Walther L. Fischer

Raumformen – Formen im Raum
Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie

0. Vorbemerkung

0.1 Worte sind im allgemeinen vieldeutig. Sie haben eine Bedeutungsaura, betreffen oft gleichermaßen verschiedene Gegenstände, Gegenstände mit verwandten Merkmalsgruppen. Und selbst dort, wo in einem bestimmten Bedeutungsfeld ihre Bedeutung und ihr Gebrauch durch Definition eingeschränkt wird, bleiben Worte – und die sie bezeichnenden Erscheinungen und/oder Begriffe – in einem gewissen Umfang unscharf (*Fischer, W. 1973*). Das gilt für die Umgangssprache, für die Fachsprachen – es gilt auch für die Wissenschaften, ja sogar für die Mathematik. Auch dort kann manches Wort mehrere Bedeutungen haben. Man denke z.B. an die Worte „Zahl“ oder „Raum“.

0.2 Im Rahmen dieser Tagung sprechen wir vom *„Raum“*. Dabei zeigt sich bei genauerem Zusehen – etwa beim Blick auf das Stichwort „Raum“ in einem philosophischen Lexikon –, dass das Wort „Raum“ in den verschiedensten Lebens- und Wissensbereichen in verschiedener Weise auftritt bzw. gebraucht wird.

Im folgenden wollen wir von dieser „Vielseitigkeit“[1] des Wortes „Raum“ sachlich und historisch ausgehen, um schließlich einige Bedeutungsvarianten des Wortfeldes vorzustellen, wie sie sich in der Geschichte der Geometrie entwickelt haben. Wir müssen uns auf einige Aspekte beschränken, werden uns im wesentlichen mit elementaren Vorstellungen und Begrifflichkeiten und ihren Modellen in der Außenwelt und im Wissensbereich der sog. „elementaren Geometrie“[2] und der „Topologie“ beschäftigen.

0.3 Beginnen wir mit einem Rundblick in unserem „Tagungsraum“, den jeder aus seiner Perspektive erlebt als seinen augenblicklichen subjektiven *„Erlebnisraum“*. Ist er nur subjektiv? – Sicher nicht. Wir können uns sprachlich über diesen Raum verständigen, austauschen. Der augenblickliche „subjektive Erlebnisraum“ wird so zum „intersubjektiven *Erfahrungsraum*“.

---

[1] „Vielseitigkeit“ als Wort mit Referenz auf Räumliches.
[2] Eine „Elementargeometrie“ als eigenständige Disziplin gibt es nicht.

0.4 Beim rohen Zusehen empfinden, erleben, erfahren wir den „Erlebnisraum“ bzw. den „Erfahrungsraum“ – z.B. unseres Tagungslokals – als abgeschlossen, begrenzt von Wänden, von endlichem Fassungsvermögen, endlichem „Rauminhalt“.

Das ist freilich nur beim ersten Zusehen so. Der Raum hat Türen, die uns ins „Draußen“ gelangen lassen, in einen „anderen“ Raum; der Raum hat Fenster, durch die wir weiter hinaussehen und dabei unseren augenblicklichen Erlebnis- und Erfahrungsraum erweitert finden.

Wie steht es um diesen „erweiterten“ Raum? Ist er noch abgeschlossen, begrenzt, von endlichem Rauminhalt? Und wie steht es um die Eigenschaften des Raumes, wenn wir nächtens beim Blick zum Sternenhimmel unser Raumerleben und Raumerfahren zum „Weltraum“ ausdehnen? Dabei verwenden wir die Worte „abgeschlossen“, „begrenzt“, „endlicher Rauminhalt“ zunächst in rein umgangssprachlicher Form, um Eigenschaften des jeweiligen Erlebnis- bzw. Erfahrungsraums zu umschreiben.

0.5 Um es zu wiederholen: Der Begriff des Raumes, der Bedeutungsgehalt des Wortes „Raum“ ist nicht eindeutig bestimmt. Es gibt den *„Erlebnisraum“* und den *„Erfahrungsraum“*. Daneben gibt es u.a. den *„Vorstellungsraum“* (den Raum unserer Vorstellungen), den *„physikalischen Raum“*, den *„Raum in der Astronomie“* (den „Weltraum“); man spricht von *„Wirtschaftsräumen“* usw. und kennen die begrifflichen Strukturen der *„mathematischen Räume“*. All diese Räume sind in je ihrer Weise strukturiert, so dass wir generell von den verschiedenen *„Raumformen“* sprechen können, ja sprechen müssen.

0.6 In den genannten Räumen gibt es *„Teilräume“*, die gegenständlich oder begrifflich strukturiert Teile des jeweiligen Raumes ausfüllen bzw. darstellen, gibt es „Figuren“ und „Körper“, also *„Formen im Raum“*.

0.7 Wir beschäftigen uns im folgenden mit der Begrifflichkeit mathematischer Raumformen und mit Formen in mathematischen Räumen.

1. Zur Kulturethologie der Raumvorstellung

Aus der heutigen Sicht der evolutionären Erkenntnistheorie haben unser Erkenntnisvermögen, das heißt – um in unserem Themenkreis zu bleiben – die Raumwahrnehmung, die Raumvorstellung und die Art der Raumerfassung des Menschen ihre biologische Entwicklungsgeschichte (*Lorenz, K. 1973, 21-22, 148ff.*).

Schon Tiere bedürfen zur Sicherung ihrer Lebensbedürfnisse und im Überlebenskampf eines Orientierungsvermögens in ihrer Umwelt, haben ihr je artspezifisches Raumerkennen. Sie erkennen in ihrem lebensweltlichen Bezug ihre Lebensumwelt, haben auf ihre Weise im übertragenen Sinne diesbezügliche Aprioritäten, die ihrerseits aus Aposterioritäten ihrer phylogenetischen Vorgänger geworden sind.

So sind die Raumwahrnehmung, die Raumvorstellung und die begriffliche Erfassung des Raumes des Menschen in seiner vormenschlichen Entwicklung angelegt. Die Apriorität unserer Raumanschauung ist genetisch festgelegt und aus der Aposteriorität unserer vormenschlichen Entwicklung erwachsen. Historisch gewachsen ist unsere weitere Kenntnis vom Raum, unser begriffliches Erfassen von Raumformen und von Formen im Raum.

2. Stufen der kulturhistorischen Entwicklung der Geometrie

2.1 Wenn wir im folgenden von mathematischen Raumformen und Formen im Raum sprechen, müssen wir uns erstlich darüber verständigen, was wir unter *Mathematik* bzw. *mathematischem Denken* verstehen. Hierzu ist freilich zu bemerken, dass sich auch die Mathematik – oder besser: mathematisches Denken – im Verlaufe der Menschheitsgeschichte erst mählich entwickelt hat, dass in späterer Zeit bis in unsere Gegenwart gar die Selbstauffassung der Mathematik Wandlungen unterworfen war.

Grob gesprochen versteht man unter Mathematik heute nicht mehr nur „die Lehre von Raum und Zahl". Die Gegenstände der Mathematik sind allgemeine, abstrakte Begrifflichkeiten und Strukturen verschiedener Abstraktionshöhe, die sich im Spezialfall auf Raum und Zahl beziehen lassen können, aber nicht müssen (*Fischer, W. 1982*). Damit geht einher, dass sich Raum- und Zahlbegriffe in vielfältiger Weise ausdifferenziert haben und heute verschiedenste Themenbereiche betreffen bzw. überdecken.

Im Rahmen dieses Beitrags wollen und können wir zwar die heutige strukturorientierte Sicht der Mathematik nicht verleugnen, wir werden aber in unseren historischen Betrachtungen naturgemäß vor allem den Themenbereich der Mathematik ansprechen, der dem Laien in dieser oder jener Weise aus seiner Schulzeit bekannt ist.

2.2 In der historischen Abfolge der mathematischen Begriffsbildungen und Systeme unterscheiden wir die Stufen der *Prä-Mathematik*, der *Proto-Mathematik*, der *naiven Mathematik* und der *Mathematik im engeren Sinne* als Gesamt von Theorien, d.h. von logisch durchgeordneten Aussagenmengen über mathematische Begrifflichkeiten.

