Zur Theorie der Kugelfunctionen.

Von Prof. Dr. J. Frischauf.

Die Ableitung der Dirichlet'schen Ausdrücke für die Kugelfunction P_n (cos γ) geschieht, wie in Art. 1. meines Aufsatzes „Convergenz der Kugelfunction-Reihen" auseinandergesetzt wurde, derart, dass in der Entwicklung von $1 : T$, wo ursprünglich absolut $\alpha < 1$ ist, $\alpha = e^{\psi i}$ gesetzt wird und die erhaltenen Ausdrücke von P_n dann nachträglich (analog wie die Mehler'schen Formeln) strenge begründet werden. Anlässlich dieser Begründung bemerkt *Dirichlet* in seiner berühmten Abhandlung[1]: „Le procédé qui vient de nous conduire à cette double expression de P_n, n'est pas rigoureux en ce que nous n'avons pas démontré que les séries G et H sont convergentes. Cette convergence a effectivement lieu, le cas excepté où $\psi = \gamma$, pour lequel les functions de ψ que ces séries représentent, deviennent infinies. Mais comme la consideration de ces séries exigerait trop de détails, nous ne nous y arrêterons pas . . ." Dazu muss jedoch bemerkt werden, dass die Reihen G und H ($\psi = \gamma$ ausgenommen), wie aus der Theorie der Sinus- und Cosinus-Reihen bekannt ist, convergent sind, wenn statt P_n in ersterer der Ausdruck 1., in letzterer der Ausdruck 2. gesetzt wird, und ihre Summen wirklich die als G und H bezeichneten Functionen liefern. Aber außer diesem muss noch zur Vervollständigung des directen Beweises die Gleichheit der beiden Werte 1. und 2. von P_n nachgewiesen werden, oder es muss bewiesen werden, dass die Reihe H, wenn in ihr statt P_n der Ausdruck 1. gesetzt wird, wirklich die obige Function H liefert.

[1] „Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des functions arbitraires entre des limites données." Crelle Journal, Bd. 17, 1837.

Um diesen letzteren Satz zu beweisen, ersetze man in der Reihe H den Buchstaben ψ durch δ und P_n durch den Ausdruck 1. Damit wird

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^\gamma \frac{A \cos \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\gamma^2 - \sin \frac{1}{2}\psi^2}} + \frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\pi \frac{A \sin \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \cos \frac{1}{2}\psi^2}},$$

wo A die Summe von

$$2 \sin m\delta \cos m\psi = \sin m(\delta + \psi) + \sin m(\delta - \psi)$$

von $m = 1$ bis $m = n$ bedeutet. Durch Summierung der beiden Summen von $\sin m(\delta + \psi)$ und $\sin m(\delta - \psi)$ erhält man

$$A = \frac{\cos \frac{1}{2}(\delta + \psi) - \cos (n + \frac{1}{2})(\delta + \psi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\delta + \psi)}$$

$$+ \frac{\cos \frac{1}{2}(\delta - \psi) - \cos (n + \frac{1}{2})(\delta - \psi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\delta - \psi)}$$

$$= \frac{\sin \delta + \cos (n+1)\psi \sin n\delta - \cos n\psi \sin (n+1)\delta}{\cos \psi - \cos \delta}.$$

Für $\psi = \delta$ wird

$$A = \frac{\sin n\delta \sin (n+1)\delta}{\sin \delta}.$$

I. Es sei $0 < \delta < \gamma$. Zerlegt man das erste Integral von H in

$$\int_0^\gamma = \int_0^{\delta - \varepsilon} + \int_{\delta - \varepsilon}^{\delta + \varepsilon} + \int_{\delta + \varepsilon}^\gamma,$$

wo ε beliebig klein vorausgesetzt wird; so ist das mittlere beliebig klein, im ersten und dritten kann für $n = \infty$

$$A = \frac{\sin \delta}{\cos \psi - \cos \delta}$$

gesetzt werden. Setzt man

$$\cos \psi - \cos \delta = 2(\sin \tfrac{1}{2}\delta^2 - \sin \tfrac{1}{2}\psi^2), \quad \sin \tfrac{1}{2}\psi = \sin \tfrac{1}{2}\gamma \sin \varphi,$$

so wird

$$\int_0^{\delta - \varepsilon} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sin \frac{1}{2}\delta^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2 \sin \varphi^2}, \quad \int_{\delta + \varepsilon}^\gamma = \int_{\varphi_2}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sin \frac{1}{2}\delta^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2 \sin \varphi^2},$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}\gamma}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}\gamma}.$$

Nun ist

$$\int \frac{d\varphi}{a - b \sin\varphi^2} = \frac{1}{2\sqrt{a(b-a)}} \log\left(\frac{Z}{N}\right),\ a < b$$

$$\frac{Z}{N} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b-a}\tan\varphi}{\sqrt{a} - \sqrt{b-a}\tan\varphi}.$$

