

# **Zur mathematischen Charakterisierung kultureller Typenbildung**

## **Inzidenzmatrizen, formale Kontexte, Begriffsverbände als metrische Räume**

### 0. Vorbemerkung

0.1. Die *Kulturethologie* untersucht die Gesetzmäßigkeiten der Eigenschaften und der Verlaufsformen der kulturellen Evolution des Menschen an der Evolution spezieller kultureller Erscheinungsformen. Daß die Gesetzmäßigkeiten der kulturellen Entwicklung formaliter nur in gewissen Aspekten mit denen der Entwicklung biologischer Erscheinungen übereinstimmen, daß insbesondere auf der Seinsebene der menschlichen Kultur neue, schichtbezogene Eigenheiten auftreten, haben Konrad Lorenz, Otto Koenig, Max Liedtke an verschiedenen Beispielfeldern im einzelnen aufgezeigt.

0.2. Nicht alle Beispielfelder eignen sich gleichermaßen gut zur Untersuchung, zur Aufdeckung bzw. Demonstration dieser Gesetzmäßigkeiten.

In den letzten Jahren ist Max Liedtke in umfangreichen Untersuchungen den verschiedenen Ausformungen und Formvarianten kultureller Erscheinungsformen und ihrer Entwicklung am Beispiel liturgischer Gewänder, an den Varianten bestimmter liturgischer Gesänge, zuletzt an der Entwicklung der Schreibgeräte (vgl. M. Liedtke, Abschnitt II.7. in diesem Band) nachgegangen. Dabei zeigte sich u.a., daß, wie in der Biologie so auch in der Kulturethologie, das Auftreten von Typenbildungen zu beobachten ist. In diesem Zusammenhang stellte sich die Frage nach den Möglichkeiten einer *formal-mathematischen Charakterisierung der Typenbildung, der „Arten und Unterarten“* in der Vielfalt sich entwickelnder Kulturphänomene.

0.3. Im folgenden sollen verschiedene Möglichkeiten einer formalen Kennzeichnung der Ausbildung von Artenformen in der kulturellen Evolution, ihrer Merkmalsgerüste und ihrer Merkmalshierarchien angesprochen und erläutert werden, die sich z.T. auf neuere Methoden der Datenanalyse und Datenverarbeitung stützen.

Im Sonderfall der historisch-technischen Entwicklung der Schreibgeräte zeigen die mit den Mitteln der Clusteranalyse und denen der Formalen

Begriffsanalyse gewonnenen Diagramme, daß sich und wie sich morphologische und funktionale *Arten und Unterarten* der Geräte mit unterschiedlicher Merkmalsdistanz im Verlauf ihrer Entwicklungsgeschichte ausbildeten. Dabei lassen sich nicht nur die Entwicklungsstufen in der zeitlichen Reihenfolge der betreffenden Phänomene erfassen; durch die strukturelle Kennzeichnung von *Phasensprüngen* (Struktur- und Funktionssprüngen) der Formen werden auch Stil- bzw. Artenwandel erkennbar. Damit werden weitere Gesetzmäßigkeiten der Verlaufsformen der Entwicklung deutlich.

Die Überlegungen entstanden in enger Zusammenarbeit mit M. Liedtke.<sup>1</sup>

## 1. Methoden zur Klassifizierung von Objekten gemäß ihrer Merkmalsausprägungen

1.1. Die Methoden der „numerischen Taxonomie“ gehen von der Voraussetzung aus, daß man Klassifikationen auf dem Begriff der „Ähnlichkeit“<sup>2</sup> aufbauen sollte. Als ‚natürlich‘ bezeichnet man dabei solche Klassifikationen, die zu Klassen von Elementen führen, deren Mitglieder in einem gewissen Sinne einander ähnlicher sind als die Mitglieder verschiedener Klassen. Während nun den *klassischen Systemen* die Vorstellung evolutionär Zusammenhänge zugrunde liegt, sucht man sich in der numerischen Taxonomie von solchen Klassifikationskriterien durch Einsatz struktuorientierter numerischer Methoden zu befreien. Merkmale werden nicht (nur) nach ihrer evolutionären Bedeutung bewertet, da man ohnehin in vielen Fällen nicht in der Lage ist, die evolutionäre Bedeutung eines jeden Merkmals präzise zu definieren. Merkmale, die aus der einen Sicht als akzidentiell erscheinen, sind aus anderer Sicht durchaus als essentiell, d.h. funktionsbeladen zu bewerten. Die Methoden der numerischen Taxonomie suchen daher möglichst viele Merkmale der Objekte zu erfassen und aufgrund ihrer strukturellen Zuordnung zu den Objekten auf numerischem Wege den Grad der Ähnlichkeit, den gegenseitigen taxonomischen Verwandtschaftsgrad der Objekte zu ermitteln. Dabei ist es durchaus möglich, den Merkmalen auch verschiedene ‚Gewichte‘ zuzuordnen.<sup>3</sup>

1.2. Zur Klassifikation und Ordnung von Objekten gemäß Merkmalsausprägungen wurden bislang Methoden der beschreibenden Statistik, der Faktoren- und Clusteranalyse und Methoden der numerischen Taxonomie eingesetzt. In der folgenden Note werden wir zur Charakterisierung einer Objektmenge nach vorgegebenen Merkmalen und der Bestimmung des

Verwandtschaftsgrades der Objektpaare eine elementare Methode der numerischen Taxonomie, die Bestimmung der *Hamming*-Distanz, mit den nicht-statistischen, qualitativ-strukturorientierten Datenanalysemethoden der sog. *Formalen Begriffsanalyse* (FBA) verbinden.

Die Bildung von Clusterungen bzw. Klassen von Elementen gewinnt dadurch nicht nur an Transparenz, gewisse Strukturen der betreffenden Situationen, z.B. die Frage nach dem morphologischen oder attributiven Verwandtschaftsgrad der Elemente, Analoga zur Auszeichnung und zur Konstitution morphologischer Spezies, werden auch für die inhaltliche Interpretation zugänglicher dadurch, daß die Methode der Formalen Begriffsanalyse die Zusammengehörigkeit von Objekt- und Merkmalsmengen mit mathematischen Mitteln vollständig erfaßt, die Relation der Über- und Unterordnung der so gewonnenen Strukturelemente formal als (netzwerkartige) „Verbandsstruktur“ erstellt und in Form von Liniendiagrammen repräsentiert. Dabei geht sie ganz ausdrücklich jeweils von einem „lokalen Kontext“ aus, in dem ein jeweiliger Wissensstand oder ein bestimmter Aspekt am Forschungsgegenstand zusammengefaßt ist.<sup>4</sup>

## **2. Klassifizierung einer Objektmenge nach vorgegebenen Merkmalen nach Bestimmung des Verwandtschaftsgrades der Objektpaare**

2.1. Gegeben sei eine endliche Menge  $G = \{g_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) von „Objekten“ (Gegenständen, Erscheinungen)  $g_i$ , ferner eine endliche Menge  $M = \{m^k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) von „*Merkmalen*“ (Eigenschaften)  $m^k$  der Objekte aus  $G$ . Von jedem  $g_i$  ist für jedes  $k$  bekannt, ob  $g_i$  das Merkmal  $m^k$  hat oder nicht und umgekehrt.<sup>5</sup>

2.2. Für eine solche relationale Struktur stellen sich u.a. die *Fragen*:

(1) *Sind alle Objekte  $g_i$  bezüglich der gegebenen Merkmalsmenge  $M$  von gleicher Art, von gleichem Verwandtschaftsgrad oder lassen sich die  $g_i$  in zwei oder mehrere Klassen untereinander artverwandter Objekte einteilen?*

(2) *Wie lassen sich die Grade der Merkmalsunterschiede zwischen den Objekten  $g_i$  und  $g_j$  bzw. der ihnen entsprechenden Klassen  $[g_i]$  und  $[g_j]$  und die Grade der Verwandtschaft charakterisieren?*

2.3. Im Hinblick auf die Beantwortung der Frage (1) bemerken wir, daß formal jede *Klassifizierung* der Objekte einer gegebenen Menge  $M$  auf der Auszeichnung einer (geeignet gewählten) Äquivalenzrelation (Gleichheitsrelation)  $\sim$  auf  $M$  <sup>6</sup> beruht. Unter einer *Äquivalenzrelation* auf  $M$  verstehen wir dabei eine (i) reflexive, (ii) symmetrische und (iii) transitive (zweistellige) Relation  $\sim \subseteq M \times M$ .<sup>7</sup> Alle jeweils zueinander äquivalenten (gleichen) Gegenstände werden dann in einer (*Äquivalenz*-)Klasse zusammengefaßt.

