Klaus Nagel

Der Raum in der modernen Mathematik

Sucht man im Internet nach den Begriffen Mathematik und Raum, so erhält man viele Hinweise auf Seminare, die in einem bestimmten Raum eines Mathematischen Institutes stattfinden. Das ist nicht, was wir hier suchen; es zeigt nur, dass im Deutschen das Wort Raum auch ein Sammelbegriff ist für Zimmer, Säle, Hallen, Kammern und vieles mehr. Die andere Bedeutung zeigt sich in Ausdrücken wie Weltraum, Zwischenraum, freier Raum und Anschauungsraum; im Englischen wird hier deutlicher zwischen *space* und *room* unterschieden. Für beide Auffassungen von Raum gab es Beispiele bei diesen Matreier Gesprächen. Das Register eines mathematischen Handbuchs *(Behnke, H. 1972)* zeigt eine große Menge unterschiedlicher Räume, wie etwa

- Vektorraum
- Topologischer Raum
- Funktionenraum
- Metrischer Raum
- Affiner Raum
- Maßraum
- Kompakter Raum
- Lokalkompakter Raum
- Banach Raum
- Hilbert Raum
- Prähilbert-Raum
- Wahrscheinlichkeitsraum
  und viele andere.

Da stellt sich die Frage: Was haben diese Begriffe mit dem Raum unserer Anschauung zu tun? Der Anschauungsraum ist uns vom Beginn unseres Lebens an vertraut, wir ertasten und erblicken ihn und er ist uns so selbstverständlich, dass uns eine Definition schwer fällt. Im Beitrag über Hierarchien in der Mathematik (*Nagel, K. 2005*) wurde erklärt, dass die moderne Mathematik ihre Aufgabe in der Erforschung von Strukturen sieht, dass nicht das einzelne Element interessiert, sondern die Beziehungen und Verknüpfungen zwischen ihnen. Am Beispiel der Zahlen war es entscheidend, dass die Verknüpfungen Addition und Multiplikationen gegeben sind, die einem Zahlenpaar eine andere Zahl zuordnen, und dass diese Zuordnung nicht von der Reihenfolge abhängt:

$$\mathbf{a + b = b + a} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a * b = b * a.}$$

Aus solch elementaren Eigenschaften des Rechnens leiten sich Strukturen wie Gruppen, Ringe und Körper ab, denen man die Verwandtschaft mit den Zahlen oft nicht ansieht.

Neben Zählen und Rechnen bilden Geometrie und Raumlehre den zweiten Ursprung der Mathematik. Sie beschäftigen sich mit ebenen Figuren oder Körpern im Anschauungsraum, messen und stellen Gesetzmäßigkeiten fest. So, wie die Eigenschaften der natürlichen Zahlen viele der mathematischen Strukturen begründeten, so dienen auch die Eigenschaften des Anschauungsraumes zur Klassifizierung weiterer mathematischer Strukturen.

1. Eigenschaften des dreidimensionalen Raums unserer Anschauung

Volumen, Abstand, Dimension, Linearität, Unendlichkeit und Gleichartigkeit (Isotropie) sind einige Eigenschaften des Anschauungsraumes. Sie werden kurz erläutert und dann wird gezeigt, wie unterschiedliche Räume entstehen, je nachdem, welche dieser Eigenschaften gefordert werden oder auf welche man verzichtet.

***Volumen*:** Beschränkten Teilmengen lassen sich positive Zahlen als Maß oder Volumen zuordnen. Wenn zwei Mengen nichts Gemeinsames haben, dann erhält man das Maß der vereinigten Mengen durch Addition der beiden Teilvolumen.

***Abstand*:** Zwei Punkte im Raum haben einen Abstand. Das ist eine Zahl, die niemals negativ ist und nur zu Null wird, wenn die beiden Punkte gleich sind. Der Abstand zwischen den Punkten A und C ist nicht größer als die Summe der Abstände von A nach B und von B nach C. Dies ist die sogenannte Dreiecksungleichung, denn sie besagt, dass eine Dreiecksseite nicht länger ist als die Summe der beiden anderen.

***Dimension*:** Oben und unten, vorn und hinten, rechts und links, das sind die drei Richtungen – jeweils mit ihrer Gegenrichtung –, in denen wir uns im Raum bewegen können. Daher spricht man von drei Dimensionen. Drei Richtungen sind auch notwendig, um durch zusammengesetzte Bewegungen jeden Punkt des Raumes zu erreichen. Zwei Richtungen genügen nicht, mit ihnen bliebe man immer in einer Ebene. Bei vier Richtungen, wie etwa Nord, Ost, Nordost und Oben, wäre eine überflüssig, denn Nordost lässt sich aus Nord und Ost zusammensetzen.

