Ueber den loxodromischen Bogen zwischen zwei Punkten von gegebenem sphärischen Abstande.

Von Dr. K. Friesach.

Es seien m, m_1 zwei Punkte einer Kugelfläche, φ, φ_1 ihre Abstände vom Kugeläquator oder Breiten, Φ, Φ_1 die entsprechenden vergrösserten Breiten, λ ihr 180^0 nicht überschreitender Längenunterschied, β und α der kürzeste Normal- und loxodromische Bogen $m\,m_1$, endlich $\Phi - \Phi_1 = D$, so ist, Kugelhalbmesser $= 1$ gesetzt:

$$D = l\,\frac{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.)$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta - \sin\varphi\,\sin\varphi_1}{\cos\varphi\,\cos\varphi_1} \quad \ldots\ldots \quad 2.)$$

$$\alpha = \frac{\varphi - \varphi_1}{D}\sqrt{\lambda^2 + D^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.)$$

Indem man β als eine gegebene constante Grösse betrachtet, bewirkt man, durch Variiren von φ und φ_1, eine Verschiebung des Bogens β auf der Kugelfläche, wodurch auch α seinen Werth ändert. Es soll nun untersucht werden, in welcher Lage des Bogens β, α seinen grössten und kleinsten Werth hat?

Der kleinste Werth, dessen α überhaupt fähig ist, hat offenbar statt, wenn $\varphi - \varphi_1 = \beta$, weil dann m und m_1 in demselben Kugelmeridiane liegen, folglich $\lambda = o$ und $\alpha = \beta$ ist. Sonst ist stets $\alpha > \beta$.

Nicht so leicht ist es, die dem Maximum entsprechende Lage zu finden. Da mir hierzu weder die Gl. 3.) noch die Ausdrücke für $\frac{d\,\alpha}{d\varphi}$ und $\frac{d\,\alpha}{d\varphi_1}$ geeignet erscheinen, ersetze ich φ und φ_1

durch die neuen Variablen $s = \varphi + \varphi_1$ und $\delta = \varphi - \varphi_1$. Dadurch wird:

$$D = l\,\frac{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{s+\delta}{4}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{s-\delta}{4}\right)} = l\,\frac{\cos\frac{s}{2} + \sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{s}{2} - \sin\frac{\delta}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 4.)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\lambda &= \frac{\cos\beta - \sin\frac{s+\delta}{2}\sin\frac{s-\delta}{2}}{\cos\frac{s+\delta}{2}\cos\frac{s-\delta}{2}} \\
\sin\frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{\cos\delta - \cos\beta}{\cos\delta + \cos s}} \\
\cos\frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{\cos\beta + \cos s}{\cos\delta + \cos s}} \\
tg\frac{\lambda}{2} &= \sqrt{\frac{\cos\delta - \cos\beta}{\cos\beta + \cos s}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 5.)$$

$$\alpha = \frac{\delta}{D}\sqrt{\lambda^2 + D^2} \quad \ldots\ldots \quad 6.)$$

$$\frac{dD}{ds} = \frac{2\sin\frac{s}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\delta + \cos s} \quad \ldots\ldots \quad 7.)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin s}{\cos\delta + \cos s}\sqrt{\frac{\cos\delta - \cos\beta}{\cos\beta + \cos s}} = \frac{\sin s\, tg\frac{\lambda}{2}}{\cos\delta + \cos s} \quad . \quad 8.)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\delta\lambda}{D^2\sqrt{\lambda^2 + D^2}}\left(D\frac{d\lambda}{ds} - \lambda\frac{dD}{ds}\right) \quad \ldots\ldots \quad 9.)$$

$$D' = \frac{dD}{d\delta} = \frac{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\delta + \cos s} \quad \ldots\ldots \quad 10.)$$

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{d\delta} = -\frac{\sin\delta\cos\frac{\lambda}{2}}{\cos\delta + \cos s} \quad \ldots\ldots \quad 11.)$$

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{D^3 + \delta D\lambda\lambda' + \lambda^2(D - \delta D')}{D^2\sqrt{\lambda^2 + D^2}} \quad \ldots\ldots \quad 12.)$$

Für $\delta = o$, nimmt $\frac{\delta}{D}$ die Form $\frac{o}{o}$ an, und folgt

aus 6.): $\alpha = \lambda\,\frac{1}{D'} = \lambda\sin\frac{\beta}{2}$ . . . . 13.)

Für $s = o$, verschwindet sowohl $\frac{dD}{ds}$ als $\frac{d\lambda}{ds}$, folglich auch $\frac{d\alpha}{ds}$.

Wie leicht einzusehen, hat das Zeichen von s und δ auf den Werth von α keinen Einfluss, wesshalb es hier gestattet ist, s und δ, folglich auch D, immer positiv anzunehmen. Diess vorausgesetzt, kann $\frac{d\alpha}{ds}$ nicht negativ sein, wie auf folgende Art gezeigt werden kann:

Offenbar stimmt das Zeichen von $\frac{d\alpha}{ds}$ mit jenem des in 9.) in der Klammer stehenden Factors überein. Mit Rücksicht auf 7.) und 8) ist aber:

$$D\frac{d\lambda}{ds} - \lambda\frac{dD}{ds} = \frac{2\,D\sin\frac{s}{2}\,tg\frac{\lambda}{2}}{\cos\delta + \cos s}\left(\cos\frac{s}{2} - \frac{\frac{\lambda}{2}}{tg\frac{\lambda}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{D}\right)$$

