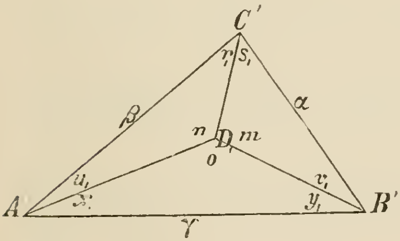
Die Pothenot'sche Aufgabe auf der Kugel.

Von Dr. **K. Friesach.**

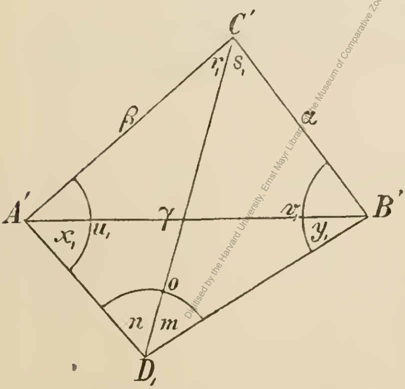
a) Die Pothenot'sche Aufgabe besteht bekanntlich in Folgendem:

In der Ebene eines gegebenen Dreieckes $A' B' C'$ ist die Lage eines Punktes D_1 so zu bestimmen, dass $\sphericalangle\ C' D_1 B' = m$ und $\sphericalangle\ C' D_1 A' = n$ sei. Hinsichtlich der Lage von D_1 sind drei Fälle möglich, welche durch die beigesetzten Figuren versinnlicht und durch *I*, *II*, *III* bezeichnet sind.

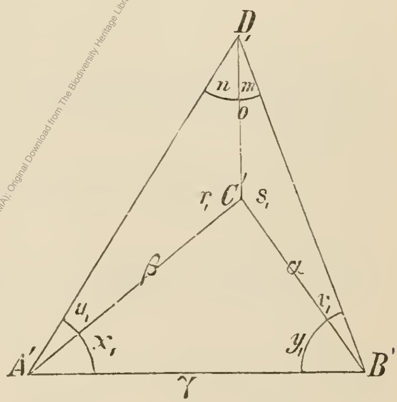
I.



II.



III.



In allen Fällen ergibt sich aus den Dreiecken $C' D_1 A'$ und $C' D_1 B'$ die Gleichung:

$$\beta \sin m \sin u_1 = \alpha \sin n \sin r_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ausserdem ist für } I \text{ und } II: & m+n+u_1+v_1+C'=360^0 \\ \text{und für } III: & m+n+u_1+v_1 \qquad = C'\end{array}\right\} \quad 2.)$$

Setzt man sonach im Falle I und II: $360^0 - (m + n + C' = N$

im Falle III: $\quad C' - m - n \qquad = N$,

so ist $v_1 = N - u_1$ und hat man mit Rücksicht auf 1.):

$$tg.\ u_1 = \frac{\alpha \sin n \sin N}{\beta \sin m + \alpha \sin n \cos N}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.),$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

b) Liegen die Punkte A, B, C, D auf einer Kugelfläche und ist D derart zu bestimmen, dass die sphärischen Winkel CDA und CDB die Werthe m und n annehmen, so hat man gleichfalls die drei soeben betrachteten Fälle zu unterscheiden. Bezeichnet man die Seiten des sphärischen Dreiecks mit α, β, ν und die den u_1, v_1, r_1 etc. entsprechenden sphärischen Winkel mit u, v, r etc., so folgt aus den Dreiecken CDB und CDA:

$$\sin \beta \sin m \sin u = \sin \alpha \sin n \sin v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.)$$

und aus ABD:

$$\cos v = \cos (m + n) = \cos \nu \sin (A \mp u) \sin (B \mp v) \cos (A \mp u) \times$$
$$\times \cos (B \mp v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5.)$$

wo die oberen Zeichen für den Fall I und II, die unteren für III gelten. Zur Ermittlung von u und v hat man die Gleichungen 4.) und 5.)

