nicht so deutlich wie sonst zur Geltung kam, wird in anderer Weise in Erfüllung gehen, sein Geist, seine Forschungsergebnisse, seine deutsche Arbeit, sein Name wird wie der weniger in weite Zeiten leuchtend verflochten sein mit den Gipfeln und Tälern seiner Heimat, unserm Mittelgebirge, aber auch mit unserer Gesellschaft und unserm Verein Lotos.

Partielle Differentialgleichungen für den Flächeninhalt des Dreieckes.

Von Karl Carda in Prag.

Die Längen der Seiten eines Dreieckes seien a, b, c, sein Flächeninhalt sei I. HERON von Alexandrien übermittelt uns einen exakten Beweis der Formel für I. Es scheint aber, daß diese Formel schon früher bekannt war.

Am kürzesten findet man die Formel, indem man aus den Gleichungen $I = \frac{ah}{2}$, $\sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{c^2 - h^2} = a$ die Höhe h eliminiert. Man erhält zunächst

$$I = \frac{1}{4} \sqrt{4\,a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}. \qquad (1)$$

Es fällt auf, daß die drei unabhängigen Variablen in diesem Ausdruck nur in den beiden festen Verbindungen ab, $a^2 + b^2 - c^2$ auftreten. Dieser Gesichtspunkt ist für die folgenden Betrachtungen maßgebend.

Wir fassen a, b, c als kontinuierliche Variable auf, die so gewählt sein sollen, daß die Quadratwurzel in (1) reell bleibt. Die Größe unter der Quadratwurzel kann man auch in der bekannten Gestalt schreiben

$$H = (a + b + c)\ (-a + b + c)\ (a - b + c)\ (a + b - c).$$

Wir werden H als das HERONsche Polynom bezeichnen.

Um zu partiellen Differentialgleichungen für H oder irgendeiner Funktion von H allein zu gelangen, drücken wir aus, daß diese nur von $\varphi \equiv ab$, $\psi \equiv a^2 + b^2 - c^2$ abhängen dürfen. Dies leistet die JACOBIsche Funktional-Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Man findet also $\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ b & a & 0 \\ 2a & 2b & -2c \end{vmatrix} \equiv 0$, oder entwickelt

$$\begin{aligned} Af &\equiv ac \frac{\partial f}{\partial a} - bc \cdot \frac{\partial f}{\partial b} + (a^2 - b^2) \frac{\partial f}{\partial c} = o, \\ Bf &\equiv (b^2 - c^2) \frac{\partial f}{\partial a} + ab \frac{\partial f}{\partial b} - ac \cdot \frac{\partial f}{\partial c} = o, \qquad (2) \\ Cf &\equiv - ab \frac{\partial f}{\partial a} + (c^2 - a^2) \frac{\partial f}{\partial b} + bc \frac{\partial f}{\partial c} = o. \end{aligned}$$

Die zweite und die dritte Gleichung folgen aus der ersten durch cyklische Vertauschung von a, b, c.

Af, Bf, Cf sind die bekannten Symbole einer infinitesimalen Transformation nach Sophus LIE.[1])

Die Gleichungen (2) sind drei simultane partielle Differentialgleichungen für den Flächeninhalt eines beliebigen Dreieckes.

Die drei simultanen Gleichungen sind von einander nicht unabhängig. Dies zeigt man sofort mit Hilfe ihrer Determinante D. D läßt sich in der Form schreiben

$$D \equiv - \begin{vmatrix} -bc & ac & a^2-b^2 \\ ab & b^2-c^2 & -ac \\ c^2-a^2 & -ab & bc \end{vmatrix} \equiv o,$$

da eine schiefsymmetrische Determinante vorliegt.

Die Gleichungen $Af = o$, $Bf = o$ sind offenbar von einander unabhängig. Dagegen läßt sich Cf durch diese linear und homogen darstellen. Es ist

$$c \;\; Af + a \;\; Bf + b \;\; Cf \equiv o.$$

Die Gleichungen $Af = o$, $Bf = o$ bilden ein Vollständiges System (JACOBI, CLEBSCH, LIE). Es hat H als einzige wesentliche Lösung, jede andere Lösung ist eine Funktion von H allein.