Da nun der Zähler $2\,D\sin\frac{s}{2}\,tg\frac{\lambda}{2}$ nur aus positiven Factoren besteht und auch der dazu gehörige Nenner, wegen $\cos\delta + \cos s = 2\cos\varphi\cos\varphi_1$, nur positiv sein kann, hat obiger Ausdruck das Zeichen des eingeklammerten Factors, der sicher positiv ist; denn, da D, für $\delta = o$, verschwindet, ist

$$D = \int_o^\delta D'\,d\delta = 2\cos\frac{s}{2}\int_o^\delta \frac{\cos\frac{\delta}{2}\,d\delta}{\cos d + \cos s} > 2\cos\frac{s}{2}\int_o^\delta \frac{\cos\frac{\delta}{2}\,d\delta}{1 + \cos s}$$

$$\text{oder } D > \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{s}{2}},\ \text{folglich } \cos\frac{s}{2} > \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{D};$$

$$\text{und, wegen } \frac{\frac{\lambda}{2}}{tg\frac{\lambda}{2}} < 1,\ \text{um so mehr } \cos\frac{s}{2} - \frac{\frac{\lambda}{2}}{tg\frac{\lambda}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{D} > o,$$

w. z. b. w.:

$\frac{d\alpha}{ds}$ ist also stets positiv, d. h.: Bei constantem δ, wächst α zugleich mit s, und hat zugleich mit diesem den kleinsten und grössten Werth. Das Minimum von α hat sonach Statt für $s = o$, das Maximum aber für $s = \pi - \beta$. Dass s diesen Werth nicht überschreiten kann, ergibt sich aus dem Ausdrucke für $tg\frac{\lambda}{2}$ in 5.) welcher zeigt, dass auch λ, zugleich mit s, wächst, und, für $s = \pi - \beta$, seinen grössten Werth, d. i. π, annimmt.

Wie eben bewiesen wurde, trifft bei constantem δ, das Maximum von α mit $s = \pi - \beta$ und $\lambda = \pi$ zusammen. Da diess für jeden Werth von δ ($\delta = \beta$ allein ausgenommen), gilt, sind sämmtliche Maxima, folglich auch der grösste Werth, dessen α überhaupt ist, in den Formeln:

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{\alpha} = \frac{\delta}{D}\sqrt{\pi^2 + D^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & 14.) \\[2ex] D = l\,\dfrac{\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\delta}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & 15.) \end{array}\right.$$

enthalten.

Aus 14.) und 15.) folgt nun:

$$D' = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\delta - \cos\beta} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\beta^2}{2} - \sin\frac{\delta^2}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 16.)$$

$$\lambda' = o$$

$$\frac{\delta\bar{\alpha}}{d\delta} = \frac{D^3 + \pi^2 D - \pi^2 \delta D'}{D^2\sqrt{\pi^2 + D^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17.)$$

Wie ich in einer früheren Abhandlung (s. Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark, Jahrgang 1876) bewiesen habe, verschwindet $\frac{d\bar{\alpha}}{d\delta}$ für $\delta = o$, und ist dann $\bar{\alpha}$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $12 - \pi^2(1 + \cos\frac{\beta^2}{2}) \gtreqless o$, d. h. je nachdem $\sin\beta \lesseqgtr \frac{\sqrt{2\pi^2 - 12}}{\pi}$ oder $\beta \lesseqgtr 124^\circ\, 37'.8$ . .

Im zweiten Falle muss $\bar{\alpha}$, zwischen $\delta = o$ und $\delta = \beta$, mindestens einmal zu einem Maximum werden.

Es bleibt nun noch die Frage zu erörtern, ob $\bar{\alpha}$ nur Eines Maximums fähig sei? Zu diesem Zwecke entwickle ich den Zähler in 17.), dessen Zeichen mit jenem des Differentialquotienten $\frac{d\bar{\alpha}}{d\delta}$ übereinstimmt, in eine nach steigenden Potenzen der Grösse $m = \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$ geordnete Reihe, welche, wie im Folgenden gezeigt werden soll, das Verhalten von $\bar{\alpha}$, zwischen $\delta = o$ und $\delta = \beta$, vollständig zu erklären geeignet ist.

Da δ den Werth β nicht überschreiten kann, vermag m höchstens die Einheit zu erreichen. Der Fall $\delta = \beta$ oder $m = 1$ ist aber bereits erledigt, und soll darum in der Folge immer $m < 1$ vorausgesetzt sein.

Aus 14.) folgt:

$$D = l\frac{1+m}{1-m} = 2m\left(1 + \frac{m^2}{3} + \frac{m^4}{5} + \cdot \cdot + \frac{m^{2n}}{2n+1} + \cdots\right) \quad 18.)$$

$$D^2 = 4m^2(1 + a_1 m^2 + a_2 m^4 + \cdots + a_n m^{2n} + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad 19.)$$

$$\text{wo } a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3^2} = \frac{23}{45}$$

$$a_3 = \frac{2}{7} + \frac{2}{5.3} = \frac{44}{105}$$

$$a_4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{7.3} + \frac{1}{5^2} = \frac{563}{1575}$$

$$a_5 = \frac{2}{11} + \frac{2}{9.3} + \frac{2}{7.5} = \frac{3254}{10395}$$

$$a_6 = \frac{2}{13} + \frac{2}{11.3} + \frac{2}{9.5} + \frac{1}{7^2} = \frac{88069}{315315}$$

$$a_7 = \frac{2}{15} + \frac{2}{13.3} + \frac{2}{11.5} + \frac{2}{9.7} = \frac{11384}{45045}$$

u. s. f., und allgemein:

entweder:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{(2n-1)3} + \frac{2}{(2n-3)5} + \cdot\cdot + \frac{2}{(n+3)(n-1)} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\text{oder:} \\ a_n &= \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{(2n-1)3} + \frac{2}{(2n-3)5} + \cdot\cdot + \frac{2}{(n+4)(n-2)} + \frac{2}{(n+2)n} \end{aligned}\right\} 20.)$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die Gliederzahl beträgt im ersten Falle $\frac{n}{2} + 1$, im zweiten $\frac{n+1}{2}$.

