

# Ueber die Loxodromie und loxodromische Figuren.

Von Dr. K. Friesach.

a.) Es sei  $k$  der Winkel, unter welchem eine Loxodromie sämmtliche Kugel-Meridiane schneidet,  $m$  ein beliebiger Punkt derselben,  $\lambda$ ,  $\varphi$  und  $\Phi$  dessen Länge, Breite und vergrösserte Breite,  $\Delta\sigma$  ein beliebiges Stück der Loxodromie,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta\varphi$  und  $\Delta\Phi$  der Unterschied der Längen, Breiten und vergrösserten Breiten seiner Grenzpunkte, so ist

$$1.) \operatorname{tg} k = \frac{\cos \varphi d\lambda}{d\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\Phi}$$

$$2.) \cos k = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}, \text{ wobei ich } \Delta\lambda \text{ und } \Delta\sigma \text{ stets positiv annehme;}$$

$$3.) \Phi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = l \cdot \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{\varphi}{2}) = l \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \\ = l \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = l \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}}$$

Für  $\varphi = 90^\circ$ , ist  $\Phi = \infty$ . Soll daher der Bogen  $\Delta\sigma$  bis an den Pol reichen, so ist für jedes endliche  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\Phi$  unendlich gross, und folgt aus 1.) auch  $\Delta\lambda = \infty$ . Hieraus erhellt, dass jede Loxodromie, welche weder mit einem Meridiane noch mit einem Parallelkreise zusammenfällt, d. h. deren  $k$  weder verschwindet noch  $90^\circ$  beträgt, die Pole in zahllosen Windungen umlaufend, sich denselben ohne Ende nähert. Obgleich man sich hiernach eine solche Loxodromie als eine gegen die Pole hin unbegrenzte Linie vorzustellen hat, kann doch ihre Länge, wie aus der Gleichung 2.) ersichtlich, den Grenzwert  $\frac{\pi}{\cos k}$  nicht überschreiten.

Auf der Mercator- oder Seekarte wird die Projection des Punktes  $m$  durch die rechtwinkeligen Coordinaten  $\lambda$  und  $\Phi$  bestimmt, woraus, mit Bezug auf die Gleichungen 1.) und 2.), zu ersehen ist, dass, in einer derartigen Karte, nicht nur die Meridiane und Parallelkreise, sondern auch die Loxodromien durch Gerade dargestellt werden.

Es sei  $\Delta \Sigma$  die Abbildung des loxodromischen Bogens  $\Delta \sigma$  in der Seekarte, so ist  $\cos k = \frac{\Delta \Phi}{\Delta \Sigma}$ . Mit Rücksicht auf 2.)

folgt hieraus:

$$4.) \frac{\Delta \sigma}{\Delta \Sigma} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta \Phi}.$$

Für  $\Delta \varphi = 0$ , in welchem Falle  $\Delta \sigma$  in einen Parallelbogen übergeht, ist auch  $\Delta \Phi = 0$ , und wird

$$5.) \frac{\Delta \sigma}{\Delta \Sigma} = \frac{0}{0} = \cos \varphi,$$

wo  $\varphi$  die den Grenzpunkten von  $\Delta \sigma$  gemeinschaftliche Breite bezeichnet.

Wenn  $ds$  das Element irgend einer auf der Kugelfläche verzeichneten Kurve,  $dS$  dessen Projection in der Seekarte bedeutet, so ist

$$ds = \sqrt{\cos^2 \varphi^2 d\lambda^2 + d\varphi^2}, \quad dS = \sqrt{d\lambda^2 + d\Phi^2};$$

folglich, wegen  $d\Phi = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$ :

$$\frac{ds}{dS} = \cos \varphi.$$

Der Quotient  $\frac{ds}{dS}$  ist sonach von  $d\lambda$  und  $d\varphi$  unabhängig, was zur Folge hat, dass die Seekartenprojection zu den conformen Entwerfungsarten gehört, in welchen sich die Abbildungen der auf der Kugelfläche verzeichneten Curven unter den nämlichen Winkeln schneiden, wie deren Originale auf der Kugel. Hieraus und aus dem Umstande, dass die Loxodromien in der Seekarte durch Gerade dargestellt werden, erhellt, dass loxodromische und ebene geradlinige Figuren manche Eigenschaften mit einander gemein haben müssen, und dass alle jene Sätze von den geradlinigen Figuren, welche unabhängig von irgend einem

