Ueber die

Einwirkung eines gleichförmig dichten rechtwinkeligen Parallelepippeds auf einen materiellen Punkt,

unter der Voraussetzung, dass die Kraft, mit welcher zwei Moleküle (materielle Punkte) einander anziehen, deren Massen direkt und deren gegenseitigem Abstande verkehrt proportional sei.

Von **Dr. K. Friesach.**

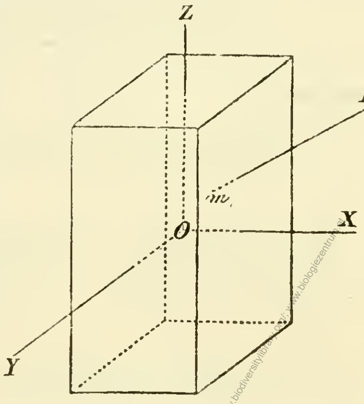
Wenn man das Parallelepipped auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezieht und die Coordinaten eines beliebigen Punktes m des Parallelepippeds durch x, y, z, diejenigen des von dem Parallelepippede afficirten Punktes M hingegen durch ξ, η, ζ bezeichnet, so ist der gegenseitige Abstand dieser beiden Punkte: $u = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, und die Kraft, welche das Körperelement $dx\,dy\,dz$ (der Punkt m) auf M ausübt, $= \frac{k\,dx\,dy\,dz}{u^2}$, wo k einen konstanten Faktor bezeichnet. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Richtung dieser in der Geraden mM wirkenden Kraft mit den Axen der x, y, z bildet, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{\xi - x}{u}, \quad \cos\beta = \frac{\eta - y}{u}, \quad \cos\gamma = \frac{\zeta - z}{u}.$$

Wird daher diese Kraft nach drei den Axen der x, y, z parallelen Richtungen zerlegt, so ergeben sich, für die Componenten, die Ausdrücke:

$$\frac{k(\xi - x)\,dx\,dy\,dz}{u^3}, \quad \frac{k(\eta - y)\,dx\,dy\,dz}{u^3}, \quad \frac{k(\zeta - z(dx\,dy\,dz}{u^3},$$

woraus, durch Integration, die Componenten X, Y, Z der von dem gesammten Parallelepippede auf den Punkt M ausgeübten Anziehung gefunden werden. Die Integrationsgrenzen werden hier sowohl durch die Dimensionen des Parallelepippeds als durch dessen Stellung zu den Coordinatenaxen bestimmt. Gibt man diesen Axen eine solche Lage, dass der Anfangspunkt O mit dem Mittelpunkte des Parallelepippeds (demjenigen Punkte, welcher von je zwei einander parallelen Seitenflächen gleich weit absteht) zusammenfällt, und die Axen OX, OY, OZ den Kanten, deren Längen, durch $2a$, $2b$, $2c$ ausgedrückt werden mögen, parallel sind, so hat man:



$$1)\quad X = k\int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\frac{(\xi - x)\,dx\,dy\,dz}{u^3},$$

$$Y = k\int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\frac{(\eta - y)\,dx\,dy\,dz}{u^3},$$

$$Z = k\int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\frac{(\zeta - z)\,dx\,dy\,dz}{u^3}.$$

Indem man für u dessen obigen Werth setzt, wird:

$$\frac{X}{k} = \int_{-c}^{+c}dz\int_{-b}^{+b}dy\int_{-a}^{+a}\frac{(\xi - x)\,dx}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \int_{-c}^{+c}dz\int_{-b}^{+b}dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}\right\}_{-a}^{+a} =$$

$$= \int_{-c}^{+c} dz \int_{-b}^{+b} \frac{dy}{\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} -$$

$$- \int_{-c}^{+c} dz \int_{-b}^{+b} \frac{dy}{\sqrt{(\xi + a)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}$$

und wegen

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A + (\eta - y)^2}} = lg\,(y - \eta + \sqrt{A + (\eta - y)^2}),$$

$$\frac{X}{k} = \int_{-c}^{+c} dz\; lg\,(b - \eta + \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - z)^2})$$

$$- \int_{-c}^{+c} dz\; lg\,(- b - \eta + \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta + b)^2 + (\zeta - z)^2}) -$$

$$- \int_{-c}^{+c} dz\; lg\,(b - \eta + \sqrt{(\xi + a)^2 + (\eta + b)^2 + (\zeta - z)^2}) +$$

$$+ \int_{-c}^{+c} dz\; lg\,(- b - \eta + \sqrt{(\xi + a)^2 + (\eta + b)^2 + (\zeta - z)^2}).$$