*Beispiele:*

(1)  $G$  sei die Menge  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  der natürlichen Zahlen; für  $x, y \in N$  sei  $x \sim y$  die Relation: ‚ $x$  und  $y$  lassen bei Division durch 2 den gleichen Rest‘.  $N$  zerfällt dann in die beiden Klassen  $G = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  der geraden Zahlen (Rest 0) und  $U = \{1, 3, 5, \dots\}$  der ungeraden Zahlen (Rest 1).<sup>8</sup>

(2) Beispiel (1) läßt sich sofort verallgemeinern:

$G$  sei wieder die Menge  $N$  der natürlichen Zahlen; für  $x, y \in N$  sei  $x \sim y$  die Relation: ‚ $x$  und  $y$  lassen bei Division durch  $n \in N$  den gleichen Rest‘. – Im Sonderfall für  $n = 3$  erhalten wir – je nach dem Rest 0, 1 oder 2, den die natürlichen Zahlen bei einer Division durch die Zahl 3 lassen – eine Zerlegung der Menge  $N$  in die drei „Restklassen“:  $0 = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$ ,  $1 = \{1, 4, 7, \dots\}$ ,  $2 = \{2, 5, 8, \dots\}$ .

(3)  $G$  sei eine Menge von Pflanzen; für  $x, y \in G$  sei  $x \sim y$  die Relation: ‚ $x$  und  $y$  haben gleiche Blütenform‘. Durch  $\sim$  zerfällt dann  $G$  in Klassen von Pflanzen je gleicher Blütenform; wir erhalten die Äquivalenzklassen (Typen) der „Korbblütler“, der „Schmetterlingsblütler“ etc.

Allgemein gilt:

*Satz:* Jede Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  induziert eine „Zerlegung“ (*Partition*) der Menge  $M$  in Äquivalenzklassen  $T_i$ “ gemäß der Definition:

$x, y \in M$  gehören zur gleichen Klasse  $T_i$  genau dann, wenn  $x \sim y$ .

Für das System der Klassen  $\{T_i\}_{i \in I}$  gilt :

(0) Jedes  $T_i$  ist eine *Teilmenge* von  $M$ :  $T_i \subseteq M$  für alle  $i \in I$ .

(1) Keine der Teilmengen  $T_i$  ist leer :  $T_i \neq \emptyset$ .

(2) Die Gesamtheit der Mengen  $T_i$  „überdeckt“ die Grundmenge  $M$ , d.h. :

$$\bigcup_{i \in I} T_i = M.$$

(3) Je zwei Teilmengen  $T_i$  und  $T_j$  sind *elementefremd*:  
für alle  $i, j \in I$  gilt  $T_i \cap T_j = \emptyset$ .



M

Fig. 1a: Eine Menge M



$\bigcup_{i \in I} T_i = M$

Fig. 1b: Zerlegung von M  
in Klassen

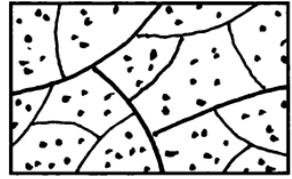


Fig. 1c: Verfeinerung der  
Klassifizierung

Jeder durch eine Äquivalenzrelation induzierten Klassenbildung entspricht – durch Absehen von gewissen Merkmalsunterschieden der Gegenstände – die „Bildung eines Begriffs durch Abstraktion“, die Bildung eines „*klassifikatorischen Begriffs*“ (Fig. 1b)<sup>9</sup>.

Einer *Verfeinerung* einer Begriffsbildung entspricht dabei eine Verfeinerung der vorliegenden Äquivalenzrelation und – gleichwertig damit – eine Verfeinerung der Klassenzerlegung (Fig. 1c).

2.4. Die Lösung der Frage (2) erfolgt in drei Schritten:

(I) *Aufstellung einer vollständigen Tabelle, einer Inzidenzmatrix*

Die vorliegenden Informationen werden zusammengefaßt in einer *Inzidenzmatrix*  $(\mu_i^k)$  mit  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Den Zeilen und Spalten der Matrix werden (1,1)-deutig je die Objekte  $g_i$  bzw. die Merkmale  $m^k$  zugeordnet. An der Kreuzungsstelle der  $i$ -ten Zeile mit der  $j$ -ten Spalte wird der Wert  $\mu_i^k \in \{0,1\}$  eingetragen, und zwar  $\mu_i^k = 1$  bzw.  $= 0$ , je nachdem ob das Objekt  $g_i$  das Merkmal  $m^k$  hat oder nicht.<sup>10</sup>

	$m^1$	...	$m^k$	...	$m^m$
$g_1$	.	...	.	...	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$(\mu_i^k) = g_i$	.	...	$\mu_i^k$	...	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$g_n$	.	...	.	...	.

Wir wollen die Methode an einem Beispiel illustrieren. Als Objektmenge wählen wir eine Menge  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_6\}$  von 6 Gegenständen und eine Merkmalsmenge  $M = \{m^1, m^2, \dots, m^8\}$  von 8 Merkmalen. Die folgende Inzidenzmatrix zeigt an, welcher Gegenstand welche Merkmale besitzt bzw. nicht besitzt.

	$m^1$	$m^2$	$m^3$	$m^4$	$m^5$	$m^6$	$m^7$	$m^8$
$g_1$	1	1	0	1	1	0	1	1
$g_2$	1	1	0	0	1	0	1	1
$g_3$	1	1	1	1	1	0	1	1
$g_4$	0	0	1	0	0	1	1	1
$g_5$	0	1	1	0	0	0	1	1
$g_6$	0	1	1	0	0	1	1	1

Eine solche Matrix beschreibt zunächst die Merkmalsstruktur für die einzelnen Objekte.

In unserem Beispiel besitzt z.B. der Gegenstand  $g_2$  die folgenden Merkmale, die wir zu einem „Merkmals-Tupel“  $\mu_2$  zusammenfassen können:

$$\mu_2: \quad m^1 \quad m^2 \quad 0 \quad 0 \quad m^5 \quad 0 \quad m^7 \quad m^8$$

Durch die Inzidenzzahlen  $\mu_i^k$  ist konkret jedem Objekt  $g_i$  eine Folge aus Nullen und Einsen, die sog. „Inzidenzfolge“  $\langle \mu_i^k \rangle$  (i fest) zugeordnet; sie kodiert das „Merkmals-m-Tupel“  $\mu_i$ , d.h. die Menge aller Merkmale  $m^k$ , die das betreffende Objekt  $g_i$  besitzt.

(II) *Kodierung der Merkmalsübereinstimmungen bzw. der Merkmalsunterschiede von Objekt-Paaren*

Die Inzidenzmatrix erlaubt es, für jedes Objektpaar  $(g_i, g_j)$  festzustellen, in welchen Merkmalen sich die beiden Objekte gleichen bzw. unterscheiden. Dazu wird formal die gliedweise Summe  $g_i(+ )g_j$  der beiden den Objekten  $g_i$  und  $g_j$  entsprechenden Zeilen (Inzidenzfolgen) gebildet, gemäß der folgenden Verknüpfungstabelle:

	(+)	0	1
(2*)	0	0	1
	1	1	0

Die Summenbildung entspricht im wesentlichen der üblichen Addition im Bereich der natürlichen Zahlen mit der Ausnahme, daß  $1 + 1 = 0$  ist.<sup>11,12</sup>

Wir erhalten damit eine neue Matrix  $(a_{ij}^k)$ . Ihren Zeilen entsprechen die Objektpaare  $(g_i, g_j)$ , ihren Spalten wieder die Merkmale  $m^k$ . Dabei erscheint jeweils für  $a_{ij}^k$  der Wert 1, wenn sich die beiden Objekte im Merkmal  $m^k$  unterscheiden, und eine 0, wenn sie in ihm übereinstimmen.