Seitenverhältnisse, Geltung haben, auch auf die loxodromischen Figuren Anwendung finden.

b) Mit Rücksicht auf das eben Gesagte, bedürfen die hier folgenden und zahlreiche andere Lehrsätze weiter keines Beweises:

In einem loxodromischen Dreiecke beträgt die Winkelsumme  $180^\circ$  und ist der äussere Winkel gleich der Summe seiner inneren Gegenwinkel. Dieser Satz findet nur dann nicht statt, wenn zwei Seiten des Dreieckes Meridianbögen sind und daher in einem der auf der Seekarte nicht darstellbaren Kugelpole zusammentreffen.

Wenn zwei Loxodromien von einer dritten derart geschnitten werden, dass die an derselben Seite der schneidenden befindlichen inneren oder äusseren Winkel zusammen  $180^\circ$  betragen, so können erstere, wofern sie nicht mit Meridianen zusammenfallen, nirgends zusammentreffen. Solche Loxodromien nenne ich „parallel“.

Bei parallelen Loxodromien, welche von einer Loxodromie geschnitten werden, ist jeder äussere Winkel seinem inneren Gegenwinkel, und sind die inneren wie die äusseren Wechselwinkel gleich, wie bei parallelen Geraden.

Obgleich parallele Loxodromien einander weder schneiden noch berühren können, nimmt ihr Abstand, mit der Annäherung an die Pole ab, und wird in unendlich kleinem Abstände von diesen, selbst unendlich klein.

Die aus den Ecken eines loxodromischen Dreieckes auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten loxodromischen Lothe schneiden sich in Einem Punkte.

Dasselbe gilt von den loxodromischen Halbierungslinien der drei Winkel.

Wenn die loxodromischen Strahlen  $OA, OB, OC$  etc. von zwei anderen loxodromischen Strahlen  $PX$  und  $PY$  in den Punkten  $\alpha$  und  $\alpha', \beta$  und  $\beta', \gamma$  und  $\gamma'$  etc. geschnitten werden, so begegnen sich die loxodromischen Diagonalen  $\alpha\beta'$  und  $\alpha'\beta, \beta\gamma'$  und  $\beta'\gamma, \gamma\delta'$  und  $\gamma'\delta$  etc. in Punkten, welche zu Einer zugleich den Punkt  $P$  enthaltenden Loxodromie gehören.

Wenn die Punkte 1, 2, 3 und I, II, III zu zwei verschiedenen Loxodromien gehören, so liegen die Durchschnittspunkte

der Loxodromien 1 II und 2 I, 2 III und 3 II, 3 I und 1 III gleichfalls in Einer Loxodromie.

Wenn zwei parallele Loxodromien  $A$  und  $B$ , von anderen parallelen Loxodromien in den Punkten  $\alpha, \alpha', \alpha''$  etc. und  $\beta, \beta', \beta''$ , etc. geschnitten werden, so entspricht den Punkten  $\alpha$  und  $\beta, \alpha'$  und  $\beta', \alpha''$  und  $\beta''$  etc. ein constanter Längenunterschied.

*c)* Loxodromische Dreiecke, in welchen eine Seite ein Parallelbogen ist, haben mit den geradlinigen Dreiecken auch manche Sätze, in welchen das Seitenverhältniss zum Ausdrucke kommt, gemein. Kürze halber nenne ich solche Dreiecke „Zonendreiecke“ und bezeichne immer die Parallelbogenseite als die Grundlinie, die beiden anderen als die Schenkel des Dreieckes. Zonendreiecke, deren Grundlinien demselben Parallelkreise angehören und deren Spitzen gleichfalls dieselbe Breite zukommt, sollen „Zonendreiecke von gleicher Höhe“ heissen.

Eine vierseitige loxodromische Figur mit parallelen Gegenseiten kann als loxodromisches Parallelogramm bezeichnet werden und als Zoneparallelogramm, wenn zwei Seiten Parallelbögen sind. Diese betrachte ich als die Grundlinien.

In einem Zonendreiecke liegt dem grösseren Schenkel der grössere Winkel gegenüber, und sind, bei gleichen Schenkeln, die Winkel an der Grundlinie gleich.

