

Nachweis der Gleichheit des Integrals

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi \cdot d\psi}{\sqrt{(\sin \frac{\gamma}{2})^2 - (\sin \frac{\psi}{2})^2}}$$

mit der Kugelfunction $P_n(\cos \gamma)$.

Von Alois Walter.

Die Function $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$ der beiden unabhängigen Veränderlichen α und x lässt sich mittels der Binomialformel in eine unendliche Reihe entwickeln, welche nach ganzzahligen Potenzen der einen Veränderlichen α fortschreitet, indess die Coefficienten dieser Potenzen Functionen der andern Veränderlichen x allein sind.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} &= [1 - \alpha(2x - \alpha)]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) (-\alpha)^\lambda (2x - \alpha)^\lambda = \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) (-\alpha)^\lambda \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} (2x)^{\lambda-\nu} (-\alpha)^\nu = \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \binom{\lambda}{\nu} (2x)^{\lambda-\nu} (-1)^{\lambda+\nu} \cdot \alpha^{\lambda+\nu} \end{aligned}$$

Fasst man nun alle Glieder, welche dieselbe Potenz von α enthalten, in je ein Glied zusammen, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot (-1)^n \sum_{\nu=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{n-\nu} \binom{n-\nu}{\nu} (2x)^{n-2\nu}$$

Es erscheinen somit die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x als ganze Functionen von x ; man bezeichnet den Coefficienten von x^n mit $P_n(x)$, und nennt ihn die *Kugelfunction* n^{ter} Ordnung von x ; es ist also

$$P_n(x) = (-1)^n \sum_{\nu=0}^n \binom{n+\frac{1}{2}}{n-\nu} \binom{n-\nu}{\nu} (2x)^{n-2\nu}$$

Von der Kugelfunction $P_n(x)$ ist nun eine Anzahl von Umformungen bekannt; bemerkenswert ist unter denselben die *Mehler'sche* Formel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\psi}{2} \cdot d\frac{\psi}{2}}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2 - (\sin\frac{\psi}{2})^2}}$$

welches Integral den Wert $P_n(\cos\gamma)$ hat.

Es lässt sich nämlich, nach dem Vorgange *Dirichlets*, zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\psi}{2} \cdot d\frac{\psi}{2}}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2 - (\sin\frac{\psi}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2x \cdot \cos\gamma + x^2}}$$

ist; da nun, nach der Entstehung der Kugelfunction, auch die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot P_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1-2x \cdot \cos\gamma + x^2}}$$

ist, so muss in der That

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\psi}{2} \cdot d\frac{\psi}{2}}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2 - (\sin\frac{\psi}{2})^2}} = P_n(\cos\gamma)$$

sein. Es ist nun der Zweck dieser Blätter, diese Gleichheit ganz direct nachzuweisen. Zu diesem Ende möge der oben für $P_n(\cos\gamma)$ aufgestellte Ausdruck solange umgeformt werden, bis schließlich das *Mehler'sche* Integral zu Tage tritt.

Man setze zunächst

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(1 + (x-1)) = \\ &= \sum_{\rho=0}^n \frac{(x-1)^\rho}{\rho!} \cdot P_n^{(\rho)}(1) \end{aligned}$$

Die Werte sämtlicher Ableitungen von $P_n(x)$ für $x=1$, welche hier auftreten, erhält man so: es ist

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n-\nu} = \frac{(-1)^{n-\nu} (2n-2\nu)!}{2^{2n-2\nu} [(n-\nu)!]^2}, \quad \binom{n-\nu}{\nu} = \frac{(n-\nu)!}{\nu! (n-2\nu)!}$$

daher ist auch

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu (2n-2\nu)!}{[(n-\nu)!]^2} \cdot \frac{(n-\nu)!}{\nu! (n-2\nu)!} \cdot x^{n-2\nu} = \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \cdot \frac{(2n-2\nu)!}{n! (n-2\nu)!} \cdot \frac{n!}{\nu! (n-\nu)!} \cdot x^{n-2\nu} = \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \cdot \binom{2n-2\nu}{n} \binom{n}{\nu} x^{n-2\nu}. \end{aligned}$$