2.3 Entsprechend unterscheiden wir im Hinblick auf unser Thema spezieller die *Prä-Geometrie* von der *Proto-Geometrie*, der *naiven Geometrie* und der *Geometrie im engeren Sinne.*[3]

3. Prä-Geometrie

3.1 In der historischen Hierarchie der Begriffsbildung und der Systeme geht in der *Prä-Geometrie* eine bewusste Realisierung und einfache Typisierung von Formen der Proto-Geometrie voraus. Die Phase der Prä-Geometrie besteht in der Begegnung des Menschen mit Formen in seiner Umwelt, ihrer Wahrnehmung, ihrer Bewußtwerdung in der naturnachahmenden und typisierenden Abbildung von Figuren und in der zeichenhaften Realisierung gewisser Weltvorstellungen.

3.2 Werden wir konkreter: Die Wurzeln der Prä-Geometrie reichen weit zurück, bis zu der schon in der Altsteinzeit einsetzenden Beschäftigung mit eben- und raumgeometrischen Gebilden. Die Relikte sind in den verschiedenen Phasen der Steinzeit geographisch weit gestreut und ihre Datierung variiert – auch in den verschiedenen Publikationen. Wir beschränken uns im Rahmen unserer Überlegungen auf das Grundsätzliche der Entwicklungslinien, streben keinerlei Vollständigkeit an, begnügen uns mit einigen signifikanten Beispielen.

Vorweg muß besonders betont werden, dass der steinzeitliche Urmensch ein Mensch im vollen Sinne war. Man muß ihm von Anfang an eine volle und reiche geistige Fähigkeit und Tätigkeit zuerkennen, die an sein „primäres Weltbild" gebunden war. Er hatte – was unser Thema betrifft – nicht nur das Vermögen der Raumwahrnehmung und der Orientierung im Raum, sondern von Anfang an einen ausgeprägten Formensinn.

Eine bedeutsame Wurzel für den Anfang ist der auf aufmerksamer Naturbetrachtung fußende *Nachahmungstrieb* und die *Freude an der „schönen" Form*, die später ihren Ausdruck findet auch in der naturnachahmenden oder durch die eigene Phantasie geschaffenen, durch Symmetrie und Formrhythmus ausgezeichneten schmückenden Ornamentik.

---

[3] Im Bereich der Arithmetik und Algebra gibt es entsprechende historische Phasen (*Damerov, P. / Englund, K. / Nissen, H. 1988*).

Dabei ist die Darstellung räumlicher Gebilde nicht nur verknüpft mit künstlerischer Betätigung. Die Figuren sind nicht nur Abbilder. Die abgebildeten Tier- und Menschenformen sowie die geometrischen Figuren haben vor allem eine *kultische, magische Funktion.*

3.3 Weit zurück, etwa 25000 – 30000 Jahre v. Chr., gehen die *Felsmalereien und Ritzzeichnungen* spanischer und französischer Höhlenbewohner. In ihnen werden Tiere und Menschen teils im Aufriß, teils in schräger Projektion dargestellt. Sie zeigen ein ausgeprägtes Verständnis für Perspektive bereits in der Aurignac-Periode (32000 Jahre v. Chr.).

3.4 Für uns bedeutsamer sind die *Inzisionen* auf den Figuren, den Wänden und vor allem auf den Felsböden in den Kulthöhlen. Schon auf den Bildern und auf plastischen Tierfiguren sind immer wieder auch kreuzartige Schraffuren angebracht, so auf 33000 Jahre alten Mammutskulpturen aus der Vogelherdhöhle bei Ulm (Fig.1).[4] Auf anderen Figuren finden sich strichlistenartige Gebilde.[5]

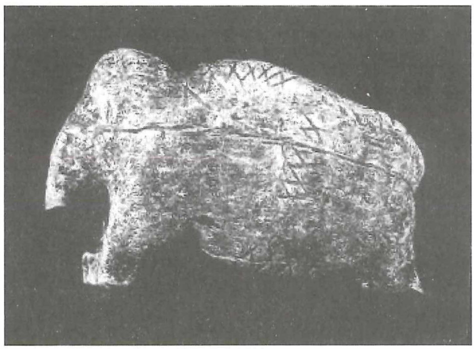

Fig. 1: Elfenbeinskulptur eines Mammut aus dem Aurignacien mit Inzisionen (*Conard, N. 2005, 73*)

In den Kultstätten, z.B. der Ile-de-France, sind seit dem Mousterien in der mittleren Altsteinzeit und auch später in der Jungsteinzeit unabhängig von den figürlichen Darstellungen *Begriffszeichen* (Ideogramme) eingeschliffen worden. Jede Generation hat sie wiederholt, hat mit der Zunahme ihres Wissens ihre Form verfeinert. So wurden die Höhlen zum Teil vom Boden bis zur Decke mit Inzisionen bedeckt (*König, M. 1973, 40, 66ff.*).

[4] Kreuzartige Schraffuren entdecken wir freilich schon in der Blombos-Höhle in Südafrika, die auf 77000 v. Chr. datiert sind.
[5] Handelt es sich um frühe Zahlzeichen?

Die ältesten Zeichen sind *gerade Linien* und *Linienkreuze*. Weiter finden wir – in unserer Sprechweise: *parallele Strichfolgen.* Aus ihnen entstehen durch Überlagerung *Netze* oder, wie wir auch sagen können, *Rechtecksgitter*. Es gibt Vierecke bzw. *Rechtecke.* Diese werden ausdifferenziert zu Rechtecken mit Mittelsenkrechten, zu Rechtecken mit Diagonalen. Weiter gibt es Ovale geteilt durch ein Rechteckskreuz. Später treten auch *Dreiecke* auf, noch später *Dreiecksgitter*.

Fig. 2: Ideogramme an der Innenwand der Höhle ´Rochers des Potets´ (*König, M. 1973, 124*)

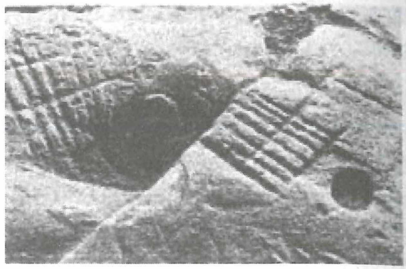

Fig. 3: Inzisionen in der Höhle `Malesherbes´ (*König, M. 1973, 81)*

3.5 Die Inzisionen gehören in unserer Terminologie in den Bereich der Prä-Geometrie, sind aus unserer Sicht, in unserer Sprachweise geometrische Figuren. Das waren sie für den Jungpaläolithiker sicher nicht. Die Figuren hatten über ihre bloße Form hinaus eine Bedeutung, sie sind *Ideogramme.* Sie sind Ideogramme, die etwas aussagen über seine Weltsicht, die seine Weltansicht im kultischen Sinne betreffen. Die Bildwerke in den Höhlen drücken insbesondere durch Bilder und Zeichen die Orientierung des Urmenschen im Raum und in der Zeit aus, haben – wie gesagt - eine magische und kultische Funktion.

Die Beobachtung der Gestirne hat sicher sehr früh begonnen, wurde ununterbrochen fortgesetzt. In seiner unmittelbaren, alltäglichen Umwelt und bei Tag und Nacht im Anblick der Bewegungen von Sonne, Mond und Sternen erfuhr der Mensch nicht nur die Möglichkeiten der Orientierung im Raum, die Richtungen von rechts und links, von vorne und hinten, von oben und unten, Nähe und Ferne, sondern in seinem Leben und seiner Umwelt generell auch den Wandel der Geschehnisse in der Zeit. So besaßen schon die alten Kulturen ein großes astronomisches Wissen.

Deuten wir immerhin an, wie die Forschung die Ideogramme interpretiert. Die *Linie* war Abbild der Weltachse. „Das *Linienkreuz* war zunächst der graphische Ausdruck für ein allgemeines Ordnungsgesetz", sagt *M. König (1973, 114)*. Linienkreuze bildeten das geistige Gerüst, um die Ordnung im Raum zu fixieren (*König, M. 1973, 93*). Der *Schnittpunkt der Achsen*, der Weltachsen, war der feste Bezugspunkt, der wohl dem Mittelpunkt des Kosmos entsprach. Die von ihm ausgehenden vier Richtungen markierten zugleich die vier Hauptgegenden des Horizonts. Das *Viereck* war das Ideogramm des Ordnungsschemas der vier Weltgegenden. König spricht vom „Weltenplan als Viereck mit den vier Kardinalpunkten" (*König, M. 1973, 114*).

Der Mensch sah den Raum und auch die Zeit im Verlauf der Zeiten nicht anders, dachte nicht anders, sondern neuen Einsichten folgend nur genauer. In den Höhlen spiegelt sich also nicht nur das Werden der Sinnzeichen wider, sondern in ihrer zunehmenden Verfeinerung auch die Zunahme des Wissens und der veränderten Weltsicht und die religiöse Haltung des Urmenschen.

