Walther L. Fischer

Zur Mathematisierung des Verhaltens in Konfliktsituationen – Die mathematische Theorie der Spiele –

I. Einleitung

1. Gegenstands- und Anwendungsbereich der Spieltheorie

1.1. Wir werden uns im folgenden mit Konfliktsituationen befassen, die aus Interessengegensätzen von Menschen oder Interessengruppen entstehen. In solchen Situationen haben zwei oder mehrere Partner Entscheidungen zu treffen – sie haben eine Wahl aus einer endlichen Anzahl von Möglichkeiten zu treffen. Sie verfolgen dabei gewisse Intentionen, die im wesentlichen auf einen Erfolg ihrer Aktivitäten abzielen, und sie haben zu handeln, ohne im allgemeinen die Wahl ihres Gegners zu kennen.

Konflikt- und Wettbewerbssituationen, in welchen der Erfolg nicht nur von der eigenen Entscheidung, sondern auch von der der Gegner abhängt, finden sich im Umkreis wirtschaftlicher, gesellschaftlicher und auch kriegstechnischer Fragen.

Interessenkonflikte treten aber auch in Gesellschaftsspielen auf, vor allem in Gesellschaftsspielen, die nicht reine Glücksspiele sind. Mit den reinen Glücksspielen – wie dem Würfelspiel oder dem Roulette –, in welchen ein Idiot dieselben Gewinnchancen hat wie ein hochintelligenter Mensch, beschäftigt sich mathematisch die Wahrscheinlichkeitstheorie und die mathematische Statistik. Die Geschehenswelt der strategischen Spiele, in welchen also nicht alle Züge der Partner zufallsbestimmt sind, wird in der sogenannten *»Theorie der strategischen Spiele«* (häufig kurz »Mathematische Spieltheorie« genannt) behandelt.

1.2. Die Mathematisierung einer außermathematischen Situation besteht in der Modellierung des betreffenden Gegenstandsbereichs durch mathematische Strukturen.

Im Falle der theoretischen Behandlung von Interessenkonflikten verwendet die Theorie der Spiele bestimmt modifizierte und definierte Spielbegriffe als Modelle und fragt danach, ob es für den einzelnen Akteur oder »Spieler«, wie wir ihn fortan nennen wollen, optimale Verhaltensweisen gibt, d. h., ob man rationale Argumente dafür vorbringen kann, einer bestimmten Spiel- bzw. Verhaltensweise den Vorzug vor anderen zu geben.

1.3. Die *Aufgabe der Spieltheorie* besteht also zunächst darin, eine gegebene Konfliktsituation in angemessener Weise durch ein Spielmodell darzustellen und sodann für jeden Spieler optimale Verhaltensweisen anzugeben, also Verhaltensweisen, die ihm einen optimalen Gewinn sichern unter der Voraussetzung, daß auch die jeweiligen Gegenspieler intelligent sind und rational handeln.

1.4. Aus dem Gesagten wird ersichtlich, daß sich für die Entwicklung der Spieltheorie der Ausbau ihrer »begrifflichen« Seite als ebenso bedeutsam erweist wie der ihrer »numerischen« Seite.

2. Zur Geschichte der Spieltheorie

Die Theorie der strategischen Spiele ist zunächst und fast ausschließlich das Werk *John v. Neumanns*, eines Mathematikers von säkularer Bedeutung. Legendär ist seine Auffassungsgabe, die Geschwindigkeit seines Denkens, das Fassungsvermögen seines Gedächtnisses. Legendär auch seine mathematische Brillanz.

1903 in Budapest geboren, verstarb von Neumann allzu früh mit 53 Jahren 1957 in Amerika.[1]

Um nur einige seiner bedeutenden Leistungen zu nennen:[2] Neumann hat 1922 eine nach ihm benannte Axiomatik der Mengenlehre konstituiert. Er brachte 1932 den Formalismus der Quantentheorie in eine strenge mathematische Form. Er entwickelte grundlegende Ideen für die Konstruktion des Computers – noch heute sind die gängigen programmgesteuerten Rechenmaschinen vom »von-Neumann-Typ«. Noch auf dem Krankenlager entwickelte er die Idee und Theorie sich selbst reduplizierender Automaten und schrieb das Buch: »The Computer and The Brain«[3].

Im 100. Band der Mathematischen Annalen hat von Neumann 1928 eine

Arbeit veröffentlicht, in der die Grundgedanken seiner »Theorie der strategischen Spiele« formuliert sind. Zusammen mit Oskar Morgenstern hat er dann 1944 das umfangreiche Werk »Theory of Games and Economic Behaviour«[4] publiziert.

II. Begriffsbestimmungen

1. Spielerei und Spiel

1.0. Bevor wir uns den charakteristischen Aufgabenstellungen und den numerischen Fragen der Spieltheorie zuwenden können, sind einige begriffliche Klarstellungen erforderlich; sie sollen helfen, die idealisierenden Voraussetzungen verständlich zu machen, die der Mathematisierung des anschaulichen Hintergrunds der Spieltheorie und der Möglichkeit ihrer Anwendung zugrunde liegen.

1.1. Der tägliche Gebrauch der Umgangssprache unterscheidet sehr genau zwischen Spiel und Spielerei.

Der *Spielerei* fehlt der ernste Hintergrund, der Wille zur Konsequenz, zur unbedingten Konsequenz bis ans Ende, der Wille zur Bindung. In der Spielerei »setzen« wir nichts »aufs Spiel«. Wir wagen nicht und gewinnen oder verlieren daher auch nicht. Die Spielerei ist unverbindlich; sie erschöpft sich im planlosen Kombinieren; der Zufall hat keinen Gegenspieler in unserem zielbewußten Denken, in unserer Strategie. In der Spielerei werden keine Gesetze anerkannt, denen sich die Figurenbewegungen außer der Naturgesetzlichkeit unterzuordnen hätten.

Im *Spiel* dagegen sind wir gebunden durch die Regeln; sie treffen eine Auswahl unter der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Bewegungen; sie machen das Spielen eines Spieles zu einer Aufgabe, die gelöst sein will, verleihen so dem Spiel einen Sinn, seinen Sinn.

1.2. Was also ist ein Spiel? – Was unsere Gesellschaftsspiele, was Dame, Mühle, Schach und Schafkopf, was Roulette, Fußball und Autorennen, Blindekuh . . . gemeinsam haben, ist, daß in ihnen allen kurzzeitig eine kleine künstliche Welt *in* der Welt aufgerichtet wird – ein künstlicher Ablauf von Geschehnissen, von uns geplant, in Gang gesetzt und von uns in seiner Gesetzmäßigkeit anerkannt.

Auch Tiere spielen. Aber sie wissen nicht um die Mannigfaltigkeit und um die Endlichkeit der Anzahl der Kombinationen – sie spielen ohne Verlangen nach Begrenzung und ohne Konsequenz, d. h. aber: sie bedürfen nicht des definierten Spiel-*Feldes* und nicht der definierten Spiel-*Regel.*

Jedes Spiel ist erklärt durch den Inbegriff seiner Regeln.

1.3. Das *reale Spielen* eines Spieles – eine Partie, ein Satz – besteht aus *Bewegungen* von *Figuren* in einem Raumgebiet:

a) von materiellen Realitäten im Realraum (von Menschen, Bällen, Steinen, Holzfiguren, Karten usw., auf Plätzen, in Sälen, auf Tischen, Brettern usw.)

b) oder von ideellen Realitäten im Idealraum (bei Spielen, in denen Worte oder Zahlen zu erraten sind usw.)

c) oder von beiden zugleich (bei Lotto, Toto usw.).

1.4. Jedes Spiel läßt sich als kombinatorisch-topologisches Problem formulieren, läßt sich durch einen bewerteten Graphen darstellen.[5]

1.5. Zu Spiel-Feld, Spiel-Regel, zu Spiel-Figur und Figuren-Bewegung kommt ein Fünftes:

Der Wille zur Konsequenz und die Notwendigkeit, bei jedem Zug eine bestimmte Figurenbewegung unter einer Vielzahl möglicher Bewegungen auszuwählen, und die Tatsache, daß wir uns einem intelligenten Partner gegenübersehen, der einen maximalen Gewinn erstrebt, zwingt uns dazu, nicht willkürlich vorzugehen, sondern uns einen *Plan* zurechtzulegen.

Das Problem, den besten Spiel-Plan, die beste Strategie zu finden, ist das *Problem des Spieles* schlechthin. Die Auffindung der bestmöglichen Strategie bedeutet die *Lösung* des Spielproblems. – Das heißt nicht etwa, daß in jedem Falle vor Beginn eines Spieles die Strategie, der der Spieler zu folgen beabsichtigt, festgelegt sein müsse. Nein, vielfach wird der Spiel-Plan von Zug zu Zug neu gestaltet, modifiziert. Wenn es einfach wäre, die beste Strategie zu finden, im vorhinein zu finden, würde niemand von uns Spaß am Spielen haben; die Auffindung des optimalen Spielplanes macht das Spielen eines Spieles überflüssig.

1.6. Und schließlich: Fragen wir uns, warum die Auffindung der optimalen Strategie solche Schwierigkeiten mit sich bringt, so finden wir, daß es nicht allein die kombinatorische Vielfalt der Figurenbewegungen ist, die als spannungserzeugendes Element im Spiele auftritt. Es ist vielmehr auch die bei vielen Spielen unvollkommene *Information* über die Absichten und Möglichkeiten unserer Gegenspieler, die uns Kopfzerbrechen bereitet. Je unvollkommener unsere Informationen über die Absichten und Möglichkeiten unserer Gegenspieler sind, um so mehr wird unsere Wahl unter den möglichen Figurenbewegungen, um so mehr wird unsere Strategie von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen bestimmt.

2. Spiel und Partie

2.1. Den Wortgebrauch präzisierend, sind noch einige terminologische Doppeldeutigkeiten auszuschließen.

Wir sprechen davon, daß »Schach ein Brett-Spiel« sei – und in anderem Zusammenhang sagen wir: »Hätte ich im letzten Schach-Spiel diesen Zug gemacht, so hätte ich gewonnen.«

Diese Beispiele erhellen, daß wir – wie wir bereits in 1.3. angedeutet haben – unterscheiden müssen zwischen dem *abstrakten Begriff* eines Spieles und dem *individuellen Spielen* eines Spieles. Wir werden den abstrakten Begriff eines Spieles, erklärt durch den Inbegriff seiner Regeln, mit dem Wort *»Spiel«* bezeichnen, jeden besonderen Fall, in dem ein Spiel von Anfang bis zum Ende durchgespielt wird, eine *»Partie«* oder einen *»Satz«* nennen.

Eine entsprechende Unterscheidung sollte man für die Figurenbewegungen treffen. Wir könnten das Wort *»Zug«* verwenden, um innerhalb eines Spieles die Gelegenheit einer Auswahl zwischen verschiedenen Alternativen zu bezeichnen, die von einem Spieler getroffen werden muß. Die spezifische Alternative, die der Spieler in einer Partie wählt, wollen wir mit *»Bewegung«* oder durch das Wort *»Wahl«* umschreiben. Wir würden also sagen: »Schwarz gewann durch eine geschickte Figuren-Bewegung bei seinem zehnten Zug.«

2.2. Mit anderen Worten: Ein Spiel besteht aus einer Folge von Zügen – eine Partie aus einer Folge von Figuren-Bewegungen, natürlich jeweils in Übereinstimmung mit den das Spiel erklärenden Regeln.

3. Typen strategischer Spiele/Klassifikation

3.1. Die strategischen Spiele lassen sich in verschiedener Weise klassifizieren. Zunächst lassen sich die Spiele unterscheiden nach der *Anzahl der beteiligten Spieler.*

Schach ist ein 2-Personen-Spiel, Kartenspiele können 2- oder Mehr-Personen-Spiele sein.

3.2. Nehmen wir an, daß es in jedem Spiel um Gewinn-Werte geht, z. B. um Geld, so geschieht es bei den üblichen Gesellschaftsspielen, daß die Summe der Zahlungen am Ende des Satzes gleich 0 sein wird. Jedem Gewinn entspricht beim Verlierenden ein gleich großer Betrag an Verlust.

Im Prozeß des Spielens einer Partie werden in diesem Fall weder Werte geschaffen noch vernichtet. Die Summe der Einsätze wird am Ende der Partie gleich sein der Summe der Gewinne. Daß sich durch das Spielen der Partie die Verteilung der Geldwerte verändert hat, ändert nichts an der Tatsache, daß die Summe aus Gewinn und Verlust am Ende der Partie gleich 0 sein wird. Spiele dieser Art nennen wir *»Nullsummenspiele«* (»0-Summen-Spiele«).

Neben solchen Spielen haben aber auch die *»Nicht-Nullsummenspiele«* große Bedeutung, vor allem dann, wenn wir z. B. Modelle für ökonomische Prozesse suchen. Ökonomische Prozesse erzeugen oder zerstören im allgemeinen Werte. Rohstoffe werden durch menschliche und maschinelle Arbeitsleistung an ihnen veredelt – die benutzten Maschinen nützen sich ab, verlieren an Wert. Auch Situationen im Kriegsgeschehen sind nur durch Nicht-Nullsummenspiele zu modellieren.