Sind $\frac{Z_0}{N_0}, \frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}$ die Werte von $\frac{Z}{N}$ für resp. $\varphi = 0$, φ_1, φ_2, $\frac{1}{2}\pi$, so wird das erste Integral von H

$$\int_0^{\delta-\varepsilon} + \int_{\delta+\varepsilon}^{\gamma} = c \log\left(\frac{N_0}{Z_0} \cdot \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{N_2}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{N_3}\right)$$

$$= c \log\left(\frac{N_0}{Z_0} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{Z_3}{N_3}\right)$$

$$c = 1 : 2 \sin\tfrac{1}{2}\delta \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \sin\tfrac{1}{2}\delta^2}.$$

Wegen $Z_0 = N_0$, $Z_3 = -N_3$ und für ε beliebig klein

$$Z_1 = Z_2 = 2 \sin\tfrac{1}{2}\delta,\ N_1 = -N_2$$

$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}\delta \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 : (\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \sin\tfrac{1}{2}\delta^2),$$

folgt

$$\int_0^{\delta-\varepsilon} + \int_{\delta+\varepsilon}^{\gamma} = 0.$$

Für das zweite Integral von H setze man

$\cos\psi - \cos\delta = 2(\cos\tfrac{1}{2}\psi^2 - \cos\tfrac{1}{2}\delta^2)$, $\cos\tfrac{1}{2}\psi = \cos\tfrac{1}{2}\gamma \cos\varphi$,

damit wird für $n = \infty$

$$\int_\gamma^\pi = -\sin\delta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos\tfrac{1}{2}\delta^2 - \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 \cos\varphi^2}.$$

Nun ist

$$\int \frac{d\varphi}{a - b\cos\varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}} \operatorname{arc\,tan}\left(\sqrt{\frac{a}{a-b}} \cdot \tan\varphi\right),\ a > b.$$

Damit wird

$$H = \frac{-\sin\tfrac{1}{2}\delta}{\sqrt{2(\cos\delta - \cos\gamma)}}.$$

II. Auf ähnliche Art erhält man für $\gamma < \delta \leq \pi$

$$H = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\delta}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\delta)}}.$$

Da die Entwicklung von G in die Cosinus-Reihe auch für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ giltig ist und die Function H für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ Null wird, so ist die Entwicklung von

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos\gamma + \alpha^2}} = P_0 + P_1 \alpha + P_2 \alpha^2 + \ldots$$

auch für $\alpha = e^{\psi i}$ ($\psi = \gamma$ ausgenommen) giltig.

Zusatz. Setzt man in A $\sin\delta = \sin\left((n+1)\delta - n\delta\right)$, so erhält man

$$A = \sin n\delta \, \frac{\cos(n+1)\psi - \cos(n+1)\delta}{\cos\psi - \cos\delta}$$

$$- \sin(n+1)\delta \, \frac{\cos n\psi - \cos n\delta}{\cos\psi - \cos\delta}.$$

Setzt man

$$J_n = \frac{1}{\pi \sin n\delta} \int_0^\gamma \frac{\cos n\psi - \cos n\delta}{\cos\psi - \cos\delta} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}$$

$$J'_n = \frac{1}{\pi \sin n\delta} \int_\gamma^\pi \frac{\cos n\psi - \cos n\delta}{\cos\psi - \cos\delta} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\psi \, \delta\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}},$$

so ist für $n = \infty$:

$$0 < \delta < \gamma$$

$$J_n + 1 - J_n = 0$$

$$\sin n\delta \sin(n+1)\delta \, . \, (J'_n + 1 - J'_n) = \frac{-\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{2(\cos\delta - \cos\gamma)}};$$

$$\gamma < \delta < \pi$$

$$\sin n\delta \sin(n+1)\delta \, . \, (J_n + 1 - J_n) = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\delta)}}$$

$$J'_n + 1 - J'_n = 0.$$

Anmerkung. Die streng begründete Theorie der Fourier'schen Reihen vorausgesetzt, ist vorstehende directe Begründung der Dirichlet-schen Ausdrücke kürzer und einfacher als das Verfahren *Dirichlets* zur nachträglichen Begründung, während letzteres die heuristisch gewonnenen Ausdrücke als Kugelfunction $P_n(\cos\gamma)$ begründet, woraus die Giltigkeit der Entwicklung $1 : T$ für $\alpha = e^{\psi i}$ nur dann folgt, wenn noch nachgewiesen wird, dass die Reihen G und H, statt $P_n(\cos\gamma)$ in ersterer der Ausdruck 1. in letzterer den Ausdruck 2. gesetzt, convergent sind, und dabei deren Summen mit den Functionen G und H identisch sind — welcher Nachweis mit der streng begründeten Theorie der Fourier'schen Reihen identisch ist.

Auf ähnliche Art lassen sich die am Schlusse meines vorigen Aufsatzes unbestimmt erscheinenden Integral-Formen der Reihe $1 : T$ auswerten.

