Die

Mittelpunkts-Gleichungen

der

Elipse, Hyperbel und des Kreises in der absoluten Geometrie.

Von **A. v. Frank.**

Herr Dr. J. Frischauf giebt in den Artikeln 48–57 seiner absoluten Geometrie, die Grundzüge einer analytischen absoluten Geometrie. Die nachfolgend gegebenen Entwicklungen sind nur die Erweiterungen jener Grundzüge.

Die Bezeichnungen sind, soweit sie nicht Neues betreffen, dieselben, wie in dem angeführten Werke; die Benützung der hyperbolischen Funktionen, die stets mit grossen deutschen Buchstaben geschrieben sind, geschah nur der Schreibkürzung wegen.

§ 1.

Um die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel zu erhalten, stellen wir vorerst die Distanz d, zweier beliebiger Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) nach pag. 66 und 67 dar; es ist;

$$e^{\frac{d}{k}} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.$$

worin die Werthe Z_2 und Z_1 ausgedrückt sind durch:

$$\left.\begin{aligned} Z_2 &= a\left(e^{\frac{y_2}{k}} + e^{-\frac{y_2}{k}}\right)e^{\frac{x_2}{k}} + \left(\sqrt{1-ab}-1\right)\left(e^{\frac{y_2}{k}} - e^{-\frac{y_2}{k}}\right) \\ Z_1 &= a\left(e^{\frac{y_1}{k}} + e^{-\frac{y_1}{k}}\right)e^{\frac{x_1}{k}} + \left(\sqrt{1-ab}-1\right)\left(e^{\frac{y_1}{k}} - e^{-\frac{y_1}{k}}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2.$$

und die Konstanten a und b erhalten werden aus:

$$\left.\begin{aligned}\left(e^{\frac{y_1}{k}} + e^{-\frac{y_1}{k}}\right)\left(a e^{\frac{x_1}{k}} + b e^{-\frac{x_1}{k}}\right) = 2\left(e^{\frac{y_1}{k}} - e^{-\frac{y_1}{k}}\right)\\ \left(e^{\frac{y_2}{k}} + e^{-\frac{y_2}{k}}\right)\left(a e^{\frac{x_2}{k}} + b e^{-\frac{x_2}{k}}\right) = 2\left(e^{\frac{y_2}{k}} - e^{-\frac{y_2}{k}}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \ (3.$$

Bezeichnen wir nun mit d und d' die beiden Leitstrahlen, so haben wir für

$$d + d' = 2\,A \text{ die Ellipse}$$
$$d - d' = 2\,A \text{ „ Hyperbel.}$$

Nach Gleichung (1. ist aber

$$\text{und analog:}\quad \left.\begin{aligned} d &= k \log \frac{Z_2}{Z_1}\\ d' &= k \log \frac{Z_2'}{Z_1'}\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (4.$$

daher sofort:

$$e^{\frac{2\,A}{k}} = \frac{Z_2\ Z_2'}{Z_1\ Z_1'} \quad . \ . \ . \ (\mathrm{I})$$

und

$$e^{\frac{2\,A}{k}} = \frac{Z_2\ Z_1'}{Z_1\ Z_2'} \quad . \ . \ . \ (\mathrm{II})$$

als die noch unentwickelte Form der Gleichungen der beiden Kegelschnittslinien.

§ 2.

Aus den Gleichungen (3. findet man die Konstanten a und b, unter gleichzeitiger Einführung der hyperbolischen Funktionen, nach einigen leichten Rechnungen:

$$a = -\frac{e^{-\frac{x_2}{k}}\ \mathfrak{Tg}\,\frac{y_1}{k} - e^{-\frac{x_2}{k}}\ \mathfrak{Tg}\,\frac{y_2}{k}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{x_2-x_1}{k}} \quad . \ . \ . \ (5.\ \mathrm{a}$$

und

$$b = \frac{e^{\frac{x_2}{k}}\ \mathfrak{Tg}\,\frac{y_1}{k} - e^{\frac{x_1}{k}}\ \mathfrak{Tg}\,\frac{y_2}{k}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{x_2-x_1}{k}} \quad . \ . \ . \ (5.\ b$$

Diese für zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geltenden Formeln, lassen sich für die Leitstrahlen d und d' spezialisiren; bezeichnen wir mit ε die Excentricität mit x, y die laufenden Coordinaten der Curve, so wird für den einen Leitstrahl:

$$x_1 = -\varepsilon \quad , \quad y_1 = o$$
$$x_2 = \quad x \quad , \quad y_2 = y$$

und mit diesen Werthen gehen die Gleichungen (5. über in:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{e^{\frac{\varepsilon}{k}} \, \mathfrak{Tg} \, \frac{y}{k}}{\mathfrak{Sin} \, \frac{x+\varepsilon}{k}} \\ b &= - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k}} \, \mathfrak{Tg} \, \frac{y}{k}}{\mathfrak{Sin} \, \frac{x+\varepsilon}{k}} \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (6.$$