In unserem Beispiel betrachten wir etwa die beiden Gegenstände  $g_2$  und  $g_5$  und bestimmen für dieses Objektpaar das  $(0,1)$ -Tupel derjenigen Stellen (Merkmale), an denen sie sich unterscheiden:

	$g_2$ :	1	1	0	0	1	0	1	1
(3*)	$g_5$ :	0	1	1	0	0	0	1	1
	$a_{2^k 5} = g_2(+ )g_5$ :	1	0	1	0	1	0	0	0 <sup>13</sup>

Diese Prozedur führen wir für alle Paare  $(g_i, g_j)$  aus unserer Matrix  $(1^*)$  durch.

(III) *Bestimmung der HAMMING-Distanz für jedes Paar  $(g_i, g_j)$  von Objekten*

Wir bilden jetzt die Summe der Einsen in jeder Zeile der Matrix  $(\alpha_{ij}^k)$  :

$$d(g_i, g_j) = d_{ij} := \sum_k \alpha_{ij}^k, \quad (k = 1, \dots, m).$$

Die ganze Zahl  $d_{ij}$  ist die Anzahl der Stellen (Merkmale), in denen sich die beiden Objekte  $g_i$  und  $g_j$  unterscheiden.

Je größer  $d_{ij}$  ist, desto größer ist die Zahl der Merkmals-Unterschiede zwischen den Objekten  $g_i$  und  $g_j$ .  $d_{ij}$  heißt in der Literatur „*HAMMING-Distanz*“ oder „*BOOLE-Distanz*“. Es gilt insbesondere folgender Satz:

*Satz:*  $d_{ij}$  ist eine Metrik auf der Menge  $G$  (bezüglich der Menge  $M$ ), d.h.

- (0)  $d_{ij} \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$
- (1)  $d_{ij} \geq 0$ ,  $d_{ij} = 0$  genau dann, wenn  $i = j$ .
- (2)  $d_{ij} = d_{ji}$
- (3)  $d_{ij} \leq d_{il} + d_{lj}$ .

Mit der Definition der Funktion  $d_{ij}$  über  $G$  bezüglich  $M$  ist die Objektmenge  $G$  *metrisiert*. Man kann die Abstandsfunktion  $d_{ij}$  auch als „*Merkmalsdistanz* der Objekte aus  $G$ “ interpretieren.  $(G, d_{ij})$  ist im Sinne der Topologie ein „*metrischer Raum*“.

In unserem Beispiel berechnet man die Distanzen für alle möglichen Paare von (verschiedenen) Objekten (das sind in unserem Beispiel  $(6 \cdot 5) / 2 = 15$  Fälle). Die Distanz  $d_{25}$  der beiden Objekte  $g_2$  und  $g_5$  ist die Summe der Einsen in der letzten Zeile von (3\*), d.h.:  $d_{25} = 3$ . Auf diese Weise erhält man schließlich die folgende (symmetrische)<sup>14</sup> Tabelle (4\*). Der Abstand  $d_{25}$  der beiden Objekte  $g_2$  und  $g_5$  findet sich dort als vorletztes Element der zweiten Zeile, an der Schnittstelle von Zeile 2 und Spalte 5.

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$
$g_1$	0	1	1	6	4	5
$g_2$	1	0	2	5	3	4
$g_3$	1	2	0	5	3	4
$g_4$	6	5	5	0	2	1
$g_5$	4	3	3	2	0	1
$g_6$	5	4	4	1	1	0

(IV) *Klassifikation der Objekte  $g_i$  aus  $G$  gemäß der Merkmalsmenge  $M$  durch die Metrik  $d_{ij}$*

Die Objekte  $g_i$  lassen sich nun nach ihrer gegenseitigen HAMMING-Distanz klassifizieren. Objektpaare sind danach bezüglich der Merkmalsmenge  $M$  „verwandter“ als andere Paare, wenn sie eine kleinere Distanz  $d_{ij}$  aufweisen; sie liegen „näher beisammen“ als andere Paare.

Im Beispiel könnte man nach bloßem Augenschein sagen:  $g_1, g_2, g_3$  und  $g_4, g_5, g_6$  liegen jeweils „nahe“ beieinander. Die beiden Gruppen könnten also zu je einer Klasse zusammengefaßt werden. Die Elemente der beiden Klassen liegen voneinander weiter entfernt als die Elemente der einzelnen Klassen voneinander.

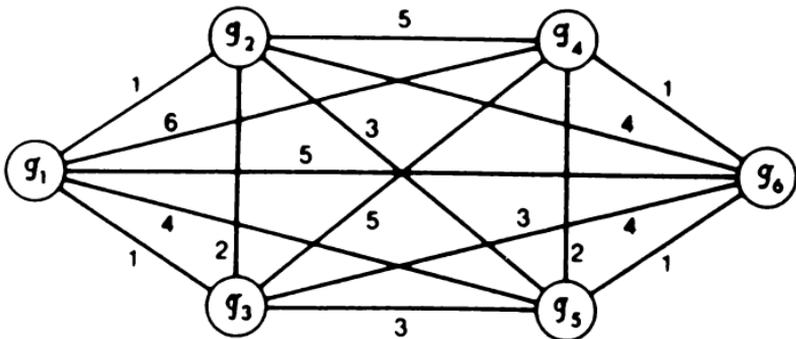


Fig.2: Bewertetes Liniendiagramm der Inzidenzmatrix ( $1^*$ ) unter Berücksichtigung der HAMMING-Distanzen der Merkmalsmenge

Diagrammatisch ließe sich die Situation z.B. so darstellen, wie es die Fig. 2 zeigt.

Die Auszeichnung eines *Kriteriums für die Clusterung* bzw. *für eine Klassenbildung* in der Objektmenge  $G$ , d.h. die Auswahl der ihr zugrunde gelegten *Äquivalenzrelation* (siehe 2.3.), kann in verschiedener Weise erfolgen. Sie könnte z.B. durch Festsetzung eines Schwellwertes für die Distanz  $d_{ij}$  erfolgen. Damit eröffnet sich dann auch die Möglichkeit, gewisse Unsicherheiten der Merkmalszuordnung bzw. Unschärfen der die Merkmale kennzeichnenden Prädikate zu erfassen. Über die Schwellwertbildung für  $d_{ij}$  läßt sich der Raum  $(G, d_{ij})$  durch Definition einer Toleranzrelation  $t$  als „*Toleranzraum*“<sup>15</sup> oder durch Definition einer „*Nachbarschaftsfunktion*“ bezüglich einer Teilmenge von  $G$  zu einer „*Fuzzy-Struktur*“<sup>16</sup> ausbilden.<sup>17</sup>

### 3. Formale Kontexte, Begriffsverbände und deren Liniendiagramme als metrische Räume

3.1. Die in Abschnitt 2. vorgestellte Methode der (formalen) Charakterisierung der Verwandtschafts- bzw. Unterschiedsgrade von Objekten bezüglich einer vorgegebenen Merkmalsmenge ist sehr allgemein. Sie wird im folgenden mit den Methoden der „Formalen Begriffsanalyse“ (FBA) in Zusammenhang gebracht.

#### 3.2. Die Formale Begriffsanalyse

Die *Formale Begriffsanalyse* (FBA) ist eine nicht-statistische, qualitativ-strukturorientierte Methode der Datenanalyse, die seit 1982 von einer Arbeitsgruppe um R. Wille am Mathematischen Institut der Technischen Universität Darmstadt entwickelt wurde.

