Klaus Nagel

Wie können sich Relikte halten ? Das Sexagesimalsystem in Mathematik und Physik

Im November 1998 notierte die Bayerische Warenbörse in München Großhandelsabgabepreise für Eier bei Mindestabschlüssen von 25 Kartons zu je 360 Eiern. Die Zahl 360 fällt auf, sie paßt nicht in unser System mit den Basisgrößen zehn, hundert, tausend und so fort; sie ist ein Relikt aus einem früheren System. Gleich drei Relikte erkennt man bei der Werbung für teure Armbanduhren:
* Mechanische Uhrwerke, die teurer sind und ungenauer als Quarzuhren.
* Römische Ziffern statt der üblichen arabischen.
* Der Tag wird in zwei mal zwölf Stunden zu sechzig Minuten eingeteilt.
Die Zwölf und die Sechzig stammen aus dem Sexagesimalsystem und sie haben als Fremde jahrhundertelang im Dezimalsystem überlebt.
Es wird untersucht, warum sich solche Relikte trotz erheblicher Nachteile halten und ob die Mechanismen dazu, die gleichen sind, wie beim Überleben solcher Tiere und Pflanzen, die durch neu entstandene, besser angepaßte Arten zu Relikten geworden sind.
Es werden zunächst der Aufbau von Zahlensystemen erklärt und dabei besonders auf das Dezimalsystem und Sexagesimalsystem eingegangen.

Das Dezimalsystem

Weltweit hat sich das Dezimalsystem für alle Zwecke des Zählens und Rechnens, in Handel und Verkehr, Technik und Wissenschaft durchgesetzt. Sein Vorteil ist, daß mit nur zehn verschiedenen Zeichen - den Ziffern von Null bis Neun - jede noch so große Zahl eindeutig zu beschreiben ist. Eine geniale Idee hat das ermöglicht, die Erfindung der Null. Uns ist sie heute selbstverständlich, aber es war eine revolutionäre Idee, das nicht Vorhandene, das Nichts, durch ein Zeichen zu beschreiben; scheint es doch sinnvoller, nichts zu schreiben, wenn nichts da ist. Die Einführung der Null legt eindeutig fest, welche Stelle eine Ziffer in einer Zahl einnimmt. So kann man für jede Stelle festlegen, wieviel Einheiten sie repräsentieren soll. Beim Dezimalsystem stellt die niedrigste Stelle eine Einheit dar, die nächste zehn Einheiten, dann hundert und so fort. Jede Stelle hat das zehnfache Gewicht ihrer Vorgängerin, und die Ziffer an dieser Stelle besagt, wie oft dieses Gewicht zu zählen ist. Daß wir gerade die Zahl zehn als Basis benutzen, liegt an unseren zehn Fingern, mit denen wir alle das Zählen und Rechnen gelernt haben. Ein entsprechendes Zahlensystem läßt sich genau so auf anderen Basen aufbauen. Die Basis bestimmt wie viele verschiedene Ziffern nötig sind, eine große Basis führt zu vielen verschiedenen Ziffernzeichen, die wir lernen müßten, eine kleine Basis führt zu vielen Stellen schon bei kleinen Zahlen, die für uns unübersichtlich wirken. Als Beispiel wird die Jahreszahl 1998 in Systemen zu den Basen 2,10,16 und 60 gezeigt:

Dezimalsystem (Basis 10) Ziffern: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
1998 = 8 + 9*10 + 9*100 + 1*1000

Binär: Zwei Ziffern 0,1
11111001110 = 0*1 + 1*2 + 1*4 + 1*8 + 0*16 + ... 1*512 + 1*1024

Hexadezimal: Sechzehn Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
7CE = 14*1 + 12*16+ 7*256

Sexagesimal: Sechzig Ziffern:(0),(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7)(9),(10), ...(59)
(33)(18) = 18*1 + 33*60

Elf Stellen sind im Binärsystem nötig, im Sexagesimalsystem nur zwei. Computer stört die Länge nicht, sie benutzendas Binärsystem und repräsentieren die beiden Ziffern durch ein Paar von Zuständen, etwa durch positive und negative elektrische Spannung, durch einen geladenen oder ungeladenen Kondensator oder durch magnetische Nord- oder Südpole. Additionstabellen und kleines Einmaleins reduzieren sich im Dualsystem auf die vier Zeilen:

0 + 0 = 0	0 * 0 = 0
0 + 1 = 1	0 * 1 = 0
1 + 0 = 1	1 * 0 = 0
1 + 1 = 10	1 * 1 = 1

Für diese Grundoperationen gibt es einfache elektrische Schaltungen.