Grunert hat in seinem Archiv für Mathematik und Physik, Band 47, eine directe Auflösung bekannt gemacht, welche jedoch so mühsam ist, dass man in einem gegebenen Falle wohl immer einer indirecten Auflösung den Vorzug geben wird.

Hierzu benöthigt man zunächst einen genäherten Werth für u, den man aus 3.) erhalten kann. Die Gl. 4.) und 5.) können auch so geschrieben werden:

$$\sin \beta \sin m \sin u - \sin \alpha \sin n \sin v = F\ (u,\ v) = o \quad . \quad 4.')$$

$$\cos\ (m + n) + \cos\ (A \mp u) \cos\ (B \mp v) - \cos \nu \sin\ (A \mp u) \times$$
$$\times \sin\ (B \mp v) = f\ (u, v) = o \quad . \quad . \quad 5.')$$

Man setze nun $u = u_1$ und berechne aus 5.') den dazu gehörigen Werth $v = v_1$, so wird 5'.) durch u_1 und v_1 erfüllt, nicht aber 4'.) und man hat demnach:

$$F\ (u_1,\ v_1) = \delta$$
$$f\ (u_1,\ v_1) = o$$

Sind nun $u_1 + du$, $v_1 + dv$ die gesuchten Werthe, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{du_1}\, du + \frac{dF}{dv_1}\, dv &= -\,\delta \\ \frac{df}{du_1}\, du + \frac{df}{dv_1}\, dv &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 6.)$$

$$\text{wo } \frac{dF}{du_1} = sin\, \beta\; sin\, m\; cos\, u_1$$

$$\frac{df}{du_1} = \pm\, sin\, (A \mp u_1)\; cos\, (B \mp v_1) \pm cos\, \nu\; cos\, (A \mp u_1)\; sin\, (B \mp v_1)$$

$$\frac{dF}{dv_1} = -\, sin\, \alpha\; sin\, n\; cos\, v_1$$

$$\frac{df}{dv_1} = \pm\, cos\, (A \mp u_1)\; sin\, (B \mp v_1) \pm cos\, \nu\; sin\, (A \mp u_1)\; cos\, (B \mp v_1)$$

Aus 6.) ergibt sich dann $du = \dfrac{\dfrac{df}{dv_1}\,\delta}{\dfrac{dF}{dv_1} \cdot \dfrac{df}{du_1} - \dfrac{dF}{du_1} \cdot \dfrac{df}{dv_1}}$,

$$u = u_1 + du,$$

worauf man v am bequemsten aus 4.) erhält.

c) Wenn die Seiten des gegebenen sphärischen $\triangle\, A\, B\, C$, wie es bei geodätischen Dreiecken stets der Fall ist, die Länge von 1^0 nicht überschreiten. kann die Berechnung von u und v. mit Hilfe des bekannten Legendre'schen Satzes. in folgender Weise ausgeführt werden:

Es sei $A'\, B'\, C'$ das mit $A\, B\, C$ gleich lange Seiten habende geradlinige Dreieck und $A + B + C - 180^0 = E$, so ist, nach dem Legendre'schen Satze:

$$A' = A - \frac{E}{3},\quad B' = B - \frac{E}{3},\quad C' = C - \frac{E}{3}$$

und hat man zur Bestimmung des Punktes D_1, wie oben gezeigt wurde:

$$tg.\, u_1 = \frac{\alpha\; sin\; n\; sin\; N}{\beta\; sin\; m + \alpha\; sin\; n\; cos\; N},\quad v_1 = u_1 - N.$$

Für die übrigen in der Figur angegebenen ebenen Winkel ergeben sich nachstehende Werthe:

Fall *I.*	Fall *II.*	Fall *III.*
$x_1 = A' - u_1$	$x_1 = u_1 - A'$	$x_1 = A' + u_1$
$y_1 = B' - v_1$	$y_1 = v_1 - B'$	$y_1 = B' + v_1$
$r_1 = 180^0 - n - u_1$	$r_1 = 180^0 - n - u_1$	$r_1 = 180^0 - n - u_1$
$s_1 = 180 - m - v_1$	$s_1 = 180 - m - v_1$	$s_1 = 180 - m - v_1$
$o = 360^0 - m - n$	$o = m + n$	$o = m + n$