***Linearität*:** Strecken lassen sich zusammensetzen. Die Summe zweier Strecken oder das Vielfache einer Strecke gehört wieder zum Raum. Das gilt auch für das Nullfache, es gibt daher einen Nullpunkt.

***Unendlichkeit*:** Der Raum hat in keiner Richtung ein Ende.

***Isotropie*:** Kein Ort des Raumes ist ausgezeichnet, überall herrschen die gleichen Verhältnisse. Wenn man eine geometrische Figur zeichnet oder ausmisst, dann spielt es keine Rolle, an welcher Stelle auf dem Papier oder im Raum das gemacht wird. Die Naturgesetze gelten überall in gleicher Weise.

2. Der Maßraum

Verlangt man nur, dass Volumen gemessen werden können, so erhält man den Maßraum. Gewisse Mengen, denen man ein Volumen oder Maß zuordnen kann, nennt man die messbaren Mengen. Das Maß ist eine nicht negative Zahl. Eine zusammengesetzte messbare Menge hat als Maß die Summe der Maße ihrer Teilmengen, vorausgesetzt die Teilmengen sind disjunkt. Dass diese Forderung nötig ist, zeigt ein Beispiel: Die Fläche von Russland und Europa ist nicht die Summe beider Flächen, denn so würde das europäische Russland doppelt gezählt. Die Maßtheorie ist heute die Basis der Integralrechnung.

Ein spezieller Maßraum ist der *Wahrscheinlichkeitsraum.* Seine Elemente sind die möglichen Ausgänge eines Versuchs oder eines Wahrscheinlichkeitsexperimentes. Das Maß nennt man in diesem Fall Wahrscheinlichkeit und die messbaren Mengen heißen Ereignisse. Ein spezieller Fall ist das sichere Ereignis, das den gesamten Wahrscheinlichkeitsraum umfasst. Man gibt ihm das Maß Eins. Tabelle 1 erläutert den Wahrscheinlichkeitsraum an einem Würfelexperiment:

1 1	**1 2**	**1 3**	**1 4**	**1 5**	**1 6 B**
2 1	**2 2**	**2 3**	**2 4**	**2 5**	**2 6 B**
3 1	**3 2**	**3 3**	**3 4**	**3 5**	**3 6 B**
4 1	**4 2**	**4 3**	**4 4**	**4 5**	**4 6 B**
5 1	**5 2**	**5 3**	**5 4**	**5 5**	**5 6 B**
6 1 A	**6 2 A**	**6 3 A**	**6 4 A**	**6 5 A**	**6 6 AB**

Tab 1: Würfeln mit zwei unterscheidbaren Würfeln

Die Liste zeigt die 36 möglichen Ausgänge des Experiments. Die gesamte Liste stellt das sichere Ereignis dar, denn irgendeiner der Einträge wird gewiss eintreten. Zusammen haben sie die Wahrscheinlichkeit Eins, jede Zelle die Wahrscheinlichkeit 1/36, wenn die Würfel korrekt sind. Das Ereignis A ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Würfel sechs Augen zeigt. Dieses Ereignis umfasst die unterste Zeile, seine Wahrscheinlichkeit beträgt 6/36 = 1/6. Entsprechend ist in der letzten Spalte das Ereignis mit B markiert, dass der zweite Würfel eine Sechs zeigt. Das gemeinsame Ereignis, dass mindestens eine Sechs fällt, ist nun aber nicht die Summe 1/6 + 1/6 = 1/3 = 12/36, sondern nur 11/36, weil der Doppelsechser, gekennzeichnet mit AB, nur einfach gezählt werden darf. Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik beruhen heute auf Maßtheorie.

3. Der Metrische Raum

Betont man den Abstand und das Messen von Entfernungen, so gelangt man zu metrischen Räumen. Auch diesen sieht man nicht unbedingt ihre Beziehung zum anschaulichen Raum an, obwohl eine wesentliche Eigenschaft einer Metrik weiter gilt, die Dreiecksungleichung. Der Abstand zweier Punkte P und Q ist eine nichtnegative Zahl d(P,Q) und es gilt:

- d(P,Q) ist nur gleich 0, wenn P und Q gleich sind.
- d(P,Q) ist kleiner oder gleich d(P,Z) + d(Z,Q) für beliebige Zwischenpunkte Z.

