Walther L. Fischer

Anwendungen der Fuzzy-Logik in der Technik

A: EINLEITUNG

0. Die Realisierung von technischen Geräten

0.1. Aufgabe der Technik ist die gezielte Entwicklung und Realisierung von bestimmten Geräten, die unter Berücksichtung vorgegebener Daten und Randbedingungen bestimmte Erwartungen und Wünsche hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit erfüllen.

Das Problem und das Vorgehen zur Herstellung technischer Geräte ist im Prinzip *deterministisch* – und ist es de facto auch wieder nicht, wegen der Komplexität der Aufgabenstellung oder auch wegen der Komplexität der Struktureigenart der beteiligten Materialien.

Nicht alles läßt sich „berechnen" – zu komplex sind vielfach die Komponenten in ihrem Feinbau, sind die Wechselbeziehungen der beteiligten Komponenten, unscharf sind oft die Ausgangsbedingungen und die Endbedingungen zu formulieren.

Denken wir etwa an die Aufgabe, für ein Flugzeug bestimmter Flugeigenschaften ein Tragflächenpaar zu entwerfen, so haben wir u.a. zu bedenken, daß das Flugzeug nicht nur aus den Flügeln besteht; es hat als Ganzes Eigenschaften, die auf die Umströmung der Tragflächen rückwirken. All diese Eigenschaften kann man – insbesondere, weil man sie zunächst in toto nicht kennt – nicht in die Berechnungen der Tragflügelprofile einbeziehen. Nicht alles, d.h. nicht alle Forderungen, Bedingungen, funktionalen Zusammenhänge und Materialeigenschaften sind von vornherein klar formulierbar.

Vögel flogen lange ehe es Flugzeuge gab – und sie flogen übrigens z.T. nach anderen Prinzipien als unsere Flugzeuge. Die Natur formuliert nicht und sie rechnet nicht – sie optimiert die organischen Aufbauteile, die Formen und Funktionen im Prozeß der Evolution.

Selbst, wenn man als Techniker beim Entwurf eines Geräts „rechnet" – und der Techniker rechnet natürlich –, wird man auch als Techniker das gewünschte Tragflächenprofil im Hinblick auf die geforderten Eigenschaften in einem mehrstufigen *technischen Evolutionsprozeß* optimieren[1].

0.2. Auch technische Objekte evolvieren, werden evolviert. – In der Evolution technischer Objekte gibt es Übereinstimmungen und Unterschiede zur Evolution biologischer Objekte. Nennen wir einige dieser Unterschiede und Übereinstimmungen im Schema:

Unterschiede von Evolutionsprozessen		
	Evolution	
in der Technik		**in der Biologie**
- gezielt (final)		nicht final
- Vererbung erworbener Eigenschaften		-
	– Artbildung	
nicht an genetische Verwandtschaft gebunden		an genetische Verwandtschaft gebunden
gebunden nur an Adaptierbarkeit/an die Kombinierbarkeit der Komponenten als Randbedingung		

Übereinstimmung von Evolutionsprozessen		
in der Technik		**in der Biologie**
	Verbesserung	
		} der Form/der Funktion von Organen
	Optimierung	
- vom Ziel her		in der Bewährung im Lebenskampf
	unter Energieminimierung nach Extremalprinzipien	

0.3. Bei technischen Entwicklungen sind häufig weder die Vorgabe-Daten, noch die Ziel-Daten *genau* bekannt. Oft kennt man nur die Richtung, in die man entwickeln will – wird die Entwicklung von Ziel- und Wunschdenken geprägt.

1. Beispiel: Eine Luftballon-Aufblase-Maschine[2]

1.1. Wir gehen aus von einem einfachen Beispiel[3]:

Die Spielzeugabteilung eines Großkaufhauses will bei einer Werbekampagne an Kinder aufgeblasene Luftballons verteilen. Was sich die Abteilungsleitung zur Entlastung der Angestellten wünscht, ist eine „Luftballon-Aufblase-Maschine". – Was müßte eine solche Maschine leisten, wie müßte sie gebaut sein, funktionieren – wenn sie funktioniert?

Die Maschine müßte aus einer Gasflasche über Ventile unter Druck portionsweise Gas in die zunächst leeren Luftballons blasen. Und sie sollte sich abstellen, also mit dem Blasen aufhören, wenn die Ballons eine gewisse Größe erreicht haben. Die Maschine sollte jedenfalls den Blasvorgang einstellen, bevor die Ballons platzen. M.a.W.: die Ballons sollten „schön prall" sein, aber nicht platzen.
Um diese doppelte Bedingung zu realisieren, müßte über Sensoren jeweils der zunehmende Druck im Ballon gemessen werden. Eine Steuerung müßte von Druck und Gasvolumen abhängig Ventile regeln und schließlich das Signal „Blasen einstellen" geben.

1.2. Das Problem, eine solche Maschine zu realisieren, wäre einfach zu lösen, wenn es genügte, die Ballons aufzublasen und bei einem bestimmten Schwellwert des Innendrucks das Blasen einzustellen, wenn, um es mathematischer zu formulieren, daß Problem „linear" wäre (vgl. Fig. 1), wenn der Innendruck proportional mit dem sich vergrößernden Gasvolumen anstiege. Das ist freilich nicht der Fall.

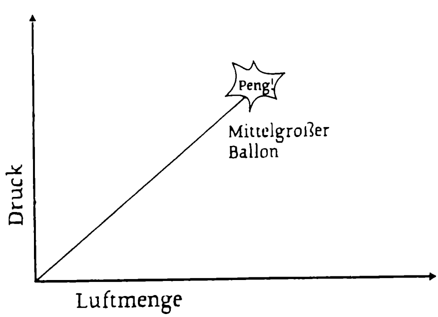

Fig. 1

Druck und Volumen wachsen beim Aufblasen eines Ballons nicht proportional zueinander. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist „nicht linear". Der Druck steigt mit zunehmender Luftmenge zunächst an, fällt dann wieder ab, um schließlich monoton zu wachsen. Außerdem ergeben Messungen für verschiedene Ballongrößen verschiedenartige Typen von „*Platzkurven*" (Fig. 2). Sie lassen erkennen, daß die Maschine bei gewissen Ballongrößen gar nicht erst mit dem Blasen begönne, weil der anfänglich zu überwindende Anblasedruck größer ist als der Druck, bei dem der Ballon schließlich platzt.

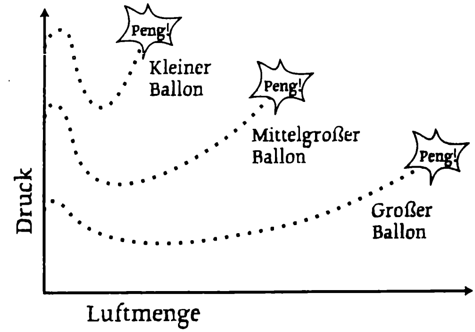

Fig. 2: Platzkurven Ballons verschiedener Größe

1.3. In *klasssischer Vorgehensweise* würde man das Problem, eine *Luftballon-Aufblase-Maschine* zu entwerfen und technisch zu realisieren, dadurch angehen, daß man zunächst die funktionalen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Größen, also zwischen Innendruck und jeweiliger Gummidehnung bzw. der Oberflächenspannung des Ballons im betreffenden Augenblick *mathematisch in Form von partiellen Differentialgleichungen* beschreibt. Aus den Materialdaten und den Daten des Druckes ließen sich dann die Spannung des Gummis berechnen und Schwellwerte festlegen, die das Einstellen des Blasvorgangs bestimmen. In unserem einfachen Beispiel könnte man durchaus ausgehend von solchen Berechnungen eine Maschine der gewünschten Art bauen so, daß sie auch die oben genannte Schwierigkeit des höheren Anfangsdrucks bewältigte. In vielen anderen Fällen ist aber der streng deterministische Konstruktionsansatz nicht durchführbar, er führte insbesondere nicht zum optimalen Entwurf, eben weil sich nicht alle Bedingungen genau, nicht alle erforderlichen Werte rechnerisch exakt erfassen lassen.