Die FBA basiert auf einer Rekonstruktion der (mathematischen) Verbandstheorie, einer Theorie der von Teilordnungsrelationen bestimmten Strukturen. Die Ergebnisse der Analyse führen zur Aufdeckung von Zusammenhängen zwischen Merkmalsdimensionen. Ausgehend (1) von einer bestimmten Darstellung der Daten, nämlich in Form eines (formalen) Kontexts, wird (2) die Datenstruktur analysiert, (3) als Begriffs-Verband konstituiert und anschließend (4) durch informationserhaltende graphische Repräsentationen in Form von Liniendiagrammen dargestellt. Darüber hinaus kann die Darstellung der Datenstruktur auch (5) durch die Auflistung der (logischen) Implikationsstruktur der Merkmale und durch die Liste der Merkmalsordnung ergänzt werden.<sup>18</sup>

### 3.3. Formale Kontexte, Begriffsverbände und ihre Liniendiagramme

3.3.1. In der FBA repräsentiert man Wissensbereiche durch „formale Kontexte“, d.h. als Systeme der Form  $K = (G, M, I)$ , wobei  $G$  eine Gegenstandsmenge,  $M$  eine Merkmalsmenge ist. In formalen Kontexten wird die wechselseitige Zugehörigkeit von Gegenständen und Merkmalen durch eine Inzidenzrelation  $I \subseteq G \times M$  ( $gIm$  bedeutet: Gegenstand  $g$  hat das Merkmal  $m$ ) zusammengefaßt. Die genannten Mengen sind in den meisten Anwendungen endliche Mengen, so daß formale Kontexte in Matrixform (also als „Kreuzchentabellen“) darstellbar sind.<sup>19</sup>

3.3.2. Nach klassischer Vorstellung ist jeder *Begriff* extensional (sein *Umfang*) durch die Gesamtheit der unter ihn fallenden Gegenstände und intensional (sein *Inhalt*) durch die Gesamtheit seiner zugehörigen Merkmale bestimmt. Diese beiden Aspekte werden in der FBA zusammenge bunden mathematisiert.

3.3.3. Formal ist für die *Gewinnung aller Begriffe eines gegebenen (formalen) Kontexts*  $K$  einerseits für alle Teilmengen  $A$  von  $G$  die Menge  $A' \subseteq M$  aller auf jeweils alle Gegenstände  $g$  von  $A$  zutreffenden Merkmale aus  $M$  zu bestimmen und andererseits für alle Teilmengen  $B$  von  $M$  jeweils die Menge  $B' \subseteq G$  aller derjenigen Gegenstände zu bestimmen, die alle Merkmale  $m$  von  $B$  besitzen. Die genannten Abbildungen  $A \rightarrow A'$  und  $B \rightarrow B'$  heißen „*Ableitungen* von  $A$  bzw.  $B$ “. Ein „*formaler Begriff*“ über einem Kontext  $K$  ist danach definiert durch ein Paar  $(A, B)$ , bestehend aus einer Gegenstandsmenge  $A$  ( $A \subseteq G$ ) und einer Merkmalsmenge  $B$  ( $B \subseteq M$ ) derart, daß  $A' = B$  und  $B' = A$ , d.h. daß  $B$  alle die Merkmale sind, die allen Gegenständen aus  $A$  gemeinsam sind und umgekehrt  $A$  genau diejenige Menge von Gegenständen ist, die alle Merkmale aus  $B$  besitzen.

3.3.4. Die Menge der formalen Begriffe über einem gegebenen formalen Kontext  $K$  bildet zusammen mit der Relation „*Unterbegriff* < *Overbegriff*“ eine teilgeordnete Menge, die nach dem Hauptsatz der Formalen Begriffsanalyse (R. Wille) genauer ein *vollständiger Verband* im Sinne der mathematischen Verbandstheorie ist. In der Terminologie der FBA heißt dieser Verband „der zum (formalen) Kontext  $K$  gehörige (formale) *Begriffsverband*“.

3.3.5. Mit den Mitteln der FBA ist weiter eine graphische Darstellung von Begriffsverbänden in Form von *Liniendiagrammen* möglich. Das Liniendiagramm enthält jeweils die volle Information des ihm zugehörigen Kontextes; dieser läßt sich umgekehrt direkt und vollständig aus dem Liniendiagramm rekonstruieren.

3.3.6. Für die inhaltliche Interpretation des Kontextes  $K$  von Interesse und Nutzen sind auch die von der FBA bereitgestellten Möglichkeiten, *Implikationen* zwischen den Merkmalen und eine *Merkmalsordnung* zu bestimmen.

3.3.7. Begriffsverbände über endlichen Kontexten, die zugehörigen Merkmalsimplikationen und Merkmalsordnungen sowie die dem Begriffsverband entsprechenden Liniendiagramme können durch entsprechende *Computerprogramme* gewonnen und ausgedruckt werden.

#### 3.4. *Metrisierung von Begriffsverbänden*

Durch die Anwendung der methodischen Schritte von Abschnitt 2.4. auf Formale Kontexte und ihre Verbände erfährt die FBA eine Bereicherung insofern, als es nunmehr möglich ist, „(Begriffs-)Verbände zu metrisieren“. Zwischen den Gegenständen eines Begriffsverbands werden über die HAMILING-Distanzen ihrer Merkmalsvektoren „*Merkmalsdistanzen*“ definierbar<sup>20</sup>, lassen sich die Objekte anschließend nach dem Grad ihrer Merkmalsähnlichkeit, nach ihrer Merkmalsverwandtschaft *in Gruppen zusammenfassen* (clustern). Für gewisse Aspekte – insbesondere bei Vorliegen bewerteter (gewichteter) Merkmale – eignen sich dafür besonders gut die Skalierungen mit Hilfe der „*mehrwertigen Begriffsanalyse*“.<sup>21</sup>

#### 3.5. *Klassifizierung einer Merkmalsmenge bezüglich einer vorgegebenen Objektmenge nach Bestimmung des Verwandtschaftsgrades der Merkmale bzw. von Merkmalsklassen*

Die in den Abschnitten 3.3. bzw. 2.4. vorgestellten Methoden lassen sich auch auf die *Merkmalsmenge* eines lokalen formalen Kontextes anwenden. Dazu hat man im Kontext nur die Rolle der Objekte und die der Merkmale zu vertauschen (Bildung des „dualen Kontexts“). Es werden dann entsprechend die *Verwandtschaftsgrade der Merkmale bezüglich der vorgegebenen Objektmenge* charakterisiert.

### 4. Anwendungen

#### 4.1. *Anwendung der FBA auf den Beispielfall (1) aus 2.4.*

4.1.1. Wenden wir die Methoden der FBA auf das Beispiel in Abschnitt 2.4. an. (0) Die in 2.4.(1) angegebene Inzidenzmatrix ( $1^*$ ) läßt sich als „*dichotomer formaler Kontext*“  $K = (G, M, \mu)$  im Sinne der FBA interpretieren.<sup>22</sup> Damit

lassen sich dann unmittelbar alle Begriffsbildungen und computerunterstützten Methoden der FBA anwenden.

(1) Zunächst erhalten wir als *Liniendiagramm* der als formalen Kontext interpretierten Inzidenzmatrix ( $1^*$ ), z.B. das Diagramm der Fig. 3.<sup>23</sup> Diese Figur ist nicht nur übersichtlicher als Fig. 2, sie gibt auch die Situation der Über- und Unterordnung der Gegenstände bzw. der Merkmale erkennbar besser wieder. Die letztgenannten Beziehungen können am Liniendiagramm direkt abgelesen werden.

In den Liniendiagrammen sind die die Begriffe repräsentierenden Punkte doppelt bezeichnet. Die untere Bezeichnung gibt den Namen des Gegenstands(-Begriffs), die obere Bezeichnung den Namen des Merkmals(-Begriffs) an. Der Einfachheit halber werden an die einzelnen Punkte nicht alle dem betreffenden Gegenstand zukommenden Merkmale angeschrieben. Einem Gegenstand kommen alle die Merkmale zu (Inhalt des Begriffs), die von dem repräsentierenden Punkt durch einen aufsteigenden Streckenzug erreichbar sind. Entsprechend besteht der Umfang eines Begriffs aus allen Gegenständen, die auf einem absteigenden Streckenzug erreichbar sind. Die Abstraktionsbeziehungen zwischen den Begriffen werden durch aufsteigende (bzw. absteigende) Streckenzüge dargestellt. Ein Begriff ist genau dann Unterbegriff eines anderen Begriffs, wenn man von dem ihn darstellenden Kreispunkt über Strecken zu dem Kreispunkt des zweiten Begriffs aufsteigen kann.