Das zeigt nachstehendes Beispiel aus der Kodierungstheorie. Der Raum bestehe aus 8-Bit-Schlüsseln für den Zeichenvorrat im Computer. Als Abstand zweier Schlüssel sei die Anzahl der unterschiedlichen Bits gewählt. In Tabelle 2 wird an den üblichen Schlüssen für die Buchstaben A, L und Z die Dreiecksungleichung demonstriert.

A	0	1	0	0	0	0	0	1
L	0	1	0	0	1	1	0	0
Z	0	1	0	1	1	0	1	0
d(A,L)=3	0	0	0	0	1	1	0	1
d(L,Z)=3	0	0	0	1	0	1	1	0
d(A,Z)=4	0	0	0	1	1	0	1	1

Tab. 2: Verschlüsselung der Buchstaben A, L und Z

Die ersten drei Zeilen zeigen die Verschlüsselungen, die letzten die abweichenden Bits der Paare A-L, L-Z und A-Z. Die Dreiecksungleichung ist erfüllt, denn die Summe zweier Abstände ist nie kleiner als der dritte Abstand.

Anders als im gewohnten Anschauungsraum können nur ganzzahlige und beschränkte Abstände vorkommen. Trotzdem lassen sich schon mit diesen rudimentären Eigenschaften einer Abstandsfunktion nützliche Erkenntnisse gewinnen.

4. Lineare Räume

Zu linearen Räumen gelangt man, wenn man fordert, dass zwischen den Elementen lineare Operationen möglich sind; das bedeutet, dass man zwei Elemente addieren kann oder dass man eines vervielfachen kann, jeweils mit einem Ergebnis, welches auch wieder im gleichen Raum liegt. Das gilt natürlich im Anschauungsraum; die Addition ist das Aneinanderfügen von Strecken, bei der Multiplikation werden Strecken um einen Faktor verlängert oder verkürzt. Ein anderes Beispiel sind physikalische Kräfte, die sich im Kräfteparallelogramm addieren oder um einen Faktor in der Stärke ändern, die Richtung aber beibehalten. Eine Kraft K lässt sich beschreiben durch ihre Teilkräfte x, y und z in den Richtungen der drei Dimensionen. Zur Addition zweier Kräfte K_1 und K_2 addiert man einfach die entsprechenden Komponenten. Beispiel:

$$K_1 = (\ 3,\ \ 6,\ \ 4) \qquad K_2 = (\ 1, -6, -2) \qquad K_1 + K_2 = (\ 4,\ \ 0,\ \ 2)$$

Räume dieser Art heißen auch Vektorräume. Das komponentenweise Vorgehen lässt sich auch anwenden, wenn die Dimension nicht drei ist. Die zweidimensionale Ebene ist uns geläufig, Dimensionen größer als drei sind schwer vorstellbar. Das folgende Beispiel soll zeigen, dass sogar unendlich viele Dimensionen Sinn ergeben können.

In den Matreier Gesprächen 1997 zum Thema Musik wurde bei den physikalischen Grundlagen (*Nagel, K. 1999*) gezeigt, dass eine Saite im Grundmodus in der Mitte am stärksten aus der Ruhelage ausgelenkt wird, sie hat dort einen Schwingungsbauch. Sie schwingt mit der Frequenz des Grundtons. Die Saite kann aber auch so angeregt werden, dass zwei, drei und so fort Schwingungsbäuche entstehen, die zugehörigen Frequenzen sind dann ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz, die sogenannten Obertöne des Grundtons. Bei einem bespielten Instrument erklingt ein ganzes Spektrum von Obertönen gleichzeitig.

