Klaus Nagel

Hierarchien in der Mathematik

Als Mathematiker sagen mir die Gesprächspartner häufig, ihre Mathematikkenntnisse reichten aus, den Gehaltszettel nachzurechnen. In der volkstümlichen Vorstellung ist Mathematik Rechnen, Rechnen mit Geld. Der Mathematiker dagegen versteht sein Fach als die Erforschung von Strukturen und Eigenschaften realer oder fiktiver Größen und der Beziehungen zwischen ihnen. Gegenstände gleicher Struktur gelten als gleichwertig. In dieser Sicht ist die Frage irrelevant, ob es sich beim Aufbau des Zahlensystems wirklich um eine Hierarchie handelt – schließlich geht es ja nicht um Macht und Herrschaft – oder nur um eine Halbordnung. Hierarchie und Halbordnung haben die gleiche Struktur (siehe auch *Walther L. Fischer* in diesem Band). Trotzdem bilden die Zahlen den Ursprung der modernen Mathematik und liefern Beispiele für viele Strukturen. Wie die Zahlen 1,2,3,... durch das Beseitigen von Unvollkommenheiten schrittweise zum System der reellen und komplexen Zahlen erweitert werden, das soll hier gezeigt werden.

1. Die natürlichen Zahlen N

Nach einem Bonmot des deutschen Mathematikers Leopold Kronecker (1823-1891) hat der liebe Gott die natürlichen Zahlen erschaffen, alles andere ist Menschenwerk. Die natürlichen Zahlen - gewöhnlich mit N bezeichnet - 1,2,3,.... sind die ersten Zahlen, die ein Kind lernt; wir zählen damit unsere Finger, Personen, Eier und alle Dinge, die nur als Ganzes vorkommen. Die wichtigsten Regeln gelten schon für die natürlichen Zahlen: Man kann in ihnen addieren, das bedeutet, wenn a und b natürliche Zahlen sind, dann auch die Summe $(a + b)$. Offensichtlich ist die Addition symmetrisch, wenn zu zwei Personen drei hinzukommen, sind es fünf, genau so viel, als kämen

zwei zu dreien hinzu. Allgemein gilt $a + b = b + a$ für alle natürlichen Zahlen a und b. Zur Berechnung der Summe dreier Zahlen a, b, c kann man sowohl zur Summe von a und b die Zahl c addieren, als auch zu a die Summe von b und c. Man sagt daher, die Addition sei assoziativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Ferner gibt es eine Multiplikation $a \cdot b$, die auch wieder symmetrisch ist und auch assoziativ; eine Tabelle mit drei Zeilen zu fünf Spalten enthält genau so viel Elemente wie eine mit fünf Zeilen zu drei Spalten. Addition und Multiplikation sind durch die Beziehung $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ verknüpft. Will man etwa den Preis von a Äpfeln und b Birnen ausrechnen, wenn der Stückpreis für beide c Cents beträgt, so spielt es keine Rolle, ob man die gesamte Stückzahl mit dem Einzelpreis multipliziert, oder ob man die Gesamtpreise für die Äpfel und Birnen zusammenzählt. Diese Gesetze ermöglichen das Buchstabenrechnen und damit das Lösen von einfachen Gleichungen. Sie sollten auch weiter gelten, wenn der Bereich der natürlichen Zahlen erweitert werden muss. Der Grund zur Erweiterung ist dieser: Fragt man, welche natürliche Zahl x zu a addiert werden muss, um b zu erhalten, also welches x die Gleichung $a+x=b$ erfüllt, dann findet man nicht immer solch eine Lösung, beispielsweise im Fall $5+x=3$, aber auch schon für $1+x=1$, denn die Zahl Null gehört nicht zu den natürlichen Zahlen.