Vergleicht man damit den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \cdot x^{2n-2\nu} (-1)^\nu = \\ &= n! \cdot \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{2n-2\nu}{n} \binom{n}{\nu} x^{n-2\nu}, \end{aligned}$$

so bemerkt man, dass

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \text{ ist.}$$

Darnach ist nun

$$\begin{aligned} P_n(\rho)(x) &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+\rho}}{dx^{n+\rho}} (x+1)^n (x-1)^n = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{\lambda=0}^{n+\rho} \binom{n+\rho}{\lambda} \cdot \frac{d^{n+\rho-\lambda}}{dx^{n+\rho-\lambda}} (x+1)^n \cdot \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} (x-1)^n. \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+\rho-\lambda}}{dx^{n+\rho-\lambda}} (x+1)^n &= (n+\rho-\lambda)! \binom{n}{n+\rho-\lambda} \cdot (x+1)^{-\rho+\lambda} \\ \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} (x-1)^n &= \lambda! \binom{n}{\lambda} \cdot (x-1)^{n-\lambda} \end{aligned}$$

so erhält man schließlich

$$P_n^{(\rho)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\lambda=0}^{n+\rho} \binom{n+\rho}{\lambda} \cdot \binom{n}{n+\rho-\lambda} \cdot \binom{n}{\lambda} (n+\rho-\lambda)! \cdot \lambda! \cdot (x+1)^{-\rho+\lambda} \cdot (x-1)^{n-\lambda}$$

Bei allen Gliedern dieser Summe, wo negative Potenzexponenten auftreten, hat stets auch einer der als Factoren vorkommenden Binomialcoefficienten den Wert Null, weshalb alle diese Summanden wegfallen; für $x=1$ werden außerdem noch alle Glieder, für welche $n-\lambda > 0$ ist, auch gleich Null, so dass nur derjenige Summand, bei dem $\lambda = n$ ist, überbleibt; somit ist

$$\begin{aligned} P_n^{(\rho)}(1) &= \frac{1}{2^n n!} \binom{n+\rho}{n} \binom{n}{\rho} \rho! n! 2^{n-\rho} = \\ &= \frac{1}{2^\rho} \cdot \binom{n+\rho}{n} \binom{n}{\rho} \cdot \rho! = \\ &= \frac{1}{2^\rho} \cdot \frac{(n+\rho)!}{n! \rho!} \cdot \frac{n!}{\rho! (n-\rho)!} \cdot \rho! = \\ &= \frac{1}{2^\rho} \cdot \frac{(n+\rho)!}{(2\rho)! (n-\rho)!} \cdot \frac{(2\rho)!}{\rho! \rho!} \cdot \rho! \\ P_n^{(\rho)}(1) &= \frac{1}{2^\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \binom{2\rho}{\rho} \cdot \rho! \end{aligned}$$

Somit ist

$$P_n(x) = \sum_{\rho=0}^n (x-1)^\rho \cdot \frac{1}{2^\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \binom{2\rho}{\rho} \cdot \rho!$$

Führt man jetzt eine neue Veränderliche γ ein durch die Gleichung

$$x = \cos \gamma,$$

so ist $x-1 = -2 \cdot (\sin \frac{\gamma}{2})^2$, und es folgt

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{\rho=0}^n (-1)^\rho (\sin \frac{\gamma}{2})^{2\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \binom{2\rho}{\rho} \cdot \rho!$$

Die ganze weitere Umformung von $P_n(\cos \gamma)$ beruht nun auf der Ersetzung des hier auftretenden Binomialcoefficienten $\binom{2\rho}{\rho}$ durch ein bestimmtes Integral; dieser Schritt führt geraden Wegs zur Mehler'schen Formel.