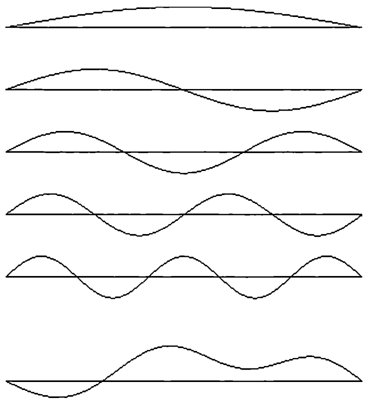


Abb. 1: Schwingende Saite

Ein Ton wird beschrieben durch eine Folge von Zahlen (a_1, a_2, a_3, a_4,.....), die Komponente a_i gibt die Stärke des i-ten Obertons an. Abbildung 1 zeigt die ersten fünf Obertöne und unten eine zusammengesetzte Schwingung. Die einfachen Schwingungen sind Sinuskurven. Wenn für praktische Zwecke auch die ersten zehn oder zwanzig Obertöne ausreichen, so hat man es prinzipiell doch mit einem unendlichdimensionalen Raum zu tun. Jede mögliche Form der Saitenschwingung ist ein Punkt dieses Raumes. Das Problem, die Teilschwingungen festzustellen, entspricht genau der Aufgabe, im Anschauungsraum die Koordinaten eines Ortes zu bestimmen. Schwingungsprobleme gibt es außer in der Akustik auch in der Elektrotechnik, Mechanik und vielen anderen Gebieten der Technik oder Physik. Die Zerlegung in Teilschwingungen geschieht mit Hilfe der Fourier-Analyse; ihre Interpretation als geometrisches Problem in einem linearen Raum vertieft das Verständnis und liefert Lösungsideen. Solche Funktionenräume spielen eine bedeutende Rolle in der modernen Mathematik und in der mathematischen Physik.

5. Der Topologische Raum

Fast alle Eigenschaften des Anschauungsraumes galten auch für den linearen Raum. Nun soll im Topologischen Raum auf fast alles verzichtet werden. Kein Volumen und kein Abstand braucht gemessen zu werden. Die einzige benutzte Raumeigenschaft ist die Nachbarschaft; zu den Punkten des Raums gibt es Umgebungen und die Topologie fragt nach Aussagen, die weiter gelten, wenn der Raum so verformt wird, dass Nachbarschaften erhalten bleiben.

Der Ausgangspunkt für topologische Fragen liegt in Königsberg. Im 18. Jahrhundert wurde dort die Frage diskutiert, ob es einen Weg gibt, der genau einmal über alle sieben Brücken führt, die zwei Inseln im Pregel untereinander und mit den beiden Ufern verbinden (Abbildung 2).

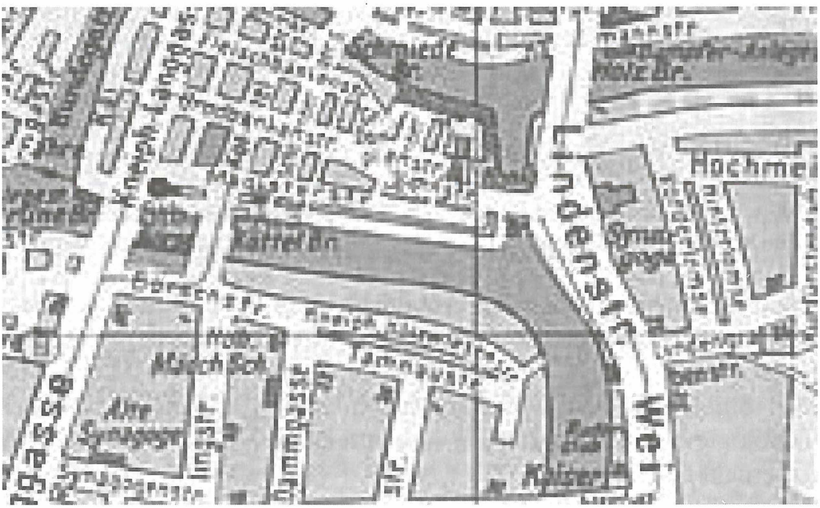


Abb. 2: Die Brücken von Königsberg

Der Mathematiker Leonard Euler hat das Problem gelöst, aber solch ein Genie ist dazu gar nicht nötig, es sei dem Leser als Rätsel überlassen. Man muss den Weg nicht wirklich gehen, man kann ihn auch auf dem Stadtplan suchen. Das liegt daran, dass sich ein Weg auf der Karte eindeutig in die Wirklichkeit übertragen lässt. Einer Lösung auf dem Plan entspräche auch ein korrekter Spaziergang und, wenn es keine Lösung in der Wirklichkeit gibt, dann auch nicht auf dem Stadtplan. Bei dieser Überlegung wurde gar nicht benutzt, dass der Stadtplan die Wirklichkeit maßstabsgetreu abbildet, dass also die Metrik erhalten bleibt. Den Weg kann man auch auf der schematischen Zeichnung (Abbildung 3) suchen oder sogar auf einem völlig verzerrten Plan (Abbildung 4). Denn es kommt nur darauf an, in welcher Reihenfolge die Brücken, Inseln und Ufer erreicht werden; die Reihenfolge ändert sich nicht, wenn bei den Verzerrungen alle Nachbarschaften erhalten bleiben.