Durch das Viereck, später durch das durch Diagonalen bzw. Mittelsenkrechte gegliederte Viereck hatte die zunächst im Sphäroid noch ganzheitlich gedachte Welt von Himmel und Erde eine Strukturverfeinerung erfahren.

Weitere Verfeinerung erfuhr die ideogrammatische Darstellung dadurch, dass neben die Weltachsenbilder weitere Ordnungslinien gesetzt wurden. Der senkrechten Achse und der waagrechten Achse wurden in regelmäßigen Abständen gleichlaufende parallele Linien beigefügt. So entstand das *Netz* (Fig.2), das als Grundschema des kosmischen wie kulturellen Reiches fungierte. Es war als Ideogramm schließlich über die ganze Welt verbreitet, blieb durch alle Zeiten erhalten, ist als Figur noch auf den Goldmünzen der Kelten und als Ornament auf den Keramiken zu finden. Weitere Formvarianten finden sich in der Megalithkultur, insbesondere die *Spirale*.

Fig. 4: Dreiecke, Vierecke, Spiralen auf einem Block des Steinkranzes von `Newgrange´ (*König, M. 1973, 247*)

Brechen wir hier unseren Exkurs in die Formenwelt der Prä-Geometrie und die Funktion ihrer Figuren als bedeutungstragende Zeichen ab. Für Einzelheiten verweisen wir auf die Literatur (*König, M. 1973; Mahlstedt, I. 2004; McMann, J. 1980*).

4. Proto-Geometrie

4.1 Die aus verschiedenen Quellen entspringende Beschäftigung mit typisierten Formen in der Prä-Geometrie lenkte in der nächsten Phase, der *Proto-Geometrie*, den nachdenklichen Sinn in der weiteren Ausdifferenzierung der Weltsicht und ihrer kultischen Deutung auf die geometrischen Elemente selbst, auf die Mannigfaltigkeit der Formen, ihre Eigenschaften, auf ihre Verknüpfungen, auf metrische Beziehungen. Das deutet sich schon – wie wir gesehen haben – in der Phase der Prä-Geometrie an. Die Übergänge sind fließend.

4.2 Der Proto-Geometrie dürfen wir also sicher schon jene Ritzzeichnungen auf den Felsen zurechnen, in denen die einfachen geometrischen Figuren in ihren Merkmalen verfeinert, ausdifferenziert sind: die *Gitter von parallelen Linien*; in *Quadrate* sind z.B. Diagonalen und Mittelsenkrechten der Seiten eingezeichnet.

In der Phase der Proto-Geometrie werden solche von Menschen geschaffenen Formen im spielerischen Umgang weiter typisierend verselbstständigt; in der Ausdifferenzierung der Formen erfolgt jetzt eine Ausbildung von *Mustern* und *Ornamenten* (Fig. 4 und 5).

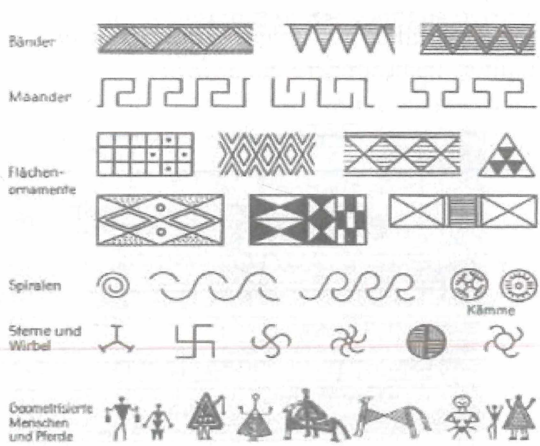

Fig. 5: Keramikornamente
(*Vogel,K. 1958, 12*).

4.3 Die im Neolithikum aufkommende Keramik gab dann aber nicht nur Anlaß zu weiterer künstlerischer und handwerklicher Betätigung und Entfaltung, sondern in ihren Verzierungen und Ornamenten auch zur Realisierung weiterer geometrischer Formen.[6] Auf Keramiken finden sich *Ornamente* in den verschiedensten Formen: *Linien, Strichmuster, gestrichelte Streifen, Spiralen.* Auch sie verweisen wohl in ihren Anfängen auf Gesehenes, in ihren Ursprüngen auf im täglichen Leben verwendetes Material, auf das Flechtwerk von Körben und Matten, auf Schnüre und Bänder.

Diese Muster entwickelten sich in der Töpferei weiter zu breiten *Bändern, zu Bändern in Zickzackführung, zu geradlinigen und spiraligen Mäandern. Schachbrettmuster, Quadrat- und Dreiecksgitter, Rauten, Sterne und Wirbel* treten auf. Sie finden sich in der Megalithkultur (um 2000 v. Chr.) wieder auf den Wänden und Stelen der Tempel.

All diese Muster und Verzierungen sind nicht nur schmückende Formelemente, auch sie haben ihre tiefere Bedeutung, sind Ideogramme. *Winkel, Rauten, Zickzack* sind Symbole des Gestaltwandels (*Mahlstedt, I. 2004, 109ff.*). Die *Winkel* stellen die Lebensbewegung dar, Werden und Vergehen im Steigen und Fallen der Sonne. Daraus entstehen allerlei Variationen, die genannten *Zickzack-Zeichen* und die *Rauten*, alle mit Bezug auf die Dynamik des Lebenskreislaufs. Die *Spirale* ist in anderer Form ein Symbolzeichen für ewige Wiederkehr (*Mahlstedt, I. 2004, 126*).[7]

Auch Modelle von Körpern finden sich. Das älteste Symbol ist wohl die Kugel, das *Sphäroid*, das schon aus dem Paläolithikum bekannt ist. Sie stellt wohl die Einheit und Harmonie des Ganzen dar, das die Lebenswelt des Menschen umgibt. Im Neolithikum wird die Kugel zum zweidimensionalen Gebilde, zur Hohlrundung, zur *Schale*, zum eindimensionalen *Kreis*.

4.4 Dem Bereich der Proto-Geometrie sind ab dem 7. Jahrtausend v. Chr. auch die in Ausgrabungen gefundenen *Haus- und Tempelstrukturen* zuzurechnen. Quaderförmig sind die Häuser, später in der Megalithkultur (um 2000 v. Chr.) begegnen wir im Grundriß kreisförmigen Tempelanlagen.[8]

---

[6] Sind die Bilder in den Höhlen eher Ausdruck künstlerischer Betätigung, so ist die Ornamentik des Töpfers eher handwerklich zu nennen.

[7] Die Spirale ist eine neolithische Form, die noch nicht aus der Altsteinzeit übernommen ist.

[8] Vgl. auch die älteste bisher bekannte Tempelanlage in Göbekli Tepe (Kurdistan) um 9600 v. Chr. (*Zick, M. 2005*).

Die kulturelle Bedeutung der Bilder, Ornamente und Tempel ist im einzelnen noch fraglich. Sicher aber ist, dass gewisse bauliche Konstruktionen in der Megalithkultur und schon lange vorher astronomische Beobachtungen, d.h. Stern-, Sonnen- und Mondkonstellationen zu verschiedenen Jahreszeiten, widerspiegeln, also wohl auch mit einer Art sprachlicher Repräsentanz der Formen und damit einem bestimmten wiederum höheren Bewusstseins- und Erkenntnisgrad der Situationen verbunden gewesen sein müssen – aus dieser Sicht also schon der Frühphase der *naiven Geometrie* zuzurechnen sind. Noch war der Umgang mit den Figuren keine rechnende oder gar beweisende Geometrie. Diese Aspekte bestimmen erst die folgenden Phasen der naiven Geometrie und der Geometrie im engeren Sinne.

5. Naive Geometrie

5.1 Wissenschaftliches Denken spielt sich, soweit es ins Bewusstsein kommt, auf verschiedenen begrifflichen Ebenen ab, bedarf zu seiner Darstellung der Sprache und verschiedener Sprachstufen. Mathematik bzw. Geometrie als Wissenschaft hebt also in der Geschichte erst mit dem Aufkommen der Schriftsprache an, seit Formen im Raum benannt und gewisse ihrer Eigenschaften ausformuliert und symbolisch repräsentiert wurden.