Beweis: Es sei  $\alpha\beta\gamma$  das Zonendreieck,  $\varphi_0$  die Breite der Grundlinie  $\alpha\beta$ ,  $\varphi_1$ , jene der Spitze  $\gamma$ ,  $abc$  das geradlinige Dreieck, welches in der Mercatorprojection dem Zonendreiecke entspricht, so ist, nach Gleichung 4.):

$$ca = \gamma\alpha \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\varphi_1 - \varphi_0}, \quad cb = \gamma\beta \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\varphi_1 - \varphi_0},$$

folglich:  $\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} = \frac{ca}{cb}$ .

Da nun obiger Satz für das Dreieck  $abc$  gilt, und dessen Schenkel jenen des Dreieckes  $\alpha\beta\gamma$  proportional, ausserdem in beiden Dreiecken die Winkel stückweise gleich sind, so gilt derselbe auch für das Zonendreieck.

Die Schenkel eines Zonendreieckes werden von einem Parallelkreise so geschnitten, dass die

Abschnitte des einen jenen des anderen proportional sind.

Beweis: Es seien  $\mu$  und  $\nu$  die Punkte, in welchen die Schenkel  $\gamma\alpha$  und  $\gamma\beta$  von einem Parallelkreise in der Breite  $\varphi$  geschnitten werden,  $m$  und  $n$  deren Projectionen in der Mercatorkarte, folglich die Gerade  $mn$  die Projection des Parallelbogens  $\mu\nu$ , so hat man:

$$cm : ca = cn : cb$$

Aber nach dem Vorigen ist

$$cm : cn = \gamma\mu : \gamma\nu,$$

$$ca : cb = \gamma\alpha : \gamma\beta,$$

folglich auch  $\gamma\mu : \gamma\alpha = \gamma\nu : \gamma\beta$ .

Es folgt hieraus, dass alle, von einem gemeinsamen Punkte ausgehenden loxodromischen Strahlen, von Parallelbögen in demselben Verhältnisse getheilt werden.

Zonendreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis: Es sei  $f$  der Flächeninhalt des Zonendreieckes, so ist, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung:

$$df = \mu\nu \cdot d\varphi.$$

In der Figur  $abc$  sind die Seiten  $mn$  und  $ab$  ihren Abständen von der Spitze  $c$  proportional, d. i.

$$\frac{mn}{ab} = \frac{\Phi_1 - \Phi}{\Phi_1 - \Phi_0} \text{ woraus } mn = ab \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi}{\Phi_1 - \Phi_0};$$

$$\text{daher } \mu\nu = mn \cdot \cos \varphi = ab \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi}{\Phi_1 - \Phi_0}.$$

Für ein anderes Zonendreieck  $a'b'\gamma'$  von derselben Höhe, wäre

$$\mu'\nu' = a'b' \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi}{\Phi_1 - \Phi_0},$$

$$\text{folglich } \frac{f}{f'} = \frac{df}{df'} = \frac{ab}{a'b'}$$

oder auch, da  $ab = \Delta\lambda$ ,  $a'b' = \Delta\lambda'$ , wo  $\Delta\lambda$  und  $\Delta\lambda'$  die den Parallelbögen  $\alpha\beta$  und  $\alpha'\beta'$  entsprechenden Centriwinkel oder die Längenunterschiede der Punkte  $\alpha, \beta$  und  $\alpha', \beta'$  bedeuten:

$$\frac{f}{f'} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda'}.$$

Der Flächeninhalt des Zonendreieckes  $\alpha\beta\gamma$  kann nun auf folgende Art gefunden werden. Offenbar ist

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mu \nu \cdot d\varphi = \Delta\lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\Phi_1 - \Phi}{\Phi_1 - \Phi_0} \cdot \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{\Delta\lambda}{\Phi_1 - \Phi_0} \left\{ \Phi_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos \varphi \, d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Phi \cos \varphi \, d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Aber  $\int \cos \varphi \, d\varphi = \sin \varphi$ , und  $\int \Phi \cos \varphi \, d\varphi = \Phi \sin \varphi -$   
 $-\int \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi} = \Phi \sin \varphi + l \cos \varphi$

daher  $\bar{i} = \Delta\lambda \left( \frac{1}{\Phi_1 - \Phi_0} l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1} - \sin \varphi_0 \right)$ ,

oder, wenn man  $l \frac{1}{\cos \varphi} = \chi$  setzt

6.)  $\bar{i} = \Delta\lambda \left( \frac{\chi_1 - \chi_0}{\Phi_1 - \Phi_0} - \sin \varphi_0 \right)$ .