2. Die ganzen Zahlen I

Abhilfe schafft ein Trick, der im Folgenden immer wieder angewandt wird: Das Fehlende wird einfach definiert. Zunächst führen wir eine Zahl 0 ein mit der Eigenschaft $1 + 0 = 1$. Indem wir auf beiden Seiten dieser Gleichung immer wieder 1 addieren, zeigen wir, dass diese so definierte Zahl 0 alle natürlichen Zahlen a bei der Addition unverändert lässt: $a + 0 = a$. Jetzt definieren wir zu jedem a eine Zahl $-a$ mit der Eigenschaft $a + -a = 0$. Damit ist es möglich, die Gleichung $a + x = b$ zu lösen: Addition von $-a$ auf beiden Seiten liefert $-a + a + x = b + -a$. Diese neuen Zahlen – die Null und die negativen Zahlen - lassen

sich vor den natürlichen Zahlen anordnen und bilden mit ihnen zusammen die ganzen Zahlen ...,*-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3*,..., die gewöhnlich mit I (Integer) bezeichnet werden. Man überzeugt sich leicht, dass mit den bekannten Rechenregeln, auch für die ganzen Zahlen die Symmetrie und Assoziativität der Addition und Multiplikation weiterhin gelten.
Im Bereich der ganzen Zahlen kann jede Additionsaufgabe $a + x = b$ gelöst werden. Wie aber sieht es bei der Multiplikation aus? Findet man für beliebige ganze Zahlen a und b stets eine ganze Zahl x, so dass $a \cdot x = b$ gilt? Beispielsweise für $2 \cdot x = 6$ finden wir die ganze Zahl 3 als Lösung; bei $2 \cdot x = 3$ aber suchen wir vergebens, denn der Bruch 2/3 gehört nicht zu den ganzen Zahlen.

3. Die rationalen Zahlen, Q

Das letzte Beispiel zeigt einen Weg zur Abhilfe: Das Fehlende wird wieder definiert. Für alle Paare a,b von ganzen Zahlen definieren wir einen Ausdruck $q(a,b)$, mit der Eigenschaft $b \cdot q(a,b) = a$. Da Multiplikation mit Null stets Null ergibt, ist das mit $b=0$ nicht zu erreichen. Darum ist eine Ausnahme nötig; wir verlangen, dass b ungleich Null ist. Multiplikation der Definitionsgleichung auf beiden Seiten mit der ganzen Zahl c ergibt $c \cdot b \cdot q(a,b) = c \cdot a$. Nach der Definitionsgleichung für das Paar der beiden Produkten $c \cdot a$ und $c \cdot b$ gilt $(c \cdot b) \cdot q(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot a$. Daraus folgt $q(a \cdot c, b \cdot c) = q(a,b)$, verschiedene Paare können durchaus gleiche q-Werte haben. Um festzustellen, wie sich die Ausdrücke $q(a,b)$ und $q(c,d)$ addieren lassen, betrachten wir die Definitionsgleichungen

$$b \cdot q(a,b) = a$$
$$d \cdot q(c,d) = c$$

und multiplizieren die erste auf beiden Seiten mit d, die zweite mit b

$$d \cdot b \cdot q(a,b) = d \cdot a$$
$$b \cdot d \cdot q(c,d) = b \cdot c$$

Addition der beiden Gleichungen liefert

$$b \cdot d \cdot (q(a,b)+q(c,d)) = d \cdot a + b \cdot c.$$

Andererseits gilt nach der Definitionsgleichung

$$b \cdot d \cdot q(d \cdot a+b \cdot c, d \cdot b) = d \cdot a + b \cdot c.$$

Damit haben wir die Additionsregel

$$q(a,b) + q(c,d) = q(a \cdot d+b \cdot c, b \cdot d).$$

Noch leichter findet man die Multiplikationsregel $q(a,b) \cdot q(c,d) = q(a \cdot c, b \cdot d)$ und man kann durch einfaches Rechnen feststellen, daß Symmetrie und Assoziativität von Multiplikation und Addition auch im Bereich dieser q-Ausdrücke gelten. Die q-Ausdrücke bilden also ein Zahlensystem, in dem die bisherigen Rechenregeln gelten. Aus der Definitionsgleichung $1 \cdot q(a,1) = a$ für das Paar $a,1$ folgt $a=q(a,1)$, wir finden also zu jeder ganzen Zahl auch einen q-Ausdruck.