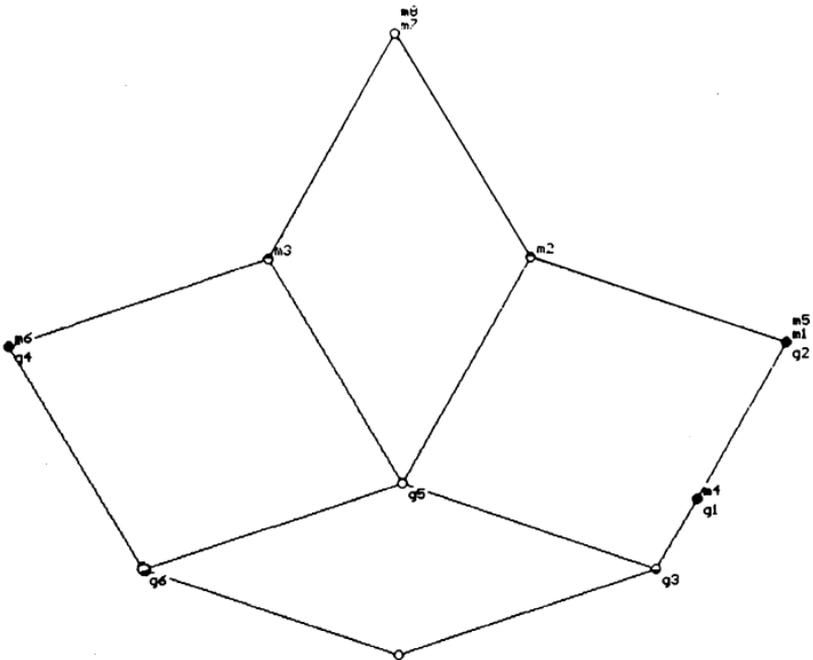


Fig. 3: Liniendiagramm der als formaler Kontext interpretierten Inzidenzmatrix ( $1^*$ )

(2) Die *Merkmalsdistanzen*  $d_{ij}$  für die Objektpaare  $(g_j, g_i)$  (vgl. (4\*)) lassen sich – wie in 2.4.(II, III) beschrieben – durch ein einfaches Computer-Programm aus der Inzidenzmatrix (1\*) gewinnen. Sie können aber auch, und zwar unmittelbar, *aus dem Liniendiagramm abgelesen* werden: Dazu haben wir für zwei Gegenstandspunkte jeweils von einem der beiden Punkte über das oberste gemeinsame Supremum<sup>24</sup> zum betreffenden zweiten Punkt zu laufen, dabei die berührten Merkmale zu zählen und von dieser Anzahl die Anzahl der gemeinsamen Merkmale abzuziehen. Wir erhalten dann jeweils die in Matrix (4\*) erfaßten Merkmalsdistanzen.

So ist in unserem Beispielfall (1) die Distanz von  $g_2$  nach  $g_5$  am Liniendiagramm (Fig.3) folgendermaßen zu ermitteln: Vom Punkt  $g_2$  ausgehend, sucht man den Weg zum Punkt  $g_5$  – und zwar nicht etwa den kürzesten Weg, sondern den Weg, der über das höchste gemeinsame Supremum führt. Dabei schreitet man in unserem Beispielfall zunächst aufsteigend bis zum Einselement des Verbandes<sup>25</sup> und nimmt dann die Streckenfolge abwärts, bis man in  $g_5$  anlangt. Dabei hat man die Merkmalsfolge  $\langle m^1, m^5, m^2, m^7, m^8, m^3 \rangle$ , also 6 Merkmale abgeschritten. Gemeinsam sind den beiden Gegenständen  $g^2$  und  $g^5$  (vgl. die Matrix (4\*) oder noch besser (3\*)) die Merkmale  $m^2, m^7, m^8$ , also 3 Merkmale.  $g_2$  und  $g_5$  unterscheiden sich also in  $6 - 3 = 3$  Merkmalen.  $d_{25} = 3$ .

4.1.2. Unser Beispielfall (1) ist sehr einfach gewählt. In vielen Anwendungsfällen, insbesondere in den für biologische und kulturethologische Situationen so charakteristischen aufspaltenden Entwicklungsverläufen finden sich vielfach *alternative Verzweigungen* vor.

#### 4.2. Anwendungen der FBA in der Kultur-Ethologie zur Charakterisierung von Typen von Kulturerscheinungen (Artefakten) und ihrer Verwandtschaftsgrade

Die vorgenannten Methoden können auf Erscheinungen in der Kultur-Ethologie zur Charakterisierung von kulturellen Phänomenen (Artefakten), ihrer Verwandtschaftsgrade und ihrer Entwicklungsverläufe angewendet werden.

4.2.1. Als Beispielfeld (2) betrachten wir die von M. Liedtke in diesem Band nach Merkmalsgruppen aufgegliederte Formenvielfalt der Schreibgeräte.<sup>26</sup> Die Entwicklung der Schreibgeräte zeigt die typische Form der *aufspaltenden Evolution*. Durch Mutation der Grundelemente des Bauplans und durch Rekombination, d.h. Neukombination, existierender Bau- und Funktionselemente und ihrer Eigenheiten entstanden im Verlaufe der Zeit

immer neue Phänotypen. Durch die formale Charakterisierung wird nun besonders deutlich, wie sich die (zunächst empirisch vorliegenden) Schreibgeräte in verschiedener Weise merkmalsorientiert zu Typen zusammenfassen lassen, daß sich die Typenbildung unter morphologischen und funktionalen Gesichtspunkten als „Artenbildung“ verstehen läßt, deren Elemente sich in verschiedener Weise hierarchisch über- und unterordnen. Die formale Strukturierung führt am Ende zu Artenhierarchien, die in Teilen zugleich einen Stammbaum der Schreibgeräte liefern.

(1) Die Tabelle (5\*) gibt den formalen Kontext SCHR für einen Teil der von M. Liedtke (in Aufsatz II.7. dieses Bandes) durch ihre Merkmale beschriebenen Schreibgerätetypen wieder. Fig. 4 zeigt das Liniendiagramm des (computerunterstützt gewonnenen) zugehörigen Begriffs- (d.h. Objekt- und Merkmals-)Verbands.

(2) In vollständigen Verbänden spielen die *atomaren* und *irreduziblen* Elemente eine besondere Rolle. An unserem Liniendiagramm sind atomare und irreduzible Gegenstände (bzw. die *coatomaren* und *irreduziblen* Merkmale) von den jeweils *abgeleiteten* Gegenständen (Merkmalen) leicht unterscheidbar. Die atomaren (*coatomaren*) und irreduziblen Elemente sind

	u
	n tfug mom
	ssrfrlneefMM
	ppiäoügfiaee
	eetrceanrcc
	zzzbksfsfbhh
	Nr. -----
	SCHRGR!.....!
	G2!x.....!
	G3!x.x.....!
	G4!x.x.....!
	G5!xx.....!
(5*)	RITZER!xxx.....!
	SCHR!xx.x.....!
	TrSchr!xx.xx.....!
	FlSchr!xx.x.x.....!
	Kohle!xx.xx.x.....!
	Kreide!xx.xx.x.....!
	Griffe!xx.xx.x.....!
	Stift!xx.xx.x.....!
	Beisti!xx.xx.xx.x.....!
	Farbst!xx.xx.xx.x.....!
	Drehst!xx.xx.xx.x.....!
	uStift!xx.xx.x.xx.....!
	G18!xx.xx.x.x.x.....!
	-----

*Formaler Kontext SCHR einer Menge von auftragenden Schreibgeräten und ihrer Merkmale (nach M. LIEDTKE)*

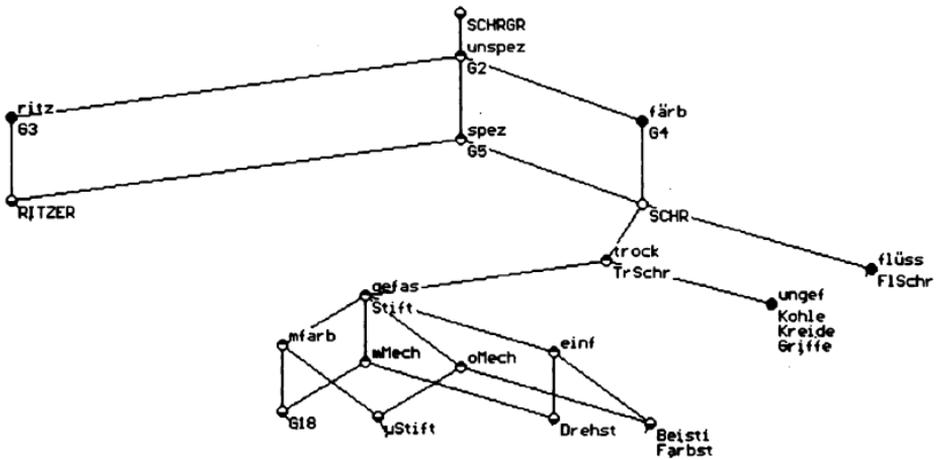


Fig. 4: Liniendiagramm des zum Kontext SCHR ( $5^2$ ) gehörigen Begriffsverbands

insofern die grundlegenden Elemente der Verbandsstruktur, als sie es sind, die den Verband aufspannen bzw. das Liniendiagramm eindeutig bestimmen; aus ihnen kann der Verband bzw. sein Liniendiagramm konstruiert werden. Sie sind demgemäß auch für die inhaltliche Interpretation der Kontext-Struktur von grundlegender Bedeutung.