Wird nun auf jedes dieser Integrale die Formel

$$\int dz\; lg\; Z = z\; lg\; Z - \int \frac{z dZ}{Z}$$

angewendet, so hat man, wenn man der Kürze wegen

$$\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2} = \mathrm{H}$$

$$\sqrt{(\xi + a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2} = H_a$$

$$\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta + b)^2 + (\zeta - c)^2} = H_b$$

$$\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta + c)^2} = H_c$$

$$\sqrt{(\xi + a)^2 + (\eta + b)^2 + (\zeta - c)^2} = H_{ab}$$

$$\sqrt{(\xi + a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta + c)^2} = H_{ac}$$

$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta+b)^2+(\zeta+c)^2}=H_{bc}$$
$$\sqrt{(\xi+a)^2+(\eta+b)^2+(\zeta+c)^2}=H_{abc}$$
$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}=h_\zeta$$
$$\sqrt{(\xi+a)^2+(\eta-b)^2}=h_{\zeta a}$$
$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta+b)^2}=h_{\zeta b}$$
$$\sqrt{(\xi+a)^2+(\eta+b)^2}=h_{\zeta ab}$$

setzt:

$$2) \quad \frac{X}{k}=$$

$$=c\,lg\,\frac{(H-\eta+b)\,(H_c-\eta+b)\,(H_{ab}-\eta-b)\,(H_{abc}-\eta-b)}{(H_b-\eta-b)\,(H_{bc}-\eta-b)\,(H_a-\eta+b)\,(H_{ac}-\eta+b)}-$$

$$-\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{h_\zeta+(\zeta-z)^2}\,[b-\eta+\sqrt{h_\zeta^2+(\zeta-z)^2}\,]}+$$

$$+\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{h_{\zeta b}^2+(\zeta-z)^2}\,[-b-\eta+\sqrt{h_{\zeta b}^2+(\zeta-z)}\,]}+$$

$$+\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{h_{\zeta a}^2+(\zeta-z)^2}\,[b-\eta+\sqrt{h_{\zeta a}^2+(\zeta-z)^2}\,]}+$$

$$-\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{h_{\zeta ab}^2+(\zeta-z)^2}\,[-b-\eta+\sqrt{h_{\zeta ab}^2+(\zeta-z)^2}\,]}.$$

Setzt man ferner $z-\zeta=s$, so erhält man lauter Integrale von den Formen

$$\int\frac{s\,ds}{\sqrt{A^2+s^2}\,(B+\sqrt{A^2+s^2})} \quad \text{und} \quad \int\frac{s^2ds}{\sqrt{A^2+s^2}\,(B+\sqrt{A^2+s^2})}.$$

Für $\sqrt{A^2+s^2}=t$, wird:

$$\int\frac{s\,ds}{\sqrt{A^2+s^2}\,(B+\sqrt{A^2+s^2})}=\int\frac{dt}{B+t}=lg\,(B+t)=$$
$$=lg\,(B+\sqrt{A^2+s^2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

2*

Um die andere Differentialformel zu integriren, setze man $\sqrt{A^2+s^2} = A + sv$, so wird

$$\int \frac{s^2 ds}{\sqrt{A^2+s^2}\,(B+\sqrt{A^2+s^2})} = \frac{8A^2}{A-B}\int \frac{v^2 dv}{(1-v^2)^2\left(v^2-\frac{A+B}{A-B}\right)}.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche nach den Factoren v^2-1 und $v^2+\frac{A+B}{A-B}$, und abermalige Zerlegung der Grösse $\frac{1}{(v^2-1)^2}$, ergibt sich:

$$\frac{8A^2}{A-B}\int \frac{v^2 dv}{(1-v^2)^2\left(v^2+\frac{A+B}{A-B}\right)} = 2(A+B)\int \frac{dv}{v^2-1} +$$

$$+ 4A\int \frac{dv}{(v^2-1)^2} - 2(A+B)\int \frac{dv}{\frac{A+B}{A-B}+v^2}$$

$$= 2(A+B)\int \frac{dv}{v^2-1} + A\int \frac{dv}{(v-1)^2} - A\int \frac{dv}{v-1} +$$

$$+ A\int \frac{dv}{(v+1)^2} + A\int \frac{dv}{v+1} -$$

$$- 2\sqrt{A^2-B^2}.\ \text{arc tg}\left\{v\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right\}$$