Ersetzen wir daher $q(a,b)$ durch a/b und $q(a,1)$ durch a, so erhalten wir genau das Zahlensystem, das aus ganzen Zahlen und Brüchen besteht. Dieses System nennt man die rationalen Zahlen, gewöhnlich mit Q (Quotient) bezeichnet. Die abgeleiteten Rechenregeln für die q-Ausdrücke sind genau die Regeln der Bruchrechnung, die unterschiedlichen Darstellungen gleicher Werte entsprechen gekürzten und ungekürzten Brüchen, etwa 5/10 = 1/2. In der folgenden Aufstellung der rationalen Zahlen stehen die ungekürzten Brüche in Klammern:

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
...	-5/2	(-4/2)	-3/2	(-2/2)	-1/2	(0/2)	1/2	(2/2)	3/2	(4/2)	5/2	...
...	-5/3	-4/3	(-3/3)	-2/3	-1/3	(0/3)	1/3	2/3	(3/3)	4/3	5/3	...
...	-5/4	(-4/4)	-3/4	(-2/4)	-1/4	(0/4)	1/4	(2/4)	3/4	(4/4)	5/4	...
...	(-5/5)	-4/5	-3/5	-2/5	-1/5	(0/5)	1/5	2/5	3/5	4/5	(5/5)	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Das System Q der rationalen Zahlen genügt allen Ansprüchen des bürgerlichen Rechnens: Man kann beliebige Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und - vom Teiler Null abgesehen – dividieren.

Wenn die Pythagoräer sagten „Alles ist Zahl", dann dachten sie an die rationalen Zahlen und glaubten alles in Verhältnissen ganzer Zahlen beschreiben zu können, etwa das Verhältnis drei zu zwei der Saitenlängen eines Musikinstruments, um eine Quinte zu erzeugen. Die rationalen Zahlen waren Jahrtausende lang das gängige Zahlensystem, nicht nur bei den Kaufleuten, sondern auch in der Wissenschaft. Relikte sehen wir noch heute, wenn wir die Zeit oder Winkel in Minuten messen, also den sechzigsten Teilen von Stunde und Grad. Auch wenn wir bei Dezimalzahlen die Darstellung nach endlich vielen Stellen abbrechen, verlassen wir nicht den Bereich der rationalen Zahlen.

Trotzdem war schon früh ein Mangel erkannt: Bei der Konstruktion eines Pentagramms (Abb. 1) wird eine Diagonale durch eine andere so unterteilt, dass sich der kleinere Abschnitt zum größeren verhält, wie der größere zum Ganzen. Eine solche Teilung einer Strecke nennt man den Goldenen Schnitt. Stünden nun der größere Abschnitt und das Ganze in einem ganzzahligen Verhältnis, dann gäbe es ein Maß, das a mal in die Diagonale passt und b mal in den großen Abschnitt; dabei sind a und b ganze Zahlen. Dann passt das Maß genau $(a-b)$ mal in den kleineren Abschnitt und man kann das Verfahren mit den Zahlen b und $(a-b)$ wiederholen.

Nach endlich vielen Schritten müsste die größere Strecke ein Vielfaches der kleineren sein, sie wäre das gesuchte gemeinsame Maß. Das widerspricht aber der Tatsache, dass beim Goldenen Schnitt nach einem Schritt wieder die Ausgangssituation besteht, wenn auch in kleinerem Maßstab. Wären etwa am Beginn zehn Schritte nötig gewesen, das gemeinsame Maß zu finden, dann wären es nach einem Schritt nur noch neun; andererseits besteht aber wieder die Ausgangssituation mit zehn erforderlichen Schritten.

Das Streckenverhältnis im Goldenen Schnitt kann also keine rationale Zahl sein. Hippasos von Metapont aus der Schule des Pythagoras hat diese Entdeckung gemacht. Sie störte das Weltbild, das alles mit harmonischen Zahlenverhältnissen ausdrücken wollte. Hippasos wurde von den Pythagoräern ausgestoßen, man versuchte seine Erkenntnis zu unterdrücken. Nach anderen Quellen wurde er sogar zum Tode verurteilt oder von den Göttern mit dem Tode durch Schiffbruch bestraft.

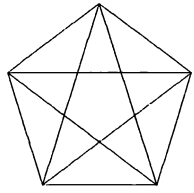

Abb. 1: Pentagramm

Gibt man beim Goldenen Schnitt dem längeren Abschnitt die Länge 1, dann berechnet sich die Länge X des kürzeren aus der Definition:

Ganz : Groß = Groß : Klein

$$(1+X) : 1 \quad = \quad 1 \quad : \quad X$$

Daraus erhält man die Gleichung $X \cdot X + X - 1 = 0$ und die hat nach der Erkenntnis des Hippasos keine Lösung in Q. Man kann aber eine Folge von Näherungen in Q konstruieren. Hat man etwa eine ungefähre Lösung a/b, dann bekommt man mit $(a+b)/a$ eine noch bessere Näherung. Beginnend mit a=1 und b=1 ergibt sich aus dieser Rechenvorschrift die Folge:

1/1	=	1,0000
2/1	=	2,0000
3/2	=	1,5000
5/3	=	1,6667..
8/5	=	1,6000
13/8	=	1,6250
21/13	=	1,61538..