Wegen Kleinheit der Seiten α, β, ν, sind die u_1, v_1 etc. von den u, v etc., und ebenso die Flächenräume der oberen Dreiecke $C' D_1 A'$, $C' D_1 B'$, $A' D_1 B'$ von denjenigen der sphärischen $C D A$, $C D B$, $A D B$ sehr wenig verschieden. Letztere werden aber bekanntlich durch die sphärischen Excesse dieser Dreiecke, welche ich durch E_β, E_α, E_ν bezeichne, ausgedrückt. Man darf daher setzen:

$$E_\beta = \frac{\beta^2 \sin u_1 \sin v_1}{2 \sin n \sin 1''}, \quad E_\alpha = \frac{\alpha^2 \sin v_1 \sin s_1}{2 \sin m \sin 1''}, \quad E_\nu = \frac{\nu^2 \sin x_1 \sin y_1}{2 \sin v \sin 1''}$$

Diese Ausdrücke geben die sphärischen Excesse in Bogensekunden, wenn α, β, ν in Theilen des Halbmessers ausgedrückt sind. Als Probe für die Zulässigkeit der letzten Gleichungen kann die Gl. 7.) dienen, welcher die gefundenen Werthe E_α, E_β, E_ν genügen müssen.

$$\left.\begin{aligned} E &= E_\alpha + E_\beta + E_\nu \quad (\text{Fall } I.) \\ E &= E_\alpha + E_\beta - E_\nu \quad (\text{Fall } II.) \\ E &= E_\nu - E_\alpha - E_\beta \quad (\text{Fall } III.) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 7.)$$

Jedem der zuletzt genannten sphärischen Dreiecke entspricht ein ebenes, das mit ersterem gleich lange Seiten hat. Indem ich diese ebenen Dreiecke durch $C' D' A'$, $C' D' B'$, $A' D' B'$, und die in denselben vorkommenden, den u, v, m etc. entsprechenden Winkel durch u', v', m' etc. bezeichne, ist nach dem Legendre'schen Satze:

$$m' = m - \frac{E_\alpha}{3}, \quad n' = n - \frac{E_\beta}{3}, \quad o' = o - \frac{E_\nu}{3}.$$

Ferner ist $r' = r - \frac{E_\beta}{3}$

$$s' = s - \frac{E_\alpha}{3}$$

folglich

$$r' + s' = r + s - \frac{E_\alpha + E_\beta}{3} = \begin{cases} C - \dfrac{E_\alpha + E_\beta}{3} & \text{(Fall } I. \text{ u. } II.) \\ 360^0 - C - \dfrac{E_\beta + E_\beta}{3} & \text{(Fall } III.) \end{cases}$$

Aus den Dreiecken $C'D'A'$ und $C'D'B'$ ergibt sich nun:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \sin m' \sin u' = \alpha \sin n' \sin v' \\ u' + n' + r' + s' + v' + m' = 360^0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8.)$$

Setzt man daher $360^0 - (m' + n' + r' + s') = N'$, so ist wie zuvor:

$$tg.\, u' = \frac{\alpha \sin n' \sin N'}{\beta \sin m' + \alpha \sin n' \cos N'},\quad v' = N' - u'.$$

Sind aber u' und v' bekannt, so ist

$$u = u' + \frac{E_\beta}{3},\quad v = v' + \frac{E_\alpha}{3}.$$

Im Folgenden stelle ich sämmtliche zur Berechnung von u und v erforderlichen Formeln übersichtlich zusammen:

I.	*II.*	*III.*

$$A + B + C - 180^0 = E,\ A' = A - \frac{E}{3},\ B' = B - \frac{E}{3},$$

$$C' = C - \frac{E}{3},\ 360^0 - (m + n + C') = N \quad \Big| \quad C' - (m + n) = N$$

$$tg.\, u_1 = \frac{\alpha \sin n \sin N}{\beta \sin m + \alpha \sin n \cos N},\quad v_1 = N - u_1$$