3.3. Wir können die Spiele auch klassifizieren nach der Anzahl ihrer Züge. Wir können *endliche* Spiele von *unendlichen Spielen* trennen, Spiele mit *fester* Zuganzahl von solchen mit *veränderlicher Anzahl* der Züge (z. B. Schach).

3.4. Weiter können wir Spiele, in denen Züge auftreten, die rein vom Zufall abhängen (*»Zufallszüge«*), unterscheiden von Spielen, in denen alle Züge vom Zufall bestimmt sind, unterscheiden von Spielen, in denen alle Züge durch individuelle Entscheidungen festgelegt werden (*»persönliche Züge«*).

3.5. Spiele können wir auch einteilen nach dem Betrag an Information, der den einzelnen Mitspielern über Spielstand und Spielabsichten zur Verfügung steht.

Ist jeder Spieler vor Ausführung einer Figuren-Bewegung über das Ergebnis aller vorausgegangenen Bewegungen informiert, wie das etwa beim Schachspiel der Fall ist, so nennen wir das Spiel »Spiel mit *perfekter Information*«. Von diesen Spielen unterscheiden sich z. B. viele Kartenspiele dadurch, daß jeder Spieler zwar alle bereits ausgespielten Karten kennt und dazu sein eigenes »Blatt«, nicht aber die Verteilung der restlichen Karten auf die Blätter der Mitspieler und auf das etwa noch liegende Vorratsstößchen, von dem nach jeder Bewegung abgehoben werden muß. Diese Verhältnisse erschweren es dem Spieler, eine Strategie zu finden. Er ist eventuell von Bewegung zu Bewegung gezwungen, seinen Spielplan zu ändern. Jedes Ausspiel bedeutet für jeden der Spieler zusätzlichen Informationsgewinn. Außerdem ist die Verteilung der Karten zu Beginn durch das Mischen zufallsbestimmt. Spiele dieser Art heißen dementsprechend »Spiele mit *unvollkommener Information*«.

3.6. Bei den Mehr-Personen-Spielen kann es sich ereignen, daß sich einige Spieler zu einer Einheit zusammenschließen, d. h., daß »Koalitionsbildungen« auftreten. Wir haben demgemäß *»kooperative Spiele«* von *»nichtkooperativen Spielen«* zu trennen. Im Zusammenhang damit und mit der den einzelnen Spielern verfügbaren Information stehen weitere Probleme, wie sie sich durch »Bluffen« und »Signalisieren« ergeben.

3.7. Auch die *Anzahl der Strategien,* die den Spielern zur Verfügung stehen, dient als Einteilungsprinzip. So wäre ein 2-Personen-Spiel, in welchem der erste Spieler 4 mögliche Verhaltensweisen, der zweite Spieler 6 mögliche Verhaltensweisen zur Verfügung hat, ein Spiel vom »Typ 4x6«.

3.8. Schließlich können wir Spiele unterscheiden nach der Art, in der ihre Regeln bzw. die Gewinn- und Verlustbedingungen gegeben sind. Spiele in *»Normalform«* (in Matrixform) werden unterschieden von denen in *»extensiver Form«*. Im folgenden werden wir uns im wesentlichen mit Matrixspielen befassen. Beispiele für Spiele in extensiver Form liefern alle strategischen Gesellschaftsspiele und die meisten Anwendungen.[6]

a)

vollständige Information — ohne Zufallszüge

unvollständige Information

0-Summen-Spiel — mit Zufallszügen

2-Personen-Spiel

Nicht-0-Summen-Spiel

(siehe oben)

n-Personen-Spiel — nicht kooperativ / kooperativ

b)

Spiele in Matrixform

Spiele in extensiver Form

Tabelle: Klassifikation von Spielen

4. Wettbewerbssituation – das Maximierungsproblem der Spieltheorie

4.1. Da die Spieltheorie auf Konflikt- bzw. Wettbewerbssituationen in verschiedenen Lebensbereichen Anwendung findet, wollen wir bei unseren Beispielen nicht nur einfache Gesellschaftsspiel-Situationen berücksichtigen, sondern andeutungsweise auch die genannten anderen Anwendungsgebiete anklingen lassen.

Daher wollen wir zunächst fragen: Welches ist die grundlegende Eigenschaft einer Wettbewerbssituation in einem für die Spieltheorie relevanten Interessenkonflikt?

Das Grundproblem der Spieltheorie ist ein *Maximumproblem,* freilich ein solches, das seiner Natur nach völlig verschieden ist von den sonst in der Mathematik behandelten Extremwertaufgaben. Dies läßt sich besonders gut an einem der Hauptanwendungsgebiete der Theorie verdeutlichen: an der Wirtschaftstheorie. Es wird sich dabei gleichzeitig erweisen, wieso die Spieltheorie für die Erforschung menschlicher Verhaltensweisen schlechthin eine gewisse Bedeutung gewonnen hat.

4.2. »Wirtschaft ist die Gesamtheit der Einrichtungen und Verfahren, mit denen Menschen Mittel, d. h. ›Güter‹, für erstrebte Zwecke, d. h. zur ›Befriedigung von Bedürfnissen‹, beschaffen und verwenden.

Im Unterschied zu ähnlichen Erscheinungen in der Tierwelt ist das Wirtschaften des Menschen nicht triebhaft, sondern bewußt

a) in Mitteln und Zwecken auf ständige Ausweitung tendierend,
b) in planender Vor-Sorge in die Zukunft hinein und
c) auf das Ziel der Erreichung höchstmöglichen Erfolges gerichtet.
d) Schließlich schafft es Dauereinrichtungen, um erkannte Wirkungszusammenhänge den Zwecken der Menschen nutzbar zu machen.«

»Gewirtschaftet wird mit Mitteln, die im Verhältnis zu den von ihnen abhängigen Zwecken ›knapp‹ sind, so daß ihr Einsatz für bestimmte Zwecke den Verzicht auf ihre Verwendung für andere Zwecke bedingt. Die ›Kosten‹ eines erreichten Nutzens sind daher ›entgangener Nutzen‹ der unterbliebenen Verwendung der Mittel für andere Zwecke. Grundprinzip allen Wirtschaftens ist der ständige Vergleich zwischen Nutzen-(Erfolgs-)Größen bei verschiedenen möglichen Arten der Mittelverwendung; Ziel dieser Wahlhandlungen ist die Maximierung der positiven Differenz zwischen Erfolg (erreichtem Nutzen, Ertrag) und Opfer (entgangenem Nutzen, Aufwand).« Dies sind nach Paulsen (Paulsen, 1956, 7–8) die Grundzüge des Begriffes Wirtschaft und des Wirtschaftens.

Die Geschehensgesamtheit eines Wirtschaftskreislaufes ist ein Geflecht von Wechselwirkungen. Jedes Subjekt wirkt durch die Bereitstellung von Arbeitsleistung, durch seine eigenen Dispositionen und Entscheidungen u. a. m. auf die übrigen oder mindestens einen Teil der übrigen Subjekte ein – und es erhält umgekehrt durch die Verhaltensweise der anderen Subjekte Rückwirkungen.

Mit anderen Worten: Jeder Beteiligte versucht eine Funktion zu maximieren, nämlich die Größe seiner Bedürfnisbefriedigung, beherrscht aber nicht – im Gegensatz zu einem (idealisierten) Robinson Crusoe[7] – alle damit im Zusammenhang stehenden veränderlichen Größen. Es handelt sich nicht mehr um ein Maximumproblem der klassischen Art. Es handelt sich überhaupt nicht um ein Extremwertproblem bereits bekannter Art: nicht um die Extremwertbestimmung differenzierbarer Funktionen in der Differentialrechnung, nicht um das Problem konditionierter Extrema, auch nicht um ein Extremwertproblem der Variationsrechnung oder der Funktionalanalysis.

4.3. Fassen wir zusammen: In den von uns intendierten Situationen versucht jeder Beteiligte eine Funktion zu maximieren. Jeder wird von einem anderen Prinzip, einer anderen Strategie geleitet, und keiner bestimmt alle Variablen, die sein Interesse beeinflussen, vollständig.

Von Individuen, welche solche Maxima bewußt zu erreichen versuchen, sagen wir, sie *»handeln rational«*.

Die *»Theorie der Spiele«* hat das rationale oder optimale Verhalten von Individuen in allen solchen Situationen zum Gegenstand, in denen das Endergebnis von gewissen interessenbedingten Entscheidungen mehrerer Individuen oder im gewissen Maße auch vom Zufall abhängt.

Genau solchen Situationen begegnen wir auch im Zusammenhang mit kriegstechnischen, mit soziologischen Problemen.

5. Voraussetzungen der Spieltheorie I: Grundfragen

5.1. Die mathematische Theorie der Spiele geht – wie jede mathematische Theorie, die außermathematische Situationen modelliert – von begrifflichen Idealisierungen aus. Für die einfacheren Spielsituationen geht sie aus von den *Voraussetzungen*:

(1) Das Spiel ist durch ein festes System von Spielregeln bestimmt;
(2) es findet kein Betrug statt;
(3) alle auftretenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt;
(4) das Spiel ist nach endlich vielen Schritten beendet;
(5) am Ende steht genau fest, wieviel jeder gewonnen hat, und
(6) jeder Spieler strebt danach, einen möglichst großen Gewinn zu erreichen.

5.2. *Wovon hängt der Gewinn eines einzelnen Spielers ab?*

Der erzielte bzw. erzielbare Gewinn jedes Spielers hängt ab

(i) von der Strategie des Spielers;
(ii) von der Strategie der anderen Spieler;
(iii) eventuell auch vom Zufall (wenn z. B. im Spiel gewürfelt wird oder von der anfänglichen Verteilung der Karten).

5.3. *Wie muß der einzelne Spieler spielen, d. h., welche Zugfolge, welche Strategie muß er wählen, um ein möglichst günstiges Spielergebnis zu erzielen?*

(i) Von den drei letztgenannten Bedingungen ist die erste insofern am wenigsten problematisch, weil die vom betreffenden Spieler angewendete Strategie jeweils von ihm selbst bestimmt werden kann.

Schwierigkeiten bereiten die beiden anderen Bedingungen:

(ii) Der Gewinn eines Spielers hängt von den Strategien auch der anderen Spieler ab, die er

a) nicht beeinflussen kann – und die er
b) im allgemeinen nicht kennt.

(iii) Der Gewinn eines Spielers hängt in Spielen mit Zufallszügen auch vom Zufall ab; auch er kann nicht vom Spieler beeinflußt werden.

5.4. In der von Neumannschen Theorie wird die letztgenannte Schwierigkeit dadurch bewältigt, daß statt des »effektiven Gewinns«, den ich oder einer der Gegenspieler in einer Partie erzielen kann, der *»Erwartungswert«* des Gewinns betrachtet wird. Der Erwartungswert ist – wie wir noch ausführen werden[8] – ein (mit Wahrscheinlichkeiten) gewichteter Mittelwertgewinn. Ein solcher Wert hängt nun nicht mehr vom Zufall ab, sondern nur noch von der eigenen Strategie und von den Strategien der anderen Spieler.

Als weitere idealisierende Annahme erhalten wir damit global gesprochen:

(6') Die Spieler streben durch ihre Spielweise eine Maximierung des Erwartungswertes des Gewinnes an.

5.5. Das Problem der Lösung eines Spiels, d. h. die Frage, wie man sich gewinnbringend möglichst günstig verhält, reduziert sich damit auf die Beantwortung der einen Frage:

(*) Welche Strategie soll der einzelne Spieler wählen, damit seine Gewinnerwartung möglichst groß wird?

6. Voraussetzungen der Spieltheorie II: Spiele in Matrixform

6.1. Wir werden den Problemkreis der Hauptfrage (*) der Spieltheorie im folgenden nicht in der dem Mathematiker gewohnten Abstraktheit angehen; noch werden wir sie in größerer Allgemeinheit abhandeln. Wir werden einige

Ergebnisse der (elementaren) Spieltheorie und ihre Folgerungen an einigen Beispielfällen aufzeigen. Es geht um die Erörterung des Grundsätzlichen.

6.2. Dazu machen wir weiter die folgenden *Voraussetzungen:*

(a) jeder Spieler hat bei jedem Zug *nur endlich viele Möglichkeiten* für sein Verhalten zur Verfügung;

(b) jedes Spiel ist nach *endlich vielen Zügen* entschieden (vgl. 5.1. (4)).

Diese beiden Annahmen haben zur Folge,

(c) daß jeder Spieler *nur endlich viele Strategien* anwenden kann.

6.3. Diese sehr engen Voraussetzungen haben für die mathematische Behandlung spieltheoretischer Situationen ihre Konsequenzen.

Wegen unserer Endlichkeitsforderungen kann man die Strategien der einzelnen Spieler irgendwie bezeichnen; man kann sie z. B. vollständig durchnumerieren und kann z. B. im Falle von 2-Personen-Spielen die Gesamtheit der Situationen/Möglichkeiten durch eine Tabelle – durch ein in Zeilen und Spalten gegliedertes Schema, eine *Matrix* – darstellen.