Es ist

$$\begin{aligned}
 (\sin x)^{2\rho} &= \frac{(e^{xi} - e^{-xi})^{2\rho}}{(2i)^{2\rho}} = \\
 &= \frac{1}{2^{2\rho}(-1)^\rho} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} \binom{2\rho}{\lambda} (-1)^\lambda \cdot e^{xi(2\rho-\lambda)} \cdot e^{-xi\lambda} = \\
 &= \frac{(-1)^\rho}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} \binom{2\rho}{\lambda} (-1)^\lambda \cdot \left\{ \cos(2\rho - 2\lambda)x + i \cdot \sin(2\rho - 2\lambda)x \right\}
 \end{aligned}$$

Schreibt man die Posten dieser Summe in der umgekehrten Reihenfolge an, so lautet diese Formel

$$\begin{aligned}
 (\sin x)^{2\rho} &= \frac{(-1)^\rho}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} \binom{2\rho}{2\rho-\lambda} (-1)^{2\rho-\lambda} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \cos(-2\rho + 2\lambda)x + i \cdot \sin(-2\rho + 2\lambda)x \right\}
 \end{aligned}$$

Addiert man beide Ausdrücke, so heben sich je zwei einen Sinus enthaltende Glieder, und es bleibt nur

$$(\sin x)^{2\rho} = \frac{(-1)^\rho}{2^{2\rho}} \sum_{\lambda=0}^{2\rho} (-1)^\lambda \binom{2\rho}{\lambda} \cdot \cos(2\rho - 2\lambda)x.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} dx &= \frac{(-1)^\rho}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} (-1)^\lambda \binom{2\rho}{\lambda} \cdot \\
 &\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\rho - 2\lambda)x \cdot dx = \\
 &= \frac{(-1)^\rho}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\rho-1} (-1)^\lambda \binom{2\rho}{\lambda} \cdot \frac{\sin(2\rho - 2\lambda)x}{2\rho - 2\lambda} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
 &+ \frac{(-1)^\rho}{2^{2\rho}} \cdot (-1)^\rho \cdot \binom{2\rho}{\rho} \cdot \frac{\pi}{2} + \\
 &+ \frac{(-1)^\rho}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=\rho+1}^{2\rho} (-1)^\lambda \binom{2\rho}{\lambda} \cdot \frac{\sin(2\rho - 2\lambda)x}{2\rho - 2\lambda} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

Es ist aber hier alles, mit Ausnahme des Mittelgliedes, gleich Null; dadurch erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} \cdot dx = \frac{1}{2^{2\rho}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \binom{2\rho}{\rho}$$

$$\binom{2\rho}{\rho} = 2^{2\rho} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} \cdot dx.$$

Diesen Ausdruck führe man nun in die zuletzt für $P_n(\cos \gamma)$ erhaltene Formel ein; diese geht dadurch über in

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\rho=0}^n (-1)^\rho \cdot (\sin \frac{\gamma}{2})^{2\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \cdot 2^{2\rho} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\rho=0}^n (-1)^\rho \cdot (\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin x)^{2\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \cdot 2^{2\rho} dx. \end{aligned}$$

Zur Weiterführung der Integration ist es zweckdienlich, eine neue Integrationsveränderliche ψ einzuführen, so dass

$$\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin x = \sin \frac{\psi}{2} \text{ ist.}$$

$$2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos x \cdot dx = \cos \frac{\psi}{2} \cdot d\psi$$

$$dx = \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos x} d\psi$$

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} (1 - \cos^2 x) = \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos x = \sqrt{(\sin \frac{\gamma}{2})^2 - (\sin \frac{\psi}{2})^2}$$

wobei die Quadratwurzel positiv ist, da sowohl $\sin \frac{\gamma}{2}$ als auch $\cos x$ positiv sind.