5.2 Nach Prä- und Proto-Geometrie werden also in der nächsten Stufe die betreffenden Gebilde in einem gewissen Sinne sprachlich dargestellt und als Formtypen begrifflich erfasst. Sie werden damit zu mathematischen Gegenständen der elementaren *naiven Geometrie.* Weitere Figuren- und Körpertypen kommen hinzu.

Zuerst werden geometrische Figuren und Figurentypen mit Namen belegt, die zur Bezeichnung von Gegenständen aus der Umwelt dienen, später werden erste Fachworte gebildet. Die Sprache wird zur Fachsprache (Episprache). In der naiven Geometrie werden die Eigenschaften der in bildlich-zeichenhafter Form niedergelegten Gebilde aber nicht nur beschrieben. Sie werden im dialogischen Argumentieren zunehmend miteinander zu Komplexen verbunden. Eine Stufenfolge von Eigenschaften, ihre gegenseitige Abhängigkeit und Bedingtheit wird zu einer Vorform formal-logischen Denkens ausgebildet und mit der gleichzeitigen Entwicklung der Zahlenwelt und algorithmischer Verfahren auch rechnerisch behandelt. Damit sind frühe Ansätze zur Ausbildung einer formalen, theoretischen Sprachform gegeben.

5.3 Die Geometrie im eigentlichen Sinne des Wortes setzt damit um 2000 v. Chr. ein, in der Bronzezeit, bei den Babyloniern und den Ägyptern. Die Geometrie der Babylonier und die der Ägypter ist aber noch nicht durchgehend eine Geometrie um ihrer selbst willen; sie ist eine rechnende, noch keine beweisende Geometrie, eine empirische Geometrie, wesentlich ausgerichtet an den Bedürfnissen der Alltagspraxis.

5.4 Die Geometrie der Babylonier

5.4.1 Auf Keilschrifttexten aus der Zeit von 2000 – 200 v. Chr. finden sich bei den *Babyloniern* zahlreiche mathematische Texte in einer ausgebildeten Schrift. Sie geben zunächst im wesentlichen das Gedankengut der Sumerer wieder. Die Texte enthalten Aufgaben aus dem praktischen Leben und Tabellen, die zur Lösung der Aufgaben dienen.

5.4.2 Wenn die babylonische Mathematik auch vornehmlich algebraischen Charakter hatte, so hatten die Babylonier doch auch hohe Kenntnisse auf dem Gebiet der Geometrie. Die Geometrie der Babylonier ist – wie gesagt – aus der Praxis des täglichen Lebens entstanden und auf sie bezogen. Landvermessung, Berechnung von Bauwerken, Dämmen und Kanälen stehen im Vordergrund des theoretischen Bemühens, machten die Existenz von Längen-, Flächen- und Raummaßen erforderlich, führten zu Aufgabenstellungen, zu deren Lösung Berechnungsrezepte und Formeln verwendet wurden (*Vogel, K. 1959, 64 ff.*).

Die Babylonier kannten die verschiedensten geometrischen Gebilde und berechneten sie. Unregelmäßige Felder wurden in Rechtecke, Dreiecke und Trapeze zerlegt. Sie kennen die Ähnlichkeit von Figuren, den pythagoreischen Lehrsatz, das gleichschenklige Trapez und berechnen mit dem pythagoreischen Satz dessen Diagonale. Ein Höhepunkt ist die Anwendung von Trapezsätzen, insbesondere zur Herstellung kennzeichnender Gleichungen für regelmäßige Vierecke. Das Flächenverhältnis von ähnlichen Dreiecken findet sich in Produktform ausgedrückt und mit einer Planfigur versehen auf einer Keilschrifttafel verdeutlicht (Fig. 6). Kreise werden berechnet[9], ebenso die Fläche des Sektors eines konzentrischen Kreisringes, der Rauminhalt des Zylinders und des Kegelstumpfes. Der allgemeine Winkelbegriff fehlte noch.

Damit ist angedeutet, welche geometrischen Gebilde in Babylon bekannt waren und berechnet wurden. Für Einzelheiten verweisen wir auf die Litera-

[9] Dabei wird π mit 3 1/8 oder mit 3 gerechnet.

tur (*Vogel, K. 1959; Gericke, H. 2004; Lehmann, J. 1994; Hoffmann, J.E. 1963*).

5.4.3 Dem empirischen Charakter der babylonischen Geometrie entsprechend entstammten die Fachwörter der Alltagssprache. Ein Quadrat ist eine Figurenform, die „auf allen Seiten gleich geworden ist“. Das Dreieck ist der „Nagelkopf“, das Trapez der „Ochsenkopf“. Die Senkrechte wird, wenn sie errichtet wird, „gepflanzt“ oder es heißt „ich bin hinaufgestiegen“. Das Rechteck ist das „Feld“. Mit dem Wort „Krümmung“ bezeichnete man den Kreis, auch den Kreisbogen. Der „Halbmond“ ist der Halbkreis oder ein Segment. Ebenso wurden die Worte für Mauer, Damm, Graben, Trog, Behälter zur Bezeichnung von räumlichen Gebilden wie Quader, Prismen, Pyramidenstumpf verwendet (*Vogel, K. 1959, 65-66*).

5.4.4 In weit höherem Maße als die Ägypter hatten die Babylonier ein theoretisches Interesse. Das zeigt sich am vornehmlich algebraischen Charakter der babylonischen Mathematik (*Vogel, K. 1959, 83-84*).

5.4.5 All diese Kenntnisse wurden bereits in Schulen vermittelt. Der Lehrer als „Vater des Tafelhauses“ erklärt dem Schüler, dem „Sohn des Tafelhauses“, die Lösungen der Aufgaben.

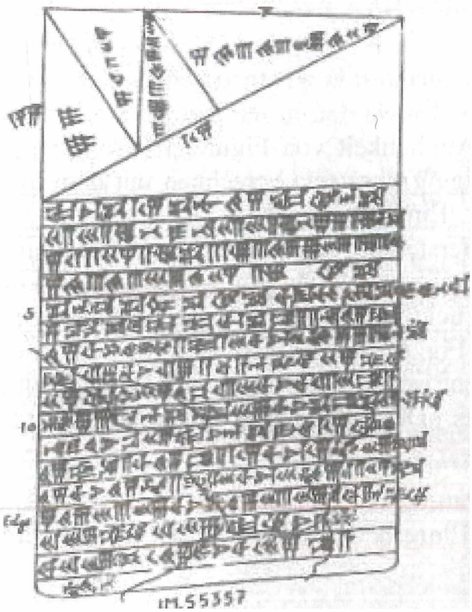

Fig. 6: Flächenverhältnis von ähnlichen Dreiecken auf einer Keilschrifttafel aus Tell Harmal (*Gericke, H. 2004, 22*)

5.5 Die Geometrie der Ägypter

5.5.1 Auch die Geometrie der Ägypter (*Vogel, K. 1959; Gericke, H. 2004; Lehmann, J. 1994; Hoffmann, J.E. 1963*) ist noch keine formale Theorie geometrischer Formen um ihrer selbst willen. Auch sie ist eine auf das tägliche Leben ausgerichtete praktische Geometrie zur Lösung von Alltagsproblemen. Längen, Flächen, Rauminhalte sind zu messen und zu berechnen, Richtungen sind zu bestimmen, rechte Winkel und bestimmte Neigungswinkel sind zu konstruieren, wenn es z.B. darum ging, Haus- und Tempelwände oder Pyramiden zu bauen. Nach den Überflutungen des Landes durch den Nil waren die Grenzen der Felder durch Landmesser neu zu bestimmen. All dies erforderte, dass gewisse Werkzeuge zur Verfügung standen, Messseil, Fluchtstäbe, Setzwaagen, Visierstäbe und weiter, dass Formeln zur Berechnung entwickelt waren, die freilich die gesuchten Werte oft nur näherungsweise zu berechnen gestatteten (*Vogel, K. 1958, 59*).

Zur Projektierung von Bauformen mussten Pläne erstellt werden. Dies geschah durch die Darstellung räumlicher Gebilde in Orthogonalprojektion. Die Gegenstände wurden teils im Grundriß, teils im Aufriß meist in quadratische Gitternetze eingebettet (Fig. 7). Rechtecke, Dreiecke, Trapeze in verschiedener Lage waren dabei die grundlegenden Figuren. Neben Werkskizzen sind auf Papyri auch maßstabsgerechte Zeichnungen erhalten.