$$= B\,lg\,\frac{v-1}{v+1} - \frac{2Av}{v^2-1} - 2\sqrt{A^2-B^2}.\ \text{arc tg}\left\{v\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right\}$$

daher $$\int \frac{s^2 ds}{\sqrt{A^2+s^2}\,(B+\sqrt{A^2+s^2})} = B\,lg\,(s-\sqrt{A^2+s^2}) + s -$$

$$- 2\sqrt{A^2-B^2}.\ \text{arc tg}\left\{\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\cdot\frac{\sqrt{A^2+s^2}-A}{s}\right\}$$

$$= s - B\,lg\,(s+\sqrt{A^2+s^2}) -$$

$$- 2\sqrt{A^2-B^2}.\ \text{arc tg}\left\{\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\cdot\frac{\sqrt{A^2+s^2}-A}{s}\right\} + \text{Const} \quad 4)$$

Aus 3) und 4) folgt, indem man, anstatt s, wieder $z-\zeta$ setzt:

$$\zeta\int\frac{s\,ds}{\sqrt{A^2+s^2}\,(B+\sqrt{A^2+s^2})}+\int\frac{s^2\,ds}{\sqrt{A^2+s^2}\,(B+\sqrt{A^2+s^2})}=$$

$$=\int\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{A^2+(z-\zeta)^2}[B+\sqrt{A^2+(z-\zeta)^2}]}=\zeta\,lg[B+\sqrt{A^2+(z-\zeta)^2}]+$$

$$+z-B\,lg[z-\zeta+\sqrt{A^2+(z-\zeta)^2}]-2\sqrt{A^2-B^2}\,\times$$

$$\times\ \text{arc tg}\left\{\frac{A-B}{\sqrt{A^2-B^2}}\cdot\frac{\sqrt{A^2+(z-\zeta)^2}-A}{z-\zeta}\right\}\ \ldots\ldots\ 5)$$

Indem man die vier Integrale in 2) nach der Formel 5) berechnet, hat man:

$$-\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{h^2_\zeta+(z-\zeta)^2}[b-\eta+\sqrt{h^2_\zeta+(z-\zeta)^2}]}=-\zeta\,lg\frac{H-\eta+b}{H_c-\eta+b}-$$

$$-2c+(b-\eta)\,lg\frac{H-\zeta+c}{H_c-\zeta+c}+2(\xi-a)-\left[\text{arc tg}\frac{(h_\zeta+\eta-b)(H-h_\zeta)}{(\xi-a)(c-\zeta)}\right.$$

$$\left.-\text{arc tg}\frac{(h_\zeta+\eta-b)(H_c-h_\zeta)}{(\xi-a)(-c-\zeta)}\right]$$

$$+\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{h^2_{\zeta b}+(z-\zeta)^2}[-b-\eta+\sqrt{h^2_{\zeta b}+(z-\zeta)^2}]}=$$

$$=+\zeta\,lg\frac{H_b-\eta-b}{H_{bc}-\eta-b}+2c+(b+\eta)\,lg\frac{H_b-\zeta+c}{H_{bc}-\zeta-c}-$$

$$-2(\xi-a)\left[\text{arc tg}\frac{(h_{\zeta b}+\eta+b)(H_b-h_{\zeta b})}{(\xi-a)(c-\zeta)}-\right.$$

$$\left.-\text{arc tg}\frac{(h_{\zeta b}+\eta+b)(H_{bc}-h_{\zeta b})}{(\xi-a)(-c-\zeta)}\right]+$$

$$+\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)\,dz}{\sqrt{h^2_{\zeta a}+(z-\zeta)^2}[b-\eta+\sqrt{h^2_{\zeta a}+(z-\zeta)^2}]}=$$

$$=+\zeta\,lg\frac{H_a-\eta+b}{H_{ac}-\eta+b}+2c-(b-\eta)\,lg\frac{H_a-\zeta+c}{H_{ac}-\zeta-c}-$$

$$-2(\xi+a)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta a}+\eta-b)(H_a-h_{\zeta a})}{(\xi+a)(c-\zeta)}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta a}+\eta-b)(H_{ac}-h_{\zeta a})}{(\xi+a)(-c-\zeta)}\right]$$