Die Basis zehn ist ein guter Kompromiß, zehn Ziffern sind noch leicht zu erlernen und die gebräuchlichen Zahlen haben selten mehr als vier bis fünf Stellen. Wegen ihrer größeren Anzahl von Teilern wäre zwölf eine bessere Wahl als zehn; dann wäre das Multiplizieren und Dividieren mit zwei, drei, vier oder sechs so einfach wie im Dezimalsystem mit zwei oder fünf; zwei zusätzliche Ziffern für zehn und elf wären leicht zu erlernen und das kleine Einmaleins wäre nur unwesentlich größer. Den Fortschritt durch die Erfindung der Null erkennt man beim Versuch mit römischen Zahlen zu rechnen. Sie sind zum schriftlichen Rechnen nicht geeignet, die Römer rechne-

ten auf einem Abakus ihre Zahlen hielten nur die Ergebnisse fest. Ein Abakus ist ein Rechenbrett, das für jede Stelle - Einer, Zehner, Hunderter - eine Spalte enthält, in die man bis zu neun kleine Steine (calculi) legt, um anzugeben, wie oft diese Einheit in einer Zahl enthalten ist. Durch Hinzufügen, Wegnehmen und Verschieben der Steine lassen sich die Grundrechnungsarten auf dem Abakus durchführen. Der Abakus ist noch heute in Asien sehr verbreitet.
Das Dezimalsystem ist um 800 n.Chr. in Indien entstanden und hat sich über die arabischen Völker und die iberische Halbinsel um das Jahr 1000 bis nach Mitteleuropa verbreitet. Seine Verbreitung verdankt es einem neuartigen Rechenbrett, das der Franzose Gerbert von Aurillac entworfen hatte. Es verwendet statt der Steine Hornplättchen, die mit den Zahlen von 1 bis 9 versehen sind und die entsprechende Zahl von Steinen ersetzen. Für die Zahlen auf den Hornplättchen nahm man zunehmend die neun indisch-arabischen Ziffern her, die so über den Gerbertschen Abakus in Europa Einzug hielten. Da die Europäer bei den runden Hornscheiben und den neuen Zeichen nicht wußten, wo oben und unten ist, wurden die Ziffern oft verdreht niedergeschrieben. Erst allmählich kam es zur einheitlichen Schreibweise der Ziffern, die Erfindung des Buchdrucks trug dazu bei. Aus den Manipulationen mit dem Rechenbrett lernte man das schriftliche Rechnen, dazu war es allerdings nötig auch die Null zu verwenden, um die Stellen eindeutig zu markieren. Heute beherrscht das Dezimalsystem alle Bereiche in Handel, Wissenschaft und Technik. Nach der Einführung des metrischen Systems seit etwa zweihundert Jahren gründen sich auch unsere Maße und Gewichte auf das Dezimalsystem.

Das Sexagesimalsystem

Das Sexagesimalsystem (lat. sexagesima = sechzigste) hat sich zuerst bei den Sumerern entwickelt. Es gibt verschiedene Hypothesen, warum die sechzig als Basis gewählt wurde:
- 60 hat sehr viele Teiler: 2,3,4,5,6,10,12,15,20,30
- Das Jahr hat ungefähr 360 = 6*60 Tage
- Das Jahr hat etwa 12 volle Mondzyklen und 60 ist ein Vielfaches der 12.
- Verschmelzung zweier Völker mit einem Dezimalsystem und einem Sechsersystem.