Für den zweiten Leitstrahl, wo a' und b' die Constanten bezeichnen sollen, hat man:

$$x_1 = +\varepsilon \quad , \quad y_1 = o$$
$$x_2 = \quad x \quad , \quad y_2 = y$$

somit:

$$\left. \begin{aligned} a^1 &= \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k}} \, \mathfrak{Tg} \, \frac{y}{k}}{\mathfrak{Sin} \, \frac{x-\varepsilon}{k}} \\ b^1 &= - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k}} \, \mathfrak{Tg} \, \frac{y}{k}}{\mathfrak{Sin} \, \frac{y-\varepsilon}{k}} \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (7.$$

Um die Werthe Z_1, Z_1', Z_2 und Z_2' zu bilden, hat man folgende Gleichungen nach Formel (2.

$$Z_1 = 2\,a\,\mathfrak{Cos}\,\frac{y_1}{k}\,e^{\frac{x_1}{k}} + (\sqrt{1-ab}-1)\,2.\,\mathfrak{Sin}\,\frac{y_1}{k}$$

$$Z_2 = 2\,a\,\mathfrak{Cos}\,\frac{y_2}{k}\,e^{\frac{x_2}{k}} + (\sqrt{1-ab}-1)\,2.\,\mathfrak{Sin}\,\frac{y_2}{k}$$

$$Z_1' = 2\,a'\,\mathfrak{Cos}\,\frac{y_1}{k}\,e^{\frac{x_1}{k}} + (\sqrt{1-a'b'}-1)\,2.\,\mathfrak{Sin}\,\frac{y_1}{k}$$

$$Z_2' = 2\,a'\,\mathfrak{Cos}\,\frac{y_2}{k}\,e^{\frac{x_2}{k}} + (\sqrt{1-a'b'}-1)\,2.\,\mathfrak{Sin}\,\frac{y_2}{k}$$

Für die beiden Fälle haben wir einmal $x_1 = -\varepsilon$, $y_1 = o$, $x_2 = x$, $y_2 = y$, und das anderemal $x_1 = +\varepsilon$, $y_1 = o$, $x_2 = x$, $y_2 = y$ zu setzen, und bekommen:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= 2a\, e^{-\frac{\varepsilon}{k}} \\ Z_2 &= 2a\, \mathrm{Cos}\,\frac{y}{k}\, e^{\frac{x}{k}} + (\sqrt{1-ab}-1)\; 2.\,\mathrm{Sin}\,\frac{y}{k} \\ Z_1' &= 2a'\, e^{\frac{\varepsilon}{k}} \\ Z_2' &= 2a'\,\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k}\, e^{\frac{x}{k}} + (\sqrt{1-a'b'}-1)\; 2.\,\mathrm{Sin}\,\frac{y}{k} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (8.$$

Substituirt man in diese 4 Gleichungen die Werthe der Constanten aus (6. und (7., so erhält man nach einigen Reductionen folgende Endwerthe:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= 2\,\frac{\mathrm{Tg}\,\frac{y}{k}}{\mathrm{Sin}\,\frac{x+\varepsilon}{k}} \\ Z_2 &= 2\,\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{y}{k}}{\mathrm{Sin}\,\frac{x+\varepsilon}{k}}\, e^{\frac{x+\varepsilon}{k}} + 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{y}{k}\left(\sqrt{1+\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2}-1\right) \\ Z_1' &= 2\,\frac{\mathrm{Tg}\,\frac{y}{k}}{\mathrm{Sin}\,\frac{x-\varepsilon}{k}} \\ Z_2' &= 2\,\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{y}{k}}{\mathrm{Sin}\,\frac{x-\varepsilon}{k}}\, e^{\frac{x-\varepsilon}{k}} + 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{y}{k}\left(\sqrt{1+\left(\frac{Z_1'}{2}\right)^2}-1\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (9.$$

Führen wir endlich die eben erhaltenen Ausdrücke (9. in die Gleichungen (I) und (II) ein, und umformen gleich, so kommt:

$$e^{\frac{2A}{k}} = \frac{\left[\mathrm{Cos}\,\frac{x+\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k} + \sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\frac{x+\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{y}{k} - 1}\right]}{\left[\mathrm{Cos}\,\frac{y-\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k} + \sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\frac{x-\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{y}{k} - 1}\right]} \quad . \quad \text{(III).}$$

als Ellipsengleichung in erster entwickelter Form; und ganz ähnlich:

$$e^{\frac{2A}{k}} = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{x+\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k} + \sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{x+\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{y}{k} - 1}}{\mathrm{Cos}\,\frac{x-\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k} + \sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{x-\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{y}{k} - 1}} \quad . \quad (\mathrm{IV}).$$

als Gleichung der Hyperbel.