Aus 18) und 19.) folgt nun:

$$D^3 = 8m^3(1 + A_1 m^2 + A_2 m^4 + \cdots + A_n m^{2n} + \cdots) \quad . \quad 21.)$$

$$\text{wo } A_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{a_1}{2n-1} + \frac{a_2}{2n-3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{3} + a_n. \quad 22.)$$

Da die nur positive Glieder enthaltende Reihe 18.), für $m < 1$, convergirt, so gilt diess auch von den durch Quadriren und Kubiren daraus entstandenen Reihen 19.) und 21.), woraus hinsichtlich deren Coefficienten weiter nichts folgt, als dass dieselben nicht unendlich gross werden können. Es lässt sich jedoch beweisen, dass diese Coefficienten, bei wachsendem Stellenzeiger, abnehmen, und, für $n = \infty$, unendlich klein werden.

Aus 20.) ergibt sich, für ein gerades n:

$$a_n < \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23.)$$

und für ein ungerades:

$$a_n < \frac{2}{n+2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n}\right) < \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n}\right),$$

also allgemein: $a_n < \frac{2}{2r-1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2r-1}\right)$ . . . 24.),

wo $r = \frac{n}{2} + 1$ oder $r = \frac{n+1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade. Da aber $\dfrac{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2r-1}}{2r-1}$, für $n = \infty$, verschwindet, (s. Anhang 1.), so gilt diess auch von a_n.

Schwieriger ist es, das unendliche Abnehmen von A_n zu beweisen, und ist mir diess nur auf folgende Art gelungen:

Angenommen, es sei n ungerade und $\frac{n+1}{2}$ gerade, so ist, mit Rücksicht auf 20.):

$$\left.\begin{array}{llllll}
 & 1 & 2 & 3 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \\[6pt]
a_n = & \frac{2}{2n+1} + & \frac{2}{(2n-1)3} + & \frac{2}{(2n-3)5} + \cdots + & \frac{2}{(n+4)(4-2)} + & \frac{2}{(n+2)n} \quad \bigvee \\[6pt]
\frac{a_{n-1}}{3} = & & \frac{2}{(2n-1)3} + & \frac{2}{(2n-3)3^2} + \cdots + & \frac{2}{(n+4)(n-4)3} + & \frac{2}{(n+2)(n-2)3} + \frac{1}{n^2 3} \\[6pt]
\frac{a_{n-2}}{5} = & & & \frac{2}{(2n-3)5} + \cdots + & \frac{2}{(n+4)(n-6)5} + & \frac{2}{(n+2)(n-4)5} + \frac{2}{n(n-2)5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\[6pt]
\frac{a_{\frac{n+3}{2}}}{n-2} = & & & & \frac{2}{(n+4)(n-2)} + & \frac{2}{(n+2)(n-2)3} + \frac{2}{n(n-2)5} + \cdots + \frac{2}{\frac{n+7}{2}\,\frac{n+3}{2}(n-2)} \\[6pt]
\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{n} = & & & & & \frac{2}{(n+2)n} + \frac{2}{n^2.3} + \cdots + \frac{2}{\frac{n+7}{2}.\frac{n-1}{2}.n} + \frac{1}{\left(\frac{n+3}{2}\right)^2 n} \\
 & & & & & \quad \bigwedge
\end{array}\right\} 25.)$$

Eine aufmerksame Betrachtung der links vom Zeichen $\bigvee\!\!\!\bigwedge$ stehenden, mit den Stellenzeigern $1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$, $\frac{n+1}{2}$ überschriebene Verticalspalten zeigt, dass deren Summen, der Reihe nach, die Werthe $\frac{2}{2n+1}, \frac{2a_1}{2n-1}, \frac{2a_2}{2n-3}, \ldots \frac{2a_{\frac{n-3}{2}}}{n+4}, \frac{2a_{\frac{n-1}{2}}}{n+2}$ entsprechen. Indem man die Summe der links und rechts vom Zeichen $\bigvee\!\!\!\bigwedge$ stehenden

Glieder mit p und q bezeichnet, ergibt sich aus der Addition obiger Gleichungen:

$$\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{n}+\frac{a_{\frac{n+3}{2}}}{n-2}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{5}+\frac{a_{n+1}}{3}+a_n=p+q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 26.)$$

$$\text{wobei } p=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{a_1}{2n-1}+\frac{a_2}{2n-3}+\cdot\;\cdot+\frac{a_{\frac{n-3}{2}}}{n+4}+\frac{a_{\frac{n-1}{2}}}{n+2}\right) \quad . \; 27.)$$

Zufolge 22.) ist nun:

$$An=\frac{1}{2n+1}+\frac{a_1}{2n-1}+\cdot\cdot+\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{n+2}+\left(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{n}+\frac{a_{\frac{n+3}{2}}}{n-2}+\cdot\cdot+\frac{a_{n-1}}{3}+a_n\right),$$

folglich, mit Rücksicht auf 26.) und 27), auch:

$$An=\frac{3p}{2}+q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 28.)$$

Man kann nun zeigen, dass $q<p$:

Die in 20.) auf einander folgenden Nenner $(2n+1)1$, $(2n-1)3$, $(2n-3)5$ etc., bestehen aus je zwei Factoren, deren Summe den constanten Werth $2n+2$ hat. Da aber ein Product zweier Facten, deren Summe constant ist, um so grösser ist, je weniger die Differenz der beiden Factoren beträgt, sieht man ein, dass obige Nenner von links nach rechts wachsen, was das Abnehmen der dazu gehörigen Glieder $\frac{2}{2n+1}$, $\frac{2}{(2n-1)3}$, $\frac{2}{(2n-3)5}$ u. s. f. zur Folge hat. Selbstverständlich gilt diess auch von sämmtlichen Horizontalreihen in 25.) Es sei nun f die Summe der in der r^{ten} horizontalen Reihe von oben, links vom Zeichen $\times$ (in p), g die Summe der in der r^{ten} Horizontalreihe von unten rechts vom Zeichen $\times$ (in q) enthaltenen Glieder. Erwägt man, dass, in der mit $n+1$ überschriebenen Verticalspalte, das r^{te} Glied von oben mit dem r^{ten} Gliede von unten identisch ist, und dass, wie eben bewiesen wurde, der Gliederwerth, in jeder Horizontalreihe, von links nach rechts abnimmt, so begreift man, dass jedes Glied in g kleiner ist, als das letzte, somit kleinste Glied in f. Ausserdem enthält g weniger Glieder als f, wie sich aus dem Bildungsgesetze der Coefficienten a ergibt, welchem gemäss die

Gliederanzahl in f durch $\frac{n+1}{2} - (r-1) = \frac{n+3-2r}{2}$, jene in g aber, je nachdem r gerade oder ungerade ist, durch

$$\frac{n+1}{4} - \frac{r}{2} = \frac{n+1-2r}{4} \text{ oder } \frac{n+1}{4} - \frac{r-1}{2} = \frac{n+3-2r}{4}$$

ausgedrückt wird. Wenn man das Gesagte zusammen fasst, erkennt man, dass $g < f$, folglich auch $q < p$.

Mit Rücksicht auf 28.) ist nun $A_n < \frac{3}{2} p + p$.

Aus 27.) folgt:

$$\frac{p}{2} < \frac{1}{n+2}\left(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Nun ist $a_1 = \frac{2}{3}$ und, wenn man die Summe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2r-1}$$

durch s_{2r-1} bezeichnet, nach 24.):

$$\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} < \frac{2s_3}{3}, \quad \left.\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix}\right\} < \frac{2s_5}{5}, \text{ u. s. f.; daher}$$

$$\frac{p}{2} < \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4s_3}{3} + \frac{4s_5}{5} + \cdots + \frac{4s_{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}}\right)$$

$$< \frac{4}{n+2}\left(1 + \frac{s_3}{3} + \cdots + \frac{s_{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Da jedoch $\frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{s_3}{3} + \frac{s_5}{5} + \cdots + \frac{s_{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}}\right)$, für $n = \infty$, verschwindet (s. Anhang 2.), so gilt diess auch von A_n, w. z. b. w.

Es wurde hier n ungerade und $\frac{n+1}{2}$ gerade vorausgesetzt, weil, ohne eine derartige Annahme, die Gl. 25.) nicht aufgeschrieben werden könnten. Es ist jedoch klar, dass eine andere Annahme nur auf die Endglieder der Ausdrücke für a_n, a_{n-1} etc. Einfluss hat, während an der obigen Beweisführung dadurch nichts geändert wird.

Es bleibt nun noch $\delta D'$ in eine Reihe zu entwickeln übrig.

Setzt man $\sin\frac{\beta}{2}=\varepsilon$, so ist $\sin\frac{\delta}{2}=\varepsilon m$, $\cos\frac{\delta}{2}=\sqrt{1-\varepsilon^2 m^2}$, und folgt aus 16.):

$$D'=\frac{(1-\varepsilon^2 m^2)^{\frac{1}{2}}(1-m^2)^{-1}}{\varepsilon}$$

Ferner ist:

$$\delta=2\frac{\delta}{2}=2\, arc\sin\varepsilon m=2\sqrt{1-\varepsilon^2 m^2}\Big(\varepsilon m+\frac{2}{3}\varepsilon^3 m^3$$
$$+\frac{2.4}{3.5}\varepsilon^5 m^5+\cdots\Big) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 29.)$$

daher $\delta D'=2(1-\varepsilon^2 m^2)(1-m^2)^{-1}(m+\frac{2}{3}\varepsilon^2 m^3+\frac{2.4}{3.5}\varepsilon^4 m^5+\cdots)$ 30.)

$$=2m\,(1+B_1 m^2+B_2 m^4+\cdots+B_n m^{2n}+\cdots) \quad 31.)$$

wo $B_n=1-\frac{\varepsilon^2}{3}-\frac{2\varepsilon^4}{3.5}-\cdots-\frac{2.4\ldots(2n-2)\varepsilon^{2n}}{3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}$ . . . 32.)