Das Problem mit den sechzig verschiedenen Ziffernzeichen wurde umgangen, indem man diese aus Elementarzeichen für eins und zehn zusammensetzte (Bild 1). Dieses System hatte sich ursprünglich für den Handel entwickelt. Die Babylonier haben es für Mathematik und Astronomie modifiziert und für diese Gebiete blieb es anderthalb Jahrtausende lang das führende Zahlensystem. Die Unterteilung des Kreises in 360 Grad zeigt das noch heute.

Relikte alter Zahlensysteme im Dezimalsystem

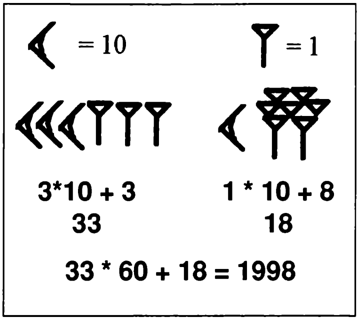

Bild 1: Darstellung von 1998 in Babylonischen Zeichen.

Noch heute unterteilen wir den Kreis in 360 Grad, obwohl sich fast überall das Dezimalsystem durchgesetzt hat. Der Tag wird in zwei mal zwölf Stunden zerlegt, die wiederum - genau wie ein Grad des Kreisbogens - in 60 Minuten zu 60 Sekunden zerlegt werden. Für noch kleinere Zeiten unterteilt man die Sekunde dezimal, in Millisekunden, Mikro- und Nanosekunden, einfach weil solch kurze Zeiten erst neuerdings meßbar sind.

Bis 1971 galt in England noch ein Münzsystem, bei dem das Pfund Sterling aus 20 Shilling zu 12 Pence bestand, 5 Shilling waren 1 Crown. Nach der Reichsgründung 1871 wurde das Münzwesen dezimal gestaffelt, zuvor gab es etwa in Bayern den Taler zu 2 Gulden zu je 60 Kreuzern zu je 4 Pfennigen, während Sachsen seinen Taler in 24 Groschen unterteilte, jeden zu 12 Pfennigen, die wiederum zwei Heller zählten. Die Bezeichnung Taler für drei Reichsmark war noch lange üblich, bis 1948 galten noch Münzen zu drei Reichsmark. Im Rechenunterricht in der Volksschule wurden noch alte Bezeichnungen für ausgezeichnete Zahlen des Sexagesimalsystems gelehrt: 12 ist ein Dutzend, 15 eine Mandel, 60 ein Schock und 144 ein Gross. In der Umgangssprache ist davon nur das Dutzend geblieben.

Viele angelsächsische Maße und Gewichte werden bis heute nicht dezimal unterteilt:

- 1 Yard = 3 Feet
- 1 Foot = 12 Inches
- 1 Gallon = 4 Quarts = 8 Pints
- 1 Mile = 1760 Feet

Nachteile der Relikte

Die Zeit auszurechnen von 8:47 bis 16:23 Uhr ist mühsamer und fehleranfälliger als die Differenz zwischen 8,47 DM und 16,23 DM zu ermitteln. Nun kommen solche Aufgaben im täglichen Leben nicht so häufig vor, daß man es als störend empfindet, doch bei der Arbeitszeiterfassung und Zeitplanung benutzt man häufig statt der Minuten Dezimalbrüche der Stunden, hat dann aber das Problem von Verwechslungen und Konvertierungen. Um die Position eines Planeten zu ermitteln, muß der Astronom die Zeitdifferenz zu einer festen Epoche ermitteln. Die aktuelle Zeit ist in Jahren, Monaten, Tagen, Stunden, Minuten und Sekunden mit Bruchteilen gegeben, sie muß in Tage und Bruchteile von Tagen ausgedrückt werden. Dieser Wert ist mit den täglichen Änderungen des Planetenortes zu multiplizieren, die auch wieder in Grad, Minuten und Sekunden angegeben sind und daher für eine bequeme Rechnung in den Dezimalbruch eines Grades umgeformt werden müssen. Das Ergebnis endlich muß wieder in Grad und Minuten umgerechnet werden, weil die Teilkreise an astronomischen Instrumenten diese Einteilung haben. Die Verwirrung wird noch erhöht: Die Koordinaten Rektaszension (gerade Aufsteigung) und Stundenwinkel werden traditionell nicht in Grad sonder in Stunden angegeben, denn sie sind eng verknüpft mit dem täglichen Umlauf des Himmels. Heute erleichtern Computer diese Umrechnungen, trotzdem bilden die unterschiedlichen Darstellungen eine ständige Fehlerquelle und bereiten zusätzliche Arbeit. Für die Zeitrechnung über längere Intervalle benutzen die Astronomen eine durchlaufende Tageszählung, bei der die Tageszeit als Dezimalbruch angegeben wird. Dieses sogenannte Julianische Datum hat Joseph Justus Scaliger für die Chronologie des Altertums eingeführt, es zählt die Tage seit dem 1. Januar 4713 v.Chr. und es hat am 5. Dezember 1998 um 10:00 Uhr Mitteleuropäischer Zeit den Wert 2451152,875.