§ 3.

Setzt man in den Gleichungen (III) und (IV) für

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}^2\frac{x+\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{y}{k} &= \mathrm{Cos}^2\varphi \\ \mathrm{Cos}^2\frac{x-\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{y}{k} &= \mathrm{Cos}^2\varphi' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10$$

so erhält man sofort:

$$e^{\frac{2A}{k}} = (\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi)(\mathrm{Cos}\,\varphi' + \mathrm{Sin}\,\varphi') \quad . \quad . \quad . \quad (11.$$

und:
$$e^{\frac{2A}{k}} = \frac{(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi)}{(\mathrm{Cos}\,\varphi' + \mathrm{Sin}\,\varphi')} \quad . \quad . \quad . \quad (12.$$

weil aber:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi &= e^{\varphi} \\ \mathrm{Cos}\,\varphi' + \mathrm{Sin}\,\varphi' &= e^{\varphi'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13.$$

ist, so hat man auch:

$$e^{\frac{2A}{k}} = e^{\varphi-\varphi'} \quad . \quad . \quad . \quad (14.$$

und

$$e^{\frac{2A}{k}} = e^{\varphi+\varphi'} \quad . \quad . \quad . \quad (15.$$

oder beide Ausdrücke zusammengefasst:

$$\frac{2A}{k} = \varphi \pm \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{V}.)$$

als die gemeinschaftliche Gleichung der Ellipse und Hyperbel, wobei das obere Zeichen für jene, das untere für diese gilt.

Anmerkung. Die Gleichung der *Lemniscata* würde also nach allem Bisherigen die Form haben:

$$\frac{2A}{k} = \varphi\,\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha.$$

§ 4.

Um auch die kleine Axe $2B$ in Rechnung zu nehmen, setzen wir in der Gleichung (III) $x = o$, und lösen für das zugehörige y welches nun

$$y = B$$

wird auf;

$$e^{\frac{2A}{k}} = \left\{ \mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{B}{k} + \sqrt{\mathfrak{Cos}^2\frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Cos}^2\frac{B}{k} - 1} \right\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (16.$$

und hieraus:

$$\mathfrak{Cos}\frac{B}{k} = \frac{e^{\frac{2A}{k}} + 1}{2e^{\frac{A}{k}}\,\mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (17.$$

oder:

$$\mathfrak{Cos}\frac{B}{k} = \frac{\mathfrak{Cos}\frac{A}{k}}{\mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (18.$$

Aus dieser Gleichung ziehen wir den Werth:

$$\mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k} = \frac{\mathfrak{Cos}\frac{A}{k}}{\mathfrak{Cos}\frac{B}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (19.$$

welchen wir in (III) substituiren. Zugleich bemerken wir, dass:

$$e^{\frac{2A}{k}} = \mathfrak{Cos}\frac{2A}{k} + \mathfrak{Sin}\frac{2A}{k}$$

$$\mathfrak{Cos}\frac{x \pm \varepsilon}{k} = \mathfrak{Cos}\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k} \pm \mathfrak{Sin}\frac{x}{k}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon}{k}$$

$$\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon}{k} = \sqrt{\mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k} - 1}$$

mit Hilfe dieser Formeln wird die Gleichung (III.):

$$\mathfrak{Cos}\frac{2A}{k} + \mathfrak{Sin}^{2A} = \Bigg[\left(\mathfrak{Cos}\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k} + \mathfrak{Sin}\frac{x}{k}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon}{k} \right) \mathfrak{Cos}\frac{y}{k}$$

$$+ \left(\sqrt{\left(\mathfrak{Cos}\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{\varepsilon}{k} \cdot \mathfrak{Sin}\frac{x}{k}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon}{k} \right)^2 \mathfrak{Cos}^2\frac{y}{k} - 1} \Bigg] \right.$$

$$\left[\left(\mathrm{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varepsilon}{k} - \mathrm{Sin}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\varepsilon}{k}\right)\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\mathrm{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varepsilon}{k} - \mathrm{Sin}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\varepsilon}{k}\right)^2 \mathrm{Cos}^2\,\frac{y}{k} - 1}\,\right]$$