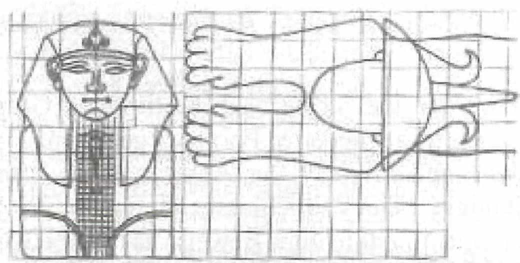

Fig. 7: Werkzeichnung einer Sphinx im Aufriß und Grundriß auf einem Papyrus (*Lehmann, J. 1994, 37*).

5.5.2 Die Grundfigur der ägyptischen Geometrie ist das Rechteck. Seine Flächenformel als „Länge mal Breite“ war bekannt. In den Texten kommen u.a. vor das rechtwinklige Dreieck, das gleichschenklige Dreieck, das gleichschenklige Trapez. Für allgemeine Vierecke und die Kreisberechnung gibt es Näherungsformeln. Auch Körperinhalte von Würfel, Quader, Zylinder und Pyramide wurden berechnet. Das Glanzstück der ägyptischen Geometrie war die Formel zur Berechnung des quadratischen Pyramidenstumpfs.

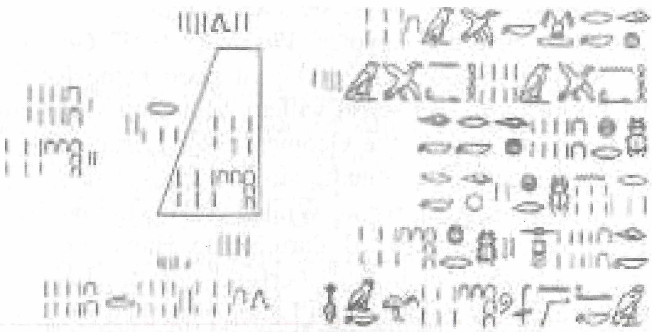

Fig. 8: Berechnung des Pyramidenstumpfes aus dem Moskauer Papyrus
(*Lehmann, J. 1994, 33*)

5.5.3 Die Geometrie der Ägypter war wie die der Babylonier der Alltagspraxis verbunden. Dies bezeugen wieder die Fachwörter für die verschiedenen geometrischen Formen (Begriffe): Die Fläche heißt „Acker“, Rechteck und Kreis sind ein „viereckiges“ bzw. ein „rundes Feld“. Das Dreieck ist das „Gespitzte“, das Trapez das „Abgehackte“, Zylinder und Quader sind in der Sprache der Ägypter runde bzw. viereckige „Behälter“.

5.5.4 Wenn auch die Geometrie in Ägypten noch keine wissenschaftliche Geometrie um ihrer selbst willen war, so stellt sie doch eine Vorstufe auf dem Weg zur reinen Mathematik dar: Es gibt *Phantasieaufgaben*, es gibt *Rätselprobleme*.

Im Papyrus Rhind werden die Stoffe nach bestimmten Gruppen eingeteilt und die Einzelaufgaben in gegliederter Form vorgetragen: *Problemstellung, Ansatz, Durchführung* und *Probe.*[10] Der Ägypter fühlte offenbar die Notwendigkeit, die Richtigkeit eines Ergebnisses durch eine Probe zu überprüfen und hatte damit eine Vorstufe zum Beweis, gar zum euklidischen Schema realisiert. In dieselbe Richtung zielt, dass die Ägypter Probleme zuweilen auf bereits bekannte, einfachere Probleme und deren Lösungen zurückführten.

5.5.5 Auch in Ägypten gab es bereits Schulen, in denen die mathematischen Stoffe und Methoden unterrichtet wurden.

[10] Das ist in den alten chinesischen Rechenbüchern nicht anders als viel später noch bei uns, etwa in den Büchern des Adam Ries (*Fischer, W. 2001, 235ff.*).

6. Die Geometrie als Wissenschaft

6.1 Thales von Milet

Die Mathematik und mit ihr die Geometrie als Wissenschaft hebt an bei den ionischen Philosophen in Griechenland, bei den Vorsokratikern. Thales von Milet (um 600 v. Chr.) gilt gemeinhin als Begründer der Philosophie und auch als Begründer der Mathematik als Wissenschaft (*Mittelstraß, J. 1988; Hoffmann, J. 1963; Gericke, H. 2004*).

In jungen Jahren brach er zu einer langen Reise nach Ägypten und in den Mittleren Orient auf, wo er von den Priestern alles erlernte, was man damals über Astronomie, die Mathematik und die Navigationskunst wusste. Für uns bedeutsam ist, dass Thales erstmals die Formulierung einiger elementargeometrischer Sätze zugeschrieben wird. Diese Sätze sind aus dem Schulunterricht wohlbekannt:

(1) Der Kreis wird durch seinen Durchmesser halbiert.

(2) Die Scheitelwinkel sich schneidender Geraden sind gleich.

(3) Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.

(4) Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen in allen Stücken überein.

(5) Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.[11]

„Unabhängig von der schwierigen Frage der Verlässlichkeit der Thales-Überlieferung, wobei diese Überlieferung immerhin bis ins 5. vorchristliche Jahrhundert zurückreicht und sich für eine Frühdatierung dieser Sätze gute Gründe beibringen lassen, ist an diesen Sätzen bemerkenswert, dass sie keinen besonderen Problemstellungen Rechnung tragen, sondern ganz allgemein gewissen Eigenschaften von Figuren gelten“ (*Mittelstraß, J. 1988, 11*). Es handelt sich also erstmals um Sätze, die sich nicht auf Sonderfälle vorgelegter Figuren beziehen, die vielmehr allgemein alle möglichen Figuren des jeweils angesprochenen Typs betreffen; es handelt sich um Allaussagen.

Damit ist erstmals der Weg von der „praktischen“ empirischen vorgriechischen Geometrie in Babylon und Ägypten zur „theoretischen“ Geometrie beschritten. In diesem Zusammenhang ist weiter besonders bedeutsam, dass berichtet wird, dass Thales seine Sätze „bewiesen“ habe. Noch war die Geometrie als Wissenschaft logikfrei. Dennoch muß Thales seine Sätze nicht

[11] *J. Mittelstraß* nach Procli Diadochi in Primum Euclidis elementorum librum commentarii, hg. *G. Friedlein, Leipzig 1873, 157, 10-13.*

nur in Allgemeinheit formuliert haben; er hat sie offenbar mit Symmetriebetrachtungen begründet.

6.2 Euklids „Elemente“

Die von Thales angestoßene Entwicklung setzt sich fort und findet einen gewissen Abschluß in den „Elementen“ des Euklid (365? – 300? v. Chr.), in denen er das Wissen seiner Vorgänger und seiner Zeit zusammenfasst und logisch systematisiert.

Die „Elemente“ (um 325 v. Chr.) verraten die Hand eines an der aristotelischen Logik geschulten Denkens. Der Stoff wird in 13 Büchern vorgetragen, davon sind die ersten 6 Bücher der Planimetrie gewidmet. Die Gegenstände werden ohne Bezug auf praktische Bedürfnisse und Anwendungsmöglichkeiten abgehandelt. Im Rahmen der Geometrie des Euklid werden die Begriffe auf *explizit definierte Grundbegriffe* wie Punkt, Linie, Fläche, Winkel, Grenze, Figur usw. zurückgeführt, die *Sätze* werden aus (unbewiesenen) *Grundsätzen* (*Axiomen* und *Postulaten*) bzw. aus schon bewiesenen Sätzen abgeleitet. Euklid leitet damit eine neue Phase mathematischen Denkens ein. Mit ihm beginnt die axiomatisch-deduktive Mathematik (*Euklid, hg. Thaer, C. 1975*).

6.3 Die nach-euklidischen Geometrien

6.3.1 Die Geometrie hat sich seit Euklid in vielfacher Weise entwickelt; dies betrifft auch die Anschauungen und Eigenschaften von Raumformen und von Formen im Raum – einschließlich der Möglichkeit ihrer Anwendungen im Alltag, in Wissenschaft und Technik.

Besonders in den beiden letzten Jahrhunderten ist die Entwicklung der Geometrie stürmisch kumuliert. Das Gesamtgebiet der Geometrie ist heute in einem kurzen Abriß nicht mehr darzustellen. Zu vielfältig ist das Theoriengesamt der Geometrie, zu umfangreich und spezialisiert die einzelnen Teilgebiete, so dass man heute nicht mehr angemessen von „der“ Geometrie als einem wohlumrissenen Gesamtgebiet (Wissensgesamt) sprechen kann.