$$-\int_{-c}^{+c}\frac{z(z-\zeta)dz}{\sqrt{h^2_{\zeta ab}+(z-\zeta)^2}\,[-b-\eta+\sqrt{h^2_{\zeta ab}+(z-\zeta)^2}]}=$$

$$=-\zeta\, lg\frac{H_{ab}-\eta-b}{H_{abc}-\eta-b}-2c-(b+\eta)\, lg\frac{H_{ab}-\zeta+c}{H_{abc}-\zeta-c}+$$

$$+2(\xi+a)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta ab}+\eta+b)(H_{ab}-h_{\zeta ab})}{(\xi+a)(c-\zeta)}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{(h_{\zeta ab}+\eta+b)(H_{abc}-h_{\zeta ab})}{(\xi+a)(-c-\zeta)}\right].$$

Addirt man diese vier Werthe zu dem ersten Gliede des zweiten Theiles der Gleichung 2), so erhält man, nach gehöriger Zusammenfassung der logarithmischen Ausdrücke:

$$6)\ \ldots\ \frac{X}{k}=(c+\zeta)\, lg\frac{(H_c-\eta+b)(H_{abc}-\eta-b)}{(H_{bc}-\eta-b)(H_{ac}-\eta+b)}+$$

$$+(c-\zeta)\, lg\frac{(H-\eta+b)(H_{ab}-\eta-b)}{(H_b-\eta-b)(H_a-\eta+b)}+$$

$$+(b+\eta)\, lg\frac{(H_b-\zeta+c)(H_{abc}-\zeta-c)}{(H_{bc}-\zeta-c)(H_{ab}-\zeta+c)}+$$

$$+(b-\eta)\, lg\frac{(H-\zeta+c)(H_{ac}-\zeta-c)}{(H_c-\zeta-c)(H_a-\zeta+c)}+$$

$$+2(\xi-a)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_\zeta+\eta-b)(H-h_\zeta)}{(\xi-a)(c-\zeta)}+\right.$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_\zeta+\eta-b)(H_c-h_\zeta)}{(\xi-a)(c+\zeta)}-$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta b}+\eta+b)(H_b-h_{\zeta b})}{(\xi-a)(c-\zeta)}-$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta b}+\eta+b)(H_{bc}-h_{\zeta b})}{(\xi-a)(c+\zeta)}\Bigg]-$$

$$-2(\xi+a)\Bigg[\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta a}+\eta-b)(H_a-h_{\zeta a})}{(\xi+a)(c-\zeta)}+$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta a}+\eta-b)(H_{ac}-h_{\zeta a})}{(\xi+a)(c+\zeta)}-$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta ab}+\eta+b)(H_{ab}-h_{\zeta ab})}{(\xi+a)(c-\zeta)}-$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{(h_{\zeta ab}+\eta+b)(H_{abc}-h_{\zeta ab})}{(\xi+a)(c+\zeta)}\Bigg].$$

Aus 1) erhellt, dass der für $\frac{X}{k}$ erhaltene Ausdruck in Bezug auf b, η und c, ζ symmetrisch sein muss. Diese Symmetrie ist in 5) wohl aus der ersten Zeile, nicht aber aus der zweiten und dritten ersichtlich. Es lässt sich übrigens leicht darthun, dass diese beiden Zeilen in der That ihren Werth nicht ändern, wenn man in denselben b, η, c, ζ mit c, ζ, b, η vertauscht. Denn, hätte man, nach vollbrachter Integration nach x, zuerst nach z und dann nach y integrirt, so hätte man für $\frac{X}{k}$ einen Ausdruck erhalten, welcher sich von dem obigen nur dadurch unterscheiden würde, dass, in der zweiten und dritten Zeile, c, ζ, b, η an die Stelle von b, η, c, ζ getreten wären.

Da jedoch beiden Ausdrücken derselbe Werth zukommen muss, so ist damit die erwähnte Symmetrie erwiesen.

Um die Ausdrücke für $\frac{Y}{k}$ und $\frac{Z}{k}$ zu erhalten, hat man blos in 6) $a, \xi, b, \eta, c, \zeta$ mit $b, \eta, c, \zeta, a, \xi$, oder $c, \zeta, a, \xi, b, \eta$, oder auch nur a, ξ mit b, η und c, ζ zu vertauschen. Bei der gewählten Bezeichnungsweise wird diese Vertauschung in H und h durch blosse Vertauschung der beigesetzten Zeiger bewerkstelligt.

