Ueber das Verhältniss des loxodromischen Weges zum sphärischen.

Von Dr. **Karl Friesach.**

Es seien m, m_1 zwei Punkte der hier kugelförmig angenommenen Erdoberfläche, φ, φ_1 und Φ, Φ_1 ihre geographischen und vergrösserten Breiten, λ ihr Längenunterschied, α und β ihr loxodromischer und sphärischer gegenseitiger Abstand, deren letzterer als eine gegebene, constante Grösse betrachtet werden soll, endlich, Kürze halber, $\varphi - \varphi_1 = \delta$, $\Phi - \Phi_1 = D$, so gelten die Gleichungen

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta - \sin\varphi_1 \sin\varphi}{\cos\varphi_1 \cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.)$$

$$\alpha = \frac{\delta}{D} \sqrt{\lambda^2 + D^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2.)$$

λ und β werden hier als positive innerhalb der Grenzen o und π liegende Grössen betrachtet. δ und D haben stets das nämliche Zeichen, und unter $\sqrt{\lambda^2 + D^2}$ ist immer die positive Wurzel zu verstehen.

α erscheint hier als eine Function der beiden Veränderlichen φ und φ_1. Lässt man aber m_1 einen fixen Punkt der Kugeloberfläche sein, so hängt α nur von der einen Veränderlichen φ ab. Da es gleichgiltig ist, welchen Pol man als den positiven annimmt, betrachte ich hier φ_1 stets als eine positive Grösse. Aus 1.) folgt

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(\varphi - \varphi_1) - \cos\beta}{2\cos\varphi_1 \cos\varphi}} \\
\cos\frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos\beta}{2\cos\varphi_1 \cos\varphi}} \\
tg.\,\frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(\varphi - \varphi_1) - \cos\beta}{\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos\beta}} \\
\sin\lambda &= \frac{\sqrt{[\cos(\varphi - \varphi_1) - \cos\beta][\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos\beta]}}{\cos\varphi_1 \cos\varphi}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad 3.)$$

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi_1 - \cos\beta\,\sin\varphi}{\cos\varphi_1\,\cos\varphi^2\,\sin\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4.)$$

Ferner ist $\Phi = l\,tg.\,(45^0 + \frac{\varphi}{2}) = l\,\frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi}$

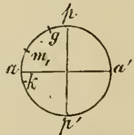
$$\frac{dD}{d\varphi} = \frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5.)$$

Endlich folgt aus 2.)

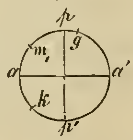
$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{D^3 + \delta D \lambda \frac{d\lambda}{d\varphi} - \lambda^2 (\frac{\delta}{\cos\varphi} - D)}{D^2 \sqrt{\lambda^2 + D^2}} \quad \ldots \quad 6.)$$

Indem φ alle mit der Gleichung 2.) vereinbarten Werthe durchläuft, beschreibt m um m_1 einen Kreis, der von dem Meridiane des Punktes m_1 halbirt wird. An den Durchschnittspunkten hat φ seinen kleinsten und seinen grössten Werth, die ich durch φk und φg bezeichne und ist, je nach den Werthen von φ_1 und β, entweder $\lambda = o$ oder $\lambda = \pi$. In dieser Beziehung sind die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

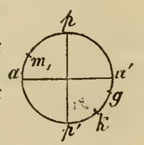
I. $\beta < \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \quad \begin{cases} \varphi k = \varphi_1 - \beta & \lambda = o \\ \varphi g = \varphi_1 + \beta & \lambda = o \end{cases}$



II. $\frac{\pi}{2} - \varphi_1 < \beta < \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \begin{cases} \varphi k = \varphi_1 - \beta & \lambda = o \\ \varphi g = \pi - \varphi_1 - \beta & \lambda = \pi \end{cases}$



III. $\beta > \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \begin{cases} \varphi k = \beta - \varphi_1 - \pi & \lambda = \pi \\ \varphi g = \pi - \varphi_1 - \beta & \lambda = \pi \end{cases}$



In den beigesetzten Figuren bedeutet der Kreis den Erdmeridian des Punktes m_1, pp' die Erdachse, aa' den Aequator k und g den Punkt m in jenen Lagen, wo $\varphi = \varphi k$ und $\varphi = \varphi g$.