Grob gesprochen können wir drei *Entwicklungslinien* unterscheiden:

6.3.2 Im Bereich der *euklidischen Geometrie* wurden im Verlauf der Jahrhunderte viele neue Begriffe definiert, viele neue Sätze gefunden, wurde damit die Reichweite des euklidischen Axiomensystems ausgelotet und erweitert.

6.3.3 Zum anderen sind durch Abänderung der Axiome, durch Einführung völlig neuer Begriffe und Aspekte nach Euklid verschiedenste andere Geometrien entstanden. Sie unterscheiden sich also in ihrem Axiomensystem und damit in ihrem Aufbau (Begriffs- und Satzgefüge) von der euklidischen Geometrie (*Karzel, H. / Kroll, H.J. 1988*). Wir sprechen hier generell von *„nach-euklidischen Geometrien“*, weil die Bezeichnung *„nichteuklidische Geometrie“* einem besonderen Typ von Geometrien, nämlich der hyperbolischen und elliptischen Geometrie und ihren Modellen vorbehalten ist.

Nennen wir stichwortartig einige Teilgebiete der *„nach-euklidischen“ Geometrie,* die sich in den letzten Jahrhunderten entwickelt haben:

Im 17. Jahrhundert wurde von dem Franzosen R. Descartes (1596-1650) die *„analytische Geometrie“* geschaffen. Neben den „synthetischen“ Formen der Geometrie liefert die analytische Geometrie eine besondere Darstellungsweise geometrischer Gebilde. Sie führt Geometrie und Algebra zusammen. Punkte werden dort in Bezug auf ein Koordinatensystem durch Zahlen, Zahlenpaare, Zahlentripel, ... Zahlen-n-Tupel repräsentiert. Geraden werden durch lineare Gleichungen (Funktionen) dargestellt, der Kreis und die Kegelschnitte durch quadratische Gleichungen (Funktionen) usw.. Der Schnitt einer Geraden mit einem Kreis wird durch die Lösung eines Gleichungssystems bestehend aus einer (entsprechenden) linearen Gleichung und einer (entsprechenden) quadratischen Gleichung gewonnen. Die analytische Geometrie hat seit ihrer Begründung durch Descartes, Fermat u.a. eine eigenständige Bedeutung erlangt. Die moderne Mathematik und mit ihr die Anwendung auf naturwissenschaftliche und technische Probleme wäre ohne sie nicht denkbar.

Um die Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert entstand als eine konstruktive Form der Geometrie die *„darstellende Geometrie“*. Sie wurde begründet von G. Monge (1746-1818). Sie beschäftigt sich mit der Aufgabe, ebene Bilder von räumlichen Gegenständen zu zeichnen bzw. zu konstruieren. Bei der Erstellung von Bauzeichnungen in der Architektur, beim Entwurf von technischen Geräten und in der bildenden Kunst findet sie vielfältige Anwendung. Gewisse Formen der Parallel- und Zentralperspektive finden sich bereits bei den Ägyptern (vgl. 5.5.1, Fig. 7) und bei den Griechen.

J.V. Poncelet (1788-1867) hat zunächst als Weiterführung der darstellenden Geometrie die *„projektive Geometrie“* geschaffen, die dann 1847 durch von Staudt in seiner „Geometrie der Lage“ ausgebaut und als Inzidenzgeometrie ausgeformt wurde. Die projektive Geometrie ist die Geometrie des „projektiven Raumes“, in dem z.B. sog. „uneigentliche Punkte“ als Schnittpunkte von Parallelen im unendlich Fernen eingeführt werden. Neben diese „*synthetische projektive Geometrie*“ trat um 1834 die „*analytische projektive Geometrie*“, die von Plücker im Anschluß an Möbius (1790-1868) initiierte.

Im Anschluß an die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Leibniz (1646-1716) und Newton (1643-1727) im 17. Jahrhundert entwickelte sich ein neuer Zweig der analytischen Geometrie, die „*Differentialgeometrie*“. Als ihr eigentlicher Begründer wird Gauss angesehen. Zunächst wurden mit den Methoden der Differential- und Integralrechnung Kurven untersucht und charakterisiert. Gauss entwickelte dann die Theorie der Flächen. Er hat insbesondere die Eigenschaften einer Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes behandelt, die unabhängig vom umgebenden Raum sind, sich also durch Messen auf der Fläche selbst feststellen lassen. Die Differentialgeometrie hat sich seither, und das heißt bis in die Gegenwart, weiter entwickelt, ist zu einem Gebiet der Geometrie mit vielen Teilgebieten geworden. Die Anwendungen in der Physik bis hin zur Relativitätstheorie und in der Technik sind mannigfach (vgl. 6.4.2.).

6.3.4 Eine andere Entwicklungsrichtung der Geometrie kam dadurch zustande, dass Axiomensysteme der verschiedenen Geometrien große Schwächen aufwiesen, die den zunehmend strengeren begrifflichen und methodischen Gesichtspunkten, die sich im 19. Jahrhundert in der Besinnung auf die Grundlagen der Mathematik ergeben hatten, nicht mehr standhielten. So hatte die euklidische Axiomatik in ihrer engen Bindung an die Anschaulichkeit zunehmend zu Kritik Anlaß gegeben.

Um zwei Beispiele zu geben: Euklid definiert explizit „*Ein Punkt ist das, dessen Teil nichts ist*“ oder „*Eine Linie ist eine breitenlose Länge*“. Das sind freilich keine Definitionen im eigentlichen Sinne. Sie sind nicht zirkelfrei. Um von einem „breitenlosen“ Gebilde zu sprechen, bedarf man vorgängig schon des Begriffes „Länge“, der bei Euklid nicht definiert ist.

In der Anschauung steckt also eine große Gefahr zu Fehlschlüssen. Daher ist eine Rückbesinnung auf die Grundlagen und ihre korrekte Formulierung immer von neuem eine zwingende Notwendigkeit, ist neben der Entstehung neuer Geometrien die Frage nach der *logischen Begründung der Geometrie(n)* zu einem eigenen Forschungsschwerpunkt geworden. Diese Bemühungen fanden erst 1899 durch Hilbert einen gewissen Abschluß. Hilbert liefert insbesondere in seinem Buch „Grundlagen der Geometrie“ eine einwandfreie Begründung der Geometrie, die den modernen Anforderungen an logische Strenge genügte (*Hilbert, D. 1899, 1972; Toepell, M. 1986*). Zugleich führte sein Werk zu einer für die gesamte Mathematik beispielgebenden Form der Axiomatik als formalem System. Die Grundbegriffe werden in solchen Systemen nicht mehr explizit definiert, sondern – wie die Figuren in einem Spiel durch die Spielregeln – implizit durch die Gesamtheit der Axiome, in denen sie bzw. durch die sie fungieren. Nicht nur, dass mit Hilbert die euklidische Geometrie und ihr Fundament ihre widerspruchsfreie Begründung (Fundierung) fanden: Im Anschluß daran sind weitere Aspekte der Geometrie in neuen Teildisziplinen erschlossen worden (*Karzel, K. / Kroll, H-J. 1988*).

6.3.5 Im Zusammenhang mit dem Begründungsproblem der Geometrie waren schon zuvor im 18. und 19. Jahrhundert die „*nichteuklidischen Geometrien*“ entstanden.

6.4 Nichteuklidische Geometrien

6.4.1 Im Verlaufe der Jahrhunderte bemühte man sich u.a. um die Frage, ob die Axiome des Euklid *voneinander unabhängig*, ob gewisse dieser Axiome aus anderen ableitbar sind. Aus dem erfolglosen Bemühen, den Aussagegehalt des sog. „Parallelenaxioms“ aus den übrigen Axiomen zu beweisen, erwuchsen schließlich die sog. *„nichteuklidischen Geometrien“*.

Das für die euklidische Geometrie zentrale *Parallelenaxiom* besagt (in unserer heutigen Sprechweise): *In jeder Ebene gibt es zu jeder Geraden durch jeden Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, genau eine Parallele* (Fig. 9).

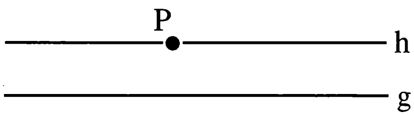

Fig. 9: Genau eine Parallele h zu einer Geraden g durch einen Punkt P außerhalb von g.