I. Zerlegt man, wenn $\delta < \gamma$ ist, das für πS_n gegebene Integral in die drei Theile: von 0 bis $\delta - \varepsilon$, von $\delta - \varepsilon$ bis $\delta + \varepsilon$, von $\delta + \varepsilon$ bis γ, wo ε beliebig klein, $n\varepsilon$ unendlich wird für $n = \infty$, so sind nach dem Vorigen das erste und dritte Integral zusammengenommen gleich Null, das mittlere nimmt die Form an

$$\frac{2}{\sqrt{2\,(\cos\delta - \cos\gamma)}} \int_{\delta - \varepsilon}^{\delta + \varepsilon} R\, d\psi .$$

Drückt man für $\alpha = \cos\delta + i \sin\delta$ die in

$$-\alpha^{n+1} \cos\left(n + \tfrac{3}{2}\right)\psi + \alpha^{n+2} \cos\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\psi$$

vorkommenden Producte $\cos a \cos b$ und $\sin a \cos b$ durch $\cos(a \pm b)$ und $\sin(a \pm b)$ aus und vereiniget dann im reellen und im imaginären Theile je den ersten mit dem dritten und den zweiten mit dem vierten Posten, setzt man ferner

$$(1 - \cos\delta)\cos\tfrac{1}{2}\psi = \sin\tfrac{1}{2}\delta\,\Big(\sin\tfrac{1}{2}(\delta + \psi) + \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \psi)\Big)$$

$$-\sin\delta\cos\tfrac{1}{2}\psi = -\cos\tfrac{1}{2}\delta\,\Big(\sin\tfrac{1}{2}(\delta + \psi) + \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \psi)\Big),$$

so wird

$$4\,\alpha\, R = M + M' + (N + N')\, i$$

$$M = \frac{\sin\Big((n+1)(\delta - \psi) + \tfrac{1}{2}\delta\Big) - \sin\tfrac{1}{2}\delta}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \psi)}$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}\Big((n+1)(\delta - \psi) + \delta\Big) \cdot \frac{\sin\tfrac{1}{2}(n+1)(\delta - \psi)}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \psi)}$$

$$M' = -\,\frac{\sin\Big((n+1)(\delta + \psi) + \tfrac{1}{2}\delta\Big) + \sin\tfrac{1}{2}\delta}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta + \psi)}$$

$$N = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\delta - \cos\Big((n+1)(\delta - \psi) + \tfrac{1}{2}\delta\Big)}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \psi)}$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\Big((n+1)(\delta - \psi) + \delta\Big) \cdot \frac{\sin\tfrac{1}{2}(n+1)(\delta - \psi)}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \psi)}$$

$$N' = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\delta - \cos\Big((n+1)(\delta + \psi) + \tfrac{1}{2}\delta\Big)}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta + \psi)}.$$

Die Integrale von $M' \, d\psi$ und $N' \, d\psi$ zwischen den Grenzen $\delta - \varepsilon$ und $\delta + \varepsilon$ sind verschwindend klein, es wird daher

$$4\,\alpha \int_{\delta-\varepsilon}^{\delta+\varepsilon} R \, d\psi = \int_{\delta-\varepsilon}^{\delta+\varepsilon} (M + Ni)\, d\psi,$$

$$2\,\alpha \int_{\delta-\varepsilon}^{\delta+\varepsilon} R \, d\psi = e^{\frac{1}{2}\delta i} \int_{\delta-\varepsilon}^{\delta+\varepsilon} e^{\frac{1}{2}(n+1)(\delta-\psi)\,i} \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)(\delta-\psi)}{\sin \frac{1}{2}(\delta-\psi)}\, d\psi$$

$$= e^{\frac{1}{2}\delta i}\,\pi = \pi \sqrt{\alpha}\,;$$

wie man unmittelbar findet, wenn man

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(\delta - \psi) = x$$

setzt und berücksichtiget, dass

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \sin x}{x}\, dx = \pi, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \sin x}{x}\, dx = 0.$$

Daraus folgt

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2\,\alpha\,(\cos\delta - \cos\gamma)}} = \frac{1}{T}.$$

II. In gleicher Weise wird für $\delta > \gamma$ die Summe S_n bestimmt, wenn statt P_n der Wert 4. gesetzt wird.

III. Für $\delta = \gamma$ wird S_n bei Anwendung der Dirichlet-schen oder der Mehler'schen Ausdrücke von P_n, wegen des Auftretens des Integrals

$$\int_{-a}^{+a} f(x) \frac{\sin kx}{\sin x^{\frac{3}{2}}}\, dx,$$

wo $k = \infty$ und $f(x)$ von $x = -a$ bis $x = +a$ endlich und stetig — dabei $f(0)$ von Null verschieden — ist, divergent.

Zeitschrift/Journal: Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark

Jahr/Year: 1887

Band/Volume: 23

Autor(en)/Author(s): Frischauf Johannes

Artikel/Article: Zur Theorie der Kugelfunctionen. 19-24