Die Werte dieser Folge nähern sich dem gesuchten X, erreichen es aber nicht. Damit kennen wir zwei Mängel der rationalen Zahlen Q:

- Nicht alle Gleichungen, in denen Potenzen von X vorkommen, sind in Q lösbar.
- Der Grenzwert einer Folge von Zahlen aus Q braucht nicht zu Q zu gehören.

Die ganzen Zahlen lassen sich geometrisch als Punkte auf einer Zahlengeraden darstellen, die sich in beide Richtungen ins Unendliche erstrecken. Die Brüche finden zwischen den ganzen Zahlen Platz. Wir haben aber gerade festgestellt, dass umgekehrt nicht jeder Punkt auf der Zahlengeraden einem Bruch entspricht.

4. Die algebraischen Zahlen A

Abbildung 2 zeigt die im vorherigen Abschnitt behandelte Funktion $Y = X^2 + X - 1$. Die erwähnten Mängel bedeuten, dass den Schnittpunkten der Kurve mit der X-Achse keine rationalen Zahlen entsprechen.

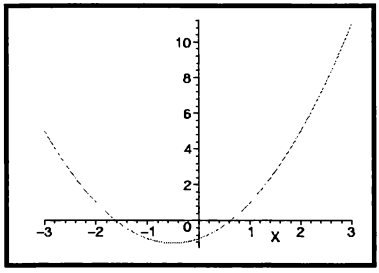

Abb. 2: $Y = X^2 + X - 1$

Zur Abhilfe werden sie einfach hinzugenommen. Genauer, die rationalen Zahlen werden erweitert um alle Nullstellen von Funktionen des Typs

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + a_3 \cdot X^3 + \ldots + a_n \cdot X^n ,$$

den sogenannten Polynomen. Dabei sind die Koeffizienten a_0, a_1, a_2,... rationale Zahlen, man kann sich sogar auf ganze Zahlen beschränken. Offensichtlich gehört jede ganze Zahl a zu diesen Zahlen, denn *a* ist

Nullstelle des Polynoms $a - 1 \cdot X = 0$. Ebenso jeder Bruch a/b, er erfüllt die Gleichung $a - b \cdot X = 0$. Das neue Zahlensystem A der algebraischen Zahlen umfasst also Q und enthält zusätzlich Zahlen wie die Quadratwurzel aus 2 oder die siebte Wurzel aus 3/4 und natürlich alle Zahlen, die man mit Hilfe der Grundrechnungsarten aus solchen Zahlen gewinnen kann.

5. Die reellen Zahlen R

Auch die algebraischen Zahlen füllen die Zahlengerade noch nicht vollständig aus. Das zu beweisen, übersteigt den hier gesetzten Rahmen. So wurde das uralte Problem der Quadratur des Kreises verneinend gelöst, als Lindemann (1880) nachwies, dass die Kreiszahl π nicht algebraisch ist. Wenn eine Folge von algebraischen Zahlen einem Grenzwert zustrebt, dann gehört dieser nicht unbedingt auch zu den algebraischen Zahlen. Auffällig wurde das erst, nachdem im 17. Jahrhundert Newton und Leibniz die Differential- und Integralrechnung begründet hatten, die auf Grenzprozessen beruhen. Anfangs wurde damit recht unbefangen umgegangen, später im 18. Jahrhundert wurde man sich des unsicheren Fundamentes bewusst.