Im Falle eines 2-Personen-Spieles seien etwa die möglichen Verhaltensweisen – wir nennen sie *»Strategien«* –

des Spielers A mit: 1, 2, . . ., r,
des Spielers B mit: 1, 2, . . ., s

bezeichnet.

Die Ergebnisse des Wahlverhaltens, der Entscheidungen für die eine oder andere Strategie, werden (durch die Spiel-Regeln) bewertet. Diese Bewertung erfolgt durch die sogenannte *»Auszahlungs-«* oder *»Gewinnfunktion«*. Ihre Werte bedeuten in Gesellschaftsspielen häufig monetäre Werte. In vielen anderen Fällen aber sind sie nur als relative Werte zu sehen; sie geben dann jeweils die Einschätzung der Lage oder die Abschätzung von Prioritäten an.[9] Je nachdem, welche Strategien die beiden Spieler wählen, erhalten sie in Abhängigkeit von den gewählten Strategien jeweils einen bestimmten Gewinn. Wählt Spieler A die Strategie i ($i \in \{1, \ldots, r\}$) und Spieler B die Strategie j ($j \in \{1, \ldots, s\}$), so sei der für Spieler A erzielte Gewinn mit

$$g(i, j)$$

bezeichnet. Die Gesamtheit aller möglichen Gewinne für *Spieler A* kann man danach in einem Zahlenschema mit r Zeilen und s Spalten, in einer sogenannten *r×s-Matrix* zusammenfassen.[10] Spiele, die sich in einer solchen Form darstellen lassen, heißen *»Matrix-Spiele«, »Rechtecksspiele«* oder *»Spiele in Normalform«.*

Spieler B

		1	2	...	j		s	
	1	g (1,1)	g (1,2)	...	g (1,j)	...	g (1,s)	
	2	g (2,1)	g (2,2)	...	g (2,j)	...	g (2,s)	
	.	.	.		.		.	
	.	.	.		.		.	
	.	.	.		.		.	
Spieler A	i	g (i,1)	g (i,2)	...	g (i,j)	...	g (i,s)	(M*)
	.	.	.		.		.	
	.	.	.		.		.	
	.	.	.		.		.	
	r	g (r,1)	g (r,2)	...	g (r,j)	...	g (r,s)	

Im Falle eines 0-Summen-Spiels, in dem also der Betrag, den der eine Spieler gewinnt, als Verlust auf dem Konto des anderen Spielers erscheint bzw. umgekehrt, würde die *Spielmatrix des Spielers B* an den Kreuzungsstellen von Zeilen und Spalten die gleichen Beträge – freilich mit umgekehrtem Vorzeichen – enthalten.

Bezogen auf *Matrix-Spiele* gewinnt unsere Hauptfrage (*) die Form:

Welche Strategie (Zeile i) soll Spieler A, welche Strategie (Spalte j) soll Spieler B wählen, um zu einem möglichst günstigen Spielergebnis zu kommen?

III. Beispiele für Matrixspiele

1. Zwei-Personen-Nullsummenspiele mit vollständigem Konflikt

1.1. *Matrix-Spiele mit Sattelpunkt – reine Strategien*

1.1.1. *Spielsituation 1: Ein einfaches Kartenspiel*/Begriffe: Strategie, Wert, Lösung

Wir kommen nun zu den Beispielsfällen für strategische Spiele. Das erste Beispiel ist so einfach, daß man es kaum als ein echtes, spannungsreiches Spiel wird bezeichnen können. Es soll uns lediglich an die Thematik und die spezielle Methodik der Spieltheorie heranführen. Stufenweise werden wir – immer noch bei einfachen Spielsituationen verbleibend – komplexere Fälle angehen.

Betrachten wir zunächst folgendes Kartenspiel:

Spiel 1:

Zwei Spieler, nennen wir sie »A« und »B«, erhalten je zwei Spielkarten.

A erhält: eine »rote 9«,
eine »grüne 9«,
B erhält: eine »rote 9«,
eine »grüne 7«.

Bei einem bestimmten Signal legen beide (etwa in Gegenwart eines »Schiedsrichters«) eine ihrer Karten auf. A bzw. B gewinnt nun gemäß folgender Spielregel:

(1) Stimmen die Karten in der Farbe überein, so gewinnt A die (positive) Differenz der Kartenzahlen (etwa in Pfennigen oder in D-Mark).

(2) Stimmen die Karten nicht in der Farbe überein, so gewinnt B die (positive) Differenz der Kartenzahlen.

Wir haben hier ein Zwei-Personen-Spiel mit nur einem Zug vor uns.

Es ist bequem, dieses Spiel durch das folgende Zahlenschema (= »Matrix«) darzustellen:

Spieler »B«:

Spieler »A«:		r 9	g 7
	r 9	0	–2
	g 9	0	+2

(M 1)

Die vorliegende Matrix bezieht sich auf den Spieler A. Die +-Zeichen bedeuten Gewinn, die –-Zeichen Verlust. Die Matrix für Spieler B hätte die gleiche Gestalt; lediglich + - und –-Zeichen wären vertauscht. Es genügt also, eine der beiden Matrizen zu betrachten. Ihre »Eingänge« sind die »Wahlmöglichkeiten«, die den einzelnen Spielern offenstehen, die Zahlen der 2×2-Matrix selber stellen die Gewinn- bzw. Verlustwerte dar.

Wählt z. B. A Zeile 1 (r 9) und B Spalte 1 (r 9), so gewinnt A den Betrag »0«.

Wählt A Zeile 1 (r 9), B jedoch Spalte 2 (g 7), so gewinnt A den Betrag »–2«, d. h. A verliert an B, B gewinnt den Betrag »+2« usw.

Unser Spiel ist durch die angegebene Matrix vollständig bestimmt. Wir nennen es ein *»2×2-Matrix-Spiel«*. Dabei kontrolliert Spieler A die Zeilen, Spieler B die Spalten der 2×2-Matrix.

Wie soll nun jeder der Spieler spielen, um optimal zu spielen?

A möchte (in unserer obigen Matrix) natürlich den Gewinn »+2«, B den Fall »–2« erreichen. Spielt A »Zeile 1«, so wird er entweder nichts gewinnen oder zwei Einheiten verlieren. Spielt er dagegen »Zeile 2«, so wird er entweder nichts oder zwei Einheiten gewinnen. Für Spieler A ist es also zweifellos günstig, »Zeile 2« zu wählen.

Wie aber soll sich B verhalten? – Spielt B »Spalte 2«, so kann er gewinnen oder verlieren; spielt er »Spalte 1«, so wird er weder gewinnen noch verlieren. Für ihn liegt »Spalte 1« günstiger als »Spalte 2«.

Eine mögliche Verhaltensweise, genauer eine Anweisung, eine bestimmte Figurenbewegung auszuführen, also z. B.: »Spiele ›rot 9‹« nennen wir auch in diesem einfachen Spiel eine *»Strategie«*.

Wählen die Spieler die angegebenen, von uns als »günstig« erachteten Strategien, so ist A sicher, daß er nichts verliert oder gar »2« gewinnt, B ist sicher, daß er »höchstens« »0« verliert bzw. »mindestens« »0« gewinnt.

Statt von »günstigen Strategien« zu sprechen, wollen wir hier von *»optimalen Strategien«* sprechen, weil in unserer einfachen Spielproblemsituation günstige Strategien zugleich optimale Strategien sind. Das Ergebnis des Spieles, das erhalten wird, wenn jeder der Spieler seine optimale Strategie zur Anwendung bringt – in unserem Fall der Wert »0« –, nennen wir den »*Wert* des Spieles«. Ist der Wert eines Spieles »0«, so nennen wir es *»fair«*.[11]

Schon dieses einfache Beispiel zeigt, wie in der Theorie der Spiele die Unwägbarkeit der freien Willensbildung des Gegenspielers, die sich in seinen nicht »vorhersehbaren« Entscheidungen, in der Wahl seiner Strategien äußert, wie sie gewissermaßen »umgangen« werden kann. *Die Spieler spielen so, daß sie nicht den »maximalen Gewinn« ansteuern, sondern den »minimalen Gewinn«;* sie spielen so, daß sie sicher sein können, soundsoviel »mindestens« zu gewinnen bzw. »nicht mehr als . . .« zu verlieren. Je dümmer oder ungeschickter der Gegenspieler, umso höher wird der Gewinn ausfallen.

Die eben erwähnte Tatsache wird besonders deutlich, wenn wir ein Spiel betrachten, das nicht fair genannt werden kann, dessen Wert also verschieden von »0« ist.

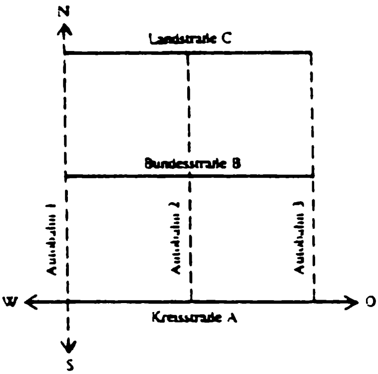
1.1.2. *Spielsituation 2: Grundstückskauf*

Spiel 2:[12]

Ein Ehepaar, nennen wir die beiden Heinz und Lisa, wollen ein Grundstück erwerben, das an der Kreuzung zweier wichtiger Straßen liegen soll. Die beiden sind sich im wesentlichen einig, bis auf die Wahl der Lage des Grundstücks. Die Gegend ist hügelig, und Lisa wünscht sich eine Tallage, während Heinz die Berge liebt. Wie sollen sie entscheiden, wie sollen/werden sie den Konflikt lösen?

Heinz und Lisa wollen vernünftig handeln, sie wollen ihren Konflikt mit rationalen Mitteln austragen. Sie gehen ihr Problem mit den Mitteln der Spieltheorie an.

Dazu haben sie zunächst die möglichen Fälle der Lage aus der Landkarte zu entnehmen (Fig. 1). Auf ihr sehen wir – wieder der Einfachheit halber – drei Straßen in Ost-West-Richtung: Kreisstraße A, Bundesstraße B und Landstraße C, die von drei Autobahnen (1, 2, 3) in Nord-Süd-Richtung geschnitten werden. Die 9 Kreuzungen liegen in verschiedenen Höhen, die man in einer Tabelle (M 2) angeben und in einem dreidimensionalen Diagramm in Einheiten von 100 Metern (Fig. 2) darstellen kann.



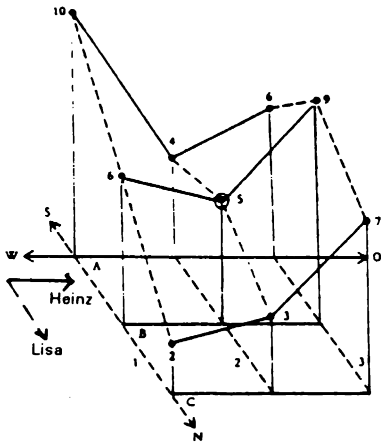


Fig. 1 Straßenkarte

Fig. 2 Dreidimensionale Darstellung zum Spiel: Grundstückskauf (nach Lucas, 153, 154)

Autobahnen

		1	2	3	
Straßen	A	10	4	6	
	B	6	5	9	(M 2)
	C	2	3	7	

Als *Regeln* legen die beiden nun fest:

Heinz wählt eine der drei Straßen A, B, C –

Lisa wählt eine der Autobahnen 1, 2, 3 –

mit anderen Worten: die Strategienmenge von Heinz ist $\{A, B, C\}$, die von Lisa $\{1, 2, 3\}$.

Heinz wünscht sich das Grundstück möglichst hoch, Lisa dagegen möglichst tief gelegen. Diese Wünsche sind gleichzeitig nicht erfüllbar. Die Lösung des Spiels läuft auf einen Kompromiß hinaus, und der besteht generell wieder darin, daß man *nicht den maximalen Gewinn, sondern den minimalen Gewinn* ansteuert. Dazu suchen Heinz und Lisa für ihre 3 möglichen Strategien zunächst die für sie ungünstigsten Positionen aus: Heinz jeweils den tiefsten Lageplatz, Lisa jeweils den höchsten aller Lageplätze.

a) Für die 3 Straßen A, B, C (Heinz) sind dies die Werte:

4, 5, 2.

b) Für die 3 Autobahnen 1, 2, 3 (Lisa) sind dies die Werte:

10, 5, 9.

Im Rahmen des Zahlenschemas, der Spielmatrix, sind die genannten Werte

a) im Falle von Heinz:
die minimalen Werte der Zeilen, die *»Zeilenminima«,*

b) im Falle von Lisa:
die maximalen Werte der Spalten, die *»Spaltenmaxima«.*

Unter den 6 Werten ist nun einer ausgezeichnet, nämlich die Lage an der Kreuzung zwischen Straße B und Autobahn 2 (bei uns zufällig in der Mitte gelegen) mit der Höhe 500 m. Er ist das

Maximum der Zeilenminima und zugleich das Minimum der Spaltenmaxima.