In einem Zonenparallelogramme sind die Grundlinien, wofern sie nicht zu beiden Seiten des Aequators in gleichen Abständen von demselben liegen, ungleich, die beiden anderen Seiten aber stets gleich.

Denn sind  $\alpha_0\beta_0$  und  $\alpha_1\beta_1$  die Grundlinien des Parallelogrammes,  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  deren Breiten,  $\Delta\lambda$  der gemeinschaftliche Längenunterschied der Punkte  $\alpha_0, \beta_0$  und  $\alpha_1, \beta_1$ ,  $a_0 b_0$  und  $a_1 b_1$  die Abbildungen der Grundlinien auf die Seekarte, so ist in dem geradlinigen Parallelogramme  $a_0 b_0 a_1 b_1$ :

$$a_0 a_1 = b_0 b_1 \text{ und } a_0 b_0 = a_1 b_1 = \Delta\lambda$$

Aber es ist  $\alpha_0 \alpha_1 = a_0 a_1 \cdot \frac{\varphi_1 - \alpha_0}{\Phi_1 - \Phi_0}$  und  $\beta_0 \beta_1 = b_0 b_1 \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Phi_1 - \Phi_0}$

ferner;  $a_0 \beta_0 = \Delta\lambda \cos \varphi_0$  und  $\alpha_1 \beta_1 = \Delta\lambda \cos \varphi_1$ ,

woraus das Gesagte erhellt.

Es folgt hieraus, dass, wenn parallele Loxodromien von Parallelbögen geschnitten werden,

die zwischen denselben Parallelbögen enthaltenen Abschnitte gleich sind, und die zwischen zwei parallelen Loxodromien enthaltenen Parallelbögen sich wie die Cosinuse ihrer Breiten verhalten.

Es sei  $f$  der Flächenraum des Zonenparallelogrammes  $\alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1$ ,  $\alpha \beta$  ein zwischen den Seiten  $\alpha_0 \alpha_1$  und  $\beta_0 \beta_1$  enthaltener Parallelbogen von der Breite  $\varphi$ , so ist

$$df = \alpha \beta \cdot d\varphi = \Delta \lambda \cdot \cos \varphi d\varphi,$$

woraus man sofort erkennt, dass Zonenparallelogramme sich verhalten, wie ihre in demselben Parallelkreise liegenden Grundlinien.

$$\text{Nun ist } f = \Delta \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos \varphi d\varphi = \Delta \lambda (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) \dots 7.)$$

Für  $\varphi_1 = 90^\circ$  geht sowohl das Zonenparallelogramm als das Zonendreieck in einen gegen den Pol hin unbegrenzten loxodromischen Parallelstreifen über, für dessen Flächeninhalt man sowohl aus 7.) wie aus 6.) den Ausdruck  $\Delta \lambda (1 - \sin \varphi_0)$  erhält; d. h. der gegen den Pol hin unbegrenzte Streifen ist gleich dem von zwei um den Winkel  $\Delta \lambda$  von einander abstehenden Meridianen und der Basis des Streifens begrenzten Kugeldreiecke. Befindet sich die Basis des Streifens im Aequator, so wird dessen Flächeninhalt gleich  $\Delta \lambda$ . Der Flächeninhalt des ganzen gegen beide Pole ohne Ende fortgesetzten Streifens kömmt daher jenem eines sphärischen Zweieckes gleich, dessen sphärischer Winkel dem Abstände der beiden parallelen Loxodromien im Aequator entspricht.

Es ist nun der Flächeninhalt eines von zwei Meridianen und einem loxodromischen Bogen gebildeten Dreieckes zu berechnen.