1.4. Und in der Tat: Es geht auch anders – z.B. unter Anwendung der Konzepte der *Fuzzy-Logik*.[4] Dabei versucht man – um in unserem Beispiel zu bleiben – die *Vorgehensweise eines Menschen* nachzuahmen, der einen Luftballon aufbläst. Ein Vater, der seinem Kind einen Luftballon aufbläst, löst keine partiellen Differentialgleichungen, er bläst. Und er bläst mit

Gefühl, d.h. er schätzt die Situation mit seinen menschlichen Sensoren ab. Mit seinen Händen, die den Ballon umgreifen, erfühlt er die jeweilige Oberflächenspannung der Gummihaut und mit seinem Mund erspürt er jeweils den Innendruck im Ballon. Er schätzt beide Größen ab, als *„klein"*, *„mittelgroß"* oder *„groß"*, als *„unproblematisch"*, als *„noch nicht so gefährlich"* oder als *„es reicht jetzt bald"*.

1.5. Die nach solchen Vorstellungen modellierte und gebaute *Fuzzy-Luftballon-Aufblase-Maschine* existiert tatsächlich in einem Labor der „Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung" (GDM) bei Bonn. Sie hat dort die Aufgabe, die Anwendbarkeit des Prinzips der Fuzzy-Logik im Bereich der Technik zu demonstrieren (DRÖSSER 1994; 9).

1.6. Die *Fuzzy-Luftballon-Aufblase-Maschine* arbeitet im Prinzip wie folgt:
(1) Sie geht aus von gewissen Eingangsgrößen, die sie ***fuzzifiziert***, d.h. sie beschreibt deren Ausprägungsgrade mit *unscharfen Begriffen*; sie arbeitet mit „schwammigen" Datenangaben, bestimmt von „unscharfen Prädikaten".
(2) Sie benutzt *unscharfe Regeln*, „Daumenregeln": ***Fuzzy-Regeln.***
(3) Sie verknüpft diese Regeln und die Daten zu *unscharfen Folgerungen*: ***fuzzy-logische Inferenz.***
(4) Am Ende wird das so gewonnene Ergebnis in präzise Anweisungen umgesetzt, die *Fuzzifizierung* wird am Ende mit einer ***Defuzzifizierung*** abgeschlossen.

1.7. Bleiben wir beim Beispiel der *Luftballon-Aufblase-Maschine* und präzisieren wir die ersten beiden Aspekte.

1.7.1. Die *Eingangsdaten* sind, wenn wir nicht genaue Messsungen und Rechnungen anstellen wollen – oder in anderen Fällen anstellen können –, *nur unscharf bestimmt*. Wir können etwa sagen:

der Druck kann sein: *hoch*, *mittel* oder *niedrig*

und entsprechend kann auch das erreichte Luftvolumen,

die Luftmenge sein: *groß*, *mittelgroß* oder *klein*.

Den Eingangsdaten Druck und Luftmenge haben wir damit jeweils drei *unscharfe* – wie wir sagen werden – *„fuzzy-Begriffe"* zugeordnet. Sie werden, wie unser obiges Beispiel erkennen läßt, sprachlich dargestellt durch *„Modifikatoren"* wie „wenig", „klein", „nicht so groß", „mittel", „sehr groß", . . .[5] Daß die genannten Begriffe bzw. Bestimmungen unscharf sind, ergibt sich u.a. aus der Tatsache, daß keine der Bestimmungen Ober- oder

Unterbegriff der anderen ist, und daß jede der Eingangsgrößen *mehrere* dieser Fuzzy-Eigenschaften haben kann, und zwar in unterschiedlichem Grade. Die genannten Begriffe bzw. die sie bestimmenden Eigenschaften schließen sich nicht gegenseitig aus, in gewissen Bereichen können sie sich *überlappen*.

1.7.2. Unscharf sind auch die Regeln. Die *Fuzzy-Regeln* für unsere Maschine haben etwa die Form:

		klein
Wenn die eingeblasene Luftmenge	**{**	**mittelgroß**
		groß
und		
		niedrig
der Innendruck	**{**	**mittel** **ist,**
		hoch
		blase weiter !
dann	**{**	
		höre auf !

Im Grunde sind damit 18 (= 2 x 3 x 3) verschiedene Möglichkeiten oder Regelfälle erfaßt. Für den Bau der Maschine könnten wir nun kombinatorisch alle 18 Möglichkeiten in Form je einer einzelnen Regel zusammenfassen: „*Immer wenn . . . und wenn . . ., dann tue . . .*“. Das wäre umständlich. Man überlegt sich leicht, daß es genügt, wenn wir uns darauf festlegen, daß

> *die Maschine im Normalzustand bläst, und zwar so lange, bis das System der Fuzzy-Regeln es anhält.*

Wir brauchen also nur „Stop-Regeln“ zu formulieren. Und diese Regeln sollen so formuliert sein, daß das maschinelle System die Aufgabe erfüllt, daß die Maschine den entsprechenden Befehl ausführt obwohl sie nicht weiß, welche Größe der betreffende Ballon hat, ob er klein, mittel oder groß ist.

Wie konstituieren wir nun die Regeln? –
Aus unserer Fig. 2 erkennen wir:

> bei zunehmender Luftmenge platzt zuerst der kleine, dann der mittlere, dann der große Ballon.

Bei ganz kleiner Luftmenge geschieht also nichts, nähert sich der Wert der Luftmenge seinem mittleren Wert platzt zuerst der kleine, dann der mittlere Ballon, und zwar bei „*ziemlich*“ hohem Druck.

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs von Druck und Volumen formulieren wir zunächst die:

REGEL 1: Wenn die eingeblasene Luftmenge mittelgroß ist und der Innendruck hoch ist, dann höre auf zu blasen!

Die Kurven in Fig. 2 zeigen, daß diese Regel noch nicht den großen Ballontyp erfaßt. Auch er aber soll „schön" aufgeblasen werden. Für ihn wird die Situation kritisch bei großer Luftmenge und bereits bei mittlerem Druck. Um sein Platzen zu verhindern legen wir fest:

REGEL 2: Wenn die eingeblasene Luftmenge groß ist und der Innendruck mittel ist, dann höre auf zu blasen!

Für alle anderen Kombinationen legen wir fest: Weiterblasen!

1.8. Wollen wir die Maschine bauen, werden wir feststellen, daß wir noch nicht wissen, wie wir ihr die Regeln 1 und 2 implementieren sollen. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß wir noch kein Kriterium haben dafür, wann wir den Druck bzw. die Luftmenge als „groß", „mittel" oder „klein" ansehen sollen/wollen. Wir kennen noch nicht die Reichweite dieser Prädikatoren. –

Wir müssen also für die Prädikatoren bzw. Modifikatoren Grade der Ausprägung festlegen

für die *Luftmenge*: *„wie weit groß"*? –
Etwa: „groß zum Grad 0,4";

oder

bezüglich des *Innendrucks*: *„wie weit mittelhoch"*? –
Etwa: „mittelhoch zum Grad 0,7".

Und auch der Befehl „höre auf" kann graduell abgestuft sein, etwa: „zum Grad 0,6".

1.9. Bauen wir die Maschine nach diesen Überlegungen und Vorgaben und lassen wir sie blasen. – Zu unserem Erstaunen werden wir feststellen: Die Ballone platzen trotz aller unserer Vorüberlegungen! –

Warum funktioniert unser Fuzzy-System noch nicht? –
Es gibt verschiedenste Gründe.
- Die Fuzzy-Begriffe (Bestimmungen) sind *nicht scharf* und das impliziert
- sie können sich – im Gegensatz zu scharfen Begriffen – *überschneiden*. Ein- und derselbe Zustand kann daher eventuell verschiedene Fuzzy-Regeln aktivieren.
- Es könnte natürlich auch die Fuzzyzität der Begriffe oder die der Regeln *ungünstig gewählt* sein oder *nicht zusammenstimmen*. Man müßte evtl. ihre Ausprägungsgrade und Ausprägungsgrenzen verschieben.
- Es könnte auch eine der Regeln „falsch formuliert" sein, d.h. *am Ziel „vorbeizielen"*.
- Vielleicht sind im betreffenden Anwendungsfall die Regeln *nicht gleichwertig*, sind sie verschieden gewichtig.