Einen solchen Punkt nennt man einen *»Sattelpunkt«.* Er liefert die Lösung des Spiels zwischen Heinz und Lisa. Bei ihm ist Heinz sicher, daß der Bauplatz *mindestens* 500 m hoch gelegen ist, und Lisa ist sicher, daß er in *höchstens* 500 m Höhe liegt.

1.1.3. Das vorstehende Spiel 2 ist komplexer als die Kartenspielsituation in Spiel 1. Es zeigt daher deutlicher als das allzu einfache Spiel 1 gewisse für die Spieltheorie zentrale methodische und begriffliche Besonderheiten.

(1) Wieder lautet die *»Grundstrategie«:* »Der Spatz in der Hand ist besser als die Taube auf dem Dach.« Nicht den maximalen Gewinn, sondern den minimal sicheren Gewinn ansteuern! Das ist die *methodische Grundhaltung der Spieltheorie.*

(2) Wieder haben wir die Begriffe der optimalen Strategie, des Wertes und der Lösung eines Spieles vorgeführt. Die Wahlen B (für Heinz) und 2 (für Lisa) sind die *»optimalen (reinen) Strategien«;* sie lassen einen bestimmten Auszahlungswert sicher – und d. h. unabhängig von der Wahl des Gegners – erreichen. Die (Gewinn-)Zahl, die durch die Wahl der optimalen Strategien erreicht wird, der »*Wert* des Spiels« ist jetzt 5. Optimale Strategie und Wert des Spiels zusammen liefern oder bilden die *»Lösung des Spiels«.*

(3) In Übereinstimmung mit bzw. als Folge unserer Grundstrategie beobachten wir, daß *der Wert des Spiels durch den Sattelpunkt repräsentiert wird, der zugleich das Maximum der Zeilenminima wie auch das Minimum der Spaltenmaxima ist.*

Mit unseren Überlegungen haben wir zugleich einen Spezialfall eines allgemeinen Resultats der Spieltheorie anschaulich und plausibel gemacht, nämlich das

THEOREM: Hat ein 2-Personen-0-Summen-Spiel einen Sattelpunkt, so liefert er die Lösung des Spiels.[13]

(4) Weiter ist hervorzuheben, daß in Spielen, die einen Sattelpunkt besitzen, keine Notwendigkeit besteht, Spielzüge geheimzuhalten. Wenn man sich nur entsprechend verhält, d. h. den Sattelpunkt anspielt, ist man sicher, mindestens »soundso viel zu gewinnen« (bzw. »nicht mehr als . . . zu verlieren«); der Gegenspieler kann uns nicht daran hindern. Eben deshalb nennt man die zugehörige Strategie *optimale Strategie.* Aus den gleichen Gründen nennt man in der Spieltheorie Spiele dieser Art *»streng determiniert«.*

(5) Beispiele lassen leicht erkennen, daß es auch Matrix-*Spiele mit mehreren Sattelpunkten* gibt. Für solche Spiele gilt der folgende

EINDEUTIGKEITSSATZ: Hat ein 2-Personen-0-Summen-Spiel mehrere Sattelpunkte, so stimmen diese überein.

Die Theorie der 2-Personen-0-Summen-Matrix-Spiele wäre gelöst, wenn jedes Matrix-Spiel einen Sattelpunkt besäße. Das ist aber nicht der Fall.

1.2. *Matrixspiele ohne Sattelpunkt – gemischte Strategien*

1.2.1. *Eine Matrix ohne Sattelpunkt*

Nicht alle Matrix-Spiele besitzen einen Sattelpunkt, nicht jedes Rechtecksspiel ist streng determiniert. Nicht alle Matrix-Spiele lassen sich durch reine Strategien, also durch Wahl einer bestimmten Zeile bzw. Spalte lösen. Ein Beispiel liefert die folgende Matrix; sie besitzt keinen Sattelpunkt.

$$
\begin{array}{lc c l}
 & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} \text{Minima der Zeilen} \\ -1 \\ \text{Maximum der Minima: } -1 \\ -1 \end{array} \\
\text{Maxima der Spalten} & \begin{array}{cc} 1 & \quad 1 \end{array} & & \\
\text{Minimum der Maxima} & 1 & &
\end{array}
$$

Es gilt: Max Min = –1 = Min Max = 1.

1.2.2. *Spielsituation 3: Verbrecher und Polizist*

Wir wollen für diese Matrix eine Spieleinkleidung angeben.

Spiel 3:

Der Verbrecher A befindet sich in einem Hause, das einen Vorder- und einen Hintereingang besitzt. Der Polizist P hat die Aufgabe, den Verbrecher A zu fangen. Wie sollen sich beide verhalten?

Die Matrix der Spielsituation hat die Form:

Polizist P

		v	h	
Verbrecher A	v	–1	1	(M 3)
	h	1	–1	

Das heißt im einzelnen: Versucht der Verbrecher A durch die Vordertüre (v) zu entkommen und hat sich dort der Polizist P postiert, so wird A gefangen werden. Ebenso, wenn beide sich an der Hintertüre (h) begegnen. Anders freilich, wenn A das Haus zu jener Türe zu verlassen sucht, an der P gerade nicht steht; dann hat P das Spiel verloren und A gewonnen.

Das Spiel hat keinen Sattelpunkt. Wie sollen sich die Kontrahenten verhalten?

Nehmen wir an, daß die Vordertüre (v) auf eine belebte Straße führt, so wird A zunächst daran denken, das Haus durch die Hintertüre (h) zu verlassen. An diese Möglichkeit für das Verhalten von A kann auch P denken. Überlegt nun A weiter, so wird er tunlichst auch P in den Kreis seiner Überlegungen einbeziehen und den Gedankengang P's nachdenken. A wird sich sagen: »P meint ja sicher, daß ich den Hinterausgang vorziehe – also ist es klüger, doch durch die Vordertüre zu entweichen.« – Was aber, wenn auch P weiterdenkt und den Gedankengang A's bis hierher nachvollzieht?

Um es zu betonen: Die Schwierigkeit, der wir uns in diesem Falle – und d. h. generell in einem Matrix-Spiel ohne Sattelpunkt – gegenübersehen, erwächst aus der Tatsache, daß die Art des Spiels zunächst keine optimale Strategie im obigen Sinne »von selbst« anbietet und daß die Spieler die Erwägungen des Gegenspielers in den Kreis ihrer Überlegungen einbeziehen können und zunächst sogar müssen. In unserer Spielsituation kommt es also vor allem darauf an, den Gegenspieler daran zu hindern, die eigenen Absichten zu erkennen oder auch sie nachzudenken. Dies kann man tatsächlich in gewisser Weise verhindern, nämlich dadurch, daß man sich selbst nicht entscheidet, sondern die Entscheidung dem Zufall überläßt. A handelt – wie sich zeigen wird – optimal, wenn er eine Münze aus der Tasche zieht, diese in die Luft wirft und bei »Zahl« das Haus durch die Vordertüre verläßt, bei »Wappen« durch die Hintertüre. Und ebenso steht es um das optimale Verhalten von P. Nur so können beide verhindern, daß jeder den Gedankengang des anderen zwingend nachdenken kann.

A und P werden in einer solchen Spielsituation mit anderen Worten nicht umhin können, wahrscheinlichkeitstheoretische Gesichtspunkte zur Auffindung der optimalen Strategie heranzuziehen – wie sie das übrigens beim Münzwurf faktisch tun. Die Entscheidungen der Spieler bestehen in unserem jetzigen Beispielfall, wenn sie sich wie eben geschildert verhalten, nicht mehr im Spielen »reiner Strategien«, sondern im Einsatz »gemischter Strategien«.

Unter einer *»reinen Strategie«* verstehen und verstanden wir in Matrix-Spielen einen Befehl bzw. eine Verhaltensweise der Form: »Spiele ›Zeile 2‹!« oder »Spiele ›Spalte 5‹!« Bei Matrix-Spielen ohne Sattelpunkt muß man die Strategien mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit[14] gewichtet spielen, muß man die Strategien in einem gewissen Sinne »mischen«. Unter einer *»gemischten Strategie«* verstehen wir einen Befehl der Form: »Spiele ›Zeile 1‹ mit der Wahrscheinlichkeit p_1, ›Zeile 2‹ mit der Wahrscheinlichkeit $p_2, \ldots$, ›Zeile n‹ mit der Wahrscheinlichkeit p_n«; und entsprechend für den zweiten Spieler und die ihm zur Verfügung stehenden Spalten: »Spiele ›Spalte j‹ mit der Wahrscheinlichkeit q_j« ($j = 1, 2, \ldots, m$).

1.2.3. *Berechnung der optimalen Strategien*

Will man auch für Matrix-Spiele ohne Sattelpunkt »optimale Strategien« gewinnen, muß man weiter das Verhalten nicht auf den Absolutwert des Gewinnes, sondern auf die *Gewinnerwartung* abstellen.

Kann eine zufällige Größe x die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit jeweils den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ annehmen, so definiert man als *»mathematische Erwartung* der Größe x« die Summe

$$E(p_1, \ldots, p_n) := x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \Sigma x_ip_i.$$[15]

Wählt der Verbrecher A in unserem Beispiel »Zeile 1« (v) mit der Wahrscheinlichkeit 1/4, so bedeutet das gleichzeitig, daß er die »Zeile 2« (h) mit der Wahrscheinlichkeit 3/4 wählt.[16] Eine solche Wahl wäre, wie aus den obigen Erörterungen und aus der (Schief-)Symmetrie der Matrix ersichtlich ist, sicher nicht günstig. Spieler A wählte vielmehr durch Münzwurf die »Zeile 1« (v) mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 1/2$ und also auch die »Zeile 2« (h) mit $p_2 = 1/2$. Seine mathematische Erwartung ist in diesem Falle für die »Zeile 1« in Abhängigkeit vom möglichen Verhalten des Kontrahenten P:

$$1/2 \cdot (-1) + 1/2 \cdot 1 = 0$$

und für »Zeile 2« entsprechend:

$$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot (-1) = 0.$$

Daß diese Spielweise für A tatsächlich die beste ist, weil in jedem andern Falle der Erwartungswert $E(p_1, p_2) < 0$ wird, sieht man wie folgt ein: Wählt der Verbrecher A die »Zeile 1« mit der Wahrscheinlichkeit p_1 und »Zeile 2« mit der Wahrscheinlichkeit p_2, und nehmen wir an, der Polizist P entdeckt, was A zu tun beabsichtigt, so ist die mathematische Erwartung von A im Falle, daß P die »Spalte 1« wählte:

$$E_1 = (-1) \cdot p_1 + 1 \cdot p_2,$$

und entsprechend für den Fall, daß P die »Spalte 2« als Strategie wählt:

$$E_2 = 1 \cdot p_1 + (-1) \cdot p_2.$$

Berücksichtigen wir, daß nach Definition der Wahrscheinlichkeit $p_1 + p_2 = 1$ sein muß, so erhalten wir weiter:

$$(-1) \cdot p_1 + 1 \cdot (1 - p_1) = E_1 = 1 - 2p_1;$$

$$1 \cdot p_1 + (-1)(1 - p_1) = E_2 = 2p_1 - 1.$$

Daraus gewinnt man $1 - 2p_1 = 2p_1 - 1$

und errechnet daraus $p_1 = 1/2$,

und wegen $p_2 = 1 - p_1$ für $p_2 = 1/2$.

Ist nun $p_1 > 1/2$, so wird $E_1 = 1 - 2p_1 < 0$; ist $p_1 < 1/2$, so wird $E_2 = 2p_1 - 1 < 0$. A wird also eine Erwartung kleiner als 0 haben, wenn P »1« wählt, und er wird auch eine Erwartung kleiner als 0 haben, wenn P »2« wählt. Der optimale Weg für A besteht also darin, beide Zeilen (und d. h. v bzw. h) mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 zu wählen (zu spielen). Der »erwartete Wert« des Spiels ist damit gleich 0. Das Spiel ist fair. – Ganz Entsprechendes gilt für P.

Wird nur eine Partie gespielt, ist kein Zug besser als der andere. Werden aber mehrere Partien gespielt, so wird man keine Vorliebe entwickeln, sondern – wie es die gemischte Strategie vorschreibt – Kombinationen von Strategien mit einer bestimmten Häufigkeitsverteilung spielen. Man wird auf lange Sicht »Kopf« oder »Zahl« mit gleicher Häufigkeit wählen, und zwar so, daß es dem Gegner nicht möglich ist, den nächsten Zug zu erraten.[17]

Das Beispiel macht nebenbei deutlich, daß in vielen Situationen die unvollkommene Information die Lösung ungemein kompliziert. Hat etwa A die Möglichkeit, die Situation vor dem Haus durch einen Vorhang geschützt zu beobachten, wird für ihn die Konfliktsituation eventuell trivial lösbar. Andererseits wird unser Problem komplizierter, wenn wir annehmen, daß sich unser »Fange-Spiel« nachts zuträgt, daß die Vorderfront durch eine nahestehende Straßenlaterne beleuchtet ist, die Rückfront dagegen im Dunkeln liegt. A wird selbst dann, wenn A und P auf die Hintertüre reflektieren, noch eine gewisse Chance haben, in der Dunkelheit ungesehen – oder von P zu spät entdeckt – zu entkommen. Die Wahrscheinlichkeitsbelegungen müssen nunmehr eine ganz andere Form annehmen.