Es seien  $m_0$  und  $m_1$  die Grenzpunkte des loxodromischen Bogens,  $\Delta \lambda$  ihr Längenunterschied,  $P$  einer der Pole, den ich hier als den positiven betrachte, folglich  $Pm_0 = 90^\circ - \varphi_0$ ,  $Pm_1 = 90^\circ - \varphi_1$ ; ferner  $m$  und  $m'$  zwei einander unendlich nahe Punkte der Loxodromie, so kann man das unendlich kleine Dreieck

$P m m'$  als das Differential der Fläche des Dreieckes  $P m_0 m_1$  betrachten. Dieses kleine Dreieck verhält sich aber zu dem ganzen von dem Parallelkreise des Punktes  $m$  begrenzten Kugelabschnitte wie der sphärische Winkel  $m P m'$ , d. i.  $d\lambda$ , zu  $2\pi$  und ist die Oberfläche dieses Kugelabschnittes gleich  $2\pi (1 - \sin\varphi)$ . Man hat daher  $d\bar{f} = (1 - \sin\varphi) d\lambda$ . Nun ist, zufolge der Gl. 1.)  $d\lambda = t g k \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ . Durch Einführung dieses Werthes in die obige Gleichung wird

$$d\bar{f} = t g k (1 - \sin\varphi) \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\bar{f} = t g k \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (1 - \sin\varphi) \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = t g k \left( \Phi_1 - \Phi_0 + l \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} \right)$$

$$\text{Aber } t g k = \frac{\Delta\lambda}{\Phi_1 - \Phi_0} \quad \text{und} \quad l \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} = l \frac{1}{\cos\varphi_1} - l \frac{1}{\cos\varphi_0}$$

Setzt man wieder, wie zuvor,  $l \frac{1}{\cos\varphi} = \chi$ , so wird

$$l \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} = \chi_1 - \chi_0 = \Delta\chi, \quad \text{und hat man:}$$

$$8.) \bar{f} = \Delta\lambda \left( 1 - \frac{\Delta\chi}{\Delta\Phi} \right).$$

Der Aequator wird von den Meridianen  $P m_0$  und  $P m_1$  in zwei Punkten  $\alpha$  und  $\beta$  geschnitten. Liegen nun  $m_0$  und  $m_1$  in derselben Halbkugel, so ist  $m_0 m_1 a b$  ein loxodromischer Rhombus, und hat man

$$m_0 m_1 a b = \pm (P a b - P m_0 m_1),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  zugleich positiv oder negativ sind. Mit Rücksicht auf  $P a b = \Delta\lambda$ , ergibt sich für die Fläche dieses Rhombus die sehr einfache Formel:

$$9.) m_0 m_1 a b = \pm \frac{\Delta\lambda \cdot \Delta\chi}{\Delta\Phi}.$$

Haben aber  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  verschiedene Zeichen, so wird der Aequator von der Loxodromie zwischen  $a$  und  $b$  in einem



Punkte  $o$  geschnitten, und entstehen, statt eines Rhombus, zwei Scheiteldreiecke  $ao m_0$  und  $bo m_1$ . Nun ist, indem man  $\varphi_0 < 0$  und  $\varphi_1 > 0$  annimmt:

$$\frac{ao}{-\Phi_0} = \frac{bo}{\Phi_1} = \frac{ao + bo}{\Phi_1 - \Phi_0} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \Phi}.$$

$$\text{Ferner ist } ao m_0 = -\frac{ao}{\Phi_0} \cdot \chi_0 = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \Phi} \cdot \chi_0$$

$$bo m_1 = +\frac{bo}{\Phi_1} \cdot \chi_1 = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \Phi} \cdot \chi_1$$

$$\text{daher: } bo m_1 \pm ao m_0 = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \Phi} (\chi_1 \pm \chi_0) \dots 10.)$$

Nach dieser Vorbereitung kann nun leicht der Flächeninhalt  $\ddot{f}$  eines loxodromischen Dreieckes berechnet werden. Man verbinde die Ecken  $m_0, m_1$  und  $m_2$  des gegebenen Dreieckes mit dem positiven Pole  $P$ , so ist, wenn  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ :

$$\ddot{f} = \pm P m_0 m_1 \pm P m_1 m_2 \pm P m_0 m_2,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem der Punkt, in welchem  $P m_1$  die Loxodromie  $m_0 m_2$  schneidet, zwischen  $m_1$  und  $P$  oder in die Verlängerung von  $P m_1$  fällt. Mit Rücksicht auf das Vorhergehende, ist sonach:

$$= \pm \frac{(\lambda_1 - \lambda_0) (\chi_1 - \chi_0)}{\Phi_1 - \Phi_0} \pm \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) (\chi_2 - \chi_1)}{\Phi_2 - \Phi_1} \mp \frac{(\lambda_2 - \lambda_0) (\chi_2 - \chi_0)}{\Phi_2 - \Phi_0},$$

was auch so geschrieben werden kann:

$$11.) \ddot{f} = \pm \left\{ \frac{(\lambda_0 - \lambda_1) (\chi_0 - \chi_1)}{\Phi_0 - \Phi_1} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (\chi_1 - \chi_2)}{\Phi_1 - \Phi_2} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_0) (\chi_2 - \chi_0)}{\Phi_2 - \Phi_0} \right\}.$$