Wir bilden noch den POISSONschen Klammerausdruck

$$(AB) \equiv A(Bf) - B(Af) \equiv -a \,.\, Af - c \,.\, Bf$$

Der Klammerausdruck gibt also nichts Neues, wie es sein muß.

Zum Schluß wollen wir noch ein einfaches Beispiel zu der von Sophus LIE geschaffenen Theorie: Integration eines Vollständigen Systems mit bekannter Gruppe vorlegen.

$Af = o$, $Bf = o$ sei das früher erwähnte Vollständige System.

Es ist leicht eine kontinuierliche Gruppe zu finden, die das System invariant läßt.

Wir setzen

$$a_1 = \rho a, \; b_1 = \rho b, \; c_1 = \rho c,$$

wobei ρ einen willkürlichen Parameter bedeutet. In der Tat läßt

---

[1]) Die Charakteristiken von $Af = o$ sind gegeben durch: $ab = C_1$, $a^2 + b^2 + c^2 = C_2$, $\int \frac{da}{\sqrt{a^4 - C_2 a^2 + C_1^2}} = t + C_3$.

diese Gruppe (bei LIE: „Streckung") das gegebene System invariant. Das Symbol ihrer infinitesimalen Transformation lautet

$$Uf \equiv af_1 + bf_2 + cf\ ^{2)}.$$

Um das System zu integrieren, setzen wir nach LIE

$$\begin{aligned} Af &= o, \\ Bf &= o, \qquad\qquad (3) \\ Uf &= 1. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind nach f_1, f_2 und f_3 auflösbar, denn ihre Determinante

$$N \equiv \begin{vmatrix} ac & -bc & a^2-b^2 \\ b^2-c^2 & ab & -ac \\ a & b & c \end{vmatrix} \equiv b\left\{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4\right\} \equiv bH$$

verschwindet nicht.

Für f_1, f_2, f_3 ergeben sich dann die Werte

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{H}, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{H}, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{H}$$

Daher ist

$$\frac{a\,(b^2+c^2-a^2)\,da + b\,(a^2+c^2-b^2)\,db + c\,(a^2+b^2-c^2)\,dc}{2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-a^4-b^4-c^4}$$

ein totales Differential.

Demnach ist

$$f = \int \frac{a\,(b^2+c^2-a^2)\,da}{2\,a^2b^2+2a^2c^2+2\,b^2c^2-a^4-b^4-c^4} + \mathfrak{C}\,(b, c) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4}\int \frac{\frac{\partial H}{\partial a}\,da}{H} + \mathfrak{C}\,(b, c) \equiv \frac{1}{4}\,\log H + \mathfrak{C}\,(b, c).$$

Jetzt ist $\dfrac{\partial f}{\partial b} \equiv \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4a^2b+4bc^2-4b^3}{H} + \dfrac{\partial \mathfrak{C}\,(b,c)}{\partial b} \equiv \dfrac{b\,(a^2+c^2-b^2)}{H}$,

also

$$\frac{\partial \mathfrak{C}\,(b, c)}{\partial b} \equiv o, \text{ ebenso ist } \frac{\partial \mathfrak{C}\,(b, c)}{\partial c} \equiv o.$$

$\mathfrak{C}$ ist also eine bloße Konstante.

Demnach ergibt sich als Integral des totalen Differentials

$$\frac{1}{4}\log H + \mathfrak{C}.$$

Wir sind also zum HERONschen Polynom zurückgekehrt.

Freudenthal, im Juli 1940.

---

[2]) Wir erhalten noch (AU) $\equiv -$ Af, (BU) $\equiv -$ Bf, wie die Theorie verlangt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften

Jahr/Year: 1939-1940

Band/Volume: 87

Autor(en)/Author(s): Carda Karl

Artikel/Article: Partielle Differentialgleichungen für den Flächeninhalt des Dreieckes 196-198