1.10. Damit die Maschine funktioniert, muß *die Vagheit bzw. Unschärfe der Begriffe und Regeln und ihre Beziehungen und Verknüpfungen* genauer untersucht bzw. *theoretisch erfaßt sein*. Genau dies geschieht formal in der *„Fuzzy-Logik"*. (Vgl. 4. und 5.2.)
Wir werden das Beispiel unserer *Luftballon-Aufblase-Maschine* nicht weiter verfolgen. Sie wird bei entsprechender Verfeinerung der Überlegungen funktionieren – und sie funktioniert, wie das Modell in Bonn zeigt – wenn man die angesprochenen Problemfelder genauer untersucht, wenn man eine *scharfe Theorie des Unscharfen* entwickelt, wenn man im speziellen Fall, wie man heute sagt, eine „Fuzzy-Logik" entwickelt und in die technische Realität umsetzt.

In Richtung auf dieses Ziel werden wir zunächst den *Unterschied von scharfen und unscharfen Begriffen* diskutieren, ihn im Hinblick auf die Fuzzy-Theorie beschreiben[6] – und anschließend die fuzzy-*„logischen Verknüpfungen"* definieren.

B: SCHARFE BEGRIFFE – ZWEIWERTIGE LOGIK

2. Was ist ein Begriff?

2.0. Zur Vorbereitung und zum besseren Verständnis der Charakterisierung begrifflicher Unschärfe und der ihr angemessenen (bzw. der mit ihr verbundenen Art der) Logik gehen wir zunächst aus von der traditionellen Bestimmung dessen, was man unter einem *„Begriff"* (einem *„scharfen Begriff"*) versteht, und zwar vor dem Hintergrund der 2-wertigen aristotelischen Logik, ehe wir dann in den Abschnitten 4. und 5. eine scharfe Theorie des Unscharfen vorstellen.

Fragen wir zuerst: *Was ist aus klassischer philosophischer Sicht ein Begriff?*[7] – Welche Komponenten oder Aspekte hat er? – Wie läßt sich die Gewinnung eines Begriffs formal charakterisieren?

2.1. Klassifikatorische Begriffe

2.1.1. Im Sinne der traditionellen Philosophie ist ein Begriff eine Allgemeinvorstellung, ein allgemeiner Gegenstandstypus[8]; genauer: ein Begriff entspricht einer Äquivalenzklasse von Gegegenständen.

2.1.2. Klassifikatorische Begriffe gewinnt man dadurch, daß man die Gegenstände einer vorgegebenen Gegenstandsmenge nach bestimmten Merkmalen (Eigenschaften, Attributen) *klassifiziert*. Dabei faßt man die bezüglich der Merkmale je gleichen (gleichartigen, gleichwertigen, *„äquivalenten"*) Gegenstände zu einer Menge (*„Äquivalenzklasse"*) zusammen. Die so gewonnenen Teilmengen der Gegenstandsmenge erhalten zur sprachlichen Kennzeichnung und zur geistigen Verfügbarkeit jeweils noch einen *„(Begriffs-)Namen"*.

Beispiele: Die verschiedenen Familien in der Botanik: „Schmetterlingsblütler", „Korbblütler", „Orchideen", . . . Die zugehörige Äquivalenzrelation auf der Menge der Pflanzen ist: „gleiche Blütenform". (FISCHER 1973, 1995)

Unser ganzes Denken ist durchsetzt von Begriffen. Schon das Kleinkind verwendet und bildet unablässig Begriffe, verknüpft und hierarchisiert die Begriffe zum Begriffsnetz von Unter- und Oberbegriffen. Das Kind unterscheidet bald deutlich zwischen dem eigenen Haushund (einem konkreten

Objekt) und „einem Hund“ (als Typus), spricht davon, daß „ein Hund“ „ein Tier“ ist, . . .
Begriffe bilden in verschiedener Weise Hierarchien. Es gibt auch Begriffe von Begriffen. Wenn wir etwa vom Begriff (Zahltypus) der „Primzahl“ sprechen, verstehen wir darunter die (abzählbar unendliche) Menge derjenigen Zahlgegenstände (Einzel-Begriffe), die durch das Merkmal bestimmt ist: „eine von 1 verschiedene natürliche Zahl zu sein, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist“.
Im Mathematikunterricht, wie im täglichen Leben, *„veranschaulichen“* wir Begriffe dadurch, daß wir (ohne Einschränkung der Allgemeinheit und unabhängig von der speziellen Wahl) einen oder mehrere dem Verständnis vertraute Gegenstände aus der betreffenden Klasse als Repräsentanten des Begriffs auswählen und vorzeigen. In unserem Falle geben wir etwa beispielhaft an: „2, 3, 5, 7, 11 sind Primzahlen“.[9]

2.2. Intension, Extension eines Begriffs

Am Begriff unterscheidet man in der philosophischen Tradition seinen „Inhalt“ (Intension) von seinem „Umfang“ (Extension).
Ein Begriff ist einerseits bestimmt durch seine *„Intension“*, d.h. die Gesamtheit der auf die vom Begriff erfaßten Gegenstände zutreffenden Merkmale (Eigenschaften, Attribute), und andererseits durch seine *„Extension“*, die Gesamtheit aller unter den Begriff fallenden Gegenstände mit den genannten Merkmalen.
Diese beiden Aspekte werden in einer modernen computerunterstützten Form der Begriffsbildung, der sog. „Formalen Begriffsanalyse“ (FBA) mathematisiert.[10]

2.3. Formale Begriffe über lokalen Kontexten

2.3.1. Für die *Begriffsbildung* liefert die FBA ein an der mathematischen Verbandstheorie orientiertes formales Modell und Verfahren. Wissensbereiche werden dort repräsentiert durch *„formale Kontexte“*, d.h. als Systeme der Form $K = (G,M,I)$, wobei G eine Gegenstandsmenge, M eine Merkmalsmenge ist. Weiter wird in formalen Kontexten die wechselseitige Zugehörigkeit von Gegenständen und Merkmalen durch eine Inzidenzrelation $I \subseteq G \times M$ (gIm bedeutet: „Gegenstand g hat das Merkmal m“) beschrieben. Da die genannten Mengen in den meisten Anwendungen endliche Mengen sind, ist es möglich, formale Kontexte in Matrixform darzustellen.
Beispiel: Der folgende Kontext (Fig. 3) bezieht sich auf die Eigenschaften einiger Vierecktstypen.

	1PaS=	2PaS=	1PgS ‖	2PgS ‖	1W90°
Viereck					
PräDra	x				
Drachen	x	x			
Trapez			x		
Parall			x	x	
Raute	x	x	x	x	
Rechte			x	x	x
Quadr	x	x	x	x	x

Fig. 3: Formaler Kontext einiger Viereckstypen.– Gegenstandsmenge: Allgemeines Viereck, Trapez, Parallelogram, Prädrachen, Drachen, Raute, Quadrat. – Merkmalsmenge: 2 Paar Anseiten kongruent/1 Paar/2Paar Gegenseiten parallel, 1 Paar/ein Winkel 90°.

2.3.2. Bei der Begriffsbildung über einem gegebenen Kontext K sucht man nun alle Eigenschaften, die allen Gegenständen der ausgewählten Gegenstandsmenge genügen (gemeinsam sind), und sucht anschließend alle Gegenstände, die alle diese Eigenschaften besitzen. Diese so gewonnene Gegenstandsmenge ist i.a. größer als die Ausgangsmenge, sie ist aber nun gegen weitere solche Operationen stabil. Formal gilt genauer: Für die Gewinnung aller Begriffe eines gegebenen (formalen) Kontexts K ist einerseits für alle Teilmengen A von G die Menge A' $\subseteq$ M aller auf jeweils alle Gegenstände g von A zutreffenden Merkmale aus M zu bestimmen und andererseits für alle Teilmengen B von M jeweils die Menge B' $\subseteq$ G aller derjenigen Gegenstände zu bestimmen, die alle Merkmale m von B besitzen. Die genannten Abbildungen A -> A' und B -> B' heißen „*Ableitungen* von A bzw. B". Ein „*formaler Begriff*" ist danach definiert durch ein Paar (A,B) mit: A $\subseteq$ G, B $\subseteq$ M derart daß A'= B und B'=A.