Auf diese Art geht die Kugelfunction über in

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\cos \frac{\psi}{2} \cdot d\psi}{\sqrt{(\sin \frac{\gamma}{2})^2 - (\sin \frac{\psi}{2})^2}} \cdot \sum_{\rho=0}^n (\sin \frac{\psi}{2})^{2\rho} \cdot (-1)^\rho \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \cdot 2^{2\rho}$$

Es erübrigt nunmehr nur noch die Berechnung der Summe

$$S_n = \sum_{\rho=0}^n (\sin x)^{2\rho} \cdot (-1)^\rho \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \cdot 2^{2\rho}$$

Einen Anhaltspunkt hierfür gewährt die Kenntnis des Wertes derselben für besondere Werte des n ; so findet man

$$S_0 = 1 = \frac{\cos (2 \cdot 0 + 1) \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 4 \sin^2 \alpha = (1 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha = \\ &= \cos 2 \alpha - \frac{\sin 2 \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\cos 2 \alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2 \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{\cos 3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos (2 \cdot 1 + 1) \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 - 12 \sin^2 \alpha + 16 \sin^4 \alpha = \\ &= (1 - 4 \sin^2 \alpha)(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha (3 \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha) = \\ &= \frac{\cos 3 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos 2 \alpha - \frac{\sin 2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin 3 \alpha = \\ &= \frac{\cos 5 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos (2 \cdot 2 + 1) \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Es ist somit für $n = 0, 1, 2$

$$\cos (2n + 1) \alpha = \cos \alpha \cdot \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho} (-1)^\rho \binom{n+\rho}{2\rho} \cdot 2^{2\rho}$$

Und nun soll gezeigt werden, dass, wenn diese Gleichung für ein bestimmtes n erfüllt ist, dieselbe auch für das um eine Einheit grössere n besteht. Es ist

$$\begin{aligned} \cos (2(n+1) + 1) \alpha &= \cos (2n + 1) \alpha \cdot \cos 2 \alpha - \\ &- \sin (2n + 1) \alpha \cdot \sin 2 \alpha = \\ &= \cos (2n + 1) \alpha \cdot \cos 2 \alpha + \frac{d \cos (2n + 1) \alpha}{d \alpha} \cdot \frac{\sin 2 \alpha}{2n + 1} \end{aligned}$$

Durch Anwendung dieser Beziehung ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \cos (2(n+1) + 1) \alpha &= \cos \alpha \cdot \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho} (-1)^\rho \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \cdot \\ &\cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \\ &+ \frac{\sin 2 \alpha}{2n + 1} \left\{ \cos^2 \alpha \sum_{\rho=0}^n 2\rho (\sin \alpha)^{2\rho-1} (-1)^\rho \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} - \right. \\ &\left. - \sin \alpha \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho} (-1)^\rho \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos (2(n+1)+1) \alpha}{\cos \alpha} &= \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} - \\
 &- 2 \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} + \\
 &+ \frac{4}{2n+1} \sum_{\rho=0}^n \rho (\sin \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} - \\
 &- \frac{4}{2n+1} \sum_{\rho=0}^n \rho (\sin \alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} - \\
 &- \frac{2}{2n+1} \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \\
 \frac{\cos (2(n+1)+1) \alpha}{\cos \alpha} &= \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \left(1 + \frac{4\rho}{2n+1}\right) - \\
 &- 2 \sum_{\rho=0}^n (\sin \alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \left(1 + \frac{2\rho+1}{2n+1}\right).
 \end{aligned}$$

Die erste der beiden hier stehenden Summen kann man von $\rho = 0$ bis $\rho = n+1$ nehmen, weil der zu $\rho = n+1$ gehörige Summand infolge des Factors $\binom{2n+1}{2n+2}$ den Wert Null hat. Betrachtet man in der zweiten Summe $\rho+1$ als die Summationsveränderliche, so erstreckt sich diese Summe von $\rho+1=1$ bis $\rho+1=n+1$; man kann aber auch diese Summe zwischen den Grenzen 0 und $n+1$ nehmen, da auch hier der dadurch hinzugefügte Posten den Wert Null hat. Setzt man schließlich statt $\rho+1$ wieder einfach ρ , so erhält man