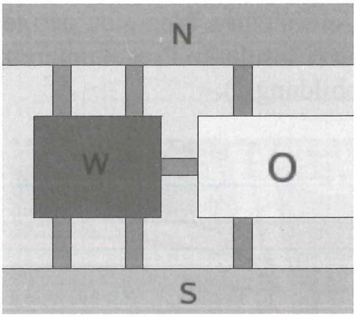


Abb. 3: Schematischer Plan der Brücken von Königsberg

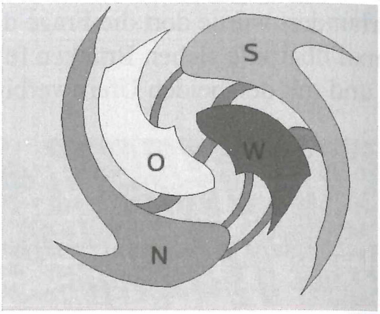


Abb. 4: Verzerrter Plan der Brücken von Königsberg

Die gleiche Transformation, die Abbildung 3 in 4 überführt, verzerrt ein schachbrettartiges Muster zur Abbildung 5; offensichtlich liegt das Bild eines jeden Feldes zwischen den Bildern der ursprünglichen Nachbarfelder. Solche Abbildungen, die Nachbarschaften bewahren, heißen topologisch. Die Topologie befasst sich mit Eigenschaften, die bei topologischen Abbildungen erhalten bleiben.

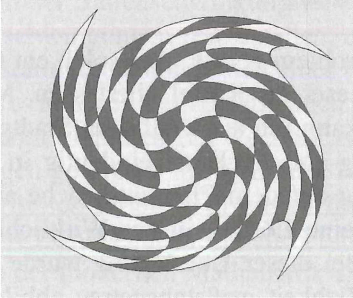
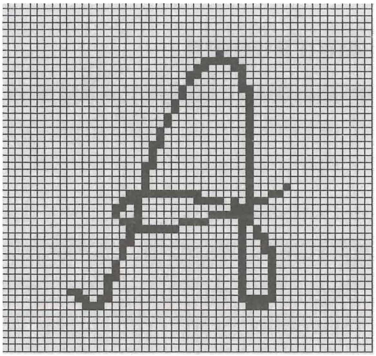


Abb. 5: Verzerrtes Schachbrettmuster

Eine praktische Anwendung findet die Topologie beim automatischen Erkennen von Handschriften. Die individuellen Schreibweisen eines Buchstaben sind topologische Abbildungen von Standardbuchstaben. Einige Merkmale bleiben dabei gleich, wie etwa die Anzahl geschlossener Schleifen oder die Zahl der Kreuzungen des Schriftzugs und sie werden zum Erkennen des Buchstaben herangezogen. Abbildung 6 zeigt ein Muster und eine verzerrte Form des Buchstaben A. Die Verzerrung wurde genau so gewählt wie beim Königsberger Brückenproblem.



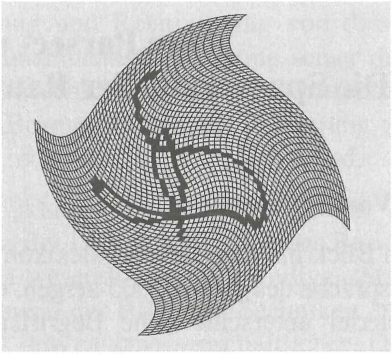


Abb. 6: Der Buchstabe A - Verzerrtes A

6. Schlussbemerkung

Die Beispiele zeigen, dass man bei all den sehr verschiedenartigen Raumbegriffen in der Mathematik einige Eigenschaften des Anschauungsraumes findet. Das rechtfertigt die Bezeichnung Raum.

7. Literatur

BEHNKE, Heinrich (Hg. ^{8}1972): Mathematik 1. – Das Fischer Lexikon, Fischer Taschenbuchverlag. Frankfurt a.M.

COURANT, Richard / ROBBINS, Herbert (^{11}1978): What is Mathematics? – Oxford University Press.

NAGEL, Klaus (1999): Physikalische Aspekte der Musik. – In: Max Liedtke (Hg.), Ton, Gesang, Musik – Natur- und Kulturgeschichtliche Aspekte (= Matreier Gespräche 1997). Austria Medien Service. Graz, 30-42.

NAGEL, Klaus (2005): Hierarchien in der Mathematik. – In: Hartmut Heller (Hg.), Hierarchie (= Matreier Gespräche 2003). LIT-Verlag. Wien, 56-69.

Zeitschrift/Journal: Matreier Gespräche - Schriftenreihe der Forschungsgemeinschaft Wilheminenberg

Jahr/Year: 2005

Band/Volume: 2005

Autor(en)/Author(s): Nagel Klaus

Artikel/Article: Der Raum in der modernen Mathematik 349-357