Der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) gab eine exaktere Definition des Grenzwertbegriffs, der Deutsche J.W.R. Dedekind (1831-1916) fand einen sauberen Zugang zu den reellen Zahlen, der frei war von geometrischen und anschaulichen Vorstellungen. Dedekind betrachtete die Aufteilung der rationalen Zahlen in eine untere Menge A und eine obere Menge B, derart, dass alle Zahlen in A kleiner waren als jede Zahl in B. Eine solche Aufteilung wird als (Dedekindscher) Schnitt bezeichnet. Enthält A eine größte Zahl oder B eine kleinste, dann repräsentiert der Schnitt diese rationale Zahl. In anderen Fällen definiert der Schnitt eine neue Zahl. Besteht etwa A aus den negativen rationalen Zahlen und den positiven rationalen Zahlen X, für die $X \cdot X$ kleiner ist als 2 und enthält B die rest-

lichen, dann repräsentiert dieser Dedekindsche Schnitt die Quadratwurzel aus 2, eine nicht rationale, aber algebraische Zahl.

Die Gesamtheit der Dedekindschen Schnitte umfasst die algebraischen Zahlen; mit den Schnitten lassen sich wie bisher die Grundrechnungsarten durchführen und es lässt sich zeigen, dass Symmetrie und Assoziativität weiterhin gelten. Die Dedekindschen Schnitte sind die reellen Zahlen, R. Sie füllen die Zahlengerade vollständig aus; wählt man nämlich einen Punkt auf der Zahlengeraden, so kennt man die kleineren rationalen Zahlen A und die restlichen B, also den Schnitt, der zu diesem Punkt gehört.

6. Die komplexen Zahlen C

Obwohl die reellen Zahlen die ganze Zahlengerade lückenlos ausfüllen, erfüllen sie noch nicht alle Wünsche. Man findet etwa kein reelles X, das die einfache Gleichung $X \cdot X + 1 = 0$ erfüllt, denn $X \cdot X$ ist niemals negativ, die Summe folglich mindestens 1. Das ist unbefriedigend, man müsste bei Polynomen $a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + a_3 \cdot X^3 + \ldots + a_n \cdot X^n$ immer unterscheiden, ob es reelle Lösungen gibt oder nicht.

Wie schon so oft, definieren wir einfach das Fehlende, eine Zahl i mit der Eigenschaft $i \cdot i = -1$, und konstruieren ein Zahlensystem C – die sogenannten komplexen Zahlen -, das neben den reellen Zahlen auch diese Zahl i enthält. i nennt man die imaginäre Einheit. Damit die bisherigen Rechenregeln auch in C gelten, muss C auch alle Ausdrücke der Form $x + i \cdot y$ umfassen; dabei sind x und y beliebige reelle Zahlen. Die reellen Zahlen sind in C in der Form $x + i \cdot 0$ enthalten. Aus der Symmetrie und Assoziativität erkennt man sofort, wie zwei komplexe Zahlen zu addieren oder zu multiplizieren sind:

$$(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a + c) + i \cdot (b+d)$$

$$(a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = a \cdot c + a \cdot i \cdot d + i \cdot b \cdot c + i \cdot b \cdot i \cdot d = (a \cdot c - b \cdot d) + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$$

Im letzten Schritt bei der Multiplikation wurde die Beziehung $i \cdot i = -1$ angewandt. Die komplexen Zahlen haben keine anschauliche Bedeutung, sie sind aber sehr nützlich, weil sie eine einheitliche und elegante Behandlung vieler Probleme ermöglichen. Die komplexen Zahlen bilden den natürlichen Abschluss der reellen Zahlen, denn C.F. Gauß zeigte in seiner Dissertation (Disquisitiones Arithmeticae, 1801), dass alle Nullstellen von Polynomen $c_0 + c_1 \cdot X + c_2 \cdot X^2 + c_3 \cdot X^3 + \ldots + c_n \cdot X^n$ mit Koeffizienten c_k in C wiederum in C liegen.

7. Hierarchie der Zahlensysteme

Der schrittweise Aufbau der Zahlensysteme erzeugt eine Hierarchie unter ihnen, wie sie in Abbildung 3 gezeigt wird. Die Pfeile deuten an, wie die Systeme durch Erweiterungen auseinander hervorgehen. Jedes System umfasst alle darunter liegenden. In der dritten Zeile sind jeweils typische Zahlen angegeben.