In unseren Beispielen (Fig. 3 und 4) stellen als geschwärtzte Kreise bezeichnete Punkte atomare bzw. irreduzible Elemente dar: von oben her geschwärtzte Halbkreise atomare bzw. irreduzible Merkmale, von unten her geschwärtzte Halbkreise atomare bzw. irreduzible Objekte.

(3) Das Computerprogramm für die FBA ermöglicht es auch, die genannte Über- und Unterordnung von Merkmalen, d.h. die *Implikationen zwischen den Merkmalen* eines vorgegebenen Kontexts in Form von Listen auszudrücken. Einen Computerausdruck für eine solche Implikationsmenge für unseren Kontext SCHR zeigt Fig.5. Man vergleiche die angegebenen Implikationen mit den durch das Liniendiagramm gegebenen Informationen.<sup>27</sup>

1	( 3 )	:	färb	==>	unspez				
2	( 4 )	:	ritz	==>	unspez				
3	( 5 )	:	spez	==>	unspez				
4	( 7 )	:	flüss	==>	unspez	spez	färb		
5	( 8 )	:	trock	==>	unspez	spez	färb		
6	( 9 )	:	gefas	==>	unspez	spez	färb	trock	
7	( 10 )	:	mMech	==>	unspez	spez	färb	trock	
			gefas						
8	( 11 )	:	oMech	==>	unspez	spez	färb	trock	
			gefas						
9	( 12 )	:	mfarb	==>	unspez	spez	färb	trock	
			gefas						
10	( 15 )	:	einf	==>	unspez	spez	färb	trock	
			gefas						
11	( 18 )	:	ungef	==>	unspez	spez	färb	trock	
12	( 20 )	:	unspez	ritz	färb	==>	spez	trock	
			flüss	ungef	gefas	einf	mfarb	oMech	
			mMech						
13	( 20 )	:	unspez	spez	färb	trock	gefas	oMech	
			mMech	==>	ritz	flüss	ungef	einf	
			mfarb						

Fig.5.: Ausschnitt des Ausdrucks einer minimalen Liste von Implikationen des Kontexts SCHR

Dabei bedeutet z.B.

flüss ==> unspez spez färb

„Wenn ein Schreibgerät das Merkmal ‚flüssig‘ hat, dann hat es auch die Merkmale ‚unspezifisch, spezifisch, färbend‘“. – Man sieht an diesem Beispiel gut, wie alle unsere Interpretationen einer Situation kontextabhängig sind. In der Tat kann ein „mit Flüssigkeit färbendes Schreibgerät“ „unspezifisch“ sein, es kann aber auch „spezifisch“, also durch weitere Merkmale ausdifferenziert sein. Beide Merkmale zugleich kann es aber nicht haben. Unser Kontext SCHR wurde im Hinblick auf die Entwicklungsfolge der Schreibgeräte – zuerst „unspezifische“, dann zeitlich später „spezifische“ Geräte – erstellt. Genau besehen sind freilich die Merkmalsgruppen „spezifisch, unspezifisch“ und „ritzend, färbend“ voneinander unabhängige (atomare) Merkmale. Die Spitze des Kontexts/Liniendiagramms würde unter Berücksichtigung dieser Tatsache die Gestalt wie in Fig. 6 annehmen.

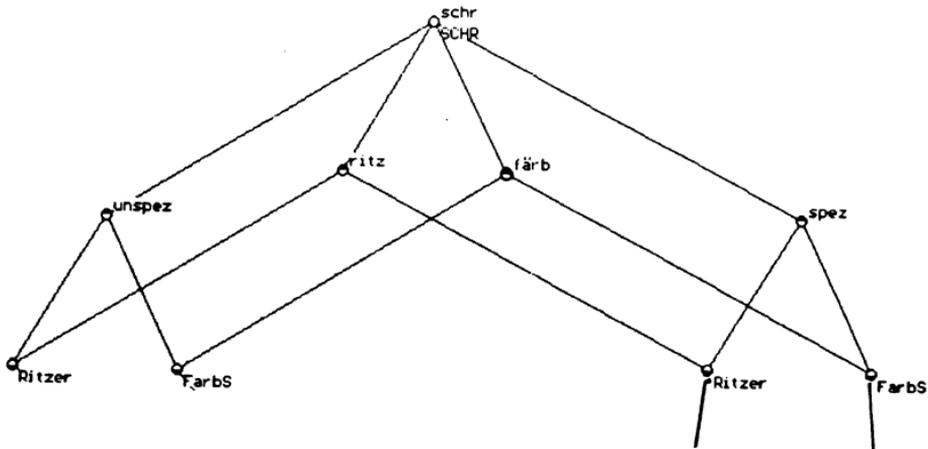


Fig. 6

(4) Für die inhaltliche Interpretation ist gelegentlich auch die *Merkmalsordnung* der Merkmale des Kontexts von Interesse. Fig.7 gibt diese Ordnung für unseren Kontext SCHR im Computerausdruck wieder.

```

unspez :   spez   ritz   färb   -
   spez :   trock  flüss  -
   ritz :   -
   färb :   trock  flüss  -
trock :   ungef  gefas  -
flüss :   -
ungef :   -
gefas :   einf   mfarb  oMech  mMech
  einf :   -
mfarb :   -
oMech :   -
mMech :   -
  
```

Fig. 7: Liste der Merkmalsordnung zum Kontext SCHR. Zu jedem Merkmal werden die nächstfolgenden Spezifizierungen genannt.

(5) Auch für unser Beispielfeld der Schreibgeräte lassen sich entsprechend den im Kontext erfaßten Informationen – wie in 2.4. (II,III) und 4.1.1.(2) – die *Merkmalsdistanzen* zwischen den einzelnen (Typen von) Schreibgeräten bestimmen, ihre gegenseitigen *Verwandtschaftsgrade* angeben und die Typenbildungen entsprechend weiter *clustern*. Mit den klassischen Methoden der Clusteranalyse wird die Situation in Form von Dendrogrammen graphisch wiedergegeben. Die Darstellung durch Liniendiagramme nach der FBA erfaßt freilich das Strukturgerüst der (teilgeordneten) Über- und Unterordnungshierarchie der Merkmale und der Merkmalsimplikationen besser. Im Falle bewerteter Merkmale sind – wie bereits gesagt – die Methoden der „*mehrwertigen Begriffsanalyse*“ (MWB)<sup>28</sup> zur Aufklärung der Typenhierarchien besonders hilfreich. Für ein Beispiel verweisen wir auf 4.3.1.