Für $\lambda = o$, ist $\alpha = \beta$, folglich ein Minimum; für $\lambda = \pi$ aber ist α ein Maximum, wie aus Folgendem erhellt.

Indem φ und λ sich gleichzeitig ihren Grenzwerthen — d. i. φk oder φg und π — unendlich nähern, wird das zweite Glied des Ausdruckes für $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ (s. Gl. 6.) unendlich gross, während die übrigen Glieder endliche Werthe behalten. Da aber der Nenner nur positiv sein kann und diess auch von dem Producte $dD\lambda$ gilt, so haben, in diesem Falle, $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ und $\frac{d\lambda}{d\varphi}$ das nämliche Zeichen. Nun ist für $\varphi = \pi - \varphi_1 - \beta$:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = - \frac{\sin \beta}{\cos \varphi_1 \cos (\varphi_1 + \beta) \sin \lambda} > o, \text{ wegen } \varphi_1 + \beta > \frac{\pi}{2}$$

und für $\varphi = \beta - \varphi_1 - \pi$:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\sin \beta}{\cos \varphi_1 \cos (\beta - \varphi_1) \sin \lambda} < o, \text{ wegen } \beta - \varphi_1 > \frac{\pi}{2}$$

α ist also im Wachsen, wenn sich m sehr nahe bei g, im Abnehmen aber, wenn es sich sehr nahe bei k befindet. Da aber φ an diesen Punkten seinen grössten und seinen kleinsten Werth hat, so findet in beiden Fällen ein Maximum statt.

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass, indem sich m auf seinem Kreise, von k nach g bewegt, der loxodromische Bogen α, im Falle *I* mindestens einmal ein Maximum, im Falle *III* aber mindestens einmal ein Minimum werden muss. Diese und sämmtliche sonst noch etwa ausserhalb des Meridians von m_1 vorhandene Minima und Maxima müssen der Gleichung $\frac{d\alpha}{d\varphi} = o$ Genüge leisten. Leider ist diese Gleichung solcher Art, dass sie keine allgemeine Auflösung nach φ gestattet. Nur das Eine lässt sich leicht aus 6) ableiten, dass im Allgemeinen für $\varphi = \varphi_1$, α kein Maximum sein kann, es wäre denn $\varphi g = \varphi_1$, d. i. $\varphi_1 = \frac{\pi - \beta}{2}$.

Denn in diesem Falle nimmt $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ die Form $\frac{o}{o}$ an und kann der Werth dieses Bruches auf die bekannte Art durch Differentiiren des Zählers und des Nenners bestimmt werden. Aus 6.) folgt

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{D}{\sqrt{\lambda^2 + D^2}} + \frac{\delta\lambda \frac{d\lambda}{d\varphi}}{D\sqrt{\lambda^2 + D^2}} - \frac{\lambda^2 (\delta - D \cos \varphi)}{D^2 \cos \varphi \sqrt{\lambda^2 + D^2}}$$

Setzt man $\varphi = \varphi_1$, so verschwindet das erste Glied dieses Ausdruckes; das zweite verwandelt sich in

$$\frac{\delta \dfrac{d\lambda}{d\varphi}}{D} = \cos \varphi_1 \frac{d\lambda}{d\varphi},$$

und das dritte in $-\dfrac{\lambda (\delta - D \cos \varphi)}{D^2 \cos \varphi}$

Nun ist $\dfrac{\delta - D \cos \varphi}{D^2 \cos \varphi} = \dfrac{D \sin \varphi}{2 D - D^2 \sin \varphi} = \dfrac{\sin \varphi_1}{2}$

Man hat sonach

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \cos \varphi_1 \frac{d\lambda}{d\varphi} - \frac{\lambda \sin \varphi_1}{2}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 3.) und 4.) ist aber

$$\cos \varphi_1 \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi_1 (1 - \cos \beta)}{\sqrt{(1 - \cos \beta)(\cos 2\varphi_1 + \cos \beta)}}$$

$$= \sin \varphi_1 \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{\cos 2\varphi_1 + \cos \beta}} = \sin \varphi_1 \, tg. \frac{\lambda}{2}$$

Es ist daher auch

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \sin \varphi_1 \left(tg. \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)$$

Dieser Ausdruck kann nur positiv sein. Für $\varphi = \varphi_1$, befindet sich daher α im Zustande des Wachsens und muss für einen Werth $\varphi > \varphi_1$ ein Maximum werden. Nur in dem genannten Ausnahmsfalle, wo $\varphi_1 = \dfrac{\pi - \beta}{2}$, findet, für $\varphi = \varphi_1$ ein Maximum statt.