Dies ist in Bezug auf die  $\lambda, \gamma, \Phi$ , ein symmetrischer Ausdruck, welcher darum, unabhängig von der Ordnung, in welcher die  $\lambda$  zunehmen, Geltung hat.

Indem man obigen Ausdruck nach den Grössen  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  ordnet, erhält man :

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \pm \left\{ \left( \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\Phi_0 - \Phi_1} - \frac{\lambda_0 - \lambda_2}{\Phi_0 - \Phi_2} \right) \gamma_0 + \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Phi_1 - \Phi_2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\Phi_1 - \Phi_0} \right) \gamma_1 + \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\Phi_2 - \Phi_0} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Phi_2 - \Phi_1} \right) \gamma_2 \right. \\ &= \mp \left( \lambda_0 \Phi_1 - \lambda_1 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_2 - \lambda_2 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_0 - \lambda_0 \Phi_2 \right) \\ &\quad \left[ \frac{\gamma_0}{(\Phi_0 - \Phi_1)(\Phi_0 - \Phi_2)} + \frac{\gamma_1}{(\Phi_1 - \Phi_2)(\Phi_1 - \Phi_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_2}{(\Phi_2 - \Phi_0)(\Phi_2 - \Phi_1)} \right]. \end{aligned}$$

Nun sind die  $\lambda$  und  $\Phi$  die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken des ebenen Dreiecks  $M_0 M_1 M_2$ , welches in der Mercatorkarte das Dreieck  $m_0 m_1 m_2$  vorstellt. Daher ist, wenn man die Fläche des Dreiecks  $M_0 M_1 M_2$  mit  $F$  bezeichnet, nach einem bekannten Satze:

$$2F = \pm \left( \lambda_0 \Phi_1 - \lambda_1 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_2 - \lambda_2 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_0 - \lambda_0 \Phi_2 \right),$$

und entspricht das obere oder untere Zeichen ' dem oberen oder unteren Zeichen in 11.). Für das Verhältniss beider Dreiecke gilt daher die Gleichung:

$$\begin{aligned} 12.) \frac{\bar{F}}{F} &= -2 \left\{ \frac{\gamma_0}{(\Phi_0 - \Phi_1)(\Phi_0 - \Phi_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_1}{(\Phi_1 - \Phi_2)(\Phi_1 - \Phi_0)} + \frac{\gamma_2}{(\Phi_2 - \Phi_0)(\Phi_2 - \Phi_1)} \right\}. \end{aligned}$$

Für  $\varphi_0 = \varphi_2$ , in welchem Falle auch  $\gamma_0 = \gamma_2$  und  $\Phi_0 = \Phi_2$ , geht das Dreieck  $m_0 m_1 m_2$  in ein Zonendreieck

über und nimmt der Bruch  $\frac{\gamma_2 - \gamma_0}{\Phi_2 - \Phi_0}$  die Form  $\frac{0}{0}$  an. Sein

Werth ist  $\frac{d\lambda}{d\Phi}$ , wo  $\varphi = \varphi_0$  zu setzen ist. Aber  $d\lambda = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi$

und  $d\Phi = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$ , woraus  $\frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\Phi_2 - \Phi_0} = \sin \varphi_0$ .

Man sieht sonach, dass man aus 12.) für die Oberfläche des Zonendreieckes denselben Ausdruck erhält, wie in 6.). Dass dort nur das Zeichen  $+$  gefunden wurde, hat seinen Grund darin, dass, bei der Ableitung der Formel 6.), der Fall, wo  $\varphi_1 < \varphi_0$  unberücksichtigt blieb.



# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark](#)

Jahr/Year: 1879

Band/Volume: [15](#)

Autor(en)/Author(s): Friesach Carl

Artikel/Article: [Ueber die Loxodromie und loxodromische Figuren. 78-88](#)