2.3.3. Die Menge der formalen Begriffe über einem gegebenen formalen Kontext K bildet zusammen mit der Relation „*Unterbegriff < Oberbegriff*" eine teilgeordnete Menge, die nach dem Hauptsatz der Formalen Begriffsanalyse (WILLE) genauer ein vollständiger Verband im Sinne der mathematischen Verbandstheorie ist. Begriffsverbände über endlichen Kontexten und die zugehörigen Merkmalsimplikationen können durch entsprechende Computerprogramme gewonnen und durch Liniendiagramme dargestellt werden. Das Liniendiagramm enthält die volle Information des ihm zugehörigen Kontextes; er läßt sich direkt und vollständig aus dem Liniendiagramm rekonstruieren.

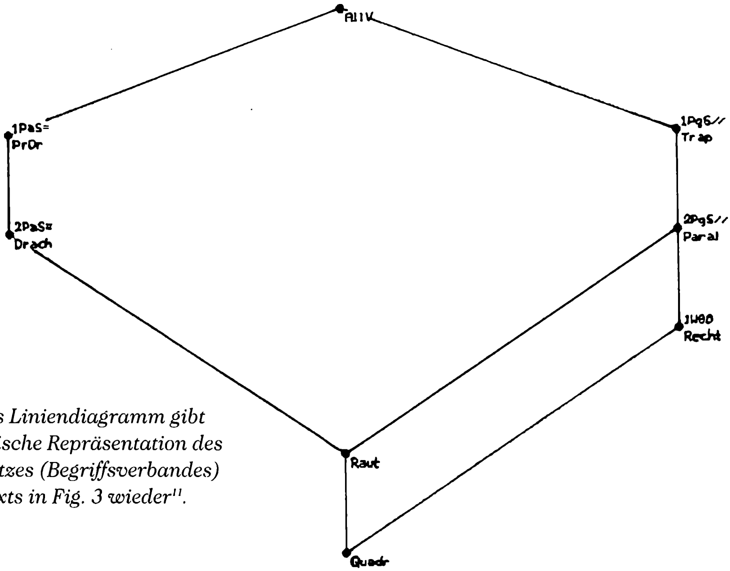

Fig. 4: Das Liniendiagramm gibt die graphische Repräsentation des Begriffsnetzes (Begriffsverbandes) des Kontexts in Fig. 3 wieder[11].

2.4. Vollständige bzw. unvollständige oder unscharfe Begriffe in der Sicht der FBA

Ein Begriff ist nach dem Vorgehen der FBA intensional gegeben durch eine Merkmalsmenge und extensional durch eine Gegenstandsmenge, die im oben genannten Sinne genau aufeinander passen. Wenn man also einen Begriff „*vollständig*" oder „genau kennen will", muß man zur Gegenstandsmenge genau alle diejenigen Eigenschaften kennen, die *allen* Gegenständen der Auswahl zukommen und umgekehrt zu dieser Eigenschaftsmenge auch *alle* Gegenstände kennen, die alle diese Eigenschaften besitzen. So gesehen sind viele Begriffe des täglichen Gebrauchs „*unvollständig*" oder „*unscharf*", weil wir entweder nicht alle Eigenschaften ihrer Intention oder nicht alle Gegenstände ihrer Extension kennen.

Die nach der FBA gewonnenen Begriffe sind „scharfe Begriffe". Sie sind aber nur „*lokale Begriffe*", d.h. bezogen auf je unseren gegenwärtigen Wissensstand, also unseren „lokalen, instantanen Wissens-Kontext", sie sind „*Protobegriffe*". Die wissenschaftliche Arbeit besteht vielfach gerade darin, die lokalen Zuordnungen zwischen Gegenständen und Merkmalen aufzuklären, bewußt zu machen und weiter den lokalen Kontext (Zusammenhang zwischen Gegenständen und Merkmalen) zu erweitern und zu verfeinern.

Ob wir es wollen oder nicht, wir beziehen uns i.a. notwendig nur auf lokale und vorläufige Kontexte, auf Ausschnitte der Welt, die sich im Verlauf der Wissens- und Erkenntnisgewinnung erweitern. *„Absolute Begriffe"*, also Begriffe ohne Bezug zu einem (irgendwie bewußt oder unbewußt) vorgegebenen Kontext gibt es also nicht.[12]

3. Intensionale und extensionale Sprachen

3.0. Mit dem vorstehenden ist die – in der Wissenschaftstheorie gängige – Unterscheidung von *intensionalen* und *extensionalen Sprachen* mitgedacht.

3.1. Wirklichkeit und Sprache

3.1.1. In concreto und abstracto begegnen wir *Objekten* (Gegenständen der empirischen Welt oder unseres Denkens und Vorstellens). Die Objekte haben *Attribute* (Eigenschaften bzw. Merkmale). Sprachlich werden die Objekte durch *Individuen-Namen*, die Attribute durch *Prädikate* repräsentiert. Hat ein Gegenstand x die Eigenschaft P(x), so schreiben wir auch: P(x) ist wahr.
Während nun in der Prädikatenlogik vor allem der Begriffsinhalt maßgebend ist, ist in der Klassenlogik und der Mengentheorie vor allem der Begriffsumfang zentral. Je nachdem nun, welchen Aspekt wir in den Vordergrund stellen, unterscheiden wir zwischen zwei Sprachformen: die von den Prädikaten (gewisser Gegenstände), von den Begriffsinhalten bestimmte *intensionale Sprache* bzw. die von den betreffenden Gegenständen, von den Begriffsumfängen bestimmte *extensionale Sprache*, Sprachformen, in denen Sachverhalte vornehmlich prädikatenlogisch bzw. mengentheoretisch repräsentiert werden.

3.1.2. Der Zusammenhang zwischen beiden Sichtweisen und Sprachformen wird durch das sog. *Komprehensionsschema* vermittelt. Nach ihm faßt die Menge P genau alle die Elemente (Objekte) x zusammen, für die das Prädikat P(x) wahr ist. Wir schreiben:

$$\mathbf{P} = \{x \mid P(x) \text{ ist wahr})\}\text{, d.h. Menge aller x für die P(x) wahr ist.}$$

3.2. Prädikate und Mengen / Element-Mengen-Relation ε

Nach dem *Komprehensionsprinzip* gehört zu jedem Prädikat P(x) die Menge P aller Gegenstände (eines gewissen Bereichs), die die genannte Eigenschaft besitzen[13].