Durch Abänderung dieses Axioms entstanden im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts die nichteuklidischen Geometrien, (1) die *„hyperbolische Geometrie“* (Bolyai 1829, Lobatschevski 1830) und (2) die *„elliptische Geometrie“* (Gauss, Riemann). Man forderte: (1) *In einer Ebene gibt es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mindestens zwei Parallelen* bzw. (2) *In einer Ebene gibt es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden keine Parallele.*

Diese Forderungen stehen, wie man fand, nicht im Widerspruch zu den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie, führen aber zu anderen Formen der Geometrie. Dabei muß man freilich gewisse Begriffe anders fassen, so können z.B. die Begriffe „Ebene“ oder „Gerade“ nicht in der uns vertrauten

Form wörtlich aus der euklidischen Geometrie übernommen werden. Wir sprechen daher von *„hyperbolischen“* bzw. *„elliptischen Ebenen“*. Statt von Geraden sprechen wir von *„Pseudogeraden“* und verstehen darunter Linien (Kurven), die in der betreffenden Raumform die gleichen Eigenschaften haben, wie die Geraden in der euklidischen Ebene, nämlich zwei Punkte auf kürzestem Weg zu verbinden und weder nach links noch nach rechts auszuweichen. [12]

Im Zusammenhang mit den nichteuklidischen Geometrien stellt sich uns die Frage nach *Modellen* für solche Geometrien. Zur Beantwortung verbleiben wir im Bereich der zweidimensionalen Geometrien.

Ein Modell für die *elliptische Geometrie* ist die *„Kugeloberfläche“* (Fig.10a). Während die euklidische Ebene die konstante Krümmung 0 hat, ist die Kugeloberfläche eine Fläche mit konstanter positiver Krümmung. Die „Punkte“ in diesem Modell sind (miteinander identifizierte) diametrale Punktepaare. Die „Pseudogeraden“ auf der Kugelfläche sind die Großkreise, d.h. diejenigen Kreise, deren Mittelpunkt im Mittelpunkt der Kugel liegt. Da sich zwei beliebige Großkreise stets in einem Paar von Diametralpunkten schneiden, gibt es keine Parallelen.

Ein Modell für die *hyperbolische Geometrie* ist die sog. *„Pseudosphäre“* (Fig.10b). Sie ist eine Fläche mit konstanter negativer Krümmung und entsteht aus der sog. „Hundekurve“ (Traktrix) als Drehfläche. Für Einzelheiten verweisen wir auf die Literatur (*Lenz, H. 1966, 138*).

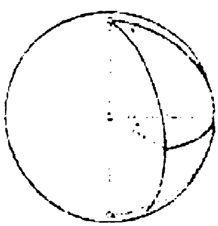

Fig.10a: Kugel

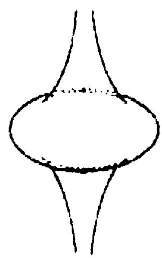

Fig.10b: Pseudosphäre

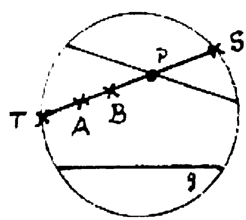

Fig.10c: Kleinsches Modell

Ein anderes Modell für die hyperbolische Ebene ist das sog. *Kleinsche Modell* (Fig.10c). Es besteht aus den inneren Punkten einer Kreisscheibe. Die (Pseudo-)Geraden sind die Kreissehnen. Hier sieht man leicht, dass es zu

[12] Sie werden von einem Wagen mit parallelen Achsen durchfahren, also ohne die Deichsel einzuschlagen.

jeder Geraden durch einen Punkt außerhalb mehrere nichtschneidende Gerade (Parallelen) gibt. Das Längenmaß für Strecken AB wird über das Doppelverhältnis DV(TSAB) gewonnen, wobei T, S die Schnittpunkte der Geraden g(AB) mit dem Kreis sind (Fig.10c).

Schließlich: Während in der euklidischen Ebene die Winkelsumme eines Dreiecks stets 180^0 beträgt, ist die Winkelsumme des Dreiecks in der elliptischen Geometrie größer als 180^0 [13], in der hyperbolischen Geometrie kleiner als 180^0. [14]

6.4.2 Die Differentialgeometrie (6.3.3.) ist in verschiedenster Weise ausgebaut worden. Zu nennen ist hier insbesondere die Riemannsche Geometrie (Riemann 1854). Nach seinem Ansatz wird insbesondere deutlich, dass es vielerlei verschiedenartige nichteuklidische Geometrien gibt. Die Riemannsche Geometrie ist durch Einstein in der Physik zum mathematischen Fundament seiner allgemeinen Relativitätstheorie geworden. In ihr sind Raum und Zeit nicht voneinander unabhängige „absolute" Wesenheiten – gewissermaßen als Gefäß der Dinge und Ereignisse wie in der klassischen Physik bei Newton –, sie werden nunmehr in einer vierdimensionalen (Raum-Zeit-) Welt (Minkowski-Raum) in einer nichteuklidischen Struktur zusammengeschlossen. Dabei bestimmt die Anwesenheit von Materie die Geometrie des Weltraums. In der neuen Theorie verliert insbesondere die Gravitation ihre Bedeutung als Kraft im üblichen Sinne. An ihre Stelle tritt die „Krümmung" des Raum-Zeit-Kontinuums. Die Krümmung der Raumzeit wird durch die Massen bestimmt, die in ihren Bewegungen dieser gekrümmten (vierdimensionalen) Raumzeitstruktur folgen.

6.5 Die Topologie

6.5.1 Ein anderer Typ von Geometrie ist die *Topologie*. Sie handelt von den Zusammenhangseigenschaften und der Theorie der Umgebungen bei räumlichen Gebilden. In der euklidischen Geometrie sind Figuren „äquivalent", wenn sie *kongruent* sind, wenn sie sich durch *„starre Bewegungen"* gegenseitig zur Deckung bringen lassen. Die geometrischen Eigenschaften sind also diejenigen, die jede zu ihr kongruente Figur besitzt.

---

[13] Man denke sich ein Kugeldreieck, das durch den Schnitt zweier Großkreisbögen durch den Nordpol (Längenkreise) mit dem Äquator entsteht. Die Kreisbögen bilden mit dem Äquator je einen rechten Winkel. Zur Winkelsumme im Kreisbogendreieck kommt aber noch der Winkel hinzu, den die beiden Kreisbögen am Nordpol miteinander einschließen.

[14] Im Extremfall sogar 0^0.

In der Topologie dagegen sind die erlaubten Bewegungen *„elastische Bewegungen"*. Man nennt daher die Topologie auch „Gummigeometrie". Man darf dort also eine Figur in beliebiger Weise dehnen, stauchen, solange man sie nur nicht zerschneidet oder getrennte Stücke miteinander verklebt. Figuren sind in der Topologie äquivalent, wenn sie durch umkehrbar eindeutige und umkehrbar stetige Deformationen auseinander hervorgehen, wenn sie *„homöomorph"* sind.

Die Topologie setzt historisch an bei Leonhard Euler (1707–1783) mit der sog. *„kombinatorischen Topologie"* und schreitet von dort bis in die Gegenwart fort zur *„algebraischen Topologie"* und zur *„mengentheoretischen Topologie"* der *„topologischen Räume"*. Sie ist eine heute vielfältig in Unterdisziplinen gegliederte Wissenschaft.

6.5.2 Nennen wir einige einfache, elementare topologische Beziehungen:
(1) Als Beispiele für Zusammenhangsverhältnisse betrachten wir zunächst die *offenen* und *geschlossenen Gebilde* – im einfachsten Fall: *offene* und *geschlossene Fäden.* Markiert man auf einem offenen bzw. geschlossenen Faden einzelne Punkte, so stellt man fest, dass der offene Faden immer einen Punkt p mehr hat als Zwischenstücke z, d.h. $p - z = 1$, während beim geschlossenen Faden beide Anzahlen in jedem Falle gleich sind, d.h. $p - z = 0$. Bei der Achterschleife ergibt sich immer $p - z = -1$ (Fig.11a, b, c).

Fig.11a: Offener Faden

Fig.11b: Geschlossener Faden

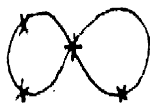

Fig.11c: Achterschleife

Zu einer weiteren Charakterisierung der Zusammenhangsverhältnisse kommen wir, wenn wir die Anzahl der Schnitte betrachten, die man legen kann, bis das Gebilde in zwei Teile zerfällt (Fig. 12a, b, c).