Da es mir nicht gelang, sämmtliche Minima und Maxima des loxodromischen Bogens α aus der Gleichung $\dfrac{d\alpha}{d\varphi} = o$ abzuleiten, entschloss ich mich, den empirischen Weg einzuschlagen. Für ein gegebenes β berechnete ich zahlreiche Werthe von α, die ich, in Seemeilen oder Bogenminuten ausgedrückt, nach den Argumenten φ_1 und φ geordnet, in Tabellen zusammenstellte. (S. die beigegebenen Tabellen) Die Horizontalreihen dieser Tabellen zeigen keine anderen Minima und Maxima, als die schon betrachteten, wofern $2 \varphi_1 > \beta$. Im entgegengesetzten Falle aber tritt an der Stelle, wo $\varphi = - \varphi_1$, ein neues Minimum auf, was, in den Fällen *I* und *II*, nothwendig ein Maximum zwischen $\varphi = k$ und $\varphi = - \varphi_1$ zur Folge hat. Jenes Minimum betreffend, kann leicht bewiesen werden, dass dasselbe nicht allgemein für $\varphi = -\varphi_1$ statthaben könne. Denn, wäre diess der Fall, so müsste $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, wenn man in diesem Ausdrucke $\varphi = -\varphi_1$ setzt, für jeden Werth von φ_1 verschwinden, oder es müsste

$$\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{\varphi}{cos\ \varphi} - \Phi\right) + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\varphi\ \Phi\ sin\ \varphi}{cos\ \varphi \sqrt{1-2\ sin\ \varphi^2}} - \Phi^3 = o,$$

wobei $cos\ \frac{\lambda}{2} = \frac{cos\ \frac{\beta}{2}}{cos\ \varphi}$, eine identische Gleichung sein. Da aber diess nicht der Fall ist, obgleich obiger Ausdruck immer einen sehr kleinen Werth hat, auch dann, wenn man φ, Φ, λ in Bogenminuten angibt, wodurch sie grosse Zahlwerthe annehmen können, beweisen jene Tabellen nur, dass das in Rede stehende Minimum in der Nähe von $\varphi = \varphi_1$ liegen müsse.

Nachdem ich mich umsonst bemüht hatte, dieses Minimum durch Reihen analystisch nachzuweisen, gelang mir der Nachweis endlich dadurch, dass ich in die Gl. 2.) anstatt der geographischen Breiten φ und φ_1, deren Summe und Differenz einführte.

Setzt man $\varphi_1 + \varphi = s$, $\varphi - \varphi_1 = \delta$, so ist $\varphi = \frac{s+\delta}{2}$ und $\varphi_1 = \frac{s-\delta}{2}$, und ergeben sich nachstehende Gleichungen:

$$D = l\ tg.\ \left(45^0 + \frac{s+\delta}{4}\right) - l\ tg.\ \left(45^0 + \frac{s-\delta}{4}\right) \quad . \quad 7.)$$

$$\frac{dD}{ds} = \frac{1}{2\ cos\ \frac{s+\delta}{2}} - \frac{1}{2\ cos\ \frac{s-\delta}{2}} = \frac{2\ sin\ \frac{s}{2}\ sin\ \frac{\delta}{2}}{cos\ \delta + cos\ s} \quad 8.)$$

