2n-3)}(x)$ ist also totalstetig und es existiert bis auf eine Menge vom Maß Null eine (2n-2)-te Ableitung.

II. Es ist

$$(7) \qquad M_n(f(x)) = \begin{vmatrix} \frac{f(x)}{1!} & \frac{f'(x)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!} \\ \frac{f'(x)}{2!} & \frac{f''(x)}{3!} & \cdots & \frac{f^{(n)}(x)}{(n+1)!} \\ \cdots & \cdot & & \cdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!} & \frac{f^{(n)}(x)}{(n+1)!} & \cdots & \frac{f^{(2n-2)}(x)}{(2n-1)!} \end{vmatrix}$$

eine monoton wachsende Matrix, d. h. sind $x_1 < x_2$ zwei Stellen aus (α, β), an denen $f^{(2n-2)}(x)$ einen Sinn hat, so ist

(8) $$M_n\left(f(x_1)\right) \leq M_n\left(f(x_2)\right).$$

Zusatz. Aus (8) folgt für die Elemente der Hauptdiagonale $f^{(2k)}(x_1) \leq f^{(2k)}(x_2)$ $(k = 0,1 \ldots n\text{-}1)$. Die Ableitungen gerader Ordnung $f(x), f''(x) \quad .\ .\ f^{(2n-2)}(x)$ sind also in (α, β) monoton wachsende Funktionen. Als solche hat insbesondere $f^{(2n-2)}(x)$ an jeder Stelle aus (α, β) einen linksseitigen und einen nicht kleineren rechtsseitigen Grenzwert. Die Ungleichung (8) gilt daher für je zwei beliebige Werte $x_1 < x_2$ aus (α, β), wenn unter $f^{(2n-2)}(x)$ der linksseitige oder rechtsseitige Grenzwert verstanden wird. (Die schärfste Ausage erhält man offenbar, wenn man an der Stelle x_1 den rechtsseitigen, an der Stelle x_2 den linksseitigen Grenzwert nimmt.)

Sei nun $\zeta = \zeta(x)$ eine der bis auf einen positiven konstanten Faktor bestimmten projektiven Transformationen, die das Intervall $<\alpha, \beta>$ in $<0, +\infty>$ überführen. Sind α, β endlich, so ist $\zeta = c\,\frac{x-\alpha}{\beta - x}$ $(c > 0)$, ist etwa $\beta = +\infty$, so ist $\zeta = c\,(x - \alpha)$ $(c < 0)$. Man führe den bis auf eine additive Konstante bestimmten $\log \zeta = \xi$ als neue unabhängige Variable ein. Dann ist das Differential $d\,\xi = \frac{(\beta-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)\ (\beta - x)}$ und damit auch alle Ableitungen einer $<\alpha, \beta>$ gegebenen Funktion $y = f(x)$ nach $\xi : y, y \qquad y^{(k)}$, invariant gegenüber projektiven Transformationen von x.

Es kann behauptet werden: Ist f (x) eine in $<\alpha, \beta>$ von n-ter Stufe monotone Funktion oder die Differenz zweier solcher, so sind nach Einführung der unabhängigen Variablen $\xi = \log \zeta$ die gegenüber in $<\alpha, \beta>$ polfreien projektiven Transformationen invarianten Integrale

(9) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,dy\,| \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\,dy\,| \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\,dy^{(2n-2)}\,|$$

endlich. Dies bedeutet offenbar, daß die Funktionen $y, y \ . \quad y^{(2n-2)}$ nach passender Festsetzung von $y^{(i)}(-\infty)$, $y^{(i)}(+\infty)$ im abgeschlossenen Intervall $<-\infty, +\infty>$ von beschränkter Variation sind. Auf die Endlichkeit der Integrale (9) zurückführbar ist die Endlichkeit folgender Integrale:

(10)
$$J_k = \int_\alpha^\beta \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta - \alpha} \right]^{k-1} \sqrt[k]{\left| \begin{matrix} df & \frac{df'}{2!} & \frac{df^{(k-1)}}{k!} \\ \frac{df'}{2!} & \frac{df''}{3!} & \frac{df^{(k)}}{(k+1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df^{(k-1)}}{k!} & \frac{df^{(k)}}{(k+1)!} & \frac{df^{(2k-2)}}{(2k-1)!} \end{matrix} \right|} \quad (k=1, 2 \ldots n)$$

Zur Rechtfertigung insbesondere der letzten Integrale wird als Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integralbegriffes folgender Satz bewiesen:

Seien die in $<\alpha, \beta>$ erklärten Funktionen $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots \psi_n(t)$ von beschränkter Schwankung und $f(t)$ daselbst stetig. Sei weiter $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ eine stetige, positiv-homogene Funktion erster Ordnung, d. h. es werde verlangt:

$$F(x_1, x_2 \quad x_n) \geqq 0, \quad F(kx_1, \quad kx_n) = k\,F(x_1, \ldots x_n), \; k \geqq 0.$$

Ist dann an jeder Sprungstelle mindestens einer der Funktionen $\psi_i(t)$ die Bedingung

$$(11) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\psi_i(t) - \psi_i(t-0))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\psi_i(t+0) - \psi_i(t))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\psi_i(t+0) - \psi_i(t-0))^2} \quad (1)$$

erfüllt, dann hat die Summe

$$(12) \qquad S(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} f(\tau_\nu)\; F(\varDelta_\nu \psi_1, \ldots \varDelta_\nu \psi_n), \qquad \varDelta_\nu \psi_i = \psi_i(t_\nu) - \psi_i(t_{\nu-1})$$

$$\mathfrak{Z}: \; \alpha = t_0 < t_1 < \quad < t_p = \beta, \quad t_{\nu-1} \leqq \tau_\nu \leqq t_\nu$$

für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge einen von der speziellen Wahl derselben unabhängigen Grenzwert, der mit

$$(13) \qquad \int_\alpha^\beta f(t)\, F(d\psi_1(t), \quad d\psi_n(t))$$

bezeichnet wird.

Die Kieselalgen des Bielaflusses von der Quelle bis zur Mündung.

Von Dr. Emil Federle.

Eine Arbeit von R. Kolkwitz, das Plankton des Rheinstromes von seiner Quelle bis zur Mündung, regte den Verfasser zu einer systematischen Untersuchung eines größeren Flusses bezüglich des Vorkommens der Bacillariaceen oder Kieselalgen in seiner ganzen Länge von der Quelle bis zur Mündung an, zumal seines Wissens eine derartige Untersuchung in der Tschechoslowakei noch nicht vorgenommen wurde.

Eine vollständige Hydrobiologie der Biela darzustellen, hätte die Arbeit so ins Ungemessene gesteigert, daß sie von einem einzelnen Forscher schwer zu bewältigen gewesen wäre, weshalb ich mich auf die Kieselalgen beschränkte, die eine Hauptgruppe

---

1) Unter $\psi_i(t-0)$, $\psi_i(t+0)$ die stets existierenden Grenzwerte $\lim\limits_{h>0} \psi_i(t-h)$ bezw. $\lim\limits_{h>0} \psi_i(t+h)$, $h > 0$ verstanden.