1.3. *Formale Diskussion: Der Hauptsatz*

1.3.1. Im folgenden wollen wir die Bedeutung des Einsatzes gemischter Strategien in einem Matrix-Spiel formal etwas genauer diskutieren.

Angenommen, die Auszahlungsmatrix sei gegeben in der Form (M*) von II.6.3. Der *Spieler A* hat die Strategien $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ zur Verfügung und spielt sie als gemischte Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1, p_2, \ldots, p_r.$$

Entsprechend spielt *Spieler B* seine Strategien $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ als gemischte Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten

$$q_1, q_2, \ldots, q_s.$$

Da nun beide Spieler voneinander unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit, daß A die Strategie i und B die Strategie j wählt, gleich dem Produkt der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

$$p_i q_j.$$

Als nächstes bestimmen wir – wie im obigen Beispielfall III.1.2.3. – die *Erwartungswerte des Gewinns* für die beiden Spieler bei Anwendung von gemischten Strategien. Wir erhalten

$$h(p, q) = \Sigma\, g(i, j)\, p_i q_j.$$

Spieler A möchte sich so verhalten, daß *der Auszahlungswert h (p, q) möglichst groß* wird. Da er die Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, \ldots, q_s$ von B nicht kennt, wird er den ungünstigsten Fall annehmen und für alle möglichen Werte von $q_1, q_2, \ldots, q_s$ das Minimum berechnen:

$$\mathrm{Min}_q\, h(p, q).$$

Das ist der Betrag, den er mit einer bestimmten gemischten Strategie mit Sicherheit, also mindestens gewinnt, ganz unabhängig davon, welche Strategie B auch wählt. Er wird also seine gemischte Strategie, über die er ja nach eigenem Willen verfügt, so bestimmen, daß dieser Mindestgewinn möglichst groß wird; d. h. er wird die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_r$, mit denen er seine Strategien 1, 2, . . ., r ausspielt, so berechnen, daß er den Wert

$$M = \mathrm{Max}_p\, \mathrm{Min}_q\, h(p, q)$$

erhält. Dieses Maximumproblem läßt sich nach den Ergebnissen der Spieltheorie immer lösen. A ist also sicher, daß er durch eine geeignete gemischte Strategie den Gewinn M in jedem Fall erhält.

Die Überlegungen für den *Spieler B* verlaufen ganz analog, allerdings mit dem Unterschied, daß man beachten muß, daß unsere Matrix (M*) die Auszahlungsmatrix für A ist, daß jeder Gewinn h (p, q) von A ein Verlust für B ist. B muß also danach trachten, *seinen Verlust – h (p, q) möglichst klein* zu halten. Er berechnet also zunächst seinen Verlust im ungünstigsten Fall, also

$$\mathrm{Max}_p\, h(p, q),$$

und versucht, durch eine geeignete Wahl seiner Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, \ldots, q_s$ diesen Verlust möglichst klein zu machen; er berechnet also

$$M' = \mathrm{Min}_q\, \mathrm{Max}_p\, h(p, q).$$

John von Neumann hat nun das zentrale Theorem bewiesen, daß auch im

Falle der 2-Personen-0-Summen-Spiele ohne Sattelpunkt das Maximum der Minima für A gleich ist dem Minimum der Maxima für B,[18] falls man nur mit gemischten Strategien spielt.

HAUPTSATZ der 2-Personen-0-Summen-Spiele:

$$Max_p\, Min_q\, h(p, q) = Min_q\, Max_p\, h(p, q) = M.$$

Nach diesem Satz gibt es in den 2-Personen-0-Summen-Spielen in jedem Fall[19] eine beste Strategie für A und eine beste Strategie für B; A muß mindestens M gewinnen, B kann nicht mehr als M verlieren. Ist das Spiel *fair,* haben also beide gleiche Chancen, so ist M = 0.

Zusammenfassend kann man sagen: In 2-Personen-0-Summen-Matrix-Spielen kann man mit reinen Strategien nicht in jedem Fall optimal spielen. Und das heißt: *Man darf im allgemeinen nicht stur nach demselben Schema spielen, sonst gibt man dem Gegner die Möglichkeit, sich auf die gespielte Strategie einzustellen.* Man muß seine Absichten geheim- und unerkennbar halten. Man muß mit Wahrscheinlichkeiten spielen. Das *Moment des Zufalls,* das in Spielen – durch die Verteilung der Karten, durch Würfelwurf u. ä. – schon in den Spielregeln verankert sein kann, haben wir anfangs durch Einführung des Erwartungswertes eliminiert (II.5.4.). Durch die gemischten Strategien kommt das Element des Zufalls nun von anderer Seite wieder entscheidend »ins Spiel«.

John von Neumann hat weiter die Strategie des *Bluffens* untersucht. Sein Ergebnis lautet grob gesprochen: Man soll (z. B. beim Poker) bluffen, aber wiederum nicht nach starrem Schema, nicht nie und nicht zu oft; man muß mit bestimmten (kleinen) Wahrscheinlichkeiten bluffen. Fast müßig zu sagen, daß all die genannten spieltheoretischen Überlegungen auf gewisse Konfliktsituationen im täglichen Leben, in der Gesellschaft, im Wirtschaftsleben und in der Politik übertragbar sind.

1.3.2. Es ist ein bedeutsames Resultat der Spieltheorie, daß auch *jedes 2-Personen-Spiel in extensiver Form lösbar ist.* Jedes solche Spiel kann auf »Normalform« gebracht, d. h. als Matrix-Spiel dargestellt werden. Die Umformung erfolgt durch Einführung eines entsprechend präzisierten Strategiebegriffs. Hat man ein Spiel in seine spieltheoretische Normalform umgewandelt, so findet man die optimalen Strategien durch Lösung linearer Systeme von Ungleichungen und Gleichungen, wobei die Lösungen noch der Nebenbedingung genügen müssen, eine bestimmte lineare Funktion (Auszahlungsfunktion) zu maximieren bzw. zu minimieren.[20] Jedes Spiel läßt sich damit auf ein Problem der sogenannten *»Linearprogrammierung«* zurückführen.[21]

Generell gilt damit der Hauptsatz der Spieltheorie in der Form:

HAUPTSATZ: Jedes 2-Personen-0-Summen-Spiel mit vollständiger Information und endlichem Baum[22] besitzt für beide Spieler optimale Strategien.[23]

1.4. *Weitere Spielsituationen*

1.4.1. *Kontroll- und Prüfprobleme*

In vielen Fällen kann man *Kontroll- und Prüfprobleme,* die in irgendeiner Weise mit Kosten verbunden sind, spieltheoretisch behandeln.

Als Beispielfelder führen wir Prüfer bzw. Prüfungsämter an, die Bilanzen, Konten oder Fertigungsvorgänge bzw. die Resultate der Fertigungsprozesse auf Fehler, Schadstellen, auf Irrtümer oder gar auf Betrug kontrollieren müssen. Finanzbehörden, Eichämter, der Bundesrechnungshof, die technische Bundesanstalt, die Atomenergiebehörde haben solche *Prüffunktionen* zu erfüllen, ebenso wie in Betrieben die Abteilungen, die *Qualitätskontrollen* durchführen. Auch die nationalen Nachrichtendienste sind an dieser Stelle zu nennen. – All diesen Prüforganen ist ein Problem gemeinsam, nämlich daß es im allgemeinen zu teuer und/oder zeitlich zu aufwendig ist, jeden Einzelfall zu überprüfen. Man bedient sich daher vielfach statistischer Methoden, um sich einer Problemlösung zu nähern. Viele der auftretenden Konflikte lassen sich aber auch mit spieltheoretischen Modellen angehen. Gesucht wird die optimale gemischte Strategie, die für die betreffenden Situationen günstig ist.

Geben wir Beispiele:

Spielsituation 4: Qualitätskontrolle in einem Betrieb und Abnehmer

Eine Firma für feinmechanische Geräte erhält einen Auftrag für eine Sonderanfertigung von fünf Spezialmeßgeräten. Die Herstellerfirma und der Auftraggeber schließen folgenden Vertrag ab: Der Auftraggeber verpflichtet sich, zunächst drei Geräte abzunehmen. Sind die drei Geräte funktionstüchtig, so zahlt er der Firma den vereinbarten Preis. Erweisen sich nur zwei Geräte fehlerfrei, so wird der Auftraggeber keines der Geräte abnehmen. Erweisen sich aber alle Geräte als funktionstüchtig (auch in der Praxis!), so wird der Auftraggeber auch die restlichen zwei Geräte abnehmen.

Die Lieferfirma sieht sich der Frage gegenüber, wie sie sich die Fertigung kalkulationsmäßig einzurichten hat. So stellt sich ihr u. a. die Alternative, ob alle fünf Geräte den sehr kostspieligen Testverfahren zu unterwerfen sind, ob sie nur vier, oder nur drei oder nur zwei Geräte auf ihre Funktionstüchtigkeit prüfen soll. Alle diese Fragen lassen sich spieltheoretisch angehen.

Ganz ähnlich liegt das folgende Spielproblem.

1.4.2. *Spielsituation 5: Das Parkuhrproblem*[24]

Wie soll man sich als Autofahrer, der einen Parkplatz sucht, verhalten? – Soll man regelwidrig parken oder einen Parkplatz suchen und die entsprechende Gebühr bezahlen?

Das Problem ist wiederum stark vereinfacht. Nicht berücksichtigt ist die Differenzierung, daß die Höhe der Strafe für Falschparken abhängig sein kann von der Dauer des Falschparkens, daß aber andererseits auch die Parkgebühr im Parkhaus abhängig ist von der Parkdauer. Wir beschreiben unser einfaches Spiel wieder mit einer Auszahlungs- oder Gewinnmatrix und machen dabei die folgenden Annahmen:

Spiel 5:

		Polizei	
		Kontrolle	keine Kontrolle
Autofahrer	falsch parken	–20	0
	Parkgebühr zahlen	– 8	–16

(M 5)

Die angegebenen Zahlen sind Geldwerte, etwa in DM. Eine Erklärung bedarf nur der Betrag von –16 DM, den wir ansetzen für den Fall, daß wir die Parkgebühr bezahlt haben, die Polizei aber gar nicht kontrolliert. Wir veranschlagen dabei 8 DM als Gebühr für den Parkplatz und weitere 8 DM für den Zeitverlust, den Ärger, den Preis des verfahrenen Benzins bei der Parkplatzsuche.

Das Spiel hat keinen Sattelpunkt. Das Minimum der Zeilenmaxima ist 0, das Maximum der Minima der Spalten ist –16.

Die optimale gemischte Strategie des Parkers berechnet man wiederum analog zum Vorgehen von III.1.2.3. Zunächst legen wir fest: Es bezeichne

p: die Wahrscheinlichkeit für ordnungsgemäßes Parken und die Gebühr 8 DM,

1 – p: die Wahrscheinlichkeit für Falschparken.

(a) Sodann berechnen wir den *Erwartungswert E der Auszahlung für den Parker*

(1) für den ersten *Fall, in dem die Polizei kontrolliert:*

$$E = -20 \cdot (1 - p) + (-8p) = -20 + 12p. \qquad (1)$$

(2) für den *Fall, in dem die Polizei nicht kontrolliert:*

$$E = 0 \cdot (1 - p) + (-16p) = -16p. \qquad (2)$$

Damit haben wir zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten E und p gewonnen. Ihre Lösung ist:

$$p = 5/7.$$

Einsetzen in (2): $E = -16 \cdot 5/7 = -80/7 = 11{,}43$ (DM).

Der Autofahrer muß also in 5 von 7 Fällen gebührenpflichtig parken; dabei fallen durchschnittlich 11,43 DM an Kosten an.

(b) Berechnet man auf die gleiche Weise die optimale Strategie q des Gegenspielers Polizei, so erhält man die Werte: $q = 3/7$ und für E wiederum: $E = 11{,}43$ (DM). Die Polizei muß also in 4 von 7 Fällen $(1 - q)$ kontrollieren. Daß der Erwartungswert der Auszahlung in beiden Fällen, also bei der Berechnung für den Parker mit dem Wert bei der Berechnung für die Polizei übereinstimmt, ist nichts anderes als eine erneute numerische Bestätigung bzw. eine Folge des *Minimax-Theorems* für 0-Summen-Spiele mit gemischten Strategien (III.1.3.).

2. *Zwei-Personen-Nicht-Nullsummenspiele mit partiellem Konflikt*

2.1. *Das Dilemma der Gefangenen*

2.1.1. Die Spieltheorie modelliert auch Konfliktsituationen, in denen Eskalationen auftreten. Werbefeldzüge, Preiskriege und Wettrüsten sind einige typische Beispielfelder. Die Spielsituation ist in diesen Fällen *nicht rein kompetitiv,* d. h. die betreffenden Spielsituationen haben keine konstante (Auszahlungs-) Summe. *Immer gibt es ein gemeinsames Ziel, das beide Spieler erreichen können, wenn sie kooperieren.* Wenn sie nicht kooperieren, dann führen die Eigeninteressen der Spieler zu Auszahlungen, die nicht mehr optimal genannt werden können. Die Situation ist in gewissem Sinne paradox.