Dementsprechend schneidet ein Prädikat P(x) aus einer gegebenen Grundmenge X von Objekten eine Teilmenge P aus, nämlich genau diejenigen Elemente x von X, die das Prädikat P(x) erfüllen.

x ist Element von P genau dann, wenn P(x) wahr ist:

$$x \varepsilon P \iff P(x) \text{ wahr}$$

x ist nicht Element von P genau dann, wenn P(x) falsch ist:

$$\neg x \varepsilon P \iff P(x) \text{ wahr}$$

Nach dem Komprehensionsprinzip können wir schreiben:

$$P = \{x \varepsilon X \mid P(x) \text{ ist wahr}\}$$

Beispiel: Sei X die Menge aller natürlichen (ganzen positiven) Zahlen von 1 bis 10: X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} – und sei P(x) gegeben durch: $5 \leq x \leq 10$, d.h. x sei mindestens gleich 5 und höchstens gleich 10, dann schneidet P(x) aus X die Teilmenge P = {5,6,7,8,9,10} aus. (Fig. 5)

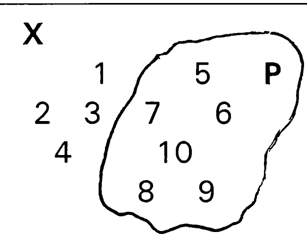

Fig. 5

3.3. Zugehörigkeitsfunktion $\mathcal{E}_P$

Die Element-Mengen-Relation $\mathcal{E}$ kann in anderer Weise auch numerisch ausgedrückt werden, nämlich durch die *Zugehörigkeitsfunktion* $\mathcal{E}_P$. Sie nimmt für alle $x\mathcal{E}X$ der Grundmenge, die zur Teilmenge P gehören, den Wert 1, für alle $x\mathcal{E}X$, die nicht zu P gehören, den Wert 0 an:

$$x\mathcal{E}P \iff \mathcal{E}_P(x) = 1$$
$$\neg x\mathcal{E}P \iff \mathcal{E}_P(x) = 0$$

In der üblichen graphischen Darstellung von Funktionen stellen wir die Situation über die Zugehörigkeitsfunktion dar in der Form (Fig. 6):

$$x\epsilon \mathbf{P} \iff \epsilon_P(x) = 1$$
$$\neg x\epsilon \mathbf{P} \iff \epsilon_P(x) = 0$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\epsilon_P(x)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

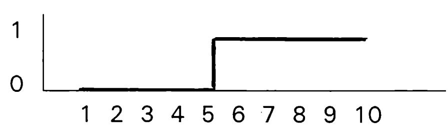

Fig. 6

3.4. Zweiwertige Logik

Als Hintergrund unserer bisherigen Überlegungen fungiert bewußt oder unbewußt die Struktur der *2-wertigen (alternären) aristotelischen Logik*. Fundamental für diese Logik sind der *Satz vom Ausgeschlossenen Dritten* (Tertium non Datur) und der *Satz vom Ausgeschlossenen Widerspruch*. *Aussagen* sind danach *wahrheitsdefinite* sprachliche Gebilde, d.h. genauer sprachliche Gebilde die eindeutig entweder eindeutig wahr oder falsch sind; einen dritten Wahrheitswert gibt es nicht.[14] Außerdem ist die Wahrheitsbewertung in der klassischen Logik *zeitunabhängig* gedacht.

Wird die Aristotelische Logik mathematisiert, so entspricht ihr als formales System eine „BOOLEsche Algebra über der Menge {0,1}" (FISCHER 1965, 1968)

C: UNSCHARFE BEGRIFFE – FUZZY LOGIK

4. Unscharfe Prädikate und unscharfe Mengen – Fuzzy Prädikate und Fuzzy Mengen

4.1. Fuzzy-Prädikate und Fuzzy-Mengen

4.1.1. In Abschnitt 2.4. haben wir von unvollständigen bzw. unscharfen Begriffen gesprochen. Unscharfe Begriffe gibt es in den Umgangssprachen und in den Wissenschaftssprachen in verschiedenster Weise.[15]

4.1.2. Die Begriffe, die wir (in Abschnitt 1.7. und 1.8.) bei der Beschreibung der Bedingungen für den Bau einer Luftballon-Aufblase-Maschine verwendeten, sind in der Weise unscharf, daß die den betreffenden Prädikaten entsprechenden Merkmale i.a.W. verschiedener Grade ihrer Ausprägung fähig sind. Die Prädikate sind – in unserem Falle – durch die Beifügung von sprachlichen Modifikatoren ausgezeichnet; wir nennen sie *„Fuzzy-Prädikate"*.

Beispiele für *„Fuzzy-Prädikate"*, für unscharfe Prädikate, denen Merkmale (Merkmalsgruppen) mit verschiedenen möglichen Ausprägungsgraden zugrundeliegen, sind: „x ist eine kleine ganze Zahl" oder „x ist ein schönes

Mädchen“, „x ist blond“ oder „x ist groß gewachsen“, „die Luftmenge x ist mittelgroß“, der „Innendruck x ist gering“.

4.1.3. Der Megariker EUBULIDES von Milet hat im 4. Jhdt. v. Chr. erstmals auf Begriffsbildungen hinwiesen, die wir heute „fuzzy“ nennen. Im Bestreben, seinen Landsleuten klarzumachen, daß sie über die Bedeutung der täglich gebrauchten Wörter nicht Bescheid wüßten, stellte er Fangfragen. Seine wohl berühmteste Frage lautete: „Wieviele Körner bilden einen Haufen?“ – Er erkannte, daß zwischen „Haufen“ und „Nicht-Haufen“ ein fließender Übergang besteht.[16]
In unserer Zeit hat der Biologe Bernhard HASSENSTEN aus anderer Sichtweise die Bedeutung und die Funktion unscharfer Begriffe für die Wissenschaft erörtert (HASSENSTEIN 1951, 1954, 1971, 1979). Er hat sich mit der Frage befaßt, wie man Felder begrifflich erfaßt, in denen fließende (evtl. stetige) Übergänge von Merkmalsgraden existieren und hat in der Diskussion der betreffenden Begrifflichkeiten darauf hingewiesen, daß Begriffsbildungen mit fließenden Grenzen in der Wissenschaft nicht nur notwendig sind, daß ihre Verwendung in der Wissenschaft auch möglich ist, ohne daß die Wissenschaftlichkeit der Überlegungen Einbußen erleidet. Der Einbruch von Unbestimmtheit und Unschärfe ist nicht gleichbedeutend mit einem Mangel an Klarheit. „Alles über Begriffe mit fließenden Grenzen Gesagte ist klar formulierbar“, (HASSENSTEIN 1979; 237, 238) sagt er und weißt auf die Lofti ZADEH hin.

4.1.4. Fuzzy-Prädikate lassen sich im Anschluß an die Arbeiten von L.A. ZADEH (1965ff.) „scharf“, d.h. mit einer mathematischen Theorie erfassen. Dazu werden in der *„Fuzzy-Logik“* die intensionale Sprache der Prädikate bzw. die extensionale Sprache der Mengen mehrwertig verallgemeinert:

- auf Skalen für Merkmalsgrade für unscharfe Prädikate, denen unscharfe Mengen entsprechen;
- die Zweiwertigkeit der Logik wird in der Fuzzy-Logik zur Mehrwertigkeit erweitert;
- die zweiwertige Element-Mengenrelation ε wird zur mehrwertigen Funktion $\mu_P(x;X)$ der Zugehörigkeitsgrade der Elemente x zu einer Teilmenge **P**.

4.2. Fuzzy-Prädikate – Unscharfe Mengen

Wenn ein Prädikat P(x) unscharf ist in dem Sinne, daß man nur sagen kann, daß die betr. Eigenschaft in kleinerem oder größerem Grade auf den betr. Gegenstand zutrifft, wird die zugehörige Komprehension bzw. wird die zugehörige Menge unscharf.

Im Falle solcher unscharfer Eigenschaften bzw. unscharfer Prädikate P(x) ist das Komprehensionsschema[17] nicht länger in seiner obigen Form (Abschn. 3.1.2.) gültig. Weil die Ausprägung des Merkmalsgrades verschiedener Werte fähig ist, kann auch die Aussage P(x) nicht mehr eindeutig mit „wahr" oder „falsch" bewertet werden. In der Fuzzy-Logik gilt der Satz vom Ausgeschlossenen Dritten nicht mehr; sie ist eine mehrwertige Logik. Im Falle einer unscharfen Eigenschaft bzw. eines unscharfen Prädikats P(x) ist daher die Zugehörigkeit eines Elements x von X zu einer (Teil-) Menge P nicht mehr eindeutig bestimmt.