Diese Relikte in der Winkelmessung haben den Seeleuten jahrhundertelang die Navigation erschwert, heute spielt das keine Rolle mehr, da die satellitengestützte Positionsbestimmung astronomische Navigation selbst zu einem Relikt wird.

Den Nachteil nichtmetrischer Maße soll ein selbst erlebtes Beispiel zeigen. Ein französischer Professor in Berkeley wollte ein Schwimmbad im Garten anlegen lassen. Sein amerikanischer Architekt mühte sich lange ab aus den Abmessungen, die in Fuß angegeben waren, zu berechnen, wieviel Gallonen Wasser das Becken fasse. Der Franzose rechnete die Längen in Meter um, ermittelte daraus den Inhalt in Litern ,wandelte diese zu Gallonen und war damit schneller als der Amerikaner. Wir bemerken eine ähnliche Schwierigkeit, wenn wir eine in Kilometer pro Stunde gegebene Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde umwandeln wollen.

Bei diesen Nachteilen ist es zu kritisieren, daß nichtmetrische Maße gerade in der modernsten Technik wieder einziehen: Bei Computerbildschirmen wird oft die Größe in Zoll angegeben und bei Druckern und Scannern die Auflösung in Zeichen pro Zoll.

Wachstumsmodelle

Wenn Neues entsteht, das dem Alten überlegen ist, so wird das Alte zurückgedrängt und wird zum Relikt. Wie und wie schnell solch ein Vorgang abläuft, das versucht man mit Wachstumsmodellen zu ergründen. Das sind mathematische Modelle, die aus Annahmen über die Wachstumsgeschwindigkeit in einem Augenblick die Entwicklung für eine lange Zeitspanne ableiten. Der einfachste Fall ist eine konstante Zunahme, unabhängig davon wieviel schon vorhanden ist. Die Gesamtmenge wächst linear mit der Zeit. Häufiger ist ein Wachstum, dessen Zuwachsrate dem Vorhandenen proportional ist: Doppelt soviel Kühe haben in gleicher Zeit auch doppelt soviel Kälber, in der doppelten Zellenzahl gibt es doppelt soviele Teilungen und das doppelte Kapital bringt doppelte Zinsen im Jahr. In diesem Fall erhält man exponentielles Wachstum, die Zeit für eine Verdopplung - oder bei negativem Wachstum die Zeit für eine Halbierung - ist konstant, unabhängig von der vorhandenen Menge. Daher kann man bei strahlenden Isotopen eine Halbwertszeit definieren, denn der radioaktive Zerfall folgt dem exponentiellen Gesetz, die Zerfälle pro Zeiteinheit sind proportional zu den noch nicht zerfallenen Atomen. So schnell auch das exponentielle Wachstum sein mag, in endlicher Zeit entsteht nur eine endliche Menge und bei negativem Wachstum verschwindet die Menge in endlicher Zeit nicht vollkommen. Das stimmt nicht mehr bei einem dritten Modell, dem hyperbolischen Wachstum. Dieses tritt ein, wenn die Wachstumsrate selbst mit der Zeit wächst. Dann kann die theoretische Wachstumskurve schon in endlicher Zeit unendliche Werte annehmen. Ein Beispiel ist die Wachstumsrate der Weltbevölkerung; sie steigt wegen der geringeren Kinder- und Müttersterblichkeit. Die Kurve folgt sehr gut dem hyperbolischen Wachstum, theoretisch überstiege in der Mitte des einundzwanzigsten Jahrhunderts alle Grenzen. Bisher war für die Modelle angenommen, daß die Ressourcen nicht beschränkt sind. In Wirklichkeit ist die Welt begrenzt und diese Modelle treffen nur sehr bedingt zu; eine kleine Bakterienkultur etwa wächst exponentiell am Beginn, wenn noch genügend Nährflüssigkeit vorhanden ist. Für spätere Phasen muß man die beschränkten Ressourcen berücksichtigen und dabei ergeben sich bei den drei Modellen charakteristische Unterschiede. Wir betrachten jetzt jeweils zwei konkurrierende Populationen mit unterschiedlicher Wachstumsrate. Bei zwei konstanten Wachstumsraten stellt sich ein Verhältnis der Größen ein, das dem Verhältnis der Zuflüsse gleich ist. Im exponentiellen Fall verdrängt die Population mit der höheren Wachstumsrate langsam die andere, gleichgültig, wie groß diese Population am Anfang ist. Das bedeutet, eine neu entstandene überlegene Art - und die Überlegenheit zeigt sich in einer höheren Reproduktionsrate - setzt sich immer durch. Beim hyperbolischen Modell hingegen setzt sich eine hinreichend große Population auch gegen eine kleine mit höherer Wachstumsrate durch.