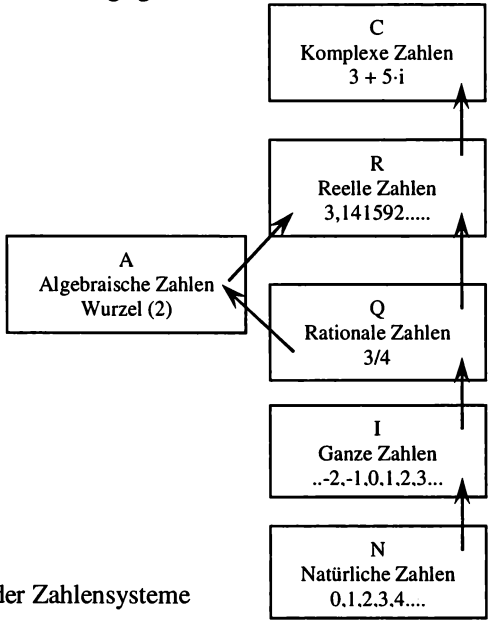

Abb.3: Hierarchie der Zahlensysteme

8. Strukturen

In allen aufgeführten Zahlensystemen galten für die Addition und Multiplikation die Symmetrie und Assoziativität, die Reihenfolge der Ausführung spielt keine Rolle. Außer bei der Addition der natürlichen Zahlen gab es ein sogenanntes neutrales Element, welches den Operanden unverändert lässt.

- Symmetrie: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativität: $a + (b+c) = (a+b)+c$ und $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Neutrale Elemente: $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$

Das heißt aber, dass Addition und Multiplikation Vieles gemeinsam haben. Mathematische Sätze, die nur die Multiplikation benutzen und dabei nur diese drei Eigenschaften, die gelten in einem anderen Bereich für die Addition.

Beispiel: Zur Multiplikation der positiven, reellen Zahlen:
$A \cdot B = C$ findet man eine korrespondierende Addition $a + b = c$ bei den reellen Zahlen. Die Zahlen a, b und c heißen die Logarithmus von A, B und C, abgekürzt: $a = \log(A)$, $b = \log(B)$ und $c = \log(C)$. Es ist klar, dass der Logarithmus des neutralen Elementes der Multiplikation das neutrale Element der Addition sein muss: $\log(1) = 0$.

Man kann also Multiplikationsaufgaben in bequemere Additionen umwandeln. Bevor es Computer und Taschenrechner gab, haben Logarithmentafeln viele Berechnungen sehr erleichtert. Dieses Beispiel zeigt, dass es keine Spielerei ist, nach Strukturen mit gleichen Gesetzen zu suchen. Einige Strukturen, die auf den Rechenregeln der Zahlen beruhen, sollen genannt werden.

Halbgruppen
Eine Gruppe ist eine Menge von Elementen *a,b,c....* zwischen denen eine Verknüpfung, $\circ$, existiert, die je zwei Elementen, a und b, eindeutig ein drittes zuordnet, $c = a \circ b$. Die Verknüpfung ist assoziativ, es gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. Es existiert ein neutrales Element *e*, so dass stets $a \circ e = a$ gilt.

Beispiele: Die natürlichen Zahlen mit der Verknüpfung Addition, die ganzen Zahlen mit der Verknüpfung Multiplikation.

Gruppen
Eine Gruppe ist eine Halbgruppe, in der es zu jedem Paar a, b ein Element x gibt mit $a \circ x = b$.
Beispiel: Die ganzen Zahlen mit der Verknüpfung Addition.
Gegenbeispiel: Die multiplikative Halbgruppe der ganzen Zahlen bildet keine Gruppe, denn die Gleichung $0 \cdot x = b$ ist nicht zu lösen.

Kommutative Gruppen
Wenn die Verknüpfung symmetrisch ist, $a \circ b = b \circ a$, dann spricht man von einer kommutativen Gruppe oder Halbgruppe. Nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1812-1832) werden sie auch Abelsche Gruppen genannt. Alle vohergehenden Beispiele sind kommutative Gruppen.

Ringe
Ein Ring ist eine Menge, die eine Halbgruppe bildet bezüglich zweier Verknüpfungen (+ und ·), zwischen denen die Beziehung $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ besteht. Ringe können kommutativ sein oder auch nicht. Die rationalen Zahlen sind ein Beispiel für einen Ring. Dass es auch ganz andersartige Ringe gibt, sogar solche mit nur zwei Elementen, zeigt dieses Beispiel aus der Aussagenlogik mit den beiden Elemente **falsch** und **wahr** und den Verknüpfungen:

Exklusives Oder:	Genau eine Aussage ist wahr.
Und:	Beide Aussagen sind wahr.