4.3. Fuzzy-Prädikate – Mehrwertige Zugehörigkeitsfunktion μ

4.3.1. Nachdem nun in solchen Fällen für ein gewisses Element die Gültigkeit des betreffenden Prädikats nur bis zu einem gewissen Grad festgestellt werden kann, gehört jetzt ein Element auch nur in einem bestimmten Grad zur betreffenden Teilmenge. I.a.W.: die Element-Zugehörigkeit $\varepsilon_P(x)$ der Elemente x der Grundmenge X zur Teilmenge P wird über das ganze Intervall [0,1], die betreffende Teilmenge wird über die ganze Grundmenge X verschmiert. Die Element-Mengen-Funktion $\varepsilon_P(x)$ nimmt nicht mehr nur die Werte 0 oder 1, sondern möglicherweise Zwischenwerte aus dem Intervall [0,1] an. Sie wird verallgemeinert zu einer „*Zugehörigkeitsfunktion*" $\mu_P(x)$, die den Grad der Zugehörigkeit eines Elements x der Grundmenge X zu einer Teilmenge P der Grundmenge angibt:

$$\mu_P(x) : X \text{ -> } [0,1] \quad \text{bzw.} \quad \mu_P(x;X)\ \varepsilon\ [0,1].$$

Gehört x zur Teilmenge P von X, so hat $\mu_P(x;X)$ den Wert 1, wenn nicht, dann einen Wert zwischen 0 und 1. Eine Fuzzy-Teilmenge P von X wäre damit definiert als:

$$P = \{x \varepsilon X \mid \mu_P(x)\}$$

4.3.2. Beispiel: Als Beispiel wählen wir ein Fuzzy-Prädikat, das – wie in allen unseren Beispielen – nur von einer Variablen abhängt, die „Körpergröße" eines Menschen und fragen: Wann nennen wir einen Menschen x groß?
Wir konkretisieren die Situation am Beispielfeld der folgenden Tabelle (DRÖSSER 1994; 34):

x	(Name)	Größe	μ(x)
a	Alfred	1,62	0
b	Bernd	1,72	0,1
c	Christian	1,79	0,45
d	Dieter	1,81	0,55
e	Elmar	1,90	1
f	Franz	2,07	1

Die Männer e und f werden wir ohne weiteres als „groß“ bezeichnen, a sicher als „eher klein“ und bei b, c und d sind wir in unserer Aussage je nach unserer Einstellung[18] eher schwankend in der Bewertung der Körpergröße.
Als Merkmals- oder Zugehörigkeitsgrad $\mu(x)$ der Männer x zum Begriff „große Körpergröße“ können wir nun in der Tabelle Werte zwischen 0 und 1 (einschließlich) so angeben, daß unsere Meinung (in etwa) getroffen ist, d.h. z.B. so, wie in Spalte $\mu(x)$ geschehen. Wir könnten diese Werte also lesen als: „x ist groß zum Grade $\mu(x)$“.

Betrachten wir die Tabelle als eine Wertetabelle der Funktion $\mu(x)$, so erhalten wir als graphische Darstellung der Zugehörigkeit der Männer x zum Prädikat „x ist groß“ das Diagramm der Fig. 7:[19]

Ganz entsprechend verfahren wir bei der Erfassung und graphischen Darstellung der Fuzzy-Prädikate (Fuzzy-Variablen) unserer Luftballon-Aufblase-Maschine. Wenn etwa der Luftdruck in unserer Situation Werte zwischen 0 und 20 annehmen kann, dann erhalten wir für die Fuzzy-Begriffe „niedriger Druck“, „mittlerer Druck“ und „hoher Druck“ die folgenden (in ein Diagramm aufgenommenen) Darstellungen (Fig. 8):

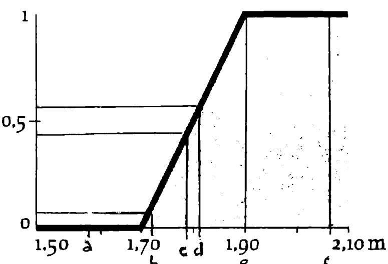

Fig. 7

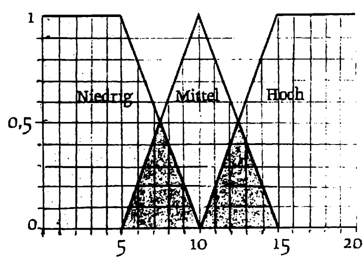

Fig. 8

5. Aussagen-logische und fuzzy-logische Operationen – Fuzzy-Logik

5.0. Das Problem der Realisierung der Luftballon-Aufblase-Maschine bestand darin (vgl. 1.8., 1.10.), daß man Regeln festlegt, die der Maschine den Befehl „Weiterblasen“ bzw. „Blasen einstellen“ geben. Die Regeln selbst verknüpfen gewisse der Fuzzy-Prädikate z.B. mit „wenn . . . dann . . .“ und mit „und“ (vgl.1.7.). Soll die Maschine schließlich funktionieren, muß man also die betreffenden Fuzzy-Prädikate logisch verknüpfen, muß man der Maschine fuzzy-logische Operationen implementieren. Auch die fuzzy-logischen Operationen werden durch (mehrwertige) Verallgemeinerungen der entsprechenden klassischen aussagenlogischen Operationen gewonnen.

5.1. Die logischen Operationen in der klassischen Aussagen-Logik

Unter „Logik“ kann man kurz gesagt eine Gesamtheit von Regeln verstehen, die es gestatten durch Verknüpfung von wahren Aussagen zu wahren Aussagen zu gelangen. In der modernen Form der klassischen Aussagenlogik werden die aussagenlogischen Verknüpfungen mathematisiert. Alle 16 möglichen Verknüpfungen zwischen zwei Aussagen(variablen) p und q können dabei auf die fundamentalen Operationen der „Konjunktion“ p *und* q, die der „*Disjunktion*“ p *oder* q und auf die „*Negation*“ „*nicht* p“ gegründet werden. Diese aussagenlogischen Operationen werden wie folgt definiert:

- „nicht p“ ist genau dann falsch, wenn p wahr ist und umgekehrt.
- „p *und* q“ ist genau dann wahr, wenn p wahr ist und q wahr ist.
- „p *oder* q“ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen p bzw. q wahr ist, d.h. genau dann falsch, wenn p falsch ist und q falsch ist.[20]

Codiert man die Wahrheitswerte „falsch“ und „wahr“ durch die Zahlenwerte 0 und 1, so können die Aussagenvariablen p bzw. q jeweils die Werte 0 oder 1 annehmen. Die genannten Aussagenverknüpfungen lassen sich dann durch die folgenden *Wahrheitswertmatrizen* darstellen:

p	*nicht* p
0	1
1	0

		q	
	p *und* q	0	1
p	0	0	0
	1	0	1

		q	
	p *oder* q	0	1
p	0	0	1
	1	1	1

Eine andere, der Verallgemeinerung auf mehrwertige Logiken fähige, gleichwertige Form der Definition dieser logischen Operationen lautet:

nicht p := 1 – p , p *und* q := Min (p,q), p *oder* q := Max (p,q),

dabei bedeutet Min (p,q) bzw. Max (p,q), diejenige Funktion, die stets den kleineren bzw. größeren der beiden Werte p und q annimmt.

5.2. Die fuzzy-logischen Operationen

5.2.1. Die logischen Verknüpfungen von Fuzzy-Prädikaten (-Variablen) lassen sich nun ganz analog definieren, wie die aussagenlogischen Operationen, nämlich durch die Bildungen 1 – x , Min (x,y) bzw. Max (x,y). Sind also P(x) = p und Q(x) = q zwei Fuzzy-Prädikate, so definieren wir:

„nicht p“ := 1 – p , „p *und* q“ := Min (p,q), „p *oder* q“ := Max (p,q),

was übertragen auf die Zugehörigkeitsgrade μ bedeutet:

„*nicht* P(x) := 1 – $\mu_P(x)$,

„P(x) *und* Q(x)“ := Min ($\mu_P(x)$, $\mu_Q(x)$), „P(x) *oder* Q(x)“ := Max ($\mu_P(x)$, $\mu_P(x)$)

Die Fig. 9–11 illustrieren diese Verknüpfungen an den Funktionsgraphen für die Fuzzy-Begriffe „kleine“, „mittlere“, „große Körpergröße“ für unser Beispielfeld aus 4.3.2.