Wie aus 32.) zu ersehen, nimmt B_n ab, indem n wächst, und nimmt, für $n=\infty$, den Werth $\frac{\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\beta}{2}}$ an. Diess ergibt sich so:

Aus der Gleichung:

$$\frac{arc\sin\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\varepsilon+\frac{2\varepsilon^3}{3}+\frac{2.4\varepsilon^5}{3.5}+\cdots$$

folgt $\int\frac{\varepsilon\, arc\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\int d\varepsilon\left(\varepsilon^2+\frac{2\varepsilon^4}{3}+\frac{2.4\varepsilon^6}{3.5}+\cdots\right)$,

oder, wenn man beiderseits integrirt, wobei man zur Bestimmung des Integrals im ersten Theile der Gleichung, die Formel:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

wo $u=arc\sin\varepsilon$, $dv=\frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, anwenden kann:

$$\varepsilon-\sqrt{1-\varepsilon^2}.\,arc\sin\varepsilon=\frac{\varepsilon^3}{3}+\frac{2\varepsilon^5}{3.5}+\frac{2.4\varepsilon^4}{3.5.7}+\cdots+C$$

Da der erste Theil dieser Gleichung, für $\varepsilon=0$, verschwindet, ist $C=0$, folglich:

$$1-\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}.\,arc\sin\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{2\varepsilon^4}{3.5}+\frac{2.4\varepsilon^6}{3.5.7}+\cdots;$$

endlich, mit Rücksicht auf 32.):

$$B\infty = 1 - \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{2\,\varepsilon^4}{3.5} - \frac{2.4\varepsilon^6}{3.5.7} - \cdots = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.\,arc\,sin\,\varepsilon}{\varepsilon},$$

oder, da $arc\ sin\,\varepsilon = \frac{\beta}{2}$, $\varepsilon = sin\frac{\beta}{2}$, $\sqrt{1-\varepsilon^2} = cos\frac{\beta}{2}$:

$$B\infty = \frac{\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\beta}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33.)$$

Da B_n um so kleiner ist, je grösser n, folgt aus 32.) und 33.) dass B_n nie negativ sein und die Einheit nicht überschreiten kann Ueber die Convergenz der Reihe in 31.) kann sonach kein Zweifel bestehen. Ferner ergibt sich aus 32.):

$$\underset{(\varepsilon=0)}{B_n} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34.)$$

$$\underset{(\varepsilon=1)}{B_n} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3.5} - \frac{2.4}{3.5.7} - \cdots - \frac{2.4\,..\,(2n-2)}{3.5.7.\,(2n-1)(2n+1)} \quad 35.)$$

Letzterer Ausdruck lässt sich auf einen einfacheren reduciren. Für $\varepsilon = 1$, verwandelt sich die Gl. 30.) in

$$\delta D' = 2\,m\left(1 + \frac{2}{3}m^2 + \frac{2.4}{3.5}m^4 + \cdots + \frac{2.4\ldots\ 2n}{3.5\,..\,(2\,n+1)}\right),$$

$$\text{daher } \underset{(\varepsilon=1)}{B_n} = \frac{2.4\ldots(2n-2)\ 2n}{3.5.\ \ .(2n-1)\,(2n+1)} \quad \ldots\ldots \quad 36.)$$

Die beiden Werthe für $\underset{(\varepsilon=1)}{B_n}$ aus 35.) und 36.) sind also gleich, eine Relation, die auch durch Induction leicht gefunden wird. (S. Anhang 13.)

Aus 18.), 21.) und 31.) erhält man endlich die gesuchte Reihe für den Zähler in 17.), nämlich:

$$Z = D^3 + \pi^2 D - \pi^2\delta D' = 2\,m^3(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1\,m^2 + \mathfrak{A}_2\,m^4 + \cdots$$
$$+ \mathfrak{A}_n m^{2n} + \cdots) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37.)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dabei ist } \mathfrak{A}_0 = 4 + \frac{\pi^2}{3} - \pi^2 B_1 \quad \ldots\ldots \\ \text{und allgemein: } \mathfrak{A}_n = 4A_n + \frac{\pi^2}{2\,n+3} - \pi^2\,B_{n+1} \end{array}\right\} \quad 38.)$$

Aus 37.) ist nun ersichtlich, dass $\frac{d\bar{\alpha}}{d\delta} = \frac{Z}{D^2\sqrt{\pi^2+D^2}}$, für $m=0$, verschwindet. Denn $D^2\sqrt{\pi^2+D^2}$ geht in diesem Falle über in $D^2\pi$, und ist, mit Rücksicht auf 19.):

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\delta} = \frac{2\,m^3\,\mathfrak{A}_0}{4\,m^2\,\pi} = \frac{m\mathfrak{A}_0}{2\,\pi} = 0.$$

Aus 38.) erkennt man leicht, dass $\mathfrak{A}_n$ nur negativ sein kann, wenn n gross und $\varepsilon < 1$ ist; denn $4\,A_n + \frac{\pi^2}{2\,n+3}$ nimmt, bei dem unendlichen Wachsen von n, unendlich ab, während $\pi^2 B_{n+1}$ sich ohne Ende dem von Null verschiedenen Grenzwerthe $\frac{\pi^2 \frac{\beta}{2}}{tg\,\frac{\beta}{2}}$ nähert. Für $\varepsilon = 1$ wird allerdings $\mathfrak{A}_\infty = 0$; aber auch in diesem Falle müssen die späteren Glieder in 37.) negativ sein, weil sonst $\frac{d\bar{\alpha}}{d\delta}$ überhaupt nicht negativ werden könnte, was mit dem Umstande, dass $\bar{\alpha}$, ehe es, für $m=1$, seinen kleinsten Werth β erreicht, nothwendig in den Zustand des Abnehmens gerathen muss, unvereinbar wäre. Um darüber klar zu werden, wie $\mathfrak{A}_n$, bei wachsendem n, abnimmt und endlich negativ wird, habe ich nachstehende Tafel berechnet:

n	$4A_n+\frac{\pi^2}{2n+3}$	$\pi^2 B_{n+1}$ $(\varepsilon=1)$	$\mathfrak{A}_n$ $(\varepsilon=1)$	n	$4A_n+\frac{\pi^2}{2n+3}$	$\pi^2 B_{n+1}$ $(\varepsilon=1)$	$\mathfrak{A}_n$ $(\varepsilon=1)$
0	7·28987	6·57974	+0·71013	13	2·39445	2·27728	+0·11716
1	5·97392	5·26378	+0·71013	14	2·30179	2·20382	+0·09797
2	5·14327	4·51182	+0·63146	15	2·21534	2·13704	+0·07830
3	4·55905	4.01051	+0·54855	16	2·13713	2·07598	+0·06115
4	4·09470	3·64591	+0·44878	17	2·06534	2·01988	+0·04546
5	3·77519	3·36546	+0·40973	18	1·99743	1·96807	+0·02936
6	3·49527	3·14109	+0·35418	19	1·93791	1·92008	+0·01783
7	3·28886	2·95632	+0·33254	20	1·88111	1·87543	+0·00568
8	3·06505	2.80073	+0·26732	21	1·82812	1·83375	−0·00563
9	2·89504	2.66736	+0·22768	22	1·77862	1·79474	−0·01612
10	2·74674	2.55139	+0·19535	23	1·73226	1·75810	−0·02584
11	2·61690	2·44933	+0·16757	24	1·68873	1·72364	−0·03491
12	2·49720	2·35862	+0·13858	25	1·64771	1·69111	−0·04340

Wie diese Tafel zeigt, sind die Coefficienten $\mathfrak{A}$ negativ, sobald n die Zahl 20 übersteigt, und gilt diess um so mehr für $\varepsilon < 1$, als, vermöge 32.), B_n um so grösser, folglich $\mathfrak{A}_n$ um so kleiner ist, je kleiner ε. Ferner zeigt die Tafel, dass die Anfangs-Coefficienten $\mathfrak{A}_0\ \mathfrak{A}_1 \ldots$ bis $\mathfrak{A}_{20}$, für $\varepsilon = 1$, eine abnehmende Reihe bilden. Dasselbe gilt, wenn $\varepsilon = 0$; denn in diesem Falle ist $\mathfrak{A}_n = 4\,A_n + \frac{\pi^2}{2n+3} - \pi^2$, welcher Ausdruck, bei wachsendem n, offenbar abnimmt. Es ist sonach, sowohl für $\varepsilon = 0$, als für $\varepsilon = 1$, so lange n die Zahl 20 nicht übersteigt:

$$\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{n+1} = 4\,(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{n+1}) + \frac{2\pi^2}{(2n+3)(2n+5)} - \pi^2(B_n - B_{n+1}) > 0$$

oder $B_n - B_{n+1} < \frac{4}{\pi^2}(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{n+1}) + \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$ . . . 39.)

Aus 32.) ergibt sich aber:

$$B_n - B_{n+1} = \frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+3)} \cdot \varepsilon^{2n+2},$$

ein Werth, welcher, indem ε wächst, stätig zunimmt. Die das Abnehmen von $\mathfrak{A}_n$ bedingende Ungleichung 39.) besteht daher für jeden hier zulässigen Werth von ε.

Da nun die Anfangs-Coefficienten bis $\mathfrak{A}_{20}$ fortwährend abnehmen und die übrigen stets negativ sind, kann in der unendlichen Reihe $\quad \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 m^2 + \mathfrak{A}_2{}^2 + \mathfrak{A}_3\, m^4 + \cdots$
auf ein negatives Glied nur ein negatives folgen, und kann einem positiven kein negatives vorangehen, und hat daher obige Reihe die Form;

$$c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \cdots + c_{r-1}\,x^{r-1} - (c_r\,x^r + c_{r+1}\,x^{r+1} + \cdots),$$

wo sowohl x als sämmtliche c positiv sind.

Wenn die Summe S einer derartigen convergierenden Reihe für $x = x_1$ negativ ist, so ist dieselbe auch für jeden grösseren Werth von x, negativ.

Beweis: Angenommen die Summe S obiger Reihe sei, für $x = x_1$, negativ, so ist um so mehr, nach Weglassung von c_0,

$$c_1 x_1 + c_2\,x_1{}^2 + \cdots + c_{r-1}\,x_1{}^{r-1} - (c_r\,x_1{}^r + c_{r+1}\,x_1{}^{r+1} + \cdots) < 0$$

oder, wenn man mit $\frac{r}{x_1}$ multiplizirt:

$$r c_1 + r c_2\,x_1 + r c_3 x_1{}^2 + \cdots + r\,c_{r-1}\,x_1{}^{r-2} - (r\,c_r\,x_1{}^{r-1}$$
$$+ r c_{r+1}\,x_1{}^r + \cdots) < 0,$$

folglich um so mehr:

$$c_1 + 2\,c_2 + 3\,c_3\,x_1{}^2 + \cdots + (r-1)\,c_{r-1}\,x_1{}^{r-2} - (r\,c_r\,x_1{}^{r-1}$$
$$+ (r+1)\,c_{r+1}\,x_1{}^r + \cdots) < 0.$$

Letzterer Ausdruck ist aber $= \frac{dS}{dx_{(x = x_1)}}$ · Dieser Differential-Quotient ist nun negativ, d. h. S befindet sich im Zustande des Abnehmens, kann also, wenn $x > x_1$ wird, nur negativ sein.