und nun Formel (19. benützt, erhalten wir mit Berücksichtigung einiger Vereinfachungen:

$$\mathrm{Cos}^2\,\frac{B}{k}\left(\mathrm{Cos}\,\frac{A}{k} + \mathrm{Sin}\,\frac{A}{k}\right) =$$

$$\left[\left(\mathrm{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{A}{k} + \mathrm{Sin}\,\frac{x}{k}\sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\frac{A}{k} + \mathrm{Cos}^2\,\frac{B}{k}}\right)\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\left\{\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{A}{k} + \mathrm{Sin}\,\frac{x}{k}\sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\frac{A}{k} - \mathrm{Cos}^2\,\frac{B}{k}}\right\}^2 \mathrm{Cos}^2\,\frac{y}{k} - \mathrm{Cos}^2\,\frac{B}{k}}\,\right]$$

$$\left[\left(\mathrm{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{A}{k} - \mathrm{Sin}\,\frac{x}{k}\sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\frac{A}{k} - \mathrm{Cos}^2\,\frac{B}{k}}\right)\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\left\{\mathrm{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{A}{k} - \mathrm{Sin}\,\frac{x}{k}\sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\frac{A}{k} - \mathrm{Cos}^2\,\frac{B}{k}}\right\}^2 \mathrm{Cos}^2\,\frac{y}{k} - \mathrm{Cos}\quad k}\,\right]$$

und diese 4. Form der Gleichung der Ellipse wäre das Analogon der bekannten Gleichung:

$$a^2\, b^2 = a^2\, y^2 + b^2\, x^2$$

Diese zuletzt erhaltene Form ist jedoch nicht die bequemste zu weiteren Untersuchnngen, im Gegentheile soll in der Folge immer Gleichung (III) benützt werden.

Um die ähnliche Hyperbelgleichung zu erhalten, müsste ein anderes Verfahren eingeschlagen werden; da aber diese Form der Kegelschnitts-Gleichungen nicht weiter verwendet wird, so kann diese Umstaltung für die Hyperbel füglich unterbleiben.

§ 5.

Die Gleichung des Kreises kann man nun ganz kurz aus der Ellipsengleichung (III) bekommen, wenn man $\varepsilon = o$ setzt, und dann die Halbaxe A in den Halbmesser R übergehen lässt; man hat dann:

$$e^{\frac{R}{k}} = \mathfrak{Cos}\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{y}{k} + \sqrt{\mathfrak{Cos}^2\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}^2\frac{y}{k} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{VII}).$$

welche Form auch übergeht, wenn wir die Gleichung (13. benützen, in:

$$\frac{R}{k} = \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{VIII.})$$

Gleichung (VII) kann unmittelbar nach y aufgelöst werden, man erhält weil:

$$\frac{e^{\frac{R}{k}} + e^{-\frac{R}{k}}}{2} = \mathfrak{Cos}\frac{R}{k}$$

ist, sofort:

$$\mathfrak{Cos}\frac{y}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{x}{k} = \mathfrak{Cos}\frac{R}{k} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{IX.})$$

als 2. Form der Kreisgleichung.

§ 6.

Die Gleichung (III) lässt sich auf folgende Weise nach y auflösen:

Wir setzen

$$e^{\frac{2A}{k}} = c \quad , \quad \mathfrak{Cos}\frac{x+\varepsilon}{k} = \alpha \quad , \quad \mathfrak{Cos}\frac{x-\varepsilon}{k} = \alpha'$$

und

$$\mathfrak{Cos}\frac{y}{k} = \beta$$

man hat dann:

$$c = (\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 1})(\alpha_1\beta + \sqrt{\alpha_1{}^2\beta - 1})$$

und diese Gleichung nach β aufgelöst giebt:

$$\beta = \frac{c^2 - 1}{2\sqrt{c(c\alpha' - \alpha)(c\alpha - \alpha')}}$$

und durch Vertauschang der Bezeichnung:

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{y}{k} = \frac{e^{\frac{2A}{k}} - 1}{2\sqrt{e^{\frac{2A}{k}}\left(e^{\frac{2A}{k}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x-\varepsilon}{k} - \mathfrak{Cos}\,\frac{x+\varepsilon}{k}\right)\left(e^{\frac{2A}{k}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x+\varepsilon}{k} - \mathfrak{Cos}\,\frac{x-\varepsilon}{k}\right)}}$$

oder noch umformt, indem wir bemerken, dass

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{x\pm\varepsilon}{k} = \mathfrak{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{\varepsilon}{k} \pm \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{k}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varepsilon}{k}$$