$$\left.\begin{aligned} sin\ \frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{cos\ \delta - cos\ \beta}{cos\ \delta + cos\ s}} \\ cos\ \frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{cos\ s + cos\ \beta}{cos\ \delta + cos\ s}} \\ tg.\ \frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{cos\ \delta - cos\ \beta}{cos\ s + cos\ \beta}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9.)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{sin\ s}{cos\ \delta + cos\ s}\sqrt{\frac{cos\ \delta - cos\ \beta}{cos\ s + cos\ \beta}} = \frac{sin\ s\ tg.\ \frac{\lambda}{2}}{cos\ \delta + cos\ s} \quad 10.)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\delta\lambda}{D\sqrt{\lambda^2 + D^2}}\left(\frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{D}\,\frac{dD}{ds}\right) \quad . \quad . \quad 11.)$$

$$\frac{dD}{d\delta} = D' = \frac{2\,cos\,\frac{s}{2}\,cos\,\frac{\delta}{2}}{cos\,\delta + cos\,s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12.)$$

$$\frac{d^2D}{d\delta^2} = D'' = \frac{2\,cos\,\frac{s}{2}\,sin\,\frac{\delta}{2}\left(sin\,\frac{s^2}{2} + cos\,\frac{\delta^2}{2}\right)}{(cos + cos\,\delta)^2} \quad . \quad 13.)$$

$$\frac{d\lambda}{d\delta} = \lambda' = -\frac{cot\,\frac{\lambda}{2}\,sin\,\frac{\delta}{2}}{cos\,\delta + cos\,s}$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\delta^2} = \lambda'' = -\frac{cot\,\frac{\lambda}{2}}{cos\,\delta + cos}\left(1 + cos\,s\,cos\,\delta + \frac{sin\,\delta^2}{2\,sin\,\frac{\lambda^2}{2}}\right) \quad 14.)$$

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{D^3 + \delta D\lambda\lambda' + \lambda^2(D - \delta D')}{D^2\sqrt{\lambda^2 + D^2}} \quad . \quad . \quad . \quad 15.)$$

Da, wie leicht einzusehen, α unverändert bleibt, wenn s oder δ sein Zeichen ändert, können s und δ immer als positive, zwischen den Grenzen o und π enthaltene Grössen angesehen werden.

Für $s = o$, wird $\frac{dD}{ds} = o$ und $\frac{d\lambda}{ds}$, folglich auch $\frac{d\alpha}{ds} = o.$

Es lässt sich nun zeigen, dass $\frac{d\alpha}{ds}$ nur positiv sein kann. Wie (aus 11.) ersichtlich, stimmt das Zeichen von $\frac{d\alpha}{ds}$ mit demjenigen des in der Klammer stehenden Ausdruckes überein, welcher jedoch stets positiv ist. Denn, mit Rücksicht auf 8.) und 10.) ist

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{D}\,\frac{dD}{ds} = \frac{sin\,s\,tg\,\frac{\lambda}{2} - \frac{2\lambda}{D}\,sin\,\frac{s}{2}\,\sin\,\frac{\delta}{2}}{cos\,\delta + cos\,s}$$

$$= \frac{2\,sin\,\frac{s}{2}}{cos\,\delta + cos\,s}\left(cos\,\frac{s}{2}\,tg\,\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{D}\,sin\,\frac{\delta}{2}\right) \quad . \quad 16.)$$

und da $sin\,\frac{s}{2}$ und $cos\,\delta + cos\,s = 2\,cos\,\frac{s+\delta}{2}\,cos\,\frac{s-\delta}{2}$

$= \cos\varphi \cos\varphi_1$ nur positiv sein können, hat $\frac{d\alpha}{d\delta}$ das Zeichen des in 16.) in der Klammer stehenden Factors oder des Ausdruckes $\cos\frac{s}{2} - \frac{\frac{\lambda}{2}}{tg\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{D}$, welcher positiv ist, wenn $\cos\frac{s}{2} > \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{D}$. Dass Letzteres wirklich der Fall ist, kann auf folgende Art bewiesen werden:

Da D, für $\delta = o$, verschwindet, ist $D = \int_o^\delta D' d\delta$

$$= \int_o^\delta \frac{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\delta + \cos s} > \int_o^\delta \frac{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{\delta}{2}\, d\delta}{1 + \cos s} =$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{s}{2}} \int_o^\delta \cos\frac{\delta}{2}\, d\delta = \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{s}{2}}$$

Es ist also $D > \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{s}{2}}$ oder $\cos\frac{s}{2} > \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{D}$, w. z. B. w.