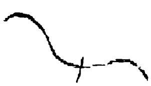

Fig.12a

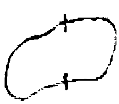

Fig.12b

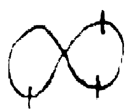

Fig.12c

Beim offenen Faden genügt ein Schnitt, um ihn in zwei Teile zu zerlegen, beim (einfach) geschlossenen Faden muß man zwei Schnitte legen und bei der Achterschleife kann man zwei Schnitte so legen, dass sie noch nicht zerfällt, bei drei Schnitten aber zerfällt sie in jedem Falle. Entsprechend nennt man die Gebilde *einfach, zweifach, dreifach zusammenhängend.* Weiter kann man festellen, dass der offene Faden kein „Loch“ enthält, während der geschlossene Faden ein Loch, die Achterschleife zwei Löcher umschliesst. Entsprechend kann man *n-fach zusammenhängende Gebilde* (n= 1,2,3,4,...) mit entsprechend mehr Löchern bilden und charakterisieren.

(2) Die genannten Beziehungen stehen im Zusammenhang mit dem *„Eulerschen Polyedersatz“*, in dem für Vielecke (Polygone) und Vielflächner (Polyeder) die sog. *„Eulersche Charakteristik“* bestimmt wird:

χ = Anzahl der Ecken e - Anzahl der Kanten k + Anzahl der Flächen f .

Im einfachsten Fall eines (zweidimensionalen) Polygonnetzes gilt – unabhängig davon, wie es in seinem Inneren durch Zwischenstrecken gegliedert wird: $\chi = 1$. Im Falle eines dreidimensionalen Polyeders (z.B. eines Tetraeders) gilt: $\chi = 2$ (Fig.13 a,b).

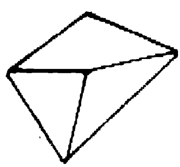

Fig. 13a: 5 – 7 + 3 = 1

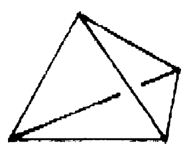

Fig. 13b: 4 – 6 + 4 = 2

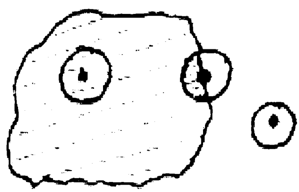

Fig. 14

Die kombinatorische Topologie hat sich im vergangenen Jahrhundert unter Einbeziehung algebraischer Methoden – insbesondere des Gruppenbegriffs – weiterentwickelt zur *„algebraischen Topologie“*, u.a. mit den Teildisziplinen *„Homotopie-, Homologie-, Cohomologietheorie“*.

6.5.3 An der Wende des 19. zum 20. Jahrhundert entstand im Anschluß an Georg Cantors „Mengenlehre" ein neuer Zweig der Topologie, die sog. *„mengentheoretische Topologie"*, die *„Theorie der topologischen Räume"*. Ihr zentraler Begriff ist der der *„Umgebung (eines Punktes)"* und der Umgebungssysteme von Punkten im Raum. Auch hier präsentieren wir nur ein einfaches Beispiel. Gegeben sei ein berandetes Flächenstück (Fig.14).

Worin unterscheiden sich Punkte im *„Inneren*, im *„Äußeren"* von den *„Randpunkten"*? Jeder innere Punkt besitzt (mindestens) eine Umgebung, deren Punkte sämtlich zur Menge der Punkte im Flächenstück gehören; jeder äußere Punkt hat (mindestens) eine Umgebung, deren sämtliche Punkte nicht zum Flächenstück gehören; für die Randpunkte gilt, dass in jeder Umgebung Punkte aus dem Inneren und Punkte aus dem Äußeren liegen.

6.5.4 Auch die Theorie der topologischen Räume ist heute in viele Unterdisziplinen gegliedert. Eine grundlegende Rolle spielt sie in der Analysis, etwa bei der Definition des „Grenzwertbegriffes" und der „Stetigkeit" von Funktionen.

Erwähnen wir noch die topologische Disziplin der sog. *„Dimensionstheorie"*. Immer schon hatte man von ein-, zwei-, drei- und mehrdimensionalen Gebilden und Räumen gesprochen. Erst mit der Dimensionstheorie wurde es in den zwanziger und dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts möglich, den Begriff der *„Dimension"* eines geometrischen Gebildes oder Raumes präzise zu erfassen. Erst seit 1928 kann man z.B. den Begriff der „Kurve" als eines eindimensionalen Gebildes genau charakterisieren.

7. Schlußbemerkung

Im Vorstehenden haben wir die Entwicklung der Raumerfahrung und der Raumvorstellung in der Menschheitsgeschichte von der Höhlenmalerei bis hin zu den modernen Begrifflichkeiten der mathematischen Geometrie verfolgt. Im Rahmen eines kurzen Vortrags mussten dabei viele Einzelheiten ausgespart bleiben. Manche Aspekte blieben unberücksichtigt, so die Welt des Fernen Ostens. Mit den Bemerkungen in 6.4.2. und 6.5 haben wir immerhin die Thematik der Vorbemerkung wieder aufgegriffen, gewisse Aspekte des Raumbegriffs, nämlich die des mathematischen Raumes, des physischen Raumes und des Anschauungsraumes.

8. Literatur

CONARD, N.J. / KÖLBL, S. / SCHÜRLE, W. (2005): Vom Neandertaler zum modernen Menschen. – Thorbecke. Ostfildern.

DAMEROW, P. / ENGLUND, K.E. / NISSEN, H.J. (1988): Die ersten Zahldarstellungen und die Entwicklung des Zahlbegriffs. – In: Spektrum der Wissenschaft 3, 46-57.

EUKLID (1975, Hg. C. Thaer): Die Elemente. – Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt.

FISCHER, W. L. (1973): Äquivalenz- und Toleranzstrukturen in der Linguistik. – Linguistische Reihe, Bd.15. Max Hueber Verlag. München.

FISCHER, W.L. (1982): Die strukturelle Mathematik als Versuch der Bewältigung der Wissenskumulation im Bereich der Mathematik. – In: Päd.Rundschau 36.Jg., H.4. Hans Richarz. St.Augustin, 347-357.

FISCHER, W.L. (2001): Mathematica Perennis – Historical Topics as Indicators of Fundamentals in Mathematics Education. – In: Proceedings of the 4th International Symposion on the History of Mathematics and Mathematical Education Using Chinese Characters. Maebashi Institute of Technology. Maebashi/Japan, 231-250.

GERICKE, H. (2004): Mathematik in Antike, Orient und Abendland – Fourier. Wiesbaden.

HILBERT, D. (1899, 14 1999 Hg. M.-M. Toepell): Grundlagen der Geometrie. – Teubner. Stuttgart/Leipzig.

HOFFMANN, J.E. (1963): Geschichte der Mathematik I. – Sammlung Göschen 226. De Gruyter. Berlin.

KARZEL, H. / KROLL, H.J. (1988): Geschichte der Geometrie. – Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt.

KÖNIG, M.E.P. (1973): Am Anfang der Kultur. Die Zeichensprache des frühen Menschen. – Mann. Berlin.

LEHMANN, J. (1994): So rechneten die Ägypter und Babylonier. – Urania. Leipzig.

LENZ, H. (1967): Nichteuklidische Geometrie. – Bibliographisches Institut. Mannheim.

LORENZ, K. (1973): Die Rückseite des Spiegels. – Piper. München.

MAHLSTEDT, I. (2004): Die religiöse Welt der Jungsteinzeit. – Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt.

McMANN, J. (1980): Rätsel der Steinzeit. Zauberzeichen und Symbole in den Felsritzungen. – Lübbe. Bergisch Gladbach.

MESCHKOWSKI, H. (1966): Grundlagen der Euklidischen Geometrie. – Bibliographisches Institut. Mannheim.

MITTELSTRASS, J. (1998): Thales – die Erfindung von Wissenschaft bei den Griechen. – Vortrag Nürnberg.
TOEPELL, M.-M. (1986): Über die Entstehung von David Hilbert "Grundlagen der Geometrie". – Vandenhoeck & Rupprecht. Göttingen.
VOGEL, K. (1958): Vorgriechische Mathematik I – Vorgeschichte und Ägypten. – Schroedel. Hannover / Schöningh. Paderborn.
VOGEL, K. (1959): Vorgriechische Mathematik II – Die Mathematik der Babylonier. – Schroedel. Hannover / Schöningh. Paderborn.
ZICK, M. (2005): Die ersten Hieroglyphen. – In: Bild der Wissenschaft, H.4, 84-89.