### 4.3. Weitere Anwendungen in der Kulturethologie

4.3.1. Die oben genannten Methoden wurden angewendet zur hierarchischen Strukturierung der Ausprägungen und Entwicklung der Erscheinungsformen von *liturgischen Gewändern* (vgl. Liedtke 1994, Fischer, W. L. 1994c) und von *musikalischen Werken*, speziell von liturgischen Gesängen.<sup>29, 30</sup>

Als Beispiel für den letztgenannten Bereich geben wir in Fig. 8 eine mit der MWB erstellte „Interordinalskala“ für eine Reihe musikalischer Kompositionen aus mehr als viereinhalf Jahrhunderten wieder. Ausgehend von einer Ermittlung der Streuwerte der Tonhöhenhäufigkeiten im Part der ersten Violine in den betreffenden Werken (nach Fucks 1968; 21, 27) wurden diese Werte als gewichtete Merkmale eines „mehrwertigen Kontexts“ interpretiert und der Erstellung einer Interordinalskala zugrundegelegt. Obwohl die Streuwerte sicherlich wenig aussagekräftig sind bezüglich des musikalischen Gehalts der betreffenden Kompositionen und ihrer Struktur, so lassen schon die Streuwerte der einfachen Tonhöhenstatistik einen bestimmten Trend in der musikgeschichtlichen Entwicklung erkennen. Deutlicher noch aber als die Wertetabelle zeigt die „Interordinalskala“, daß sich die betreffenden musikalischen Kompositionen clustern, und zwar in Übereinstimmung mit den uns aus der Musikgeschichte geläufigen Zuordnungen der Werke zu Epochen und Stilen.

Die Wertetabelle und die zugehörige Interordinalskala stellt eine mathematische Beschreibung des gesetzmäßigen Verlaufs der musikalischen Stilent-

wicklung dar. Die mathematische Charakterisierung der Gesetzmäßigkeiten der Verlaufsformen in der Entwicklung musikalischer Werke und ihrer Strukturen ließe sich bei Berücksichtigung einer größeren Anzahl von Kompositionen, von weiteren Form- und Struktur-Parametern und bei Verfeinerung der Skala weiter ausbauen.

<b>Zeitabschnitt</b>	<b>Komponist</b>	<b>Werk</b>	<b>Streuung der Tönhöhen</b>	<b>Durchschnittswerte für den Zeitraum</b>
1530–1650	Palestrina Schein	Ricercari Suiten	3.8 4.6	3.7
1680–1740	Corelli Vivaldi Bach	Concerto grosso Nr. 8 Concerto grosso op. 3 Nr2 Doppelkonzert d-Moll	4.7 5.4 6.2	5.4
1780–1825	Mozart Beethoven 1 Beethoven 2	Symphonie g-Moll 5. Symphonie Streichquartett op. 74	7.0 7.1 7.8	7.1
1822–1900	Schubert Schumann Brahms Tschaikowsky	8. Symphonie 2. Symphonie Violinkonzert 6. Symphonie	7.4 7.7 8.6 10.0	8.4
1930–1950	Bartok	2. Suite	9.5	
1922–1960	Berg Webern Schönberg Nono	Streichquartett op. 3 Streichtrio op. 20 Violinkonzert Varianti	11.1 10.4 10.9 13.0	10.8

*Streuung der Tönhöhenhäufigkeiten für den Part der ersten Violine in musikalischen Kompositionen aus viereinhalb Jahrhunderten (nach Fucks, W. 1968; 21, 27).*

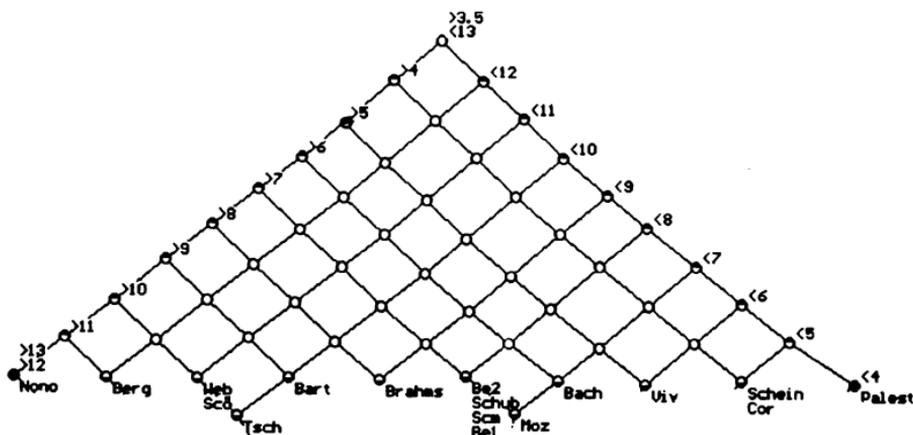


Fig. 8: Interordinalskala für die musikalischen Werke aus der vorstehenden Tabelle

4.3.2. Als weitere Anwendungsfälle bearbeiten wir z.Z.:

- Die Charakterisierung des *Verwandtschaftsgrades* von Begriffen in wissenschaftlichen (z.B. mathematischen, physikalischen) Theoriegebilden.
- Die Charakterisierung der *wissenschaftshistorischen Begriffsentwicklung* in wissenschaftlichen Theoriegebilden (z. B. Geometrie).<sup>31</sup>
- In der *Mathematikdidaktik* u. a. Erscheinungen bei der Entwicklung der Begriffsentwicklung und der mathematischen Fachsprache von Vorschulkindern und im Geometrie- und Arithmetikunterricht.<sup>32</sup>
- Auf Anwendungsmöglichkeiten in der *Linguistik* im Zusammenhang mit der Topologisierung von Sprachräumen<sup>33</sup> haben wir hingewiesen in Fischer, W.L. 1994b.

## Literatur

- DRÖSSER, C. (1994): Fuzzy Logik. Hamburg.
- FISCHER, W.L. (1967): Anwendungen der Boole-Ringe. Archimedes, Bd. 19 (1967), H. 3. S. 39-43.
- FISCHER, W. L. (1971): Numerische Taxonomie. Der Mathematikunterricht, Jg. 17, H. 3 (August 1971). S. 57-66.
- FISCHER, W. L. (1973): Äquivalenz- und Toleranzstrukturen in der Linguistik. München.

- FISCHER, W. L. (1989): Marginalien zur Zweiheit in Mathematik und Natur. In: Liedtke, M. (Hrsg.): Paarbildung und Ehe. Matreier Gespräche. Wien-München. S. 127–150.
- FISCHER, W. L. (1993) Formal Concept Analysis as a Research Tool in Educational Mathematics. Hiroshima Journal of Mathematics Education (Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Hiroshima University, Hiroshima/Japan), Vol 1 (March 1993). S. 1–35.
- FISCHER, W.L. (1994a): Die formale Begriffsanalyse als Werkzeug in der Mathematikdidaktik. In: Pickert, G./ Weidig, I. (Hrsg.): Mathematik erfahren und lehren. (Festschrift f. H. J. Vollrath). Stuttgart/Düsseldorf/Berlin/Leipzig. S. 80–88.
- FISCHER, W. L. (1994b): Zur Topologisierung des Wortraums einer Sprache. In: Merten, S. (Hrsg): Von lernenden Menschen – Erst- und Zweitspracherwerbsprozesse. (Festschrift f. B. Weisgerber). Rheinbreitbach. S. 217–232.
- FISCHER, W. L. (1994c): Mathematische Charakterisierung des Formwandels am Beispiel der Kasel. In: Liedtke, M (Hrsg.): Kulturethologie – Über die Grundlagen kultureller Entwicklungen. (Gedenkschrift f. Otto Koenig). München. S. 80–99.
- FISCHER, W. L. (1995): Der Einsatz mathematischer Methoden bei der Beschreibung, Formalisierung und Modellierung von anthropologischen Datenstrukturen – Mathematische Hilfen zur Objektivierung qualitativer Daten. In: Uher, J. (Hg.): Pädagogische Anthropologie und Evolution. Beiträge der Humanwissenschaften zur Analyse pädagogischer Probleme. Erlanger Forschungen: Reihe A, Bd. 73. Univ.Bibliothek Erlangen. S. 33–71.
- FUCKS, W. (1968): Nach allen Regeln der Kunst. Stuttgart.
- GANTER, B./Wille, R./Wolff, E. (Hg.) (1987): Beiträge zur Begriffsanalyse. Mannheim-Zürich-Wien.
- LIEDTKE, M. (1994): Verlaufsformen der Kulturentwicklung – dargestellt am Beispiel der Form- und Funktionsveränderungen bei liturgischen Gewändern. In: Liedtke, M. (Hrsg.): Kulturethologie – Über die Grundlagen kultureller Entwicklungen. (Gedenkschrift f. Otto Koenig). München. S. 26–79.
- LIEDTKE, M. (1995): Die Formen und Verlaufsformen der Entwicklung der Schreibgeräte. – In diesem Band Aufsatz II.7.
- RIEDL, R. (1990): Die Ordnungen des Lebens. München.
- WILLE, R. (1984): Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. In : Bock (Hrsg.): Anwendungen der Klassifikation: Datenanalyse und numerische Klassifikation. Frankfurt. S. 32–51.