Der Mathematiker A. W. Tucker hat 1950 die Situation dieses Spieltyps am »Dilemma der Gefangenen« illustriert.

2.1.2. *Spielproblem 6: Dilemma der Gefangenen*[25]

»Nach einem Verbrechen werden zwei Verdächtige in Einzelhaft gehalten.

Jeder von ihnen hat nun zwei Alternativen:

a) seine Unschuld zu beteuern und auch den Partner zu decken – oder

b) ein Protokoll zu unterschreiben, in dem er allein den Partner des Verbrechens beschuldigt.«

»Im Selbstinteresse des einzelnen liegt es zu unterschreiben; wenn jedoch beide unterschreiben, ist das für beide schlecht. Was gut für die Gefangenen als Paar wäre – standhaftes Leugnen –, wird durch ihr individuelles Streben nach Strafminderung unterlaufen.«

Wir wollen diese einfache Problemsituation in einer anderen Einkleidung diskutieren. Wir denken an das internationale Problem des Wettrüstens.

2.1.3. *Spiel 6: Wettrüsten*[26]

Zwei Supermächte, nennen wir sie »Rot« und »Blau«, stehen zueinander in der Konfliktsituation des Wettrüstens.

Sie können sich unabhängig voneinander für eine der beiden Strategien entscheiden:

(A) *Keine Kooperation:* Massives Aufrüsten

(E) *Kooperation:* Abrüstung oder wenigstens Übereinkünfte über Rüstungsbeschränkungen

Damit sind wir wieder in der Lage, die 4 Möglichkeiten in einer Spielmatrix darzustellen. Dabei spielt die Partei Rot die Zeilen, die Partei Blau die Spalten.

		Blau	
		A	E
Rot	A	Wettrüsten	Vorteil für Rot
	E	Vorteil für Blau	allgemeine Abrüstung

Das bedeutet im einzelnen:

(E, E) Beide rüsten ab:

sicher das günstigste und erstrebenswerteste Ergebnis, wenn es auch gewisse Risiken in sich birgt.

(A, A) Beide rüsten auf:

vom globalen Gesichtspunkt aus sicher die schlechteste Alternative.

(A, E) Rot rüstet auf, Blau rüstet ab:

für Rot das günstigste, für Blau das schlechteste Ergebnis.

(E, A) Rot rüstet ab, Blau rüstet auf:
für Rot das schlechteste, für Blau das günstigste Ergebnis.

Für die weitere Diskussion der Konfliktsituation ordnen wir wieder den möglichen Ergebnissen »Auszahlungswerte« zu. Diesmal wählen wir allerdings Zahlenpaare (a, b). Dabei bedeutet im Zahlenpaar (a, b) a die Auszahlung an den Spieler, der die Zeile wählt, b die Auszahlung an den Spieler, der die Spalte wählt.

		Blau A	Blau E	
Rot	A	(2, 2)	(5, 0)	(M 6)
	E	(0, 5)	(4, 4)	

Die eingesetzten Zahlen sollen nicht die Werte eines monetären Gewinns bezeichnen. Von Belang sind auch nicht die absoluten Zahlenwerte, sondern nur die relativen Werte. Die Zahlen sollen nur einen numerischen Anhaltspunkt für die Bewertung der jeweiligen Möglichkeit bzw. für die Prioritäten der Spieler liefern: Wir nehmen an, daß ein Spieler den höheren Zahlenwert einem kleineren Wert vorzieht.[27]

Zur näheren Analyse der durch die Matrix beschriebenen Situation müssen wir die vier Fälle diskutieren:

(1) Wahl von A (Aufrüstung):

– : *für Rot führt die Wahl von A* in jedem Fall zu einer höheren Auszahlung, ist also günstiger. Die Auszahlungen der ersten Zeile dominieren die der zweiten Zeile. Unabhängig davon, welche Strategie Blau wählt, immer bietet es einen (leichten) Vorteil für Rot, aufzurüsten.

– : analog bringt *für Blau die Wahl von A* einen Vorteil.

(A, A): Wenn *jede Nation nur auf den Eigenvorteil bedacht* ist und unabhängig von der anderen die Auszahlung zu maximieren sucht, wird

(i) das Paar Rot/Blau in die »Rüstungsspirale« (A, A) gezogen;

(ii) ist zugleich das bessere Strategienpaare (E, E) nicht erreichbar.

(A, A) erweist sich als *Gleichgewichtspunkt;* das Ergebnis ist stabil. Wenn nämlich eine Nation allein von der Wahl A abweichen sollte, würde sie mit der geringeren Auszahlung 0 »bestraft«. »Die Kräfteverteilung verhindert also, daß sich eine der beiden Nationen aus (A, A) befreien kann« (LUCAS, 161).

(2) Wahl von E (Abrüstung):

(E, E): Wenn *beide Nationen kooperieren* und beide E wählen, ist das Ergebnis *instabil*. Beim Wortbruch einer Nation (heimlichem Aufrüsten) wird der Wortbrecher profitieren. – Also werden beide Nationen versucht sein, ihr Wort zu brechen. (A, A) wird die Folge sein.

Wenn man kein Vertrauen in die Aufrichtigkeit des anderen hat, wird man sich bei Kooperation gegen Wortbruch schützen wollen/müssen. Nur so ist es möglich, allmählich doch ein kooperatives Stadium zu erreichen.

Wieder zeigt sich der Unterschied zwischen Spielsituationen, in denen ein Spiel nur einmal, und solchen, in denen es mehrmals gespielt wird.

An der vorliegenden Modellsituation, die an die politische Realität im Kräftespiel der Weltmächte erinnert, wird die Gefahr der Realitätsferne von Modellbildungen besonders deutlich. Wollen wir die politischen Realitäten weiter approximieren, müssen wir zusätzliche Aspekte berücksichtigen und/oder zusätzliche Annahmen machen. In der Realität des Lebens stehen vergleichbare Konfliktsituationen in einem größeren Kontext. In ihm gibt es z. B. aus finanziellen Gründen Notwendigkeiten, eine Aufrüstung nicht beliebig hoch zu treiben oder gar so gering wie möglich zu halten. Es mag sein, daß man aus Gründen, die in der Wirtschaft des eigenen Landes liegen, auf wirtschaftlichem Gebiet mit der anderen Nation zusammenarbeiten muß. Der Konflikt auf der einen Ebene schließt Kooperation auf anderen Ebenen nicht aus, Kooperationen, auf die man vielleicht nicht verzichten will oder kann.

Wenn also die Konfliktsituation über die Zeit hin besteht, wird das zugehörige Spiel nicht nur einmal gespielt werden. Damit bekommen gewisse, die Kooperation fördernde Faktoren, wie Vertrauensbildung, zunehmend Bedeutung. Gegenseitige Angleichung und Maßnahmen gegen Wortbruch kommen hinzu. Man kann Kommunikationsverbindungen einrichten (»rotes Telefon«), und Institutionen zur gegenseitigen Überwachung (gegenseitige Inspektionen, Menschen und Satelliten als Spione) schaffen, Verträge schließen u. ä. Auch sonst zeigt unser Spielmodell, daß es sich in sozialen Konflikten oft um die Abschätzung des Wirkens von Kräften, und zwar in dynamischen Systemen, handelt. Wie auch immer im einzelnen, es ist in jedem Fall angeraten, unverzüglich zu antworten, wenn der andere provoziert.

In jedem Fall also wird sich in unserem Spielmodell Kooperation nicht von selbst anbieten; sie muß sich, auch wenn sie sich letztlich als günstig erweist, entwickeln. Kooperation ist auf lange Sicht sicher die bessere Lösung. Sie beruht im wesentlichen darauf, daß man die Eigeninteressen nicht blind durchsetzen will.

Robert Axelrod, ein Mathematiker an der University of Michigan, hat die Effekte, die im »Dilemma der Gefangenen« bei wiederholten Spielen auftreten, näher untersucht[28] und hervorgehoben, wie wichtig es ist, das Spiel zu iterieren und dabei »die Wahl der eigenen Strategie auf die Grundlage einer Art Gegenseitigkeit zu stellen. Man kann sogar versuchen, auf das Verhalten des Gegners Einfluß zu nehmen und ihn zur Kooperation zu ermutigen«.[29] Und er sagt weiter: »Ich habe für mein Buch den Titel ›The Evolution of Cooperation‹ gewählt, um die Analogie zur biologischen Evolution hervorzuheben. Es behandelt die Frage, wie Kooperation in einer Welt, in der es bislang keine gab, entstehen kann und wie sie sich aufrechterhalten und ausbauen läßt. Die Menschen neigen dazu, effektive Strategien immer wieder anzuwenden und weniger effektive entweder ganz aufzugeben oder wenigstens abzuändern. Dadurch entwickelt sich alles zu den effektiven Strategien hin.«

2.2. *Spielsituation 7: Das Hasardspiel*

2.2.1. Auch das Hasardspiel ist ein 2-Personen-Spiel mit partiellem Konflikt. Wieder wählen wir eine einfache und extrem idealisierte Variante. In unserer Version riskieren die beiden Spieler ihr Leben.

Spiel 7:[30]

Zwei Autofahrer rasen mit hoher Geschwindigkeit aufeinander zu. Jeder muß in letzter Sekunde entscheiden, ob er ausweichen will oder nicht.

Die Spielmatrix erhalten wir durch Diskussion der Konsequenzen und Festlegung von Auszahlungswerten:

(1) Kein Fahrer weicht aus.

Die Automobile prallen frontal aufeinander. Auszahlung: 0.

(2) Beide Fahrer weichen aus.

Jeder verliert zwar an Gesicht, weil er ausgewichen ist, beide behalten aber ihr Leben. Mittlerer Auszahlungswert: 3.

(3) Einer der Fahrer weicht aus,

er verliert sein Gesicht, während der andere als der Sieger gilt. Auszahlung für den Ausweicher 1, für den Sieger 5.

Die Spielmatrix (Auszahlungsmatrix) hat damit die (symmetrische!) Form:

		Fahrer 2		
		ausweichen	nicht ausweichen	
Fahrer 1	ausweichen	(3, 3)	(1, 5)	(M 7)
	nicht ausweichen	(5, 1)	(0, 0)	

Sicher ist es für die beiden Fahrer besser, gleichzeitig auszuweichen und sich mit der Auszahlung 3 zu begnügen, als die maximale Auszahlung 5 erreichen zu wollen. Andererseits will auch keiner der Kontrahenten nachgeben, sein Gesicht verlieren und den anderen als Sieger vom Platz gehen lassen.

Das Hasardspiel modelliert in einfacher Weise viele Konfliktsituationen, wie wir sie zwischen Supermächten, im Arbeitskampf oder auch im täglichen Leben zwischen Menschen oder staatenbildenden Tieren im Rangordnungskampf erleben.[31] Dabei macht es für das Verhalten wieder einen Unterschied aus,

a) ob ein solches Spiel nur einmal gespielt werden soll oder kann – wie in der extremen Version unserer Einkleidung, die auf Leben und Tod geht – oder
b) ob das Spiel – wie in der Politik, im Arbeits- oder Rangordnungskampf – mehrmals gespielt werden kann oder soll, wobei es insbesondere in einer gemäßigten Version nicht unbedingt auf Leben und Tod gehen muß.

2.2.2. Im übrigen zeigen neuere Ergebnisse der Spieltheorie, daß es *78 wesentlich verschiedene 2-Personen-Spiele mit partiellem Konflikt* gibt, von denen nur das »Hasardspiel« und das »Dilemma der Gefangenen« zu solch ungünstigen Ergebnissen für die Beteiligten (für die Gesellschaft als Ganzes) führen, wenn sie kurzsichtig nur ihre Eigeninteressen verfolgen.

IV. Mehr-Personen-Spiele

1. Nullsummenspiele

1.1. Die Situation der kompetitiven Spiele gewinnt *grundsätzlich neue Aspekte, wenn man von 2 zu mehreren Spielern übergeht.* Wie auch sonst vielfach in der Mathematik ist auch hier der Übergang von 2 auf 3 bedeutsamer als der von 3 auf 4, auf 5, allgemein auf irgendeine positive ganze Zahl $n > 2$.

1.2. Betrachten wir den Fall $n = 3$, also *3-Personen-Spiele* und hier wieder zunächst den Fall des *0-Summen-Spiels.* Gewinnsumme 0 heißt nach unserer Definition, daß sich die Gewinne und Verluste so verteilen, daß am Ende der ursprüngliche Einsatz erhalten bleibt. Bei jeder Partie ist also die Summe der Auszahlungen g_1, g_2, g_3 an die 3 Spieler 0:

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0.$$

Auch bei den Mehr-Personen-Spielen (»n-Personen-Spielen«) können wir ein Spiel *»fair«* nennen, wenn die Spielregeln bzw. die Auszahlungsmatrix jedem Spieler die gleichen Chancen einräumen. Dennoch kann es sich ereignen, daß der einzelne Spieler gegenüber den anderen im Nachteil ist, wenn er nur für sich spielt und seinen Gewinn zu maximieren trachtet. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich die beiden anderen Spieler gegen ihn verbünden, wenn sie eine *Koalition* eingehen.