Mit Rücksicht auf das eben Gesagte, führt die Gl. 37.) hinsichtlich des Verhaltens des loxodromischen Bogens $\overline{\alpha}$, indem m allmälig von 0 bis 1, oder δ von 0 bis $\frac{\beta}{2}$ alle möglichen Werthe durchläuft, zu folgenden Ergebnissen:

Wie aus 38.) erhellt, ist:

$$\mathfrak{A}_0 \lesseqgtr 0 \text{ je nachdem } \sin\frac{\beta}{2} \lesseqgtr \frac{\sqrt{2\pi^2 - 12}}{\pi} \text{ oder } \beta \lesseqgtr 124^\circ\ 37'.8\,..$$

Im ersten Falle sind, dem Obigen zufolge, sämmtliche $\mathfrak{A}$ negativ. Der Differential-Quotient $\frac{d\overline{\alpha}}{d\delta}$ ist also negativ; d. h. $\overline{\alpha}$ befindet sich, indem m von 0 bis 1 wächst, fortwährend im Zustande des Abnehmens, und hat daher seinen grössten Werth für $m = \delta = 0$. Das Nämliche gilt auch, wenn $\beta = 124^\circ\ 37'.8\,..$ Dann verschwindet wohl $\mathfrak{A}_0$, aber $\mathfrak{A}_1$ ist negativ, folglich auch alle übrigen $\mathfrak{A}$.

Ist endlich $\beta > 124^\circ\ 37'.8\,..$, so ist jedenfalls $\mathfrak{A}_0$ positiv, und können, je nach dem Werthe von β, auch die folgenden Coefficienten bis incl. $\mathfrak{A}_{20}$, positiv sein. $\frac{d\overline{\alpha}}{d\delta}$ hat dann, so lange m eine gewisse Grenze nicht überschreitet, das Zeichen der Anfangsglieder, wird aber, bei fortgesetztem Wachsen von m, endlich negativ. $\overline{\alpha}$ ist daher anfänglich im Zustande des Wachsens, bis $\frac{d\alpha}{d\delta}$ verschwindet, wobei es sein Maximum erreicht, und nimmt dann, bis zu seinem Minimum fortwährend ab.

$\overline{\alpha}$ hat also stets nur Ein Maximum, welchem, so lange β die Grenze $124^\circ\ 37'.8\,..$ nicht überschreitet, der Werth $m = 0$, sonst aber ein grösserer Werth von m entspricht, welcher um so grösser ist, je grösser β.

Hinsichtlich des Maximums des Bogens $\bar{\alpha}$, das ich mit M bezeichne, und dessen Verhältnisses zu β, ergibt sich, aus dem Vorhergehenden, Folgendes:

So lange β den Grenzwerth $124^0\,37'.8$. nicht überschreitet ist immer $M = \pi \sin \frac{\beta}{2}$ (s. Gl 13.) folglich $\frac{M}{\beta} = \frac{\pi \sin \frac{\beta}{2}}{\beta}$. Dieser Quotient nimmt ab, indem β wächst, und hat daher seinen grössten Werth, wenn β unendlich klein ist, in welchem Falle $\frac{M}{\beta} = \frac{\pi}{2} = 1{\cdot}57$. wird. Für $\beta = 124°\,37'{\cdot}8$.., nimmt $\frac{M}{\beta}$ den Werth 1·27.. an.

Ist $\beta > 124°\,37'{\cdot}8$. , so ist $M > \pi \sin \frac{\beta}{2}$, und der Quotient $\frac{M}{\beta} < 1{\cdot}27$.. Dieser Quotient nimmt, bei wachsendem β, ab, wie aus folgender Tafel zu ersehen, welche, nebst β, M und $\frac{M}{\beta}$, auch das dazu gehörige m und $M-\beta$ enthält. β und M sind in Bogenminuten angegeben.

β	m	M	$\frac{M}{\beta}$	$M-\beta$
0'	0	0'	1·58	0'
600	0	941	1·57	341
1200	0	1875	1·56	675
1800	0	2790	1·55	990
2400	0	3694	1·54	1294
3000	0	4564	1·52	1564
3600	0	5400	1·50	1800
4200	0	6195	1·48	1995
4800	0	6942	1·45	2142
5400	0	7637	1·41	2237
6000	0	8273	1·38	2273
6600	0	8847	1·34	2247
7200	0	9353	1·30	2153
7800	0·45	9796	1·26	1996
8400	0·69	10211	1·22	1811
9000	0·85	10604	1·18	1604
9600	0.94	10974	1·14	1374
10200	0·97	11267	1·10	1067
10800	0·99	11427	1·06	627

Bezüglich der Differenz $M-\beta$, zeigt obige Tafel, dass dieselbe anfangs, bei wachsenden β, zunimmt, später aber abnimmt, und dass, für deren Maximum, β nicht viel von 6000′ oder 100° verschieden ist. Genauer findet man den dem Maximum von $M-\beta$ entsprechenden sphärischen Abstand β aus der Gleichung:

$$\frac{d}{d\beta}(M-\beta)=0$$

wobei offenbar $M=\pi \sin\frac{\beta}{2}$.

Man hat sonach:

$$\frac{d}{d\beta}\left(\pi \sin\frac{\beta}{2}-\beta\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\beta}{2}-1=0,$$

woraus $\cos\frac{\beta}{2}=\frac{2}{\pi}$,

$$\begin{array}{rll} \beta = & 100^\circ\, 56'.8 \ . = & 6056'\cdot 8 \ . \\ M = & & 8330\cdot 3 \\ M-\beta = & & 2273\cdot 5 \end{array}$$

Anhang.

1. Wie Euler gezeigt hat, nähert sich die Summe $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, bei dem unendlichen Wachsen von n, unendlich der Grenze $C+l_n$, wo $C=0\cdot 57721\ldots$ Für $n=\infty$, ist daher $S_n=C+l_n$,

$$\frac{S_n}{n}=\frac{C}{n}+\frac{l_n}{n};$$

und da $\frac{l_n}{n}$, für $n=\infty$, unendlich klein wird, so gilt dies auch von $\frac{S_n}{n}$.