$$\frac{\cos (2(n+1)+1) \alpha}{\cos \alpha} = \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \left(1 + \frac{4\rho}{2n+1}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\varphi=0}^{n+1} (\sin x)^{2\varphi} (-1)^{\varphi} \binom{n-1+\varphi}{2\varphi-2} 2^{2\varphi-1} \left(1 + \frac{2\varphi-1}{2n+1}\right) = \\
& = \sum_{\varphi=0}^{n+1} (\sin x)^{2\varphi} (-1)^{\varphi} 2^{2\varphi} \left\{ \binom{n+\varphi}{2\varphi} \left(1 + \frac{4\varphi}{2n+1}\right) + \binom{n-1+\varphi}{2\varphi-2} \frac{n+\varphi}{2n+1} \right\} = \\
& = \sum_{\varphi=0}^{n+1} (\sin x)^{2\varphi} (-1)^{\varphi} 2^{2\varphi} \left\{ \binom{n+\varphi}{2\varphi-1} \frac{n-\varphi+1}{2\varphi} \left(1 + \frac{4\varphi}{2n+1}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \binom{n+\varphi}{2\varphi-2} \frac{n-\varphi+2}{2n+1} \right\} = \\
& = \sum_{\varphi=0}^{n+1} (\sin x)^{2\varphi} (-1)^{\varphi} 2^{2\varphi} \left\{ \binom{n+\varphi}{2\varphi-1} \frac{n-\varphi+1}{2\varphi} \left(1 + \frac{4\varphi}{2n+1}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \binom{n+\varphi}{2\varphi-1} \frac{2\varphi-1}{2n+1} \right\} = \\
& = \sum_{\varphi=0}^{n+1} (\sin x)^{2\varphi} (-1)^{\varphi} 2^{2\varphi} \binom{n+\varphi}{2\varphi-1} \cdot \left\{ \frac{n-\varphi+1}{2\varphi} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2n-2\varphi+2}{2n+1} + \frac{2\varphi-1}{2n+1} \right\} = \\
& = \sum_{\varphi=0}^{n+1} (\sin x)^{2\varphi} (-1)^{\varphi} 2^{2\varphi} \binom{n+\varphi}{2\varphi-1} \frac{n+\varphi+1}{2\varphi} = \\
& = \sum_{\varphi=0}^{n+1} (\sin x)^{2\varphi} (-1)^{\varphi} 2^{2\varphi} \binom{n+1+\varphi}{2\varphi}.
\end{aligned}$$

Dies ist aber nichts anderes als S_{n+1} . Besteht also einmal für irgend ein n die Gleichung

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = S_n,$$

so gilt diese auch noch für alle folgenden Werte von n . Nachdem nun oben für $n=0$ das Erfülltsein dieser Gleichung ausdrücklich festgestellt wurde, so ist nunmehr deren allgemeine Giltigkeit nachgewiesen.

Demnach ist

$$\sum_{\varphi=0}^n (\sin \frac{\psi}{2})^2 \varphi (-1)^\varphi \binom{n+\varphi}{2\varphi} 2^{2\varphi} = \frac{\cos (n+\frac{1}{2}) \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}}$$

und

$$P_n (\cos \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos (n+\frac{1}{2}) \frac{\psi}{2} \cdot d\psi}{(\sin \frac{\gamma}{2})^2 - (\sin \frac{\psi}{2})^2},$$

womit die Richtigkeit der *Mehler'schen* Formel auf directem Wege dargethan ist.

Zusatz. Die zweite *Mehler'sche* Formel

$$P_n (\cos \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_\gamma^\pi \frac{\sin (n+\frac{1}{2}) \frac{\psi}{2} \cdot d\psi}{(\cos \frac{\gamma}{2})^2 - (\cos \frac{\psi}{2})^2}$$

erhält man aus der ersten dadurch, indem man $\pi - \gamma$ statt γ , $\pi - \psi$ statt ψ setzt und berücksichtigt, dass

$$P_n (\cos (\pi - \gamma)) = (-1)^n P_n (\cos \gamma)$$

ist. Durch Addition der beiden *Mehler'schen* Formeln für P_n mit Berücksichtigung der Gleichung, welche durch Subtraction der beiden *Mehler'schen* Formeln für P_{n-1} erhalten wird, erhält man die beiden Formeln *Dirichlets*.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark](#)

Jahr/Year: 1888

Band/Volume: [24](#)

Autor(en)/Author(s): Walter Alois

Artikel/Article: [Nachweis der Gleichheit des Integrals. 25-34](#)