$\frac{d\alpha}{ds}$ ist also immer positiv, d. h. α wächst bei constanten δ, zugleich mit s, und erlangt, zugleich mit diesem, den kleinsten und grössten Werth. Das Minimum von α findet daher statt für $s = o$, das Maximum, für $s = \pi - \beta$. Dass s den Werth $\pi - \beta$ nicht überschreiten kann, ergibt sich aus der Gleichung $tg\frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{\cos\delta - \cos\beta}{\cos s + \cos\beta}}$, welche zeigt, dass λ mit zunehmendem s fortwährend wächst, und, für $s = \pi - \beta$, seinen grössten Werth, d. i. π, annimmt.

Das Minimum für $s = o$ erklärt nun auch das in den Horizontalreihen der Tabellen, bei $\varphi = -\varphi_1$, auftretende Minimum. In diesen Tabellen entsprechen die der Geraden $\left\{\begin{matrix} a\,b \\ c\,d \end{matrix}\right.$

parallelen Diagonalreihen einem constanten $\left\{\begin{matrix} d \\ s \end{matrix}\right.$, und liegen die Minima der mit ab parallelen Diagonalreihen sämmtlich in der Diagonalreihe cd. Da nun diese Minima sämmtlich klein sind, und dem kleinstmöglichen Werthe, d. i. β, nahe kommen, so begreift man, dass auch die Horizontalreihen in der Nähe der zuletzt genannten Diagonalreihe im Allgemeinen ein Minimum zeigen werden.

Minder durchsichtig, als bei constantem δ, ist das Verhalten von α, bei constantem s, indem $\frac{d\alpha}{d\delta}$ sowohl positiv als negativ sein kann.

Für $\delta = o$, wird auch $\frac{d\alpha}{d\delta} = o$. Denn in diesem Falle ergibt sich aus den Gleichungen 12.)—15.):

$$\left.\begin{aligned} D' &= \frac{1}{\cos\frac{s}{2}} \\ D'' &= o \\ \lambda' &= o \\ \lambda'' &= -\frac{\cot\frac{\lambda}{2}}{2\cos\frac{s^2}{2}} \end{aligned}\right\} \quad . \qquad 17.)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{D} &= \frac{1}{D'} = \cos\frac{s}{2} \\ \frac{\lambda'}{D} &= -\frac{\cot\frac{\lambda}{2}}{2\cos\frac{s}{2}} \\ \frac{D''}{D} &= \frac{1+\sin\frac{s^2}{2}}{4\cos\frac{s^2}{2}} \end{aligned}\right\} \quad . \qquad 18.)$$

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{D^3 + \delta D\lambda\lambda' + \lambda^2(D - \delta D')}{\lambda D^2}$$

$$= \frac{D}{\lambda} + \frac{\delta\lambda'}{D} + \frac{\lambda(D - \delta D')}{D^2}$$

Die beiden ersten Glieder verschwinden, und wegen $\frac{D - \delta D'}{D^2} = -\frac{\delta D''}{2DD'}$, verschwindet auch das dritte.

Bei constantem s, wird daher α, für $\delta = o$, entweder ein Minimum oder ein Maximum. Ob das Eine oder das Andere der Fall ist, hängt von den Werthen s und β ab, und kann die hierüber entscheidende Relation auf folgende Art gefunden werden:

Offenbar findet hier ein Minimum oder ein Maximum statt, je nachdem $\frac{d^2\alpha}{d\delta^2}$ positiv oder negativ ausfällt. Wenn man die