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{x+\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x-\varepsilon}{k} = \mathfrak{Cos}^2\,\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}^2\,\frac{\varepsilon}{k} - \mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{k}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varepsilon}{k}$$

$$e^{\frac{4A}{k}} - e^{\frac{2A}{k}} + 1 = 4\,e^{\frac{2A}{k}}\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{A}{k}$$

$$e^{\frac{4A}{k}} + e^{\frac{2A}{k}} + 1 = 4\,e^{\frac{2A}{k}}\,\mathfrak{Cos}^2\,\frac{A}{k}$$

ist, erhalten wir:

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{y}{k} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{2A}{k}}{2\sqrt{\mathfrak{Cos}^2\frac{x}{k}\,\mathfrak{Cos}^2\frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{A}{k} - \mathfrak{Sin}^2\frac{x}{k}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Cos}^2\frac{A}{k}}} \quad (X.)$$

oder wenn wir berücksichtigen, dass:

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{2A}{k} = 2\,\mathfrak{Cos}\,\frac{A}{k}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{A}{k}$$

$$\mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{k} = \mathfrak{Cos}^2\,\frac{x}{k} - 1$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{y}{k} = \frac{\mathfrak{Cos}\,\frac{A}{k}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{A}{k}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^2\frac{x}{k}\left(\mathfrak{Cos}^2\frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{A}{k} - \mathfrak{Sin}^2\frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Cos}^2\frac{A}{k}\right) + \mathfrak{Sin}^2\frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{Cos}^2\frac{A}{k}}} \quad (XI.)$$

endlich wird durch Benützung der Formel (19.

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{y}{k} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{A}{k}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{B}{k}}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\frac{B}{k}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{x}{k} + \mathfrak{Sin}^2\frac{A}{k}}} \quad . \quad (XII.)$$

die einfachste Form der Gleichung der Ellipse erhalten.

Setzen wir in (XII)

$$B = A = R$$

so erscheint sofort die Kreisgleichung (IX).

§ 7.

Auf eine ähnliche Weise kann die Gleichung (IV) der Hyperbel aufgelöst werden. Wir finden dann, mit Berücksichtigung der im vorigen Artikel gewählten Bezeichnung:

$$\beta = \frac{1 - c^2}{2\sqrt{c\,(\alpha - \alpha_1\,c)(\alpha_1 - \alpha\,c)}}$$

und haben nach Vertauschung der Substitution:

$$\mathrm{Cos}\frac{y}{k} = \frac{1 - e^{\frac{4A}{k}}}{2\sqrt{e^{\frac{2A}{k}}\left(\mathrm{Cos}\,\frac{x+\varepsilon}{k} - e^{\frac{2A}{k}}\,\mathrm{Cos}\,\frac{x-\varepsilon}{k}\right)\left(\mathrm{Cos}\,\frac{x-\varepsilon}{k} - e^{\frac{2A}{k}}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varepsilon+x}{k}\right)}}$$

welche Form auch weiterhin umstaltet, übergeht in:

$$\mathrm{Cos}\frac{y}{k} = \frac{-\;\mathrm{Sin}\,\frac{2A}{k}}{2\sqrt{\mathrm{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{\varepsilon}{k}\,\mathrm{Sin}^2\frac{A}{k} - \mathrm{Sin}^2\frac{x}{k}\,\mathrm{Sin}^2\frac{\varepsilon}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{A}{k}}} \quad \text{(XII.)}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nur durch das Zeichen des Zählers von der der Ellipse.

Nun wäre die imaginäre Axe 2 B in Rechnung zu nehmen. Wir haben aus einem rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete zu bestimmen. Nach Gleichung (3:, pag. 52 der absoluten Geometrie ist

$$\mathrm{Cos}\,\frac{\varepsilon}{k} = \mathrm{Cos}\,\frac{A}{k}\,\mathrm{Cos}\,\frac{B}{k} \quad . \; . \; . \; (20.$$

welcher Werth in (XII) eingesetzt giebt:

$$\mathrm{Cos} = -\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{A}{k}}{\mathrm{Cos}\,\frac{B}{k}\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{A}{k} - \mathrm{Cos}^2\frac{x}{k}}} \quad . \quad \text{(XIII.}$$

die einfachste Form der Hyperbelgleichung, die auch so geschrieben werden kann:

$$\mathrm{Cos}\,\frac{y}{k} = -\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{A}{k}}{\mathrm{Cos}\,\frac{B}{k}\sqrt{\mathrm{Sin}^2\frac{A}{k} - \mathrm{Sin}^2\frac{x}{k}}} \; . \; (21.$$