## Anmerkungen

- 1 Eine umfangreichere Behandlung des Beispielfeldes der Schreibgeräte wird vorbereitet.
- 2 Die Charakterisierung des „Ähnlichkeitsbegriffes“ bereitet freilich große Schwierigkeiten. Vgl. Riedl, R. 1990, 69, 70ff., 79, 89ff., 204–206, 217, 229–232, 366, 373).
- 3 Fischer, W. L. 1971.
- 4 Wir gehen also dezidiert aus von der Enge unseres Bewußtseins, von der Vorläufigkeit unseres Wissensstands, davon, daß wir immer nur Ausschnitte der konkreten oder abstrakten „Welt“ bearbeiten können.

- 5 Mit der letzten Forderung machen wir eine „starke“, idealisierende Voraussetzung, die realiter im Forschungsprozeß vielfach nicht erfüllt ist. Dementsprechend sind unsere Begriffe vielfach nur „Proto-Begriffe“ oder „Prä-Begriffe“ (Fischer, W. L. 1994a; 86) oder in verschiedener Weise mit einer Unschärfe behaftet (Fischer, W. L. 1995; 42–43). Vgl. auch Anm.<sup>17</sup>.
- 6 d.h. zwischen den Elementen der Menge M
- 7 Eine zweistellige Relation  $\sigma \subseteq M \times M$  auf einer Menge M kann verschiedene Eigenschaften haben. Sie ist *reflexiv*, wenn  $x\sigma x$ , *symmetrisch*, wenn  $x\sigma y \Rightarrow y\sigma x$ , *transitiv*, wenn  $(x\sigma y \text{ und } y\sigma z) \Rightarrow x\sigma z$  für alle  $x, y, z \in M$  gilt.
- 8 Vgl. Fischer, W. L. 1989.
- 9 Für Einzelheiten verweisen wir auf Fischer, W. L. 1973 und Fischer, W. L. 1995; 40–43.
- 10  $\mu_i^k = 1$  oder  $= 0$  ist eine andere Schreibweise für die Gültigkeit der „Inzidenzrelation“  $I \subseteq G \times M$  mit „ $g_i \text{Im}^k$  wahr“ oder „ $g_i \text{Im}^k$  falsch“, wobei  $g_i \text{Im}^k$  bedeutet: „Der Gegenstand  $g_i$  hat das Merkmal  $m^k$ “.
- 11 Es handelt sich um die Addition in der endlichen Algebra über dem Zahlbereich  $\{0, 1\}$ . Diese Algebra ist die auch in der Informatik gebräuchliche Algebra der binären Zahlen. Formal handelt es sich um ein GALOIS-Feld der Charakteristik 2, in anderer Deutung um den BOOLE-Ring über  $\{0, 1\}$ . Vgl. Fischer, W. L. 1967, 1971.
- 12 Im allgemeineren Fall wird man für alle Objektpaare  $(g_i, g_j)$  nicht die „Exklusiv-Oder-Summe“ des BOOLE-Ringes bilden, sondern (in einem Computerprogramm) fragen und festsetzen: „Wenn  $\mu_i^k \neq \mu_j^k$  dann 1, sonst 0“, und zwar für jedes Merkmal  $m^k$ .
- 13 In anderer Sicht könnte man bezogen auf die Gesamtzahl der Merkmale auch sagen:  $g_2$  besitzt von 8 möglichen Merkmalen 5 Merkmale (5/8), während  $g_3$  nur 4 Merkmale (4/8) hat. Bei der HAMMING-Distanz wird demgegenüber (unter Berücksichtigung des inhaltlichen Aspekts) auf die Anzahl der Merkmale abgehoben, in denen Objektpaare übereinstimmen bzw. sich unterscheiden.
- 14 Wegen: (2)  $d_{ij} = d_{ji}$ . Entsprechend sind wegen  $d_{ii} = 0$  die Werte in der Hauptdiagonale sämtlich gleich 0.
- 15 Eine „Toleranzrelation“  $\tau$  auf einer Menge M ist nur (i) reflexiv und (ii) symmetrisch; sie ist nicht (wie eine Äquivalenzrelation) notwendig transitiv.  $x \tau y$  lesen wir „x ununterscheidbar von y“. Toleranzrelationen induzieren in einer Menge keine Zerlegungen in elementfremde Klassen. Die voneinander ununterscheidbaren Elemente gehören Teilmengen an, die einander teilweise überlappen. – Zur Theorie der Toleranzräume vgl. Fischer, W.L. 1973, 1994b, 1995.
- 16 Zur Theorie der Fuzzy-Strukturen vgl. z.B. Drösser, C. 1994.
- 17 Abgesehen von der begrifflichen Situation in der Mathematik und in formalen Systemen sind die meisten unserer Begriffe „unscharf“. Die damit zusammenhängenden Probleme für die Konstitution formaler Charakterisierungen, also die Problematik der Klassenbildung bzw. von klassifikatorischen Begriffen im Zusammenhang mit unscharfen Prädikaten, mit Toleranzrelationen, das Verhältnis von Theorie und Metatheorie, von Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik, . . . behandeln wir in einer eigenen Arbeit.(In Vorbereitung) – Wir verweisen aber auf Fischer, W. L. 1973, Fischer, W. L. 1995.
- 18 Zur Einführung vgl.: Wille, R. (1984), Ganter, B./Wille, R./Wolff, E. (1987), vgl. auch Fischer, W. L. 1993,1994a und die dort angegebene Literatur.
- 19 Wir verweisen nochmals auf unsere Bemerkungen am Ende von 1.2. und Anm.<sup>4</sup>.
- 20 Vgl. das Beispiel in 4.1.1. (2)

- 21 Wir verweisen auf die angegebene Literatur, etwa Ganter, B./Wille, R./Wolff, E. (1987).
- 22 Formale Kontexte sind zunächst als „Kreuzchen-Tabellen“ (Besetzungsmatrizen) gegeben. Diese lassen sich aber ohne weiteres auch als Inzidenzmatrizen, als sog. „dichotome Kontexte“, interpretieren.
- 23 Das Diagramm ist in seiner Form nicht eindeutig bestimmt. Es kann (durch Verwendung eines mausgesteuerten Zeigers) in verschiedene (einander isomorphe) Formen gebracht werden.
- 24 Das *Supremum* zweier Elemente (Punkte) a und b im Liniendiagramm ist das Element (Punkt) c, in dem sich die von a und b ausgehenden, nach oben verlaufenden Streckenzüge treffen.
- 25 Das ist das alleroberste Element im Liniendiagramm.
- 26 Diese stellen am Ende keine Einzelobjekte dar, sondern Typen. Für unsere Betrachtungen werden sie freilich als „Gegenstände“ interpretiert.
- 27 NB: Diese Implikationen beziehen sich auf den vorgegebenen Kontext!
- 28 Vgl. Ganter, B./Wille, R./Wolff, E. 1987.
- 29 In Vorbereitung.
- 30 Vgl. auch Fischer, W. L. 1995; S. 60–62.
- 31 Vgl. auch Fischer, W. L. 1994a, S. 86–87.
- 32 Vgl. Fischer, W. L. 1994a.
- 33 Vgl. Fischer, W. L. 1994b.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Matreier Gespräche - Schriftenreihe der Forschungsgemeinschaft Wilheminenberg](#)

Jahr/Year: 1996

Band/Volume: [1996a](#)

Autor(en)/Author(s): Fischer Walther L.

Artikel/Article: [Zur mathematischen Charakterisierung kultureller Typenbildung. Inzidenzmatrizen, formale Kontexte, Begriffsverbände als metrische Räume 36-59](#)