Weit einfacher gestaltet sich obiger Ausdruck in dem Falle, wo der angezogene Punkt M in der Axe OX, d. h. in einer im Mittelpunkte der Seitenfläche bc, auf derselben senkrecht stehenden Geraden liegt.

In diesem Falle ist

$$\zeta = \eta = o;\ \text{ferner}\ H_{\mathrm{b}} = H_{\mathrm{c}} = H_{\mathrm{bc}} = H = \sqrt{(\xi - a)^2 + b^2 + c^2} = \mathfrak{H}$$

$$H_{\mathrm{a}} = H_{\mathrm{ab}} = H_{\mathrm{ac}} = H_{\mathrm{abc}} = \sqrt{(\xi + a)^2 + b^2 + c^2} = \mathfrak{H}_{\mathrm{a}}$$

$$h_{\zeta\mathrm{b}} = h_{\zeta} = \sqrt{(\xi - a)^2 + b^2} = \mathfrak{h}$$

$$h_{\zeta\mathrm{a}} = h_{\zeta\mathrm{ab}} = \sqrt{(\xi + a)^2 + b^2} = \mathfrak{h}_{,\mathrm{a}}$$

folglich:

$$\frac{\dot{X}}{k} = 2c\,lg\frac{(\mathfrak{H}+b)(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}-b)}{(\mathfrak{H}-b)(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}+b)} + 2b\,lg\frac{(\mathfrak{H}+c)\,(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}-c)}{(\mathfrak{H}-c)\,(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}+c)} +$$

$$+ 4(\xi - a)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(\mathfrak{h}-b)(\mathfrak{H}-\mathfrak{h})}{c(\xi-a)} - \operatorname{arc\,tg}\frac{(\mathfrak{h}+b)\,(\mathfrak{H}-\mathfrak{h})}{c(\xi-a)}\right]$$

$$-4(\xi + a)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(\mathfrak{h}_{\mathrm{a}}-b)\,(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}-\mathfrak{h}_{\mathrm{a}})}{c(\xi+a)} - \operatorname{arc\,tg}\frac{(\mathfrak{h}_{\mathrm{a}}+b)\,(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}-\mathfrak{H}_{\mathrm{a}})}{c(\xi+a)}\right]$$

Durch Anwendung der Formel

$$\operatorname{arc\,tg} u - \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg}\frac{u-v}{1+uv},$$

wird

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{(\mathfrak{h}-b)\,(\mathfrak{H}-h)}{c(\xi-a)} - \operatorname{arc\,tg}\frac{(\mathfrak{h}+b)\,(\mathfrak{H}-\mathfrak{h})}{c(\xi-a)} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{-2bc(\mathfrak{H}-\mathfrak{h})}{(\xi-a)\,[c^2 + {}^2\mathfrak{H} + \mathfrak{h}^2 - 2\mathfrak{H}\mathfrak{h}]}\right. = -\operatorname{arc\,tg}\frac{bc}{(\xi-a)\mathfrak{H}}$$

Auf dieselbe Art wird auch der in $4(\xi + a)$ multiplicirte Ausdruck vereinfacht, und man hat schliesslich:

$$\frac{X}{k} = 2c\,lg\frac{(\mathfrak{H}+b)\,(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}-b)}{(\mathfrak{H}-b)(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}+b)} + 2b\,lg\frac{(\mathfrak{H}+c)\,(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}-c)}{(\mathfrak{H}-c)(\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}+c)} -$$

$$-4(\xi - a)\operatorname{arc\,tg}\frac{bc}{(\xi+a)\mathfrak{H}} + 4(\xi + a)\operatorname{arc\,tg}\frac{bc}{(\xi+a)\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}}.$$

Liegt der Punkt h überdiess in der Seitenfläche, so ist $\xi = a$, und verwandelt sich obige Gleichung in

$$\frac{X}{k} = 2c\,lg\frac{(\sqrt{b^2+c^2}+b)(\sqrt{4a^2+b^2+c^2}-b)}{(\sqrt{b^2+c^2}-b)(\sqrt{4a^1+b^2+c^2}+b)} +$$

$$+ 2b\,lg\frac{(\sqrt{b^2+c^2}+c)(\sqrt{4a^2+b^2+c^2}-c)}{(\sqrt{b^2+c^2}-c)(\sqrt{4a^2+b^2+c^2}+c)} +$$

$$+ 8a\operatorname{arc\,tg}\frac{bc}{2a\sqrt{4a^2+b^2+c^2}}.$$