Gleichung 15.) nach δ differentiirt, erhält man eine Reihe von Brüchen, welche man auf den gemeinschaftlichen Nenner $D^3\ (\lambda^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}$ bringen kann, worauf dieselben, indem man $\delta = o$ setzt, sämmtlich die Form $\frac{o}{o}$ annehmen, da sowohl der gemeinschaftliche Nenner, als sämmtliche Zähler verschwinden. Betrachtet man δ als eine kleine Grösse erster Ordnung, so erweisen sich auch D, λ', D'' als kleine Grössen erster Ordnung. Bei der Bestimmung des Werthes der unter der Form $\frac{o}{o}$ erscheinenden Brüche, können nun alle Zählerglieder, deren Ordnungszahl bezüglich der Grössen δ, D, λ', D'', die Ordnungszahl des Nenners — d. i. 3 — überschreitet, weggelassen werden, worauf nach gehöriger Reduction nur folgende Zählerglieder übrig bleiben:

$$2\lambda^4 D'\ (\delta D' - D) - \lambda^4 \delta D D'' + \lambda^3 D\ (2 D\lambda' - 2\delta D'\lambda' +$$
$$+ 3\delta D\lambda'') + \lambda^2 D^2 D'\ (3\delta D' - 2D).$$

Für $\delta = o$, wird der Nenner gleich $\lambda^3 D^3$, und hat man

$$\frac{d^2\alpha}{d^2} = \frac{2\lambda\, D'\ (\delta D' - D)}{D^3} - \frac{\lambda\delta D''}{D^2} + \frac{2\lambda'}{D}$$
$$- 2D'.\frac{\delta\lambda'}{D^2} + \lambda''.\frac{\delta}{D} + \frac{D'}{\lambda}(3D'.\frac{\delta}{D} - 2).$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\delta D' - D}{D^3} = \frac{\delta D''}{3 D' D^2}$, so erhält man mit Hilfe der Gleichung 18.):

$$\frac{d^2\alpha}{d\delta^2} = \frac{12 - 6\lambda\ cot\ \frac{\lambda}{2} - \lambda^2\ (1 + sin\ \frac{s^2}{2})}{12\lambda\ cos\ \frac{s}{2}}. \qquad 19.)$$

wo $sin\ \frac{\lambda}{2} = \frac{sin\ \frac{\beta}{2}}{cos\ \frac{s}{2}}$.

Es findet also ein Minimum oder Maximum statt, je nachdem der Zähler des Bruches 19.) positiv oder negativ ist.

Man folgert hieraus, dass für kleine β und s, weil dann $cos\ \frac{\lambda}{2}$ sehr gross, der Fall des Maximums, dass hingegen, wenn β wenig von π verschieden ist, jener des Minimums eintritt.

Wie oben gezeigt wurde, fällt bei constantem δ, das Maximum von α mit $s = \pi - \beta$ und $\lambda = \pi$ zusammen, und da dies für jeden Werth δ gilt, so sind sämmtliche Maxima in der Formel

$$A = \frac{\delta}{D}\sqrt{\pi^2 = D^2}, \text{wo } D = l\frac{1 + cos\frac{\beta - \delta}{2}}{sin\frac{\beta - \delta}{2}} - l\frac{1 + cos\frac{\beta + \delta}{2}}{sin\frac{\beta + \delta}{2}}$$

begriffen, unter welchen sich auch der grösste Werth, welchen α überhaupt erreichen kann, befindet. Es lässt sich nun leicht beweisen, dass dieser grösstmögliche Werth nur dann für $\delta = o$ stattfinden könne, wenn $\beta \gtrless 124^0\ 37'\ 9''$.

Denn, setzt man in 19.) $\lambda = \pi$, so hat man

$$\frac{d^2 A}{d\delta^2} = \frac{12 - \pi^2 \left(1 + cos\ \frac{\beta^2}{2}\right)}{12\pi\ sin\frac{\beta}{2}}\ .$$

An der Grenze, wo das Maximum mit dem Minimum wechselt, ist daher $12 - \pi^2 \left(1 + cos\ \frac{\beta^2}{2}\right) = o$, oder

$$cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{12 - \pi^2}}{\pi}, \text{ woraus } \frac{\beta}{2} = 62^0 18.' 9'', \beta = 124^0 37' 8''.$$

Uebersteigt β diesen Grenzwerth, so wird A ein Minimum und liegt der grösstmöglichste Werth A zwischen $\delta = o$ und $\delta = \beta$. Hieher gehört auch der Fall $\beta = \pi$, wo s constant gleich o ist und das Maximum für $\delta = 164^0\ 4'.5$, d. i. für $\varphi = - \varphi_1 = 82^0\ 2'.2$ stattfindet.