1.3. Die *Möglichkeit der Koalitionsbildung* ist das grundsätzlich neue Element in der Spielsituation beim Übergang von 2 auf 3 oder auf mehrere Spieler. Zwei Spieler können sich gegen den dritten verbünden, indem sie eine gemeinsame Strategie verabreden, die im Einklang mit den Spielregeln steht. Sie können damit den gemeinsamen Gegner übervorteilen und am Ende ihren Gewinn teilen.[32]

Nur in Sonderfällen kann der erste Spieler den Gewinn 0 erzielen. Und genau in diesen Fällen gilt dann auch, daß

$$\mathrm{Max}_u \, \mathrm{Min}_{v,\,w} \, h\,(u, v, w) = 0.$$

Nur in diesem Falle richtet auch eine Koalition nichts gegen den ersten Spieler aus. Jeder der drei Spieler kann einzeln den Gewinnwert 0 erzielen. Im allgemeinen Fall eines fairen 3-Personen-Spiels mit gleichen Chancen kann jeder einzelne für sich nur den Gewinn –M erreichen, während die beiden anderen, wenn sie kooperieren und den Gewinn M teilen, je +1/2 M erhalten.

2. *Nicht-Nullsummenspiele*

2.1. *Nicht-Nullsummenspiele – Zurückführung auf Nullsummenspiele*

2.1.1. In vielen Fällen kann die Voraussetzung der Erhaltung der Gewinnsumme nicht aufrechterhalten werden, so bei Anwendung der Spieltheorie auf das Wirtschaftsgeschehen oder etwa auf die Konfliktsituation in Kriegen. Manche Kontrahenten werden in diesen Interessenkonflikten gewinnen, »siegen«, manche werden verlieren, und die Summe der »Auszahlungen« bleibt in all diesen Fällen nicht konstant. Im Wirtschaftsgeschehen werden Güter produziert, werden Gegenstände durch den Bearbeitungsprozeß veredelt, gewinnen an Wert, während zugleich Werkzeuge und Maschinen abgenützt werden. Und analog hat jedes Kriegsgeschehen die Vernichtung von (z. T. auch unersätzlichen) Werten zur Folge.

2.1.2. Wir können hier nicht auf die Weiterungen der Spieltheorie eingehen. Mit zunehmender Komplexität der Konfliktsituation werden naturgemäß auch die spieltheoretischen Modelle zunehmend komplexer, und entsprechend schwieriger gestalten sich auch die mathematischen Überlegungen.

Immerhin soll erwähnt werden, daß der Fall eines *n-Personen-Nicht-0-Summen-Spiels* auf den des 0-Summen-Spiels zurückgeführt werden kann, wenn man einen *»fiktiven (n + 1)ten Spieler«* einführt, der verliert, was die anderen gewinnen, oder gewinnt, was die anderen verlieren.

2.2. *Robinson Crusoe*

2.2.1. Der *einfachste Fall* eines Nicht-0-Summen-Spiels ist der eines einzelnen Spielers, des *Robinson Crusoe* auf einer einsamen Insel. Sein Wirtschaften können wir zunächst als ein Agieren im Rahmen eines 1-Personen-Nicht-0-Summen-Spiels modellieren.

2.2.2. Wir können das Leben und Wirtschaften des Robinson Crusoe auf seiner einsamen Insel aber auch als *»Spiel gegen die Natur«* auffassen und dabei das, was er durch Zufall oder Geschick gewinnt, als Verlust der Natur betrachten.

Das »Robinson-Spiel« ist dann wieder ein 2-Personen-0-Summen-Spiel. Alles, was sich gegen den Willen von Robinson ereignet – Regen, Sturm und Hagelschlag, Dürre, Insektenfraß etc. –, interpretieren wir als Züge des »fiktiven Gegenspielers« »Natur«.

Im Unterschied zu einem menschlichen Gegenspieler spielt der Gegenspieler *»Natur«* freilich »blind«. Die Natur zielt auch nicht auf irgendwelche Gewinne ab. Man kann bezüglich ihrer also auch nicht nach einer »besten Strategie« fragen.

Anders bei *Robinson*. Da er die Züge der »Natur« nicht kennt, d. h. genauer: Da er die Wahrscheinlichkeit der Züge der Natur nicht kennt, ist es für ihn angeraten, den ungünstigsten Fall anzunehmen. Bei jeder Strategie u berechnet er

$$\mathrm{Min}_v\, h\,(u, v),$$

also den Gewinn im ungünstigsten Fall. Diesen Gewinn versucht er zu maximieren, d. h. er versucht

$$M = \mathrm{Max}_u\, \mathrm{Min}_v\, h\,(u, v)$$

zu erreichen.

Das Spiel gegen die Natur ist sicherlich kein determiniertes Spiel. Robinson kann das für ihn mögliche Gewinnmaximum nur durch eine *gemischte Strategie* erzielen. Und das heißt wiederum: Robinson muß mit gewissen Wahrscheinlichkeiten spielen, einmal so, einmal so. Er darf nicht immer das gleiche tun; er muß »verspielt« spielen – jetzt freilich nicht mehr aus Gründen einer Geheimhaltung der eigenen Strategie, wie das in nicht determinierten Spielen zwischen zwei menschlichen Gegnern erforderlich war.

2.2.3. Diese letzte Bemerkung wollen wir besonders hervorheben; sie steht mit Grundsätzlichem im Zusammenhang:

Wir Menschen sind als Lebewesen eingebettet in die Geschehensgesamtheit und den Geschehensfluß der Natur. Da wir – wie auch immer im einzelnen – gewisse Ziele zu erreichen, gewisse Bedürfnisse und Wünsche zu befriedigen trachten, sehen wir uns andererseits auch im Gegenüber zur Natur, sind wir, wie Robinson, Gegenspieler der Natur. Im Rahmen unserer spieltheoretischen Modellbetrachtungen scheint es, als hätte sich im Laufe der Evolution unser Wesen im Lebens- und Überlebenskampf so herausgebildet, daß wir uns ganz von selbst so verhalten, wie uns das Robinson-Modell lehrt. Das gilt nicht nur bezüglich der Realisierung unserer bewußten Ziele und

Zwecke; es gilt auch für unser alltägliches Lebensverhalten. Der Mathematiker van der Waerden meint in diesem Zusammenhang: »Unsere Instinkte bringen uns ganz von selbst dazu, uns spielerisch zu verhalten. Wenn wir irgendwohin unterwegs sind, lassen wir ganz von selbst, ohne es zu wollen, unsere Augen dauernd herumschweifen, nach Zufall und Laune und nicht nach einem starren Gesetz. Und auch wenn wir in der Wissenschaft ein schwieriges Problem lösen wollen, zum Beispiel ein mathematisches Problem, so tun wir gut daran, nicht wie ein Computer nach einem starren System zu verfahren, sondern wir lassen in vielen Fällen am besten unsere Gedanken herumschweifen. Wir spielen mit verschiedenen Methoden, wir versuchen es einmal so, einmal so. Und wenn wir überhaupt nicht weiterkommen, so denken wir vielleicht zwischendurch an etwas anderes. Vielleicht fällt uns in der Nacht oder am nächsten Morgen die Lösung des Problems ein. Es gibt dafür berühmte Beispiele« (van der Waerden [1976], 55).[33]

2.3. *Zwei Menschen im Kampf gegen die Natur*

2.3.1. Wir haben den Fall des einzelnen gegen die Natur kämpfenden Menschen im spieltheoretischen Modell betrachtet. Gehen wir nun zum Fall *zweier Menschen im Kampf gegen die Natur* über. Ihre Gewinnsumme sei nicht notwendig 0; nehmen wir aber an, daß mit der »Natur« als »fiktivem« dritten Spieler die Gewinnsumme immer 0 ist, dann können wir wieder die von Neumannschen Resultate anwenden. Nach ihnen ist es *für die beiden Spieler von Vorteil, sich miteinander zu verbünden, gegen die Natur eine Koalition einzugehen.* Weil man sich im eigentlichen Sinne – gemeint ist: abgesehen von metaphorischen oder anthropomorphen Redewendungen – mit der Natur nicht verabreden kann, kann man sich auch nicht mit der Natur verbünden. Die einzige Möglichkeit ist also, wie van der Waerden bemerkt, »daß die zwei menschlichen Partner sich miteinander verbünden, ihre Strategien aufeinander abstimmen und den gemeinsam erzielten Gewinn oder Verlust nach einer vernünftigen Regel miteinander teilen. Eine aggressive Kampfhaltung oder ein rein egoistisches Benehmen zahlt sich nicht aus: Wir Menschen müssen uns miteinander vertragen« (van der Waerden [1976], 56).

2.3.2. Schließlich sei noch bemerkt, daß bei mehr als zwei Spielern die Verhältnisse sich sehr komplizieren. Auch hier ist es wieder vernünftig, mit anderen zu koalieren. Dies geschieht ja auch allenthalben in Wirtschaft und

Politik. Ob größere oder kleinere und welche Koalitionen aber für die Beteiligten von Vorteil sind, dafür liefert die Neumannsche Spieltheorie keine allgemeinen Regeln.

V. Schluß

Manfred Eigen hat in seinem Buch »Das Spiel – Naturgesetze steuern den Zufall« spieltheoretische Überlegungen zur Modellierung von Erscheinungen der biologischen Evolution verwendet. Er sagt: »Es ist nicht der Mensch, der das Spiel erfand. Wohl aber ist es das Spiel und nur das Spiel, das den Menschen vollständig macht.« . . . »Wir sollten uns freilich nicht der Illusion hingeben, daß man mit Hilfe einer Theorie, die sich fast immer auf idealisierte Voraussetzungen gründet, die Realität voll erfassen könnte . . . Theorie setzt Abstraktion voraus. Sie sublimiert das Regelmäßige und Reproduzierbare aus der Wirklichkeit und präsentiert es in idealisierter Form, gültig unter definierten Voraussetzungen und Randbedingungen. Die Spieltheorie ist ein typisches Beispiel dafür« (Eigen, 32).

Ergänzend könnten wir bemerken, daß die Mathematik im allgemeinen entweder zu einfach[34] oder zu präzise ist,[35] um die Wirklichkeit in toto erfassen zu können. Sie schärft aber gerade dadurch nicht nur unsere Sicht, sondern auch unsere Sichtweise, weil sie uns zwingt, begrifflich zu differenzieren, und weil sie uns damit schließlich gewisse strukturelle Eigenheiten des betreffenden Ausschnitts der Wirklichkeit ins Oberbewußtsein hebt.

Was sich gegen die Überschätzung des theoretischen – hier des mathematischen – Denkens einwenden läßt, gilt für jegliches diskursives Denken. Auch das um die qualitativen Aspekte bemühte diskursive Denken bezieht sich immer nur auf einen Ausschnitt der konkret-materialen oder abstrakt-idealen Welt. Auch das in Prosa sich entwickelnde Denken erfaßt im allgemeinen nicht die Ganzheit einer Erscheinung oder Gegebenheit. Im allgemeinen gelingt es ihm nicht, das Ganze zu charakterisieren; es gelingt ihm im allgemeinen nur, es vor anderen Wesenheiten auszuzeichnen, es zu benennen und zu umschreiben.

»So ist denn auch der größte Unsicherheitsfaktor in der praktischen Anwendung der Spieltheorie die *tatsächliche* Verhaltensweise der Spieler. Werden sie immer im Sinne der Theorie vernünftig handeln? – Ja, werden sie nicht jederzeit versuchen, durch Täuschungsmanöver die Berechnungen der Kontrahenten über den Haufen zu werfen? Wollte eine theoretische Behandlung alle denkbaren Gegebenheiten berücksichtigen, so müßte sie weitgehend die menschliche Psyche miterfassen« (Eigen, 23) . . . »Das besondere Fluidum entsteht erst durch die Kombination von Zufall und Gesetz« (Eigen, 33).

Trotz alledem: Van der Waerden, dem der junge John von Neumann in Göttingen, noch vor der Veröffentlichung seiner ersten Arbeit über Spieltheorie im 100. Band der Mathematischen Annalen, seine Ideen berichtet hat, meint über die Spieltheorie: »Die Gedankengänge von von Neumann sind prinzipiell wichtig. Sie werfen ein neues Licht auf das Zusammenleben von Menschen in der Gesellschaft und insbesondere in der Wirtschaft.« Sie bestätigen in rationaler Weise manchen Erfahrungssatz. John von Neumanns Leistung besteht u. a. darin, daß »er als erster das Problem der stabilen und instabilen Koalition prinzipiell erörtert und in einer exakten mathematischen Theorie gefaßt hat« (van der Waerden [1976], 56).

Anmerkungen

1 Zur Biographie vgl. *Behnke* (1957), *Goldstine* (1980), *Halmos* (1973), *Heims* (1980), *Regis* (1987), *Ulam* (1958, 1986), *von Neumann* (1962).