Alle möglichen Verknüpfungen lassen sich auflisten:

Ex.Oder	**falsch**	**wahr**
falsch	**falsch**	**wahr**
wahr	**Wahr**	**falsch**

Und	**falsch**	**wahr**
falsch	**falsch**	**falsch**
wahr	**falsch**	**wahr**

Ersetzt man **falsch** und **wahr** durch gerade Zahlen (repräsentiert durch eine **0**) und ungerade Zahlen (repräsentiert durch **1**), das exklusive Oder durch die Addition und das Und durch die Multiplikation, dann lassen sich diese Tabellen exakt umsetzen:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

1+1 ergibt nach dieser Vereinbarung *0*, weil die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist. Computer machen von dieser Äquivalenz von Zahlen und Logik starken Gebrauch.

Körper
Ein Ring heißt Körper, wenn seine Halbgruppen wirkliche Gruppen sind, wenn also die Gleichungen $a + x = b$ und $a \cdot x = b$ Lösungen haben; bei der Multiplikation ist wieder die **0** das neutrale Element der Addition, als Wert für a ausgenommen.
Beispiele sind die Zahlensysteme **Q**, **R**, **A** und **C**.

Die folgende Übersicht zeigt, welche Strukturen bezüglich der Addition und Multiplikation in den Zahlensystemen enthalten sind. An ihnen erkennt man, welche der Grundrechnungsarten möglich sind.

Zahlensystem	Operationen	Addition	Multiplikation	Beide
N	+ ·	Halbgruppe	Halbgruppe	Halbring
I	+ · -	Gruppe	Halbgruppe	Ring
Q, A, R, C	+ · - :	Gruppe	Gruppe (≠0)	Körper

Ein Körper ist immer auch ein Ring, hat aber noch die zusätzliche Eigenschaft, dass eine Division – die Umkehrung der Multiplikation – möglich ist. Daher ist nicht jeder Ring ein Körper, wie man an den ganzen Zahlen, **I**, sehen kann. Auf diese Art ergibt sich bei den Struk-

turen eine hierarchische Ordnung; die Pfeile in der folgenden Übersicht zeigen, wie durch Hinzunehmen weiterer Eigenschaften der Aufbau von der einfachsten Struktur, der Gruppe, zum Körper verläuft.

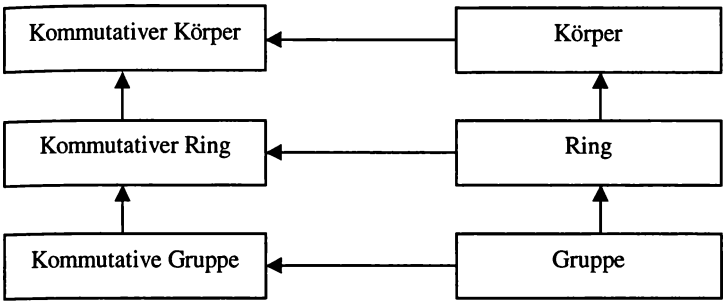

Abb. 4: Hierarchie der Strukturen

9. Schlussbemerkung

Dieses war nur eine kleine Auswahl aus möglichen Hierarchien in der Mathematik. Überhaupt nicht berücksichtigt wurden Strukturen, die sich aus Anordnungen ergeben. Insbesondere ließe sich auch eine Hierarchie angeben, die sich aus den Gemeinsamkeiten und Abhängigkeiten der mathematischen Teilgebiete ergibt und die sich auch auf die Reihenfolge auswirkt, in der an Schulen und Universitäten Mathematik gelehrt wird.

10. Literatur

BOYER, Carl B. (1968): A History of Mathematics. - Verlag John Wiley and Sons. New York.

FISCHER LEXIKON DER MATHEMATIK (1964). - Fischer Taschenbuch Verlag. Frankfurt am Main.

VAN DER WAERDEN, B.L. (1955): Algebra. - Springer Verlag. Heidelberg.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Matreier Gespräche - Schriftenreihe der Forschungsgemeinschaft Wilheminenberg

Jahr/Year: 2003

Band/Volume: 2003

Autor(en)/Author(s): Nagel Klaus

Artikel/Article: Hierarchien in der Mathematik 56-69