$\alpha = 40^\circ = 2400'$

φ_1	φ +90°	+80°	+70°	+60°	+50°	+40°	+30°	+20°	+10°	0°	−10°	−20°	−30°	−40°
+90°	—	—	—	—	2400									
80	—	—	—	3575	2582	2400								
70	—	—	3694	2724	2550	2458	2400							
60	—	3575	2724	2584	2496	2463	2426	2400						
50	2400	2582	2550	2496	2480	2453	2429	2412	2400					
40	—	2400	2458	2463	2453	2443	2422	2413	2405	2400				
30	—	—	2400	2426	2429	2422	2417	2412	2406	2402	2400			
20	—	—	—	2400	2412	2413	2412	2407	2404	2402	2401	2400		
10	—	—	—	—	2400	2405	2406	2404	2402	2400	2400	2401	2400	
0	—	—	—	—	—	2400	2402	2402	2400	2400	2400	2402	2402	2400

$\alpha = 90^\circ = 5400'$

φ_1	+90°	+80°	+70°	+60°	+50°	+40°	+30°	+20°	+10°	0°	−10°	−20°	−30°	−40°	−50°	−60°	−70°	−80°	−90°
+90°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5400									
80	—	—	—	—	—	—	—	—	7223	5711	5400								
70	—	—	—	—	—	—	—	7464	5993	5665	5495	5400							
60	—	—	—	—	—	—	7583	6119	5795	5605	5498	5436	5400						
50	—	—	—	—	—	7637	6177	5840	5658	5540	5475	5434	5411	5400					
40	—	—	—	—	7637	6193	5854	5679	5566	5495	5447	5421	5409	5404	5400				
30	—	—	—	7583	6177	5854	5688	5578	5503	5455	5424	5410	5407	5409	5411	5400			
20	—	—	7464	6119	5840	5679	5578	5505	5458	5423	5407	5404	5410	5421	5434	5436	5400		
10	—	7223	5993	5795	5658	5566	5503	5458	5423	5407	5402	5407	5424	5447	5475	5498	5495	5400	
0	5400	5711	5665	5605	5540	5495	5455	5423	5407	5400	5407	5423	5455	5495	5540	5605	5665	5711	5400

$\alpha = 120^\circ = 7200'$

φ_1	φ: +60°	+50°	+40°	+30°	+20°	+10°	0°	−10°	−20°	−30°	−40°	−50°	−60°	−70°	−80°	−90°
+90°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7200						
80	—	—	—	—	—	—	—	—	9031	7511	7200					
70	—	—	—	—	—	—	—	9237	7762	7438	7277	7200				
60	—	—	—	—	—	—	9312	7859	7523	7356	7269	7260	7200			
50	—	—	—	—	—	9342	7780	7557	7409	7290	7244	7230	7260	7200		
40	—	—	—	—	9348	7915	7569	7387	7288	7236	7230	7244	7269	7277	7200	
30	—	—	—	9353	7926	7575	7389	7284	7263	7222	7236	7290	7356	7438	7511	7200
20	—	—	9348	7926	7573	7385	7279	7225	7210	7263	7288	7409	7523	7762	9031	
10	—	9342	7915	7575	7385	7276	7220	7203	7225	7284	7387	7557	7859	9237		
0	9312	7780	7569	7389	7279	7220	7200	7220	7279	7389	7569	7780	9312			

$\alpha = 150^\circ = 9000'$

φ_1	φ: +30°	+20°	+10°	0°	−10°	−20°	−30°	−40°	−50°	−60°	−70°	−80°	−90°
+90°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9000			
80	—	—	—	—	—	—	—	—	10555	9243	9000		
70	—	—	—	—	—	—	—	10604	9393	9163	9080	9000	
60	—	—	—	—	—	—	10575	9396	9185	9132	9163	9242	9000
50	—	—	—	—	—	10526	9385	9165	9118	9185	9393	10555	
40	—	—	—	—	10480	9355	9134	9085	9165	9396	10600		
30	—	—	—	10446	9334	9103	9054	9134	9385	10575			
20	—	—	10436	9317	9087	9038	9103	9355	10526				
10	—	10436	9308	9070	9005	9087	9334	10480					
0	10446	9317	9030	9000	9070	9317	10446						