2 Die 6bändige Ausgabe seiner »Gesammelten Werke« umfaßt auf ca. 3 600 Seiten die Themenbereiche: I: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics. – II: Operators, Ergodic Theory and Almost Periodic Functions in a Group. – III: Rings of Operators. – IV: Continuous Geometry and other Topics. – V: Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis. – VI: Theory of Games, Astrophysics, Hydrodynamics and Meteorology. Vgl. *von Neumann* (1962).

3 Deutsch: Die Rechenmaschine und das Gehirn. München.

4 Deutsch: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten. Würzburg, Wien.

5 Vgl. *Fischer* (1960, 1963).

6 Ein Beispiel für ein Spiel in extensiver Form ist das NIM-Spiel. Für die verschiedensten Varianten dieses Spiels sind Computerprogramme verfügbar. – Für eine spieltheoretische Behandlung siehe *Fischer* (1960); *Burger* 17 ff.; *Schrage/Baumann.*

7 Vgl. hier IV.2.2.

8 Vgl. III.1.2.3.

9 Vgl. in III.2.1.3.

10 Diese Matrix ist nichts anderes als eine Darstellung der Auszahlungsfunktion; sie heißt deshalb auch oft »Auszahlungsmatrix«.

11 Man kann zeigen, daß in diesen Fällen die Spielsituation keinen der Spieler favorisiert.

12 *Lucas,* 153.

13 Vergleiche: Hauptsatz der Theorie der 2-Personen-0-Summen-Spiele in III.1.3.

14 Wenn unter gewissen Bedingungen eines von n einander ausschließenden zufälligen Ereignissen eintreten muß, wobei alle diese Ereignisse gleichberechtigt sind, sagt man, daß diese Ereignisse »gleich häufig« auftreten, daß sie alle die »gleiche Wahrscheinlichkeit« $p = 1/n$ besitzen. Tritt irgendein Ereignis als Folge eines von g Ereignissen aus einer Gesamtheit von m möglichen Ereignissen ein, so interpretiert man im Sinne der elementaren klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie die relative Häufigkeit $p = g/m$ (: = Anzahl g der günstigen Ereignisse : Anzahl m der möglichen Ereignisse) als die »Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses«. Einem »unmöglichen Ereignis« wird dabei als Wahrscheinlichkeit der Zahlenwert 0 zugeordnet, dem »sicheren Ereignis«, das also in jedem Falle eintreten muß, entspricht der Wahrscheinlichkeitswert 1. Die Wahrscheinlichkeiten beliebiger Ereignisse liegen also zwischen 0 und 1 (0 und 1 eingeschlossen): $0 \leq p = g/m \leq 1$. – Kann eine zufällige Größe x die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit jeweils den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ annehmen, so muß die Summe der Wahrscheinlichkeiten $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ sein; es entspricht ihr das sichere Ereignis.

15 Dabei handelt es sich um einen durch die Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwert der Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

16 $p_1 + p_2 = 1$ – vgl. Anm. [14].

17 Vgl. *Vajda,* 16.

18 Vgl. III.1.1.2., 1.1.3.

19 Die Matrix-Spiele mit Sattelpunkt sind in den Aussagen eingeschlossen. Die reinen Strategien sind Spezialfälle von gemischten Strategien. Die Wahrscheinlichkeiten aller reinen Strategien sind jeweils mit einer Ausnahme gleich 0.

20 Geometrisch handelt es sich um das Problem, in einem entsprechend hochdimensionalen Vektorraum an konvexe Körper die durch die Auszahlungsfunktion bestimmte Hyperebene bis zur Berührung heranzuschieben.

21 Vgl. *Fischer* (1959).

22 Jedes endliche Spiel läßt sich graphentheoretisch als »Baum«, d. h. als zusammenhängende zyklenfreie Menge von Streckenzügen darstellen. Die Streckenzüge entsprechen dabei den möglichen Zugfolgen.

23 Nach diesem Satz gibt es also auch für das Schachspiel (mindestens) eine optimale Strategie, d. h. eine Strategie, die, hält man sie nur konsequent durch, zum Siege führen muß. Der von Neumannsche Satz ist freilich nur ein »Existenzsatz«. Er sichert zwar die Existenz einer optimalen Strategie, liefert aber kein Verfahren zur »Konstruktion« der betreffenden Zugfolge.

24 Nach *Lucas,* 158.

25 Nach *Lucas,* 159.

26 Nach *Lucas,* 160.

27 Dabei werden in der Literatur je nach der Größe der Werte in den Zahlenpaaren verschiedene Möglichkeiten unterschieden. Die Nomenklatur ist nicht einheitlich. Sei die Matrix gegeben in der Form:

$$\begin{pmatrix} (a, a) & (c, d) \\ (c, d) & (b, b) \end{pmatrix}$$

so unterscheiden *Rapoport/Guyer/Gordan* (1976) für $d > a > c > b$ die Fälle: (i) $c > b$: »Chikken-Game«; (ii) $c < b$: »Gefangenen-Dilemma«; (iii) $c = b$: »borderline-Games«.

28 Die Literatur zum Dilemma der Gefangenen ist umfangreich. Wir verweisen in Auswahl auf:

Axelrod (1991), *Donninger* (1986), *Lucas* (1989), *Hofstadter* (1983), *Schüssler* (1990). Zur Computersimulation der Problemsituation: *Rapoport* (1991); *Eggebrecht/Manhart* (1991) mit Angabe von Computerprogrammen in Basic.

[29] Vgl. die Simulation der Situation in *Eggebrecht/Manhart.*

[30] *Lucas,* 162.

[31] Vgl. auch IV.1.3. und *de Wals, Kollar, Korona, Maynard Smith/Price, Prosch. Prosch* diskutiert die kooperationsfördernde Wirkung von Pfändern in einer Variante des Chicken-Games.

[32] Opportunistische Koalitionsbildung gibt es offenbar bei allen Primaten. Einerseits sind dort die Mitglieder einer Gruppe Rivalen, die sich um Nahrung und Partner, allgemein um einen hohen Rangplatz, streiten. Andererseits sind sie voneinander abhängig und damit darauf angewiesen, sich bald wieder zu versöhnen und zu vertragen. – Im Rangordnungskampf der männlichen Schimpansen kann ein Rivale schnell zum Verbündeten und nach Erreichung einer höheren Rangstufe ebenso schnell wieder zum Gegner werden. Machtkämpfe erfordern wechselnde Koalitionsbildungen. – Als Folge solcher Beobachtungen lautet nach *de Wals* »die Frage nicht, wie man Aggressionen aus der Welt eliminiert – ein hoffnungsloses Unternehmen –, sondern wie man Aggression unter Kontrolle hält« (*de Wals*). Vgl. auch Anm. [31]

[33] *Van der Waerden* (1973) und *H. v. Kleist:* Über die allmähliche Verfertigung der Gedanken beim Reden.

[34] Wegen der Komplexität der Welt.

[35] Auf idealisierte, abstrahierte und auf definierte Voraussetzungen bzw. Rand- und Anfangsbedingungen gegründet.

Literatur

Axelrod, R. (1991): Die Evolution der Kooperation. München.

Behnke, H. (1957): John von Neumann, ein großes Mathematikerleben unserer Zeit. Math. phys. Sem. Ber. Bd. V (1957), H. 3/4; 186–190.

Brickmann, L. (1989): Mathematical Introduction to Linear Programming and Game Theory. Berlin.

Burger, E. (1959): Einführung in die Theorie der Spiele. Berlin.

De Wals, F. (1991): Wilde Diplomaten. Versöhnung und Entspannungspolitik bei Affen und Menschen. München.

Donninger, C. (1986): Is it always efficient to be nice? A Computer Simulation of Axelrod's Computer Tournament, in: Diekmann, A./Mitter, P. (1986): Paradoxical Effects of Social Behaviour. Heidelberg, Wien.

Eggebrecht, W./Manhart, K. (1991): Fatale Logik. Egoismus oder Kooperation in der Computersimulation. c't Magazin f. Computer-Technik. Juni 1991; 144–156.

Eigen, M./Winkler-Oswatitsch, R. (1975): Das Spiel. München, Zürich.

Fischer, W. L. (1959): Linear Programming. Archimedes, 11. Jg. (1959), H. 5/6; 67–72.

Fischer, W. L. (1959): Die Theorie der Spiele. Archimedes, 11. Jg. (1959), H. 8; 113–118.

Fischer, W. L. (1960): Spielende Automaten. Archimedes, 12. Jg. (1960), H. 5/6; 79–86.

Fischer, W. L. (1963): Strategische Spiele als endliche Automaten I, II. Archimedes, 15. Jg. (1963), H. 1/2, 11–16; H. 3, 37–41.
Garfunkel, S./Steen, L. A. (Hrsg.) (1989): Mathematik in der Praxis. Heidelberg.
Goldstine, H. H. (1980): The Computer from Pascal to von Neumann. Princeton.
Halmos, P. R. (1973): The Legend of John von Neumann. American Mathematical Monthly 80 (1973); 382.
Heims, S. (1980): John von Neumann and Norbert Wiener. Cambridge Mass.
Hofstadter, D. R. (1983): Kann sich in einer Welt voller Egoisten kooperatives Verhalten entwikkeln? Spektrum der Wissenschaft, 8/1983; 8–14.
Kemeny, J. G./Snell, J. L./Thompson, G. L. (1957): Finite Mathematics. Englewood Cliffs N. Y.
Kollar, H. P. (1992): Innerartliche Konflikte und Selektion, in: »Matreier Gespräche 1989: Krieg, Friede, Konflikt«, Wien; 112–121.
Korona, R. (1989): Evolutionarily Stable Strategies in Competition for Resource Intake Rate Maximization. Behavioral Ecology and Sociobiology 25 (1989); 193–199.
Kreutz, H./Bacher, J. (1991): Disziplin und Kreativität. Sozialwissenschaftliche Computersimulation. Opladen.
Lucas, W. F. (1989): Spieltheorie: Ein mathematisches Modell des Wettbewerbs. In: Garfunkel, S./Steen, L. A. (1989); 153–163.
Manteuffel, K./Stumpe, D. (1990): Spieltheorie. Leipzig.
Maynard Smith, J./Price, G. R. (1973): The Logic of Animal Conflict. Nature, 246, Nov. 2; 15–18.
McKinsey, J. (1952): Theory of Games. New York, London.
Neumann, K. (1975): Operations Research Verfahren. Bd. I. München.
Paulsen, A. (1956): Allgemeine Volkswirtschaftslehre, B. I. Berlin.
Prosch, B. (1991): Kooperation durch Pfänder. Dipl. Arbeit. Lehrstuhl f. Soziologie – Fachbereich Wirtschafts- u. Sozialwissenschaften/Universität Erlangen – Nürnberg.
Rapoport, A. (1966): Two-Person Game Theory. Ann Arbor.
Rapoport, A./Guyer, M./Gordon, D. G. (1976): The 2 × 2 Game. Ann Arbor.
Rapoport, A. (1991): Uses of Computer Simulation in Experimental Games, in: Kreutz/Bacher (1991); 3–13.
Rauhut, B./Schmitz, N./Zachow, E. W. (1979): Spieltheorie. Stuttgart.
Regis, E. (1987): Who Got Einstein's Office? Reading, New York.
Schrage, G./Baumann, R. (1984): Strategiespiele. Computerorientierte Einführung in Algorithmen der Spieltheorie. München.
Schüssler, R. (1990): Kooperation unter Egoisten. München.
Tomas, G. (Hrsg.) (1989): Grundlagen des Operations Research. Bd. 3. Berlin.
Ulam, S. M. (1958): John von Neumann 1903–1957. Bull. Am. Math. Soc. 64 (1958).
Ulam, S. M. (1986): Science, Computers and People. Boston, Basel, Stuttgart.
van der Waerden, B. L. (1973): Einfall und Überlegung. Basel.
van der Waerden, B. L. (1976): Die Theorie der Gesellschaftsspiele, in: Bayer. Akademie d. schönen Künste (Hrsg.) (1976): Der Mensch und das Spiel in der verplanten Welt. München; 48–57.
von Kleist, H. (1952): Sämtliche Werke. München.
von Neumann, J. (1925 ff.): Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. J. f. Math., Vol. 154 (1925); 219–240. Vol. 155 (1926); 128. – Math. Ztschr., Vol. 27 (1928); 669–752.

von Neumann, J. (1928): Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Annalen 100 (1928); 295–320.
von Neumann, J. (1932): Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin.
von Neumann, J./Morgenstern, O. (1944): Theory of Games and Economic Behavior. Princeton. – Deutsch (Übers. Leppig, M.) (1973): Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten. Würzburg, Wien.
von Neumann, J. (1958): The Computer and The Brain. New Haven. Deutsch (Übers. Gumin, C. u. H.) (1960): Die Rechenmaschine und das Gehirn. München.
von Neumann, J. (1962): Collected Works, Vol. I–VI. Oxford, London, New York, Paris, Frankfurt.
von Neumann, J. (1966): Theory of Self-Reproducing Automata. Urbana, London.
Vajda, S. (1962): Theorie der Spiele und Linearprogrammierung. Berlin.