I.	II.	III.
$x_1 = A' - u_1$	$x_1 = u_1 - A'$	$x_1 = A' + u_1$
$y_1 = B' - v_1$	$y_1 = v_1 - B'$	$y_1 = B' + v_1$
$r_1 = 180^0 - n - u_1$	$r_1 = 180^0 - n - u_1$	$r_1 = 180^0 - n - u_1$
$s_1 = 180 - m - v_1$	$s_1 = 180 - m - v_1$	$s_1 = 180 - m - v_1$
$o = 360 - m - n$	$o = m + n$	$o = m + n$

$$E_\alpha = \frac{\alpha^2 \sin r_1 \sin s_1}{2 \sin m \sin 1''},\quad E_\beta = \frac{\beta^2 \sin u_1 \sin r_1}{2 \sin n \sin 1''},\quad E_\nu = \frac{\nu^2 \sin x_1 \sin y_1}{2 \sin v \sin 1''}$$

$$m' = m - \frac{E_\alpha}{3} \qquad n' = n - \frac{E_\beta}{3} \qquad o' = v - \frac{E_\nu}{3}$$

$$360^0 + \frac{E_\alpha + E_\beta}{3} - (m' + n' + C) = N' \quad \Big| \quad C + \frac{E_\alpha + E_\beta}{3} - (m' + n') = N'$$

$$tg.\, u' = \frac{\alpha \sin n' \sin N'}{\beta \sin m' + \alpha \sin n' \cos N'}; \quad v' = u' - N'$$

$$u = u' + \frac{E_\beta}{3}, \qquad v = v' + \frac{E_\alpha}{3}$$

e) Um zu zeigen, dass diese Berechnungsweise auch bei Dreiecken, deren Seiten die Länge Eines Grades weit überschreiten, noch anwendbar ist, lasse ich ein nummerisches Beispiel folgen.

In dem gegebenen sphärischen $\triangle\ ABC$ sei

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2^0 = \frac{\pi}{90} \\ \beta &= 3 = \frac{\pi}{60} \\ \gamma &= 2{\cdot}5 = \frac{\pi}{72} \end{aligned}\right\} \text{ woraus } \left\{\begin{aligned} A &= 41^0\ 25'\ 26{\cdot}''6 \\ B &= 82\ \ 50\ \ 1{\cdot}2 \\ C &= 55\ \ 47\ \ 8{\cdot}1 \end{aligned}\right.$$

$$E = 0\ \ 2\ \ 35{\cdot}9$$

Der Punkt D ist derart zu bestimmen, dass

$$m = 120^0,\ n = 150^0,\ \text{folglich}\ v = 90^0.$$

Mittelst obiger Werthe findet man:

N	=	34^0	$13'$	$43''.8$	E_α =		$0'$	$35{\cdot}''2$
u_1	=	9	19	37·1	E_β =		0	32·3
v_1	=	24	54	6·7	E_γ =		1	28·4
x_1	=	32	4	57·5	m' =	119^0	$59'$	$48{\cdot}''3$
y_1	=	57	55	2·5	n' =	149	59	49·2
r_1	=	20	40	22·9	N' =	34	13	36·9
s_1	=	35	5	53·3	u' =	9	19	36·7
					v' =	24	54	0·2
endlich u	=	9^0	$19'$	$47''{\cdot}5$	v =	24^0	$54'$	$11''{\cdot}9$

Berechnet man mittelst dieser Werthe beide Theile der Gleichung 4.), so stimmen deren Logarithmen bis zur 7. Decimalstelle überein und ebenso wird die Gleichung 3.) durch die Werthe $x = A - u = 32''\ 5'\ 39{\cdot}''1$ und $y = B - v = 57^0\ 55'\ 49''{\cdot}3$ erfüllt.