Fig. 9 zeigt den Graphen für die Fuzzy-Menge der Menge der Männer mit dem Merkmal „nicht groß“. Mit 1,75 m ist man „groß“ zum Grad 0,75 und „nicht groß“ zum Grad 0,25.[21]

Fig. 10 stellt die fuzzy-logische Verknüpfung „mittelgroß oder groß“ dar und Fig. 11 die Verknüpfungen „groß und nicht groß“ bzw. „groß oder nicht groß“.

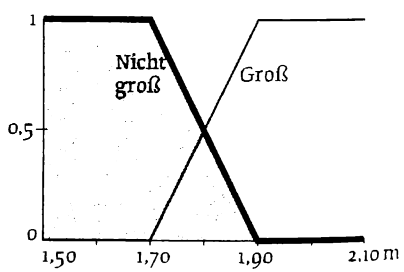

Fig. 9

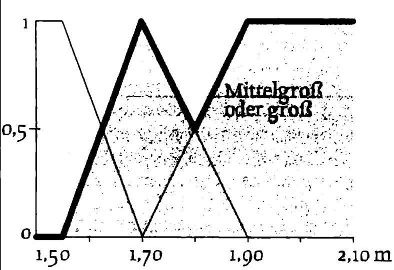

Fig. 10

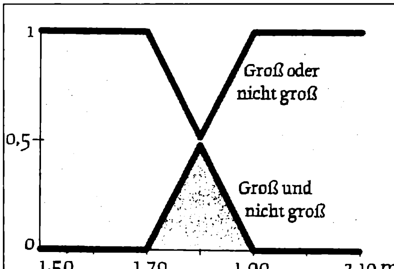

Fig. 11

In solcher Weise müssen auch die den Bedingungen in 1.10. entsprechenden Fuzzy-Prädikate verknüpft werden, damit die Luftballon-Aufblase-Maschine schließlich realisiert werden kann.[22]

5.3. Im konkreten Fall bedarf die Theorie freilich weiterer Differenzierung. In Theorie und Praxis der Anwendung der Fuzzy-Logik hat man auch Fuzzy-Prädikate mit mehreren Variablen zu betrachten, hat man für die praktischen Bedürfnisse die Definition der fuzzy-logischen Operationen in verschiedenster Weise zu modifizieren. Wir verweisen auf die Literatur.

D: SCHLUSSBEMERKUNGEN

6. Ausblick

6.1. Im vorstehenden haben wir ausgehend von einem Beispielfall die Bedeutung der Fuzzy-Logik als ein Hilfsmittel, ja eine Technik zur Realisierung technischer Geräte in ihren elementaren Teilen skizziert. Im Zusammenhang mit dem Rahmenthema der Tagung „Umgang mit Technik" ist festzustellen, daß die Logik, mit der man dabei hantiert, in technische Vorgänge umgesetzt wird und damit selbst zu einem Stück Technik – generalisiert kann man sagen: – zu einem Teil des Umgangs mit der Natur wird.

6.2. Die Fuzzy-Logik wurde erstmals in großem Umfang in Japan zum Bau von technischen Geräten eingesetzt (KOSKO 1993; 330ff.). Heute bedient man sich ihrer bei der Steuerung von Aufzügen, in Automatikgetrieben, in Antiblockiersystemen (ABS), bei der Steuerung von Fließbandfertigungen, bei der Autofocus- und Belichtungssteuerung von Fotoapparaten und Camcordern, in Kopiergeräten, Klimaanlagen, in Spül- und Waschmaschinen, Staubsaugern und Toastern, . . . Neuerdings gibt es Neuro-Fuzzy-Systeme. In der Betriebswirtschaft wird die Fuzzylogik zur Lösung von Problemen in den Bereichen Marketing und Verkauf, bei Beschaffung und Lagerhaltung, in der Produktionsplanung und Produktionssteuerung, bei der Qualitätsprüfung und -Sicherung und in Planungs- und Kontrollsystemen, . . . eingesetzt.

6.3. In der Diskussion von ökologischen Fragen sollte man sich verstärkt bewußt machen, daß viele der zugrundeliegenden Bedingungen und Begrifflichkeiten den Charakter von Fuzzy-Pädikaten haben. Nicht-Linearität und Fuzzizität lassen eine deterministische Vorhersage vielfach nicht zu.

6.4. Zwei kritische Bemerkungen zum Abschluß: Zum einen sollte betont werden, daß nicht alle „Unschärfen" mit den Methoden der Fuzzy-Logik angegangen werden können. Im wesentlichen lassen sich nur bestimmte quantitative bzw. quantisierbare Begrifflichkeiten (Systemeigenschaften) mit Hilfe der Fuzzy-Technik behandeln. Zum anderen sollte darauf hingewiesen werden, daß wir in unserem Planen, Entwerfen und verantwortungsvollen Handeln immer wieder vor Entscheidungen gestellt werden, daß wir auch in Maschinen in Abhängigkeit von unscharfen Eingangsbedingungen letztlich präzise Regelpakete als „Anweisungen" implementieren müssen, daß wir und warum wir – was wir bereits in 1.6. angedeutet haben – im Anschluß an eine transparente Fuzzifizierung immer wieder zur Defuzzifizierung gezwungen sind, daß wir also letztlich zur 2-Wertigkeit zurückkehren müssen.

Literatur

Die Literatur zum Thema Fuzzy-Logik und ihrer Anwendungen ist sehr umfangreich und leicht zugänglich.

DRÖSSER, C. (1994): Fuzzy-Logic – Methodische Einführung in krauses Denken. Hamburg.

FISCHER, W. L. (1965): Boolesche Maschinen. In: Der Mathematik-Unterricht, 11, H.2; 39–99.

FISCHER, W. L. (1968): Kybernetik – Schaltalgebra – Digitales Rechnen. In: WOLFF, G. (Hrsg.): Handbuch der Schulmathematik, Bd.7. Hannover-Paderborn; S. 282–296.

FISCHER, W. L. (1970): Toleranzräume. In: Archimedes 22, H. 4.

FISCHER, W. L. (1973): Äquivalenz- und Toleranzstrukturen in der Linguistik. München.

FISCHER, W. L. (1988) : Zur Entwicklung der Sprache in der Mathematik. In: HOHENZOLLERN, J. G. Prinz v./LIEDTKE, M. (Hrsg.): Naturwissenschaftlicher Unterricht und Wissenskumulation. (Schriftenreihe z.Bayer.Schulmuseum Ichenhausen, Bd. 7). Bad Heilbrunn; S. 142–170.

FISCHER, W. L. (1993): Formal Concept Analysis. In: Hiroshima Journ.of Math. Education, 1; S. 1–35.

FISCHER, W. L. (1994/1): Die formale Begriffsanalyse als Werkzeug in der Mathematikdidaktik. In: PICKERT, G./WEIDIG, I.(Hrsg.): Mathematik erfahren und erlernen. Stuttgart-Düsseldorf-Berlin-Leipzig; S. 80–88.

FISCHER, W. L. (1994/2): Die Topologisierung einer Sprache durch den Objektbezug. In: MERTEN, S. (Hrsg.): Von lernenden Menschen. Rheinbreitbach; S. 217–232.

FISCHER, W. L. (1995): Der Einsatz mathematischer Methoden bei der Beschreibung, Formalisierung und Modellierung von anthropologisch-historischen Datenstrukturen. In: UHER J. (Hrsg.): Pädagogische Anthropologie und Evolution. Erlangen; S. 33–72.

GANTER, B. /WILLE, R./WOLFF, E. (Hrsg.) (1987): Beiträge zur Begriffsanalyse. Darmstadt.

HASSENSTEIN, B. (1951): Belastete Begriffe. In: Dtsch. Univ.-Ztg., Göttingen, 8. 6. 1951.