Warum halten sich Relikte?

In der Natur ist das Wachstum proportional zum Vorhandenen, es gilt das exponentielle Modell und nach den Erkenntnissen des letzten Abschnitts müßte das besser angepaßte das Alte langsam verdrängen, Relikte müßten aussterben. Aber sie überleben, die Vielfalt der Tiere und Pflanzen zeigt es. Es erklärt sich einerseits daraus, daß bei exponentiellem Wachstum die unterlegene Art nur allmählich verschwindet und andrerseits der Evolutionsdruck nicht wirklich so groß ist. Zwei Arten konkurrieren nicht vollkommen um die gleichen Ressourcen, zwei Tierarten jagen nicht genau die gleichen Beutetiere oder fressen genau die gleichen Früchte und Pflanzen. So entstehen Nischen, in denen eine Art überleben kann.

Bei der Verbreitung menschlicher Ideen, Erkenntnisse und Produkte gilt im allgemeinen nicht das exponentielle Wachstum. Durch Sprache und Schrift kann sich eine Neuerung sehr schnell verbreiten und neuerdings durch Rundfunk und Fernsehen auch weltweit. Hyperbolisches Wachstum erkennt man, wenn Trends und Moden im Nu in die letzen Winkel der Erde vordringen. Andere Erkenntnisse, deren Erwerb Mühe und Zeit kostet, breiten sich nur langsam aus; das physikalische Weltbild der Bevölkerung liegt um Jahrzehnte hinter dem aktuellen Stand zurück, die darauf beruhenden technischen Geräte werden viel schneller angenommen. Übernahme oder Ablehnung kultureller Neuerungen beruht auf bewußten Überlegungen und Entscheidungen, sie werden beeinflußt durch Gewohnheiten, subjektive Meinungen, Einfluß und Ansichten anderer Menschen, durch Mühen und Kosten einer Umstellung, durch Werbung und viele andere Faktoren.

Für kulturelle Neuerungen gelten nicht die einfachen Wachstumsmodelle. Trotzdem findet man Parallelen zur Reliktbildung in der Natur und auch das Überleben einer Art in Nischen.
Dieselmotor und Elektromotor haben Anfang unseres Jahrhunderts die Dampfmaschine verdrängt. Jedoch hielt sich die Dampfmaschine lange in Sägewerken, in denen mit Holzabfällen gefeuert wurde. Ein anderes Beispiel ist der Wandel im Lebensmittelhandel. In den letzten Jahrzehnten hat die Automatisierung in den industrialisierten Ländern die Produktivität pro Kopf enorm gesteigert, die Löhne konnten dadurch steigen. Das machte aber auch Dienstleistungen teuer und zwang zur Rationalisierung. In den

fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts wurden Lebensmittel fast ausschließlich in kleinen Läden verkauft, der Verkäufer nahm die Waren aus dem Regal oder Lager, wog sie ab und verpackte sie in Tüten. Das Verpacken und Wiegen übernimmt heute der Hersteller, das Suchen und Zusammenstellen überläßt man dem Kunden, er bedient sich selbst. Das angelernte Personal stellt nur die Waren bereit und kassiert die Rechnung, mit wenigen Angestellten läßt sich ein hoher Umsatz erzielen. Die kleinen Läden wurden zu Relikten, die in Nischen den Wandel überdauerten. Solche Nischen finden sich in ländlichen Gegenden, in denen kein Umsatz zu erwarten ist, der die Investitionen für ein Selbstbedienungsgeschäft lohnt oder in kleinen Betrieben, den sogenannten Tante-Emma-Läden, die von Familienangehörige mit großem Einsatz und geringer Bezahlung weitergeführt werden.

Kosten einer Umstellung.

Ein wesentliches Hemmnis bei der Einführung von Verbesserungen sind die damit verbundenen Kosten. Eine Neuerung kann sich nur durchsetzen, wenn ihre Vorteile die Kosten der Umstellung aufwiegen.
Stellte man auch die Einteilung der Zeit und der Winkel auf das Dezimalsystem um, so ergäben sich viele Änderungen:
Der Begriff Stunde würde verschwinden, der Dezitag zu 2 Stunden und 24 Minuten würde seine Stelle einnehmen, weiter unterteilt in Zentitag (14 Minuten 24 Sekunden) und Millitag (86,4 Sekunden). Der Kreis würde in 1000 Grad statt 360 unterteilt.
Dies hätte zur Folge, daß alle Uhren , analog und digital, ersetzt werden müßten. Alle Zeitangaben wären anzupassen, beispielsweise Fahrpläne und Öffnungszeiten. Gradskalen an vielen Instrumenten wären zu ändern. Darüber hinaus gibt es unzählige abgeleitete Größen, die von der Wahl der Zeiteinheit abhängen; etwa die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde müßte den Kilometern pro Dezitag weichen, wodurch die Tachometer und Geschwindigkeitsschilder obsolet würden. Frequenzen, bisher in Schwingungen je Sekunde gemessen, würden in neuen Einheiten angegeben, Frequenzskalen von Rundfunkempfängern wären auszuwechseln; der Kammerton würde mit 38016 Schwingungen pro Millitag definiert.

Leistung würde nicht mehr in Kilowattstunden gemessen, die elektrischen Zähler müßten ausgetauscht werden. Viele Tabellenbücher, Taschenrechner, Computerprogramme wären nicht mehr brauchbar, Landkarten müßten neu gedruckt werden, weil das Netz der Längen- und Breitengrade nicht mehr gilt.

Damit sind sicher noch nicht alle notwendigen Änderungen berücksichtigt, doch zeigt diese Aufstellung, daß ungeheure Kosten auf uns zu kämen, wollten wir Zeit- und Winkelmessung konsequent auf das Dezimalsystem umstellen. Eine ähnliche Umstellung ist schon einmal gescheitert: Beim Apollo-Projekt wollte die NASA ursprünglich in allen Konstruktionen das metrische System benutzen, es war aber nicht durchzuhalten, weil zu viele Werkzeuge, Materialien im amerikanischen Maßsystem vorlagen, auf das auch die Mechaniker fixiert waren.
Darüber hinaus gäbe es große emotionale Widerstände gegen das Abschaffen der Stunde, der ältesten noch heute gebrauchten Maßeinheit. Das Relikt Sexagesimalsystem wird daher im Dezimalsystem überleben.

Literatur

EIGEN, Manfred/WINKLER,Ruth: (1979): Das Spiel, Naturgesetze steuern den Zufall. R.Piper & Co. Verlag München/Zürich

IFRAH, Georges: (1991): Universalgeschichte der Zahlen. Campus Verlag Frankfurt / New York