Für $r=\infty$, verschwindet daher auch $\frac{S_{2r-1}}{2r-1}$, und um so mehr $\frac{s_{2r-1}}{2r-1}$, weil $s_{2r-1}<S_{2r-1}$, w. z. b. w.

Um die Grenze zu finden, welcher sich s_{2r-1} ohne Ende nähert, indem r unendlich gross wird, kann man so erfahren:

Offenbar ist

$$S_{2r} = s_{2r-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2r} = s_{2r-1} + \frac{S_r}{2}$$

folglich $s_{2r-1} = S_{2r} - \frac{S_r}{2}$.

Für $r = \infty$, hat man daher:

$$s_{2r-1} = C + l_{(2r)} - \frac{C + l_r}{2} = \frac{C}{2} + l_2 + \frac{l_r}{2}$$

oder $s_{2r-1} = K + \frac{l_r}{2}$, wo $K = 0{\cdot}98175$. .

Man kann nun allgemein $s_{2r-1} = K_r + \frac{l_r}{2}$ setzen, wo K_r eine von r abhängige veriable Grösse bedeutet, welche, für $r = \infty$, in K übergeht. K_r nimmt ab, indem r wächst, und ist immer nur wenig von K verschieden, wovon man sich leicht überzeugen kann, indem man s_{2r-1} und l_r, für $r = 2$, 3 etc. berechnet.

Man findet so: $K_2 - K = 0{\cdot}00500..$, $K_{10} - K = 0{\cdot}00020$, u. s. f.

Da K_r höchstens die Einheit erreichen kann, nämlich für $r = 1$. so ist immer

$$s_{2r-1} < 1 + \frac{1}{2} lr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 40.)$$

2. Da $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{\frac{n-1}{2}}$, genügt es, zu beweisen, dass

$$\frac{1}{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{s_3}{3} + \frac{ss}{s} + \cdots + \frac{s_{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}}\right), \text{ für } n \doteq 0, \text{ verschwindet.}$$

Vermöge 40.) ist

$$1 + \frac{s_3}{3} + \frac{s_5}{5} + \cdots + \frac{s_{2r-1}}{2r-1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{l_1}{1} + \frac{l_2}{2} + \cdots + \frac{lr}{r}\right),$$

oder, wenn man obige drei Summen durch $\lessgtr_{2r-1}$, S_r und σ_r bezeichnet, und durch $2r-1$ dividirt:

$$\frac{\lessgtr_{2r-1}}{2r-1} < \frac{S_r}{2r-1} + \frac{\sigma_r}{2(2r-1)} < \frac{S^r}{r} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_r}{r}$$

Da nun, für $r=\infty$, $\frac{S_r}{r}$ unendlich klein wird, handelt es sich hier nur noch um den Beweis, dass dasselbe auch von $\frac{\sigma_r}{r}$ gilt.

Um die Grenze zu finden, welcher sich die Summe σ_r bei dem unendlichen Wachsen von r unendlich nähert, kann man sich der bekannten von Euler herrühren Summirungsformel:

$$\mathfrak{S}=C+\int y\,dx+\frac{y}{2}+\frac{\mathfrak{B}_1}{2}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\mathfrak{B}_2}{2.3.4}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\cdots \qquad 41.)$$

oder der daraus abgeleiteten:

$$\mathfrak{S}=C+\int y\,dx+\frac{y}{2}+\frac{\Delta y}{12}-\frac{\Delta^2 y}{24}+\frac{19\Delta^3 y}{720}-\frac{3\Delta^4 y}{160}+\cdots \qquad 42.)$$

bedienen, wo $S=f(1)+f(2)+\cdots f(x)$, $y=f(x)$, $\Delta x=1$, und $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ etc. die bekannten Bernoullischen Zahlen bedeuten.

Im vorliegenden Falle ist:

$$y=\frac{lx}{x},\ \int y\,dx=\frac{(lx)^2}{2},\ \mathfrak{S}=\sigma_x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{1-lx}{x^2},\ \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{a_n+b_n\,lx}{x^n+1},$$

wobei für a_n und b_n, die Gleichungen:

$$b_n=1.2.3\cdots n\,(-1)^n,\ a_n=b_{n-1}\,n\,a_{n-1}$$

gelten.

Ferner ist:
$$\Delta y=\frac{l(x+1)}{(x+1)}-\frac{lx}{x},$$

$$\Delta^n y=\frac{l(x+n)}{x+n}-\binom{n}{1}\frac{l(x+n-1)}{x+n-1}+\binom{n}{2}\frac{l(x+n-2)}{x+n-2}-\cdots+(-1)^n\frac{lx}{x}$$

Um die Constante C zu bestimmen, habe ich σ bis zum 60sten Gliede berechnet und fand aus obigen Formeln $C=-0{\cdot}0728\ldots$

Es ist sonach, für $x=\infty$:

$$\sigma_x=-0{\cdot}0728\ldots+\frac{(lx)^2}{2}+\frac{lx}{2x}$$

$$\text{und } \frac{\sigma_x}{x}=\frac{(lx)}{x}=0, \text{ w. z. b. w.}$$

3. Wenn die Gleichung:

$$1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3.5}-\frac{2.4}{3.5.7}-\cdots-\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}$$

für die Zahl n gilt, so gilt sie auch für $n+1$, weil

$$\frac{2.4..(2n-2)\quad 2n}{3.5\;.(2n-1)(2n+1)}-\frac{2.4..(2n-2)\quad 2n}{3.5..(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{2.4..(2n-2)\quad 2n\quad (2n+2)}{3.5\;.(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

Da sie aber für $n=1$, 2 etc. besteht; denn es ist

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3.5}=\frac{2.4}{3.5}$ u. s. f., so gilt sie für jeden Werth von n.