HASSENSTEIN, B. (1954): Abbildende Begriffe. Verh.dtsch.zool.Ges.; 197–202. Neudruck in: STEINBUCH, K./MOSER, S. (Hrsg.), (1970): Philosophie und Kybernetik. München.
HASSENSTEIN, B. (1971): Injunktion. In: RITTER, J. (Hrsg.): Historisches Wörterbuch der Philosophie Bd. 4. Basel; S. 367–368.
HASSENSTEIN, B. (1979): Wie viele Körner geben einen Haufen? In: Der Mensch und seine Sprache. Franktfurt/M – Berlin – Wien, S. 219–242.
KOSKO, B. (1993): fuzzy logisch. Hamburg.
NOGOITA, C. V./RALESCU, D. A. (1975): Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Basel-Stuttgart.
RECHENBERG, I. (1973): Evolutionsstrategie – Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution. Stuttgart-Bad Cannstatt.
WILLE, R. (1984): Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. In: BOCK (Hrsg.): Anwendungen der Klassifikation: Datenanalyse und numerische Klassifikation. Frankfurt; S. 32–51.
WILLE, R. (1992): Concept Lattices and Conceptual Knowledge Systems. In. Computers & Mathematics with Applications, 23; S. 493–515.
ZADEH, L. A. (1965): Fuzzy Sets. In: Information and Control, 8; S. 338–353.
ZADEH, L. A. (1975): The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate Reasoning. In: Information Science; S. 199–249 und S. 301–357.
ZADEH, L. A. (1987): Selected Papers. New York.

Nachweis der Abbildungen

Fig. 1:	nach DRÖSSER, S. 8, Abb. 1
Fig. 2:	DRÖSSER, S. 8, Abb. 1
Fig. 3:	Original
Fig. 4:	Original
Fig. 5:	Original
Fig. 6:	Original
Fig. 7:	nach DRÖSSER, S. 33, Abb. 4
Fig. 8:	nach DRÖSSER, S. 41, Abb. 12
Fig. 9:	DRÖSSER, S. 36, Abb. 6
Fig. 10:	DRÖSSER, S. 49, Abb. 17
Fig. 11:	DRÖSSER, S. 51, Abb. 19

Anmerkungen

1 Wir verweisen auf den Beitrag von K.NAGEL in diesem Band, ferner auf das Buch von Ingo RECHENBERG (1973) und die inzwischen reichhaltige Literatur zum Thema generierende Algorithmen.

2 Das Beispiel wurde entnommen aus DRÖSSER (1994; 7ff.)

3 Es geht uns, wie immer in den Kurzreferaten der Matreier Gespräche darum, das Grundsätzliche an einem Thema zu demonstrieren. Das Beispiel ist daher bewußt einfach gewählt, um an seiner idealisierten Form die wesentlichen Komponenten der Situation erkennbar werden zu lassen.

4 fuzzy englisch: dreckig, schmutzig, unscharf.

5 Es gibt damit auch eine enge Beziehung der Fuzzy-Logik zum Fragenbereich der Ausdrucksfähigkeit der Umgangssprache und der Wissenschaftssprachen (vgl. auch HASSENSTEIN 1979). Im Gegensatz zu dem, was man meinen möchte, lassen sich Fuzzy-Begriffe in einem hohem Maße präzisieren. Vgl. 3.3. und 4.3.2.

6 Es gibt auch andere Möglichkeiten unscharfe Begriffe zu definieren (vgl. 2.4. und 4.1.1. Anm.15). Stets ist das Ergebnis eine scharfe Theorie des Unscharfen.

7 Wir sprechen also vom Begriff des Begriffs und von Begriffsbildung.

8 Gegenstände müssen dabei nicht nur konkret materialiter verstanden werden. Gegenstände können ebenso gut abstrakter, nur intelligibler Natur sein, wie z.B. Zahlen.

9 Begriffe weren also i.a. durch Repräsentanten aus der Extention, der zugehörigen Gegenstandsmenge „veranschaulicht"; sie werden „beschrieben" durch die Angabe der die Merkmale bezeichnenden Prädikate, also durch ihre Intension.

10 Die Methode wurde in einer Arbeitsgemeinschaft unter Leitung von R. WILLE am mathematischen Institut der Universität Darmstadt seit 1984 entwickelt. – Literatur siehe WILLE 1984, 1992; GANTER, WILLE, WOLFF 1987 und FISCHER 1993, 1994/1.

11 Für Einzelheiten vgl. FISCHER 1993, 1994/1.

12 In einer anderen Sichtweise sind „relative Begriffe" solche Begriffe, die nur in bezug auf den Oberbegriff bedeutungsvoll sind. Beispiel: „A ist Teilmenge von B"; hier ist die Obermenge B bestimmend für die Kennzeichnung von A. Relative Begriffe dieser Art sind i.a. letztlich relationale Begriffe, d.h. Begriffe, die mit einer 2- oder mehrstelligen Relation zwischen Gegenständen verknüpft sind.

13 In dieser sehr grob formulierten Form führte das Komprehensionsprinzip im Zusammenhang mit unendlichen Mengen zu grundlagentheoretischen Schwierigkeiten, zur Möglichkeit der Bildung von paradoxen bzw. antinomischen Aussagen. Man vergleiche hierzu die (umfangreiche) Literatur zu den logischen Grundlagen der Mengentheorie.

14 Nicht immer sind Aussagen auch entscheidungsdefinit, d.h. nicht immer besitzen wir Methoden, um über den Wahrheitsgehalt einer Aussage (einer Hypothese) entscheiden zu können. Die Aufgabe der Forschung besteht vielfach darin, den wissenschaftlichen Kontext so zu verändern, daß Aussagen in die Form von entscheidungsdefiniten Aussagen überführt werden. Die Aussage „Der Mond ist aus grünem Käse" ist wahrheitsdefinit, war aber nicht zu allen Zeiten entscheidungsdefinit. – In der Mathematik gibt es eine Reihe von „Vermutungen", die seit Jahrhunderten als Behauptungen formuliert, bis heute aber (noch) nicht bewiesen werden konnten. Dabei könnte es auch sein, daß die betreffende Aussage in der betreffenden Theorie „unentscheidbar" ist. (FISCHER 1988, Abschn. 7.7.)

15 Eine andere Form der Unschärfe von Begriffen ist dadurch gegeben, daß die der Bildung von klassifikatorischen Begriffen zugrundeliegende Äquivalenzrelation (vgl. 2.1.2.) zur Toleranzrelation abgeschwächt wird, also zu einer 2-stelligen Relation, die nur noch reflexiv und symmetrisch, aber nicht mehr notwendig transitiv vorausgesetzt wird. Die „Gleichheit" von Elementen in einer Grundmenge wird damit abgeschwächt zur „Ununterscheidbarkeit". Unschärfen dieser Art sind in der Meßtheorie verbunden mit den Auflösungsschranken von Meßgeräten, von Sinnesorganen, in der Linguistik mit dem Begriff der Synonymie (FISCHER 1970, 1973, 1994/2, 1995).

16 Fangfragen und Denkspiele dieser Art nennt man Sorites-Paradoxa (von griech. soreites = Häufer). Vgl. auch DRÖSSER 1994; 20–21.

17 – auch für endliche Gegenstandsmengen –

18 – vielleicht auch in Abhängigkeit von unserer eigenen Körpergröße und unserer Selbstbewertung –

19 Hätten wir festgelegt, daß wir bis 1,70 m von „klein“, ab 1,90 m von „groß“ sprechen, wären die übrigen (Zwischen-)Werte durch die (angenommene) Linearität der Zuordnung schon bestimmt. – Fuzzy-Prädikate lassen sich auch mit der Methode der „Mehrwertigen Formalen Begriffsanalyse“ (vgl. 2.3.) erfassen.

20 Bei der Disjunktion handelt es sich um das nicht ausschließende „oder – oder auch“.

21 Die beiden Bereiche der Fuzzy-Prädikate „groß“ und „nicht groß“ überschneiden sich. Das Beispiel zeigt, daß bzw. warum bei unserer Maschine eine Regel evtl. von zwei Fuzzy-Prädikaten angesprochen werden kann. – Das Beispiel illustriert auch, daß der Satz vom Widerspruch in der Fuzzy-Logik nicht in der üblichen Form gilt. Ihre Formalstrukur ist daher keine BOOLE-Algebra sondern eine MORGAN-Algebra (vgl. NEGOITA/RALESCU 1973, 16)

22 Die „wenn p dann q“-Verknüpfung (Implikation) wird als